

SYSTÈMES LENTS-RAPIDES EN MÉCANIQUE VIBRATOIRE

APPLICATION AU CONTRÔLE PASSIF NON LINÉAIRE DE VIBRATIONS AUTO-ENTRETIENUES ET À L'ÉTUDE
DES PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES DANS LES INSTRUMENTS DE MUSIQUE À ANCHE

Baptiste BERGEOT

INSA Centre Val de Loire, LaMé (EA 7494), Blois, France



Séminaire de l'Institut Denis Poisson - Orléans, 23 mars 2023

LIEN ENTRE CES DEUX THÉMATIQUES

Modèle d'un système mécanique (auto-)oscillant couplé à un absorbeur dynamique non linéaire de **faible masse**

et

Modèle d'instrument à anche dont les paramètres de contrôle (ou de bifurcation) **variant lentement dans le temps**

⇒ **SYSTÈMES DYNAMIQUES LENTS-RAPIDES**

Première partie

Contrôle passif non linéaire de vibrations auto-entretenues

Deuxième partie

Phénomènes transitoires dans les instruments de musique à anche

Première partie

Contrôle passif non linéaire de vibrations auto-entretenues

Collaborateurs : Sergio Bellizzi¹ et Sébastien Berger²

¹CNRS, LMA UMR7031, Marseille, France

²INSA Centre Val de Loire, LaMé (EA 7494), Blois, France

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

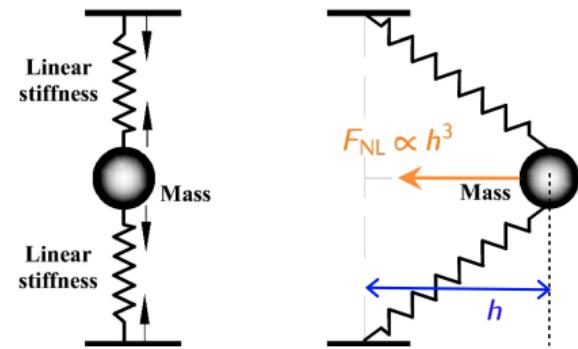
ABSORBEURS DYNAMIQUES NON LINÉAIRES DE TYPE « NES »

- En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : **NES**

ABSORBEURS DYNAMIQUES NON LINÉAIRES DE TYPE « NES »

- ▶ En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : **NES**
 - ▶ Oscillateurs à raideur fortement non linéaire, **généralement purement cubique** et amortissement linéaire :

$$\ddot{h} + \mu \dot{h} + \alpha h^3 = 0$$

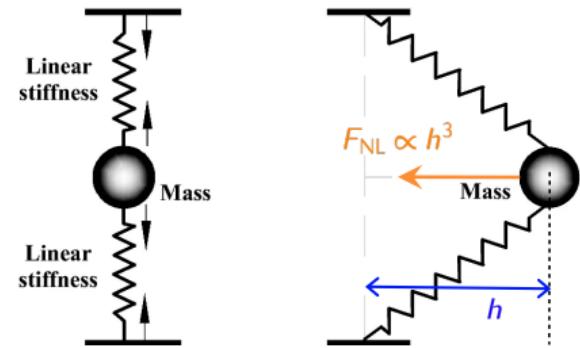


ABSORBEURS DYNAMIQUES NON LINÉAIRES DE TYPE « NES »

- En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : **NES**
- Oscillateurs à raideur fortement non linéaire, généralement **purement cubique** et amortissement linéaire :

$$\ddot{h} + \mu\dot{h} + \alpha h^3 = 0$$

- Couplés à un système primaire (**SP**), ils ont la capacité :
 - d'**adapter leur fréquence** à celle du SP (relation amplitude/fréquence)
 - d'**absorber l'énergie du SP** de manière irréversible (sous conditions)

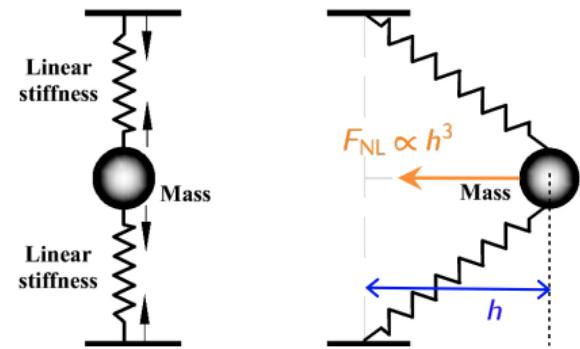


ABSORBEURS DYNAMIQUES NON LINÉAIRES DE TYPE « NES »

- En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : **NES**
- Oscillateurs à raideur fortement non linéaire, généralement **purement cubique** et amortissement linéaire :

$$\ddot{h} + \mu\dot{h} + \alpha h^3 = 0$$

- Couplés à un système primaire (**SP**), ils ont la capacité :
 - d'adapter leur fréquence à celle du SP (relation amplitude/fréquence)
 - d'absorber l'énergie du SP de manière irréversible (sous conditions)



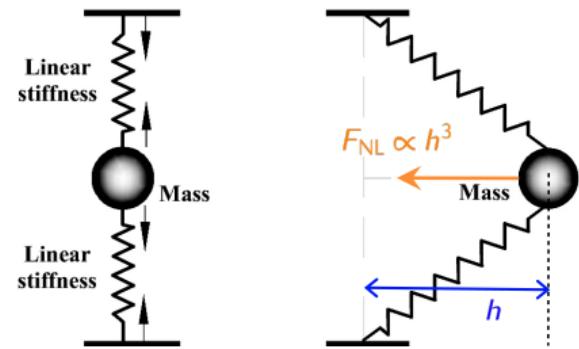
Pompage Énergétique
(*Targeted Energy Transfer - TET*)

ABSORBEURS DYNAMIQUES NON LINÉAIRES DE TYPE « NES »

- En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : **NES**
- Oscillateurs à raideur fortement non linéaire, généralement **purement cubique** et amortissement linéaire :

$$\ddot{h} + \mu\dot{h} + \alpha h^3 = 0$$

- Couplés à un système primaire (**SP**), ils ont la capacité :
 - d'**adapter leur fréquence** à celle du SP (relation amplitude/fréquence)
 - d'**absorber l'énergie** du SP de manière irréversible (sous conditions)



Pompage Énergétique (Targeted Energy Transfer - TET)

- Moyen de **contrôle passif de vibrations** de systèmes mécaniques et acoustiques :
 - Vibrations libres
 - Vibrations forcées
 - **Vibrations auto-entretenues**

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

- 2.1. RAPPELS, DÉFINITIONS ET ARTICLES DE RÉFÉRENCES
- 2.2. DESCRIPTION DE L'ANALYSE À L'ORDRE ZÉRO

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

- 3.1. INTRODUCTION
- 3.2. RÉSULTATS : LOI D'ÉCHELLE ET NOUVELLE PRÉDICTION DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT
- 3.3. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

- 4.1. INTRODUCTION
- 4.2. RÉSULTATS
- 4.3. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

- 2.1. RAPPELS, DÉFINITIONS ET ARTICLES DE RÉFÉRENCES
- 2.2. DESCRIPTION DE L'ANALYSE À L'ORDRE ZÉRO

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

- 2.1. RAPPELS, DÉFINITIONS ET ARTICLES DE RÉFÉRENCES
- 2.2. DESCRIPTION DE L'ANALYSE À L'ORDRE ZÉRO

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

OSCILLATIONS AUTO-ENTRETIENUES : OSCILLATEUR DE VAN DER POL (VDP)

OSCILLATIONS AUTO-ENTRETIENUES

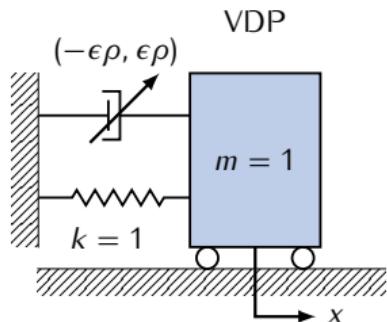
Génération et maintien d'un mouvement périodique
(cycle limite) par une source d'énergie dépourvue
de toute périodicité

OSCILLATIONS AUTO-ENTRETIENUES : OSCILLATEUR DE VAN DER POL (VDP)

OSCILLATIONS AUTO-ENTRETIENUES

Génération et maintien d'un mouvement périodique (cycle limite) par une source d'énergie dépourvue de toute périodicité

OSCILLATEUR DE VAN DER POL (VDP)



$$\ddot{x} + \epsilon \rho \dot{x} (x^2 - 1) + x = 0$$

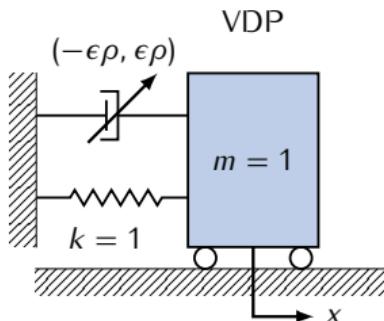
ρ : paramètre de bifurcation

OSCILLATIONS AUTO-ENTRETIENUES : OSCILLATEUR DE VAN DER POL (VDP)

OSCILLATIONS AUTO-ENTRETIENUES

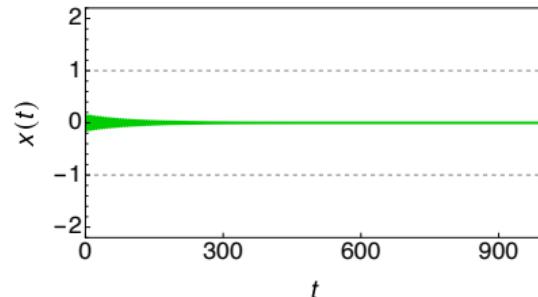
Génération et maintien d'un mouvement périodique (**cycle limite**) par une source d'énergie dépourvue de toute périodicité

OSCILLATEUR DE VAN DER POL (VDP)



$$\ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}(x^2 - 1) + x = 0$$

► $\rho < 0$: Équilibre stable



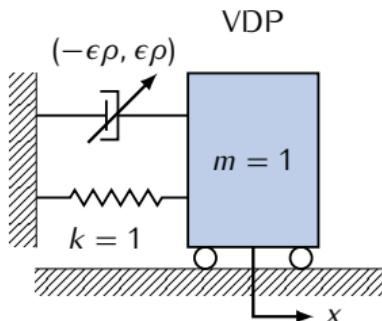
ρ : paramètre de bifurcation

OSCILLATIONS AUTO-ENTRETIENUES : OSCILLATEUR DE VAN DER POL (VDP)

OSCILLATIONS AUTO-ENTRETIENUES

Génération et maintien d'un mouvement périodique (**cycle limite**) par une source d'énergie dépourvue de toute périodicité

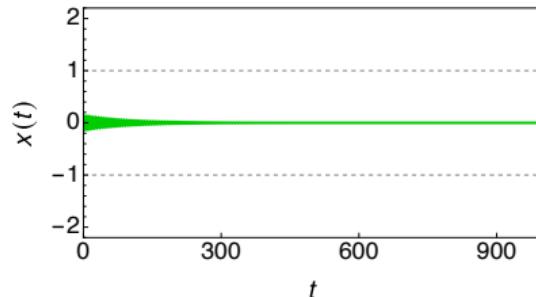
OSCILLATEUR DE VAN DER POL (VDP)



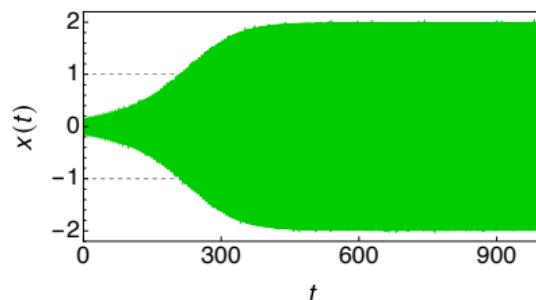
$$\ddot{x} + \epsilon \rho \dot{x} (x^2 - 1) + x = 0$$

ρ : paramètre de bifurcation

► $\rho < 0$: Équilibre stable



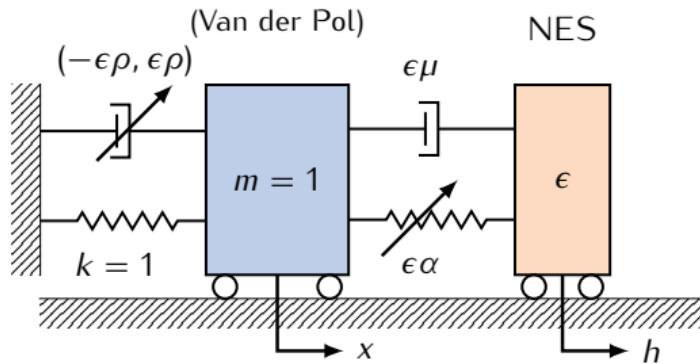
► $\rho > 0$: Équilibre instable + Cycle Limite



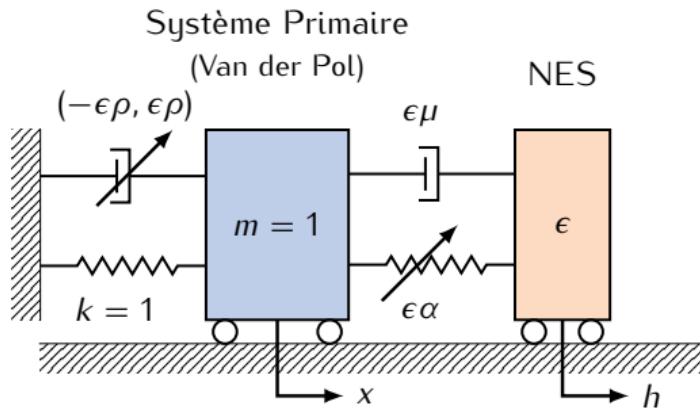
OSCILLATEUR DE VAN DER POL COUPLÉ À UN NES

Système Primaire

(Van der Pol)



OSCILLATEUR DE VAN DER POL COUPLÉ À UN NES



ÉQUATIONS DU MOUVEMENT ADIMENSIONNÉES

NES léger $\Rightarrow 0 < \epsilon \ll 1$

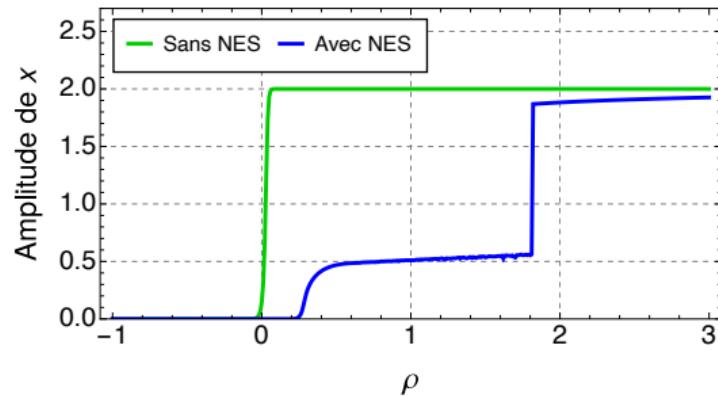
$$\ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}(x^2 - 1) + x + \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon\alpha(x - h)^3 = 0$$

$$\epsilon\ddot{h} + \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon\alpha(x - h)^3 = 0$$

LIMITE DE FONCTIONNEMENT DU NES

DIAGRAMME DE BIFURCATION

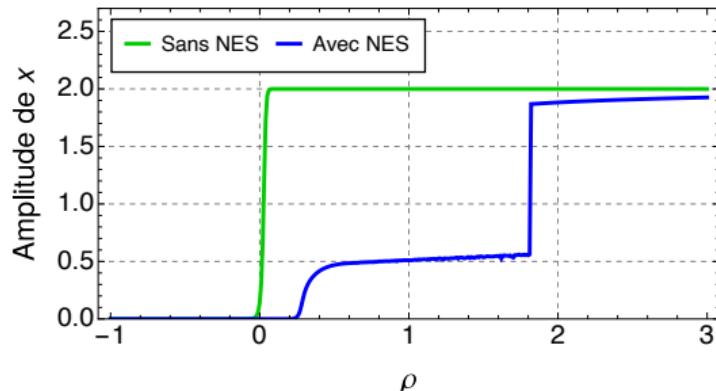
Amplitude du régime établi en fonction
du paramètre de bifurcation ρ



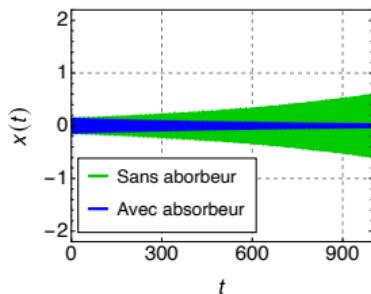
LIMITE DE FONCTIONNEMENT DU NES

DIAGRAMME DE BIFURCATION

Amplitude du régime établi en fonction du paramètre de bifurcation ρ

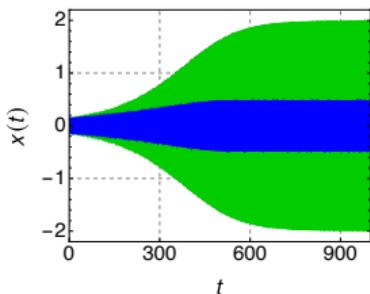


$\rho = 0.15$



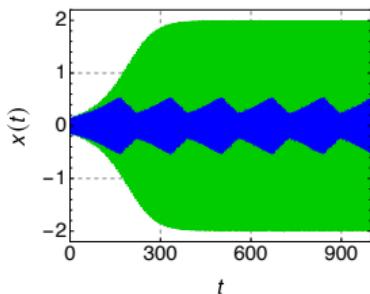
Stabilisation
(effet linéaire)

$\rho = 0.6$



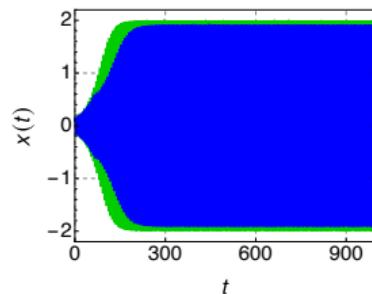
Régimes périodiques
(effet non linéaire)

$\rho = 1.2$



Régimes quasi-périodiques
(SMR) (effet non linéaire)

$\rho = 2.7$



Pas d'atténuation

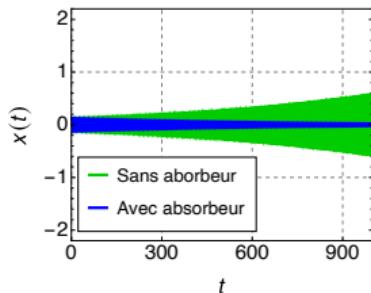
LIMITE DE FONCTIONNEMENT DU NES

DIAGRAMME DE BIFURCATION

Amplitude du régime établi en fonction du **paramètre de bifurcation ρ**

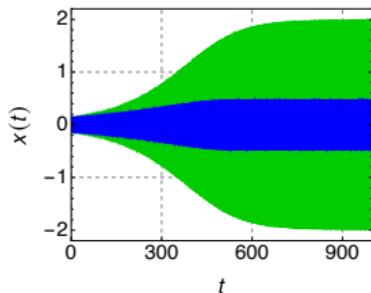
ρ^* : **limite de fonctionnement**

$$\rho = 0.15$$



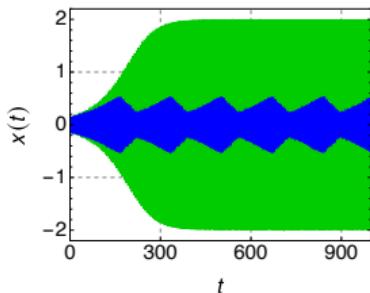
Stabilisation
(effet linéaire)

$$\rho = 0.6$$



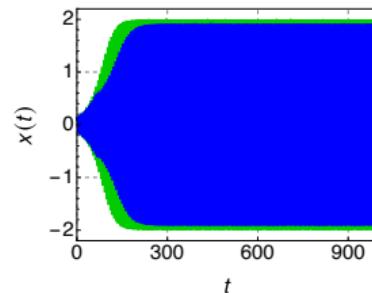
Régimes périodiques
(effet non linéaire)

$$\rho = 1.2$$



Régimes quasi-périodiques
(SMR) (effet non linéaire)

$$\rho = 2.7$$

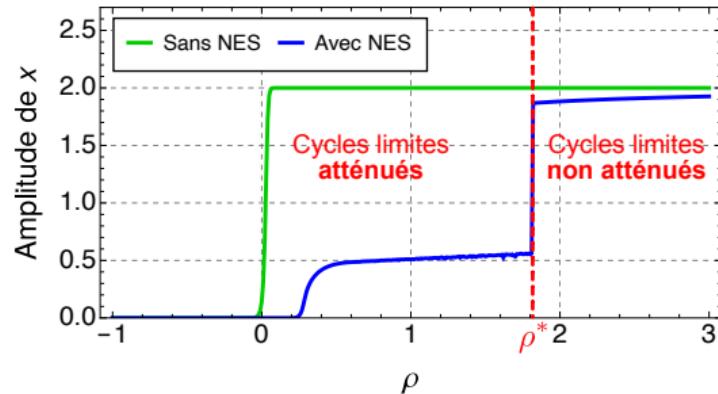


Pas d'atténuation

LIMITE DE FONCTIONNEMENT DU NES

DIAGRAMME DE BIFURCATION

Amplitude du régime établi en fonction du **paramètre de bifurcation ρ**



ANALYSE À L'ORDRE 0

Prédiction théorique de la limite de fonctionnement dans le cas limite où $\epsilon = 0$



O. V. GENDELMAN et T. BAR : Bifurcations of self-excitation regimes in a Van der Pol oscillator with a nonlinear energy sink. *Physica D*, 239(3-4):220–229, février 2010.

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

- 2.1. RAPPELS, DÉFINITIONS ET ARTICLES DE RÉFÉRENCES
- 2.2. DESCRIPTION DE L'ANALYSE À L'ORDRE ZÉRO

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

- ▶ Changement de variable : x (VDP) et h (NES) \Rightarrow $u_1 = x + \epsilon h$ et $u_2 = x - h$

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

► Changement de variable : x (VDP) et h (NES) \Rightarrow $u_1 = x + \epsilon h$ et $u_2 = x - h$

\Rightarrow Hypothèse de résonance 1 : 1

↪ Obtention de la dynamique moyennée (ou **flot lent**) par une méthode de **Moyennisation** :

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

► Changement de variable : x (VDP) et h (NES) \Rightarrow $u_1 = x + \epsilon h$ et $u_2 = x - h$

\Rightarrow Hypothèse de résonance 1 : 1

↪ Obtention de la dynamique moyennée (ou **flot lent**) par une méthode de **Moyennisation** :

$$\dot{r} = \epsilon f(r, s, \Delta)$$

$$\dot{s} = g_1(r, s, \Delta, \epsilon)$$

$$\dot{\Delta} = g_2(r, s, \Delta, \epsilon)$$

r et s : amplitudes de u_1 et u_2

Δ : différence de phase entre u_2 et u_1

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

► Changement de variable : x (VDP) et h (NES) $\Rightarrow u_1 = x + \epsilon h$ et $u_2 = x - h$

\Rightarrow Hypothèse de résonance 1 : 1

↪ Obtention de la dynamique moyennée (ou **flot lent**) par une méthode de **Moyennisation** :

$$\dot{r} = \epsilon f(r, s, \Delta)$$

$$\dot{s} = g_1(r, s, \Delta, \epsilon)$$

$$\dot{\Delta} = g_2(r, s, \Delta, \epsilon)$$

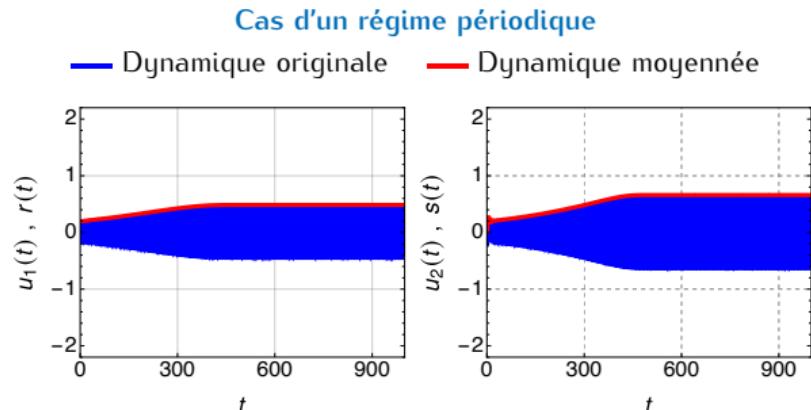
r et s : amplitudes de u_1 et u_2

Δ : différence de phase entre u_2 et u_1

Dynamique
originale :
 \equiv

Régime périodique

Dynamique
moyennée :
Point fixe (non nul)



ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

► Changement de variable : x (VDP) et h (NES) $\Rightarrow u_1 = x + \epsilon h$ et $u_2 = x - h$

\Rightarrow Hypothèse de résonance 1 : 1

↪ Obtention de la dynamique moyennée (ou **flot lent**) par une méthode de **Moyennisation** :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \epsilon f(r, s, \Delta) \\ \dot{s} &= g_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \dot{\Delta} &= g_2(r, s, \Delta, \epsilon)\end{aligned}$$

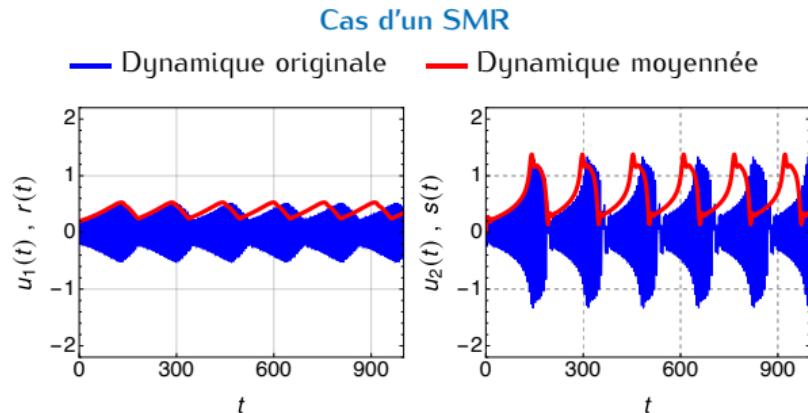
r et s : amplitudes de u_1 et u_2

Δ : différence de phase entre u_2 et u_1

Dynamique
originale :
SMR

\equiv

Dynamique
moyennée :
Régime périodique



ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

► Changement de variable : x (VDP) et h (NES) $\Rightarrow u_1 = x + \epsilon h$ et $u_2 = x - h$

\Rightarrow Hypothèse de résonance 1 : 1

↪ Obtention de la dynamique moyennée (ou **flot lent**) par une méthode de **Moyennisation** :

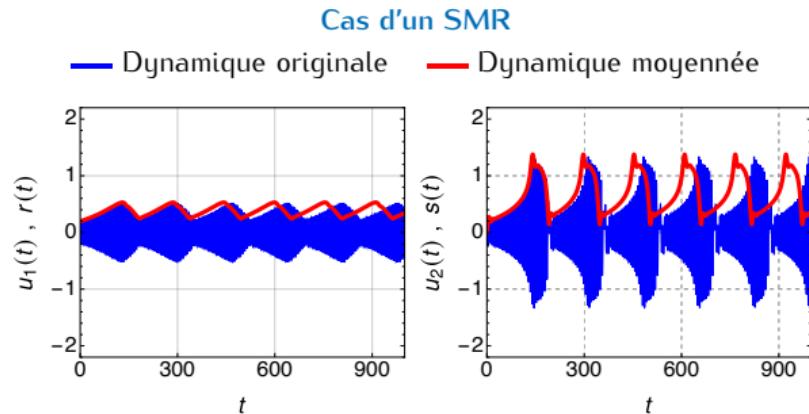
$$\begin{aligned}\dot{r} &= \epsilon f(r, s, \Delta) \\ \dot{s} &= g_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \dot{\Delta} &= g_2(r, s, \Delta, \epsilon)\end{aligned}$$

r et s : amplitudes de u_1 et u_2

Δ : différence de phase entre u_2 et u_1

Dynamique
originale :
SMR

\equiv Dynamique
moyennée :
Régime périodique



Dynamique moyennée \equiv **système lent-rapide** : 1 variable lente r et 2 variables rapides s et Δ

\Rightarrow Le profil temporel des variables possède des **phases rapides** et des **phases lentes**

ANALYSE À L'ORDRE 0 DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

MÉTHODE DES ÉCHELLES DE TEMPS MULTIPLES

DYNAMIQUE MOYENNÉE \equiv SYSTÈME LENT-RAPIDE

- Le profil temporel de ses variables possède des **phases rapides** et des **phases lentes**
- Analysé par une méthode aux **échelles de temps multiples**

ANALYSE À L'ORDRE 0 DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

MÉTHODE DES ÉCHELLES DE TEMPS MULTIPLES

DYNAMIQUE MOYENNÉE \equiv SYSTÈME LENT-RAPIDE

- ▶ Le profil temporel de ses variables possède des **phases rapides** et des **phases lentes**
- ▶ Analysé par une méthode aux **échelles de temps multiples**

Dynamique moyennée
à l'**échelle de temps rapide t**

$$\dot{r} = \epsilon f(r, s, \Delta)$$

$$\dot{s} = g_1(r, s, \Delta, \epsilon)$$

$$\dot{\Delta} = g_2(r, s, \Delta, \epsilon)$$

Dynamique moyennée
à l'**échelle de temps lente $\tau = \epsilon t$**

$$r' = f(r, s, \Delta)$$

$$\epsilon s' = g_1(r, s, \Delta, \epsilon)$$

$$\epsilon \Delta' = g_2(r, s, \Delta, \epsilon)$$

ANALYSE À L'ORDRE 0 DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

MÉTHODE DES ÉCHELLES DE TEMPS MULTIPLES

DYNAMIQUE MOYENNÉE \equiv SYSTÈME LENT-RAPIDE

- ▶ Le profil temporel de ses variables possède des **phases rapides** et des **phases lentes**
- ▶ Analysé par une méthode aux **échelles de temps multiples**

Dynamique moyennée
à l'**échelle de temps rapide t**

$$\dot{r} = \epsilon f(r, s, \Delta)$$

$$\dot{s} = g_1(r, s, \Delta, \epsilon)$$

$$\dot{\Delta} = g_2(r, s, \Delta, \epsilon)$$

quand $\epsilon = 0$ on a :

$$\dot{r} = 0$$

$$\dot{s} = g_1(r, s, \Delta, 0)$$

$$\dot{\Delta} = g_2(r, s, \Delta, 0)$$

↪ **sous-système rapide**
décrit les phases rapides

Dynamique moyennée
à l'**échelle de temps lente $\tau = \epsilon t$**

$$r' = f(r, s, \Delta)$$

$$\epsilon s' = g_1(r, s, \Delta, \epsilon)$$

$$\epsilon \Delta' = g_2(r, s, \Delta, \epsilon)$$

quand $\epsilon = 0$ on a

$$r' = f(r, s, \Delta)$$

$$0 = g_1(r, s, \Delta, 0)$$

$$0 = g_2(r, s, \Delta, 0)$$

↪ **sous-système lent**
décrit les phases lentes

ANALYSE À L'ORDRE 0 DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

VARIÉTÉ CRITIQUE

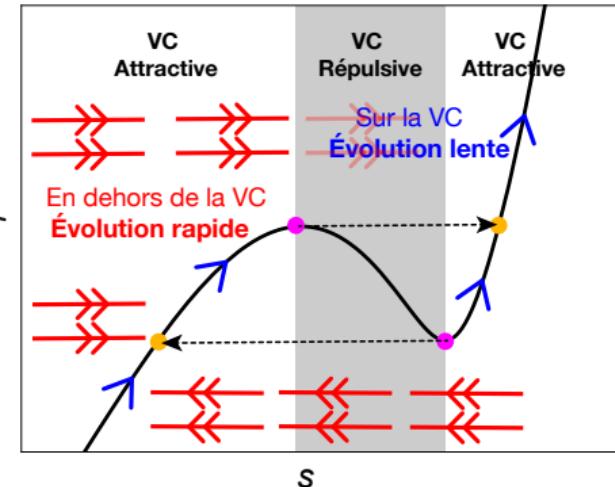
$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (r, s, \Delta) \mid g_1(r, s, \Delta, 0) = 0, g_2(r, s, \Delta, 0) = 0 \right\}$$

$$r = H(s) \quad \text{et} \quad \Delta = G(s)$$

La variété critique \mathcal{M}_0 est constituée d'une partie attractive et d'une partie répulsive :

- ▶ en dehors de la VC : évolution à l'échelle de temps rapide (**sous-système rapide**) vers une branche attractive de la variété critique
- ▶ sur de la VC : évolution à l'échelle de temps lente (**sous-système lent**)

$$r = H(s)$$



ANALYSE À L'ORDRE 0 DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

VARIÉTÉ CRITIQUE

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (r, s, \Delta) \mid g_1(r, s, \Delta, 0) = 0, g_2(r, s, \Delta, 0) = 0 \right\}$$

$$r = H(s) \quad \text{et} \quad \Delta = G(s)$$

La variété critique \mathcal{M}_0 est constituée d'une partie attractive et d'une partie répulsive :

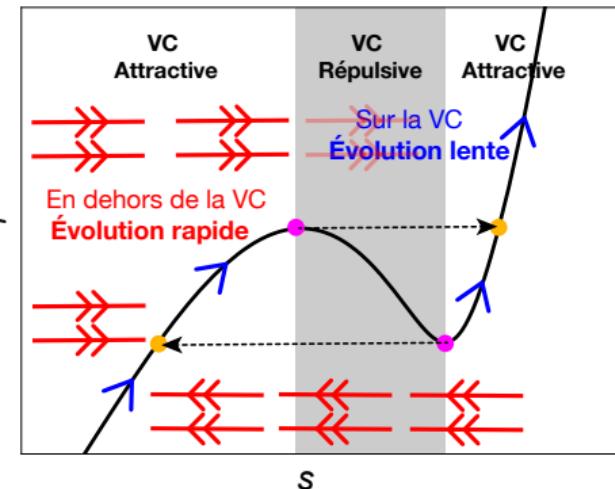
- ▶ en dehors de la VC : évolution à l'échelle de temps rapide (**sous-système rapide**) vers une branche attractive de la variété critique
- ▶ sur de la VC : évolution à l'échelle de temps lente (**sous-système lent**)

POINTS FIXES

- ▶ Points fixes (PF) \equiv solution de $\dot{r} = 0, \dot{s} = 0, \dot{\Delta} = 0$. Ils sont **stables** ou **instables**

\Rightarrow Analyse à l'ordre 0 : PF sur \mathcal{M}_0 : $r' = f(r, s, \Delta) \Rightarrow s' = F(s) \Rightarrow$ PF solutions de $F(s) = 0$

$$r = H(s)$$

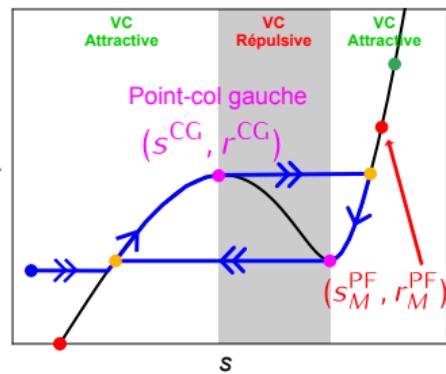


ANALYSE À L'ORDRE 0 DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

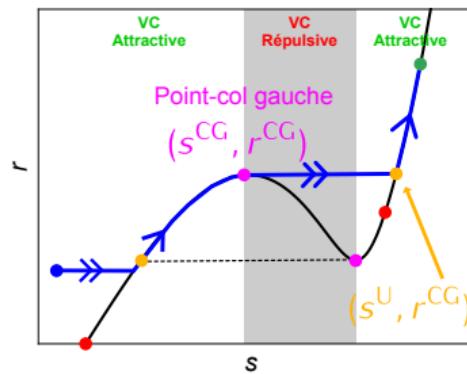
PRÉDICTION DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

- Condition initiale
- Points fixes **stables**
- Points fixes **instables**
- Points-col
- Points d'arrivée à l'ordre 0

SMR



Pas d'atténuation

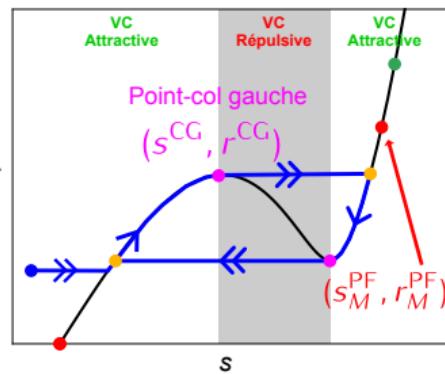


ANALYSE À L'ORDRE 0 DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

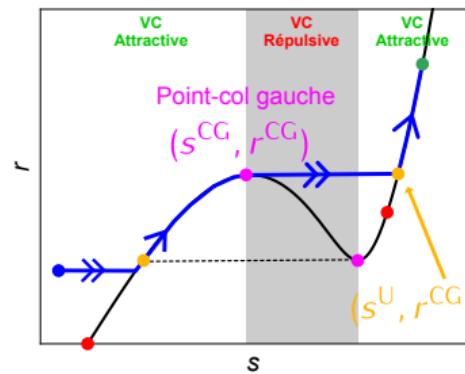
PRÉDICTION DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

- Condition initiale
- Points fixes **stables**
- Points fixes **instables**
- Points-col
- Points d'arrivée à l'ordre 0

SMR



Pas d'atténuation



ESTIMATION DU POINT D'ARRIVÉ

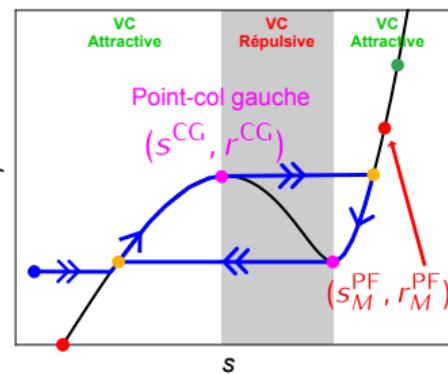
$$(s^a, r^a) = (s^U, r^{CG})$$

ANALYSE À L'ORDRE 0 DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

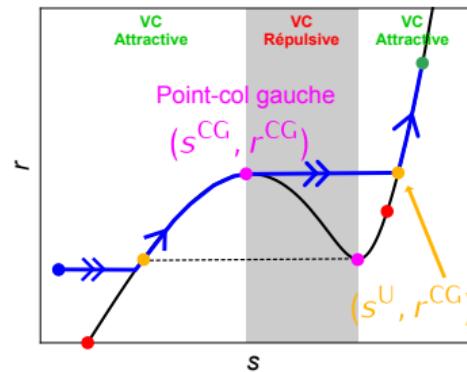
PRÉDICTION DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

- Condition initiale
- Points fixes **stables**
- Points fixes **instables**
- Points-col
- Points d'arrivée à l'ordre 0

SMR



Pas d'atténuation



ESTIMATION DU POINT D'ARRIVÉ

$$(s^a, r^a) = (s^U, r^{CG})$$

LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT THÉORIQUE (À L'ORDRE 0)

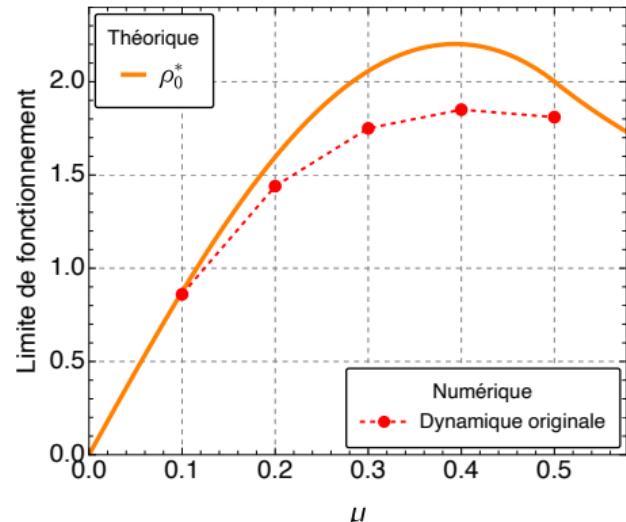
Valeur du paramètre de bifurcation ρ (notée ρ_0^*) solution de :

$$r_M^{PF} = r^a = r^{CG}$$

ANALYSE À L'ORDRE 0 DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

LIMITATIONS DE L'ANALYSE À L'ORDRE 0

Comparaison théorie/numérique pour $\epsilon = 0.015$

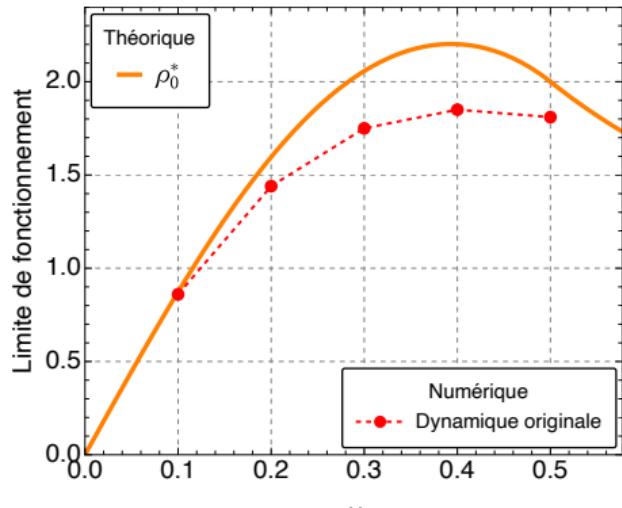


μ : coefficient d'amortissement du NES

ANALYSE À L'ORDRE 0 DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

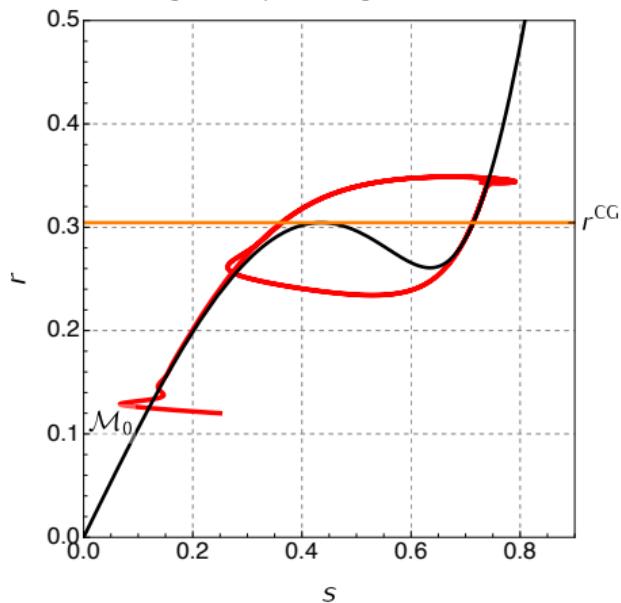
LIMITATIONS DE L'ANALYSE À L'ORDRE 0

Comparaison théorie/numérique pour $\epsilon = 0.015$



μ : coefficient d'amortissement du NES

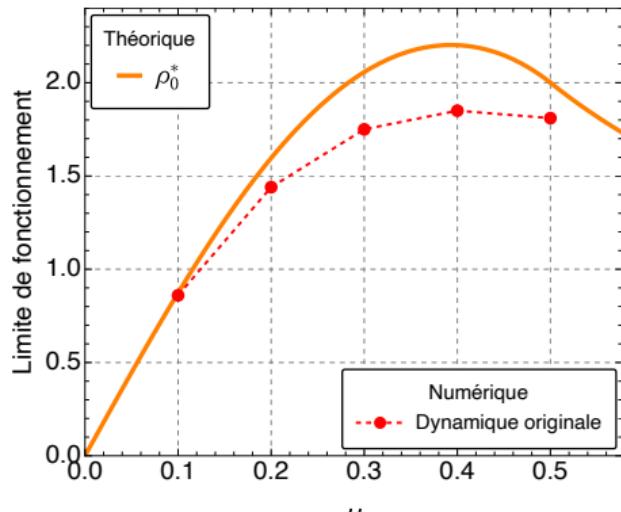
— simulation numérique de la dynamique moyennée



ANALYSE À L'ORDRE 0 DE LA DYNAMIQUE MOYENNÉE

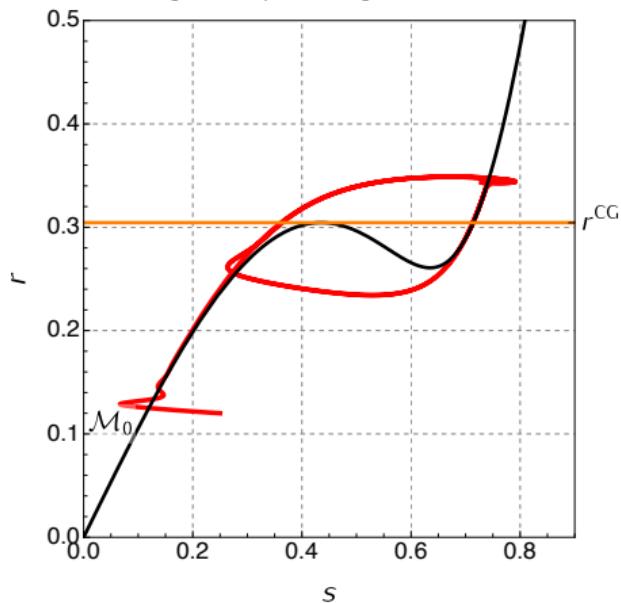
LIMITATIONS DE L'ANALYSE À L'ORDRE 0

Comparaison théorie/numérique pour $\epsilon = 0.015$



μ : coefficient d'amortissement du NES

— simulation numérique de la dynamique moyennée



Pour les « grandes » valeurs de ϵ :

- Sous-estimation du point d'arrivée ⇒ Sur-estimation de la limite de fonctionnement

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

3.1. INTRODUCTION

3.2. RÉSULTATS : LOI D'ÉCHELLE ET NOUVELLE PRÉDICTION DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

3.3. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

3.1. INTRODUCTION

3.2. RÉSULTATS : LOI D'ÉCHELLE ET NOUVELLE PRÉDICTION DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

3.3. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

RÉSULTATS PRÉSENTÉS

LIMITATIONS DE LA PRÉDICTION À L'ORDRE 0

- ▶ Analyse à l'ordre : **cas limite où $\epsilon = 0$**
- ⇒ Perd son pouvoir prédictif pour les « grandes » valeurs de ϵ
- ⇒ Ne décrit pas l'évolution de la limite de fonctionnement en fonction de ϵ

RÉSULTATS PRÉSENTÉS

LIMITATIONS DE LA PRÉDICTION À L'ORDRE 0

- ▶ Analyse à l'ordre : cas limite où $\epsilon = 0$
- ⇒ Perd son pouvoir prédictif pour les « grandes » valeurs de ϵ
- ⇒ Ne décrit pas l'évolution de la limite de fonctionnement en fonction de ϵ

RÉSULTATS PRÉSENTÉS (LOI D'ÉCHELLE)

- ▶ Loi d'échelle de la dynamique moyennée au voisinage du point-col gauche de la variété critique
- ⇒ Prédiction théorique de la limite de fonctionnement qui prend en compte la valeur de ϵ



B. BERGEOT : Scaling law for the slow flow of an unstable mechanical system coupled to a nonlinear energy sink.
Journal of Sound and Vibration, 503:116109, 2021.

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

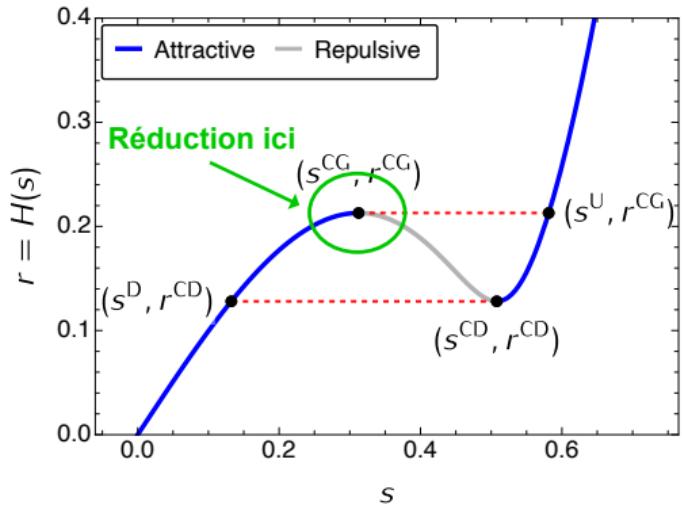
3.1. INTRODUCTION

3.2. RÉSULTATS : LOI D'ÉCHELLE ET NOUVELLE PRÉDICTION DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

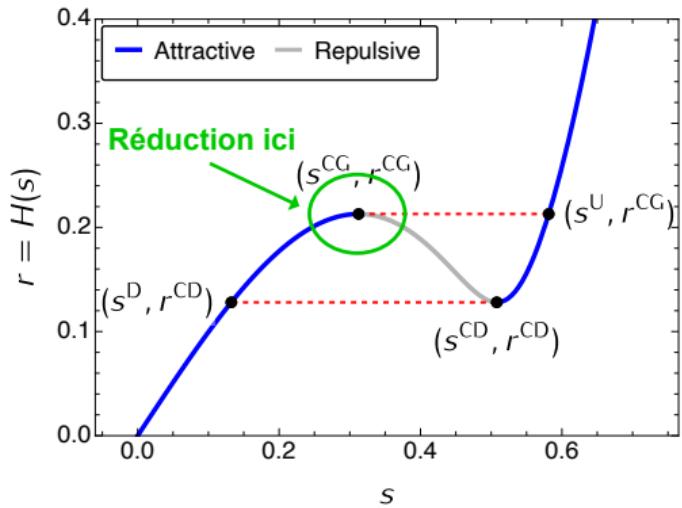
3.3. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

RÉDUCTION À LA VARIÉTÉ CENTRALE



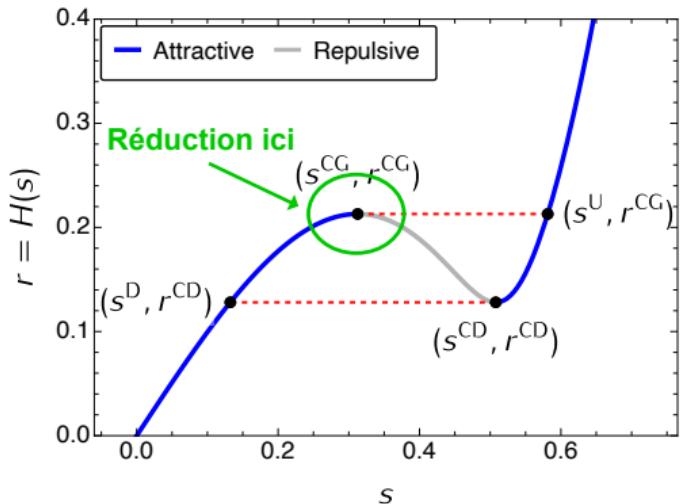
RÉDUCTION À LA VARIÉTÉ CENTRALE



Au niveau du **point-col gauche** ($r^{CG}, s^{CG}, \Delta^{CG}$) on réduit la dynamique moyennée

$$\begin{aligned} r' &= f(r, s, \Delta) \\ \epsilon s' &= \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \epsilon \Delta' &= \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}$$

RÉDUCTION À LA VARIÉTÉ CENTRALE



Au niveau du **point-col gauche** ($r^{CG}, s^{CG}, \Delta^{CG}$) on réduit la dynamique moyennée

$$\begin{aligned} r' &= f(r, s, \Delta) \\ \epsilon s' &= \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \epsilon \Delta' &= \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}$$

à la forme normale d'une **bifurcation col-nœud dynamique** :

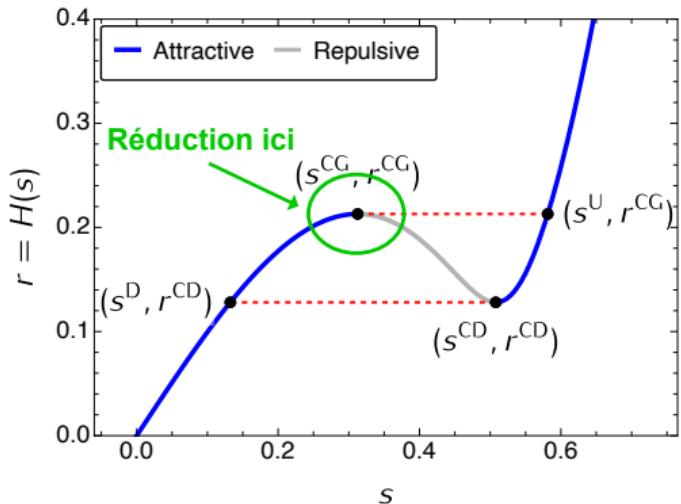
$$\begin{aligned} v' &= 1 \\ \hat{\epsilon} q'_a &= q_a^2 + v \end{aligned}$$

v : liée à la variable lente r

q_a : liée aux variables rapides s et Δ

$\hat{\epsilon}$: lié à ϵ

RÉDUCTION À LA VARIÉTÉ CENTRALE



Au niveau du **point-col gauche** ($r^{CG}, s^{CG}, \Delta^{CG}$) on réduit la dynamique moyennée

$$\begin{aligned} r' &= f(r, s, \Delta) \\ \epsilon s' &= \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \epsilon \Delta' &= \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}$$

à la forme normale d'une **bifurcation col-nœud dynamique** :

$$\begin{aligned} v' &= 1 \\ \hat{\epsilon} q'_a &= q_a^2 + v \end{aligned}$$

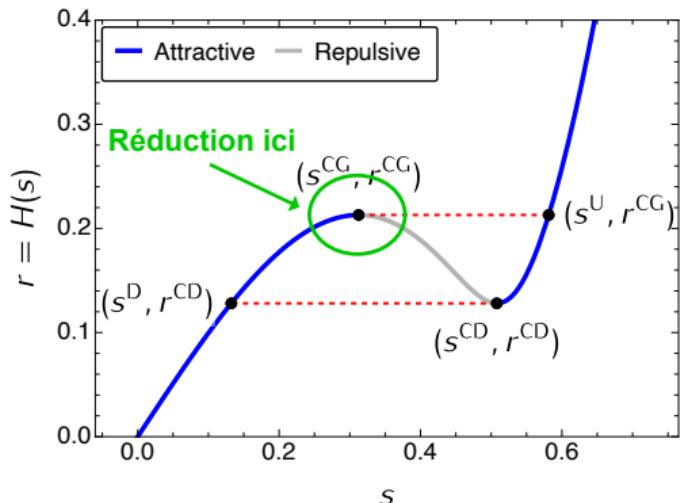
v : liée à la variable lente r

q_a : liée aux variables rapides s et Δ

$\hat{\epsilon}$: lié à ϵ

⇒ Possède une solution analytique

RÉDUCTION À LA VARIÉTÉ CENTRALE



Au niveau du **point-col gauche** ($r^{CG}, s^{CG}, \Delta^{CG}$) on réduit la dynamique moyennée

$$\begin{aligned} r' &= f(r, s, \Delta) \\ \epsilon s' &= \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \epsilon \Delta' &= \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}$$

à la forme normale d'une **bifurcation col-nœud dynamique** :

$$\begin{aligned} v' &= 1 \\ \hat{\epsilon} q'_a &= q_a^2 + v \end{aligned}$$

v : liée à la variable lente r

q_a : liée aux variables rapides s et Δ

$\hat{\epsilon}$: lié à ϵ

⇒ Possède une solution analytique

LOI D'ÉCHELLE (FORME NORMALE)

Expression analytique de q_a en fonction v et $\hat{\epsilon}$:

$$q_a^*(v) = \hat{\epsilon}^{1/3} \frac{\text{Ai}'(-\hat{\epsilon}^{-2/3}v)}{\text{Ai}(-\hat{\epsilon}^{-2/3}v)}$$

Ai : fonction de Airy

RÉDUCTION À LA VARIÉTÉ CENTRALE

LOI D'ÉCHELLE (DYNAMIQUE MOYENNÉE)

Expression analytique de s en fonction r :

$$s^*(r) = s^{CG} + \epsilon^{1/3} K_1 \frac{\text{Ai}'(-\epsilon^{-2/3} K_2 (r - r^{CG}))}{\text{Ai}(-\epsilon^{-2/3} K_2 (r - r^{CG}))}$$

- ▶ K_1 et K_2 : constantes dépendant des paramètres du modèle

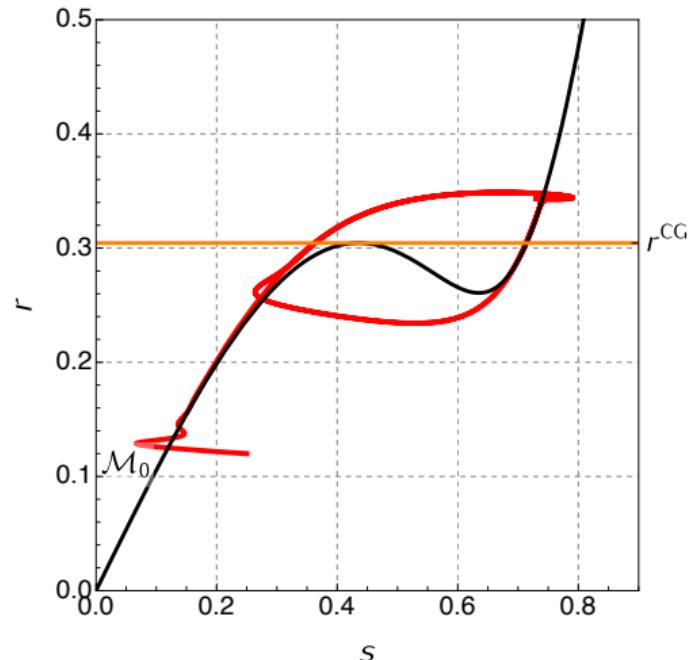
RÉDUCTION À LA VARIÉTÉ CENTRALE

LOI D'ÉCHELLE (DYNAMIQUE MOYENNÉE)

Expression analytique de s en fonction r :

$$s^*(r) = s^{CG} + \epsilon^{1/3} K_1 \frac{\text{Ai}'(-\epsilon^{-2/3} K_2 (r - r^{CG}))}{\text{Ai}(-\epsilon^{-2/3} K_2 (r - r^{CG}))}$$

- ▶ K_1 et K_2 : constantes dépendant des paramètres du modèle



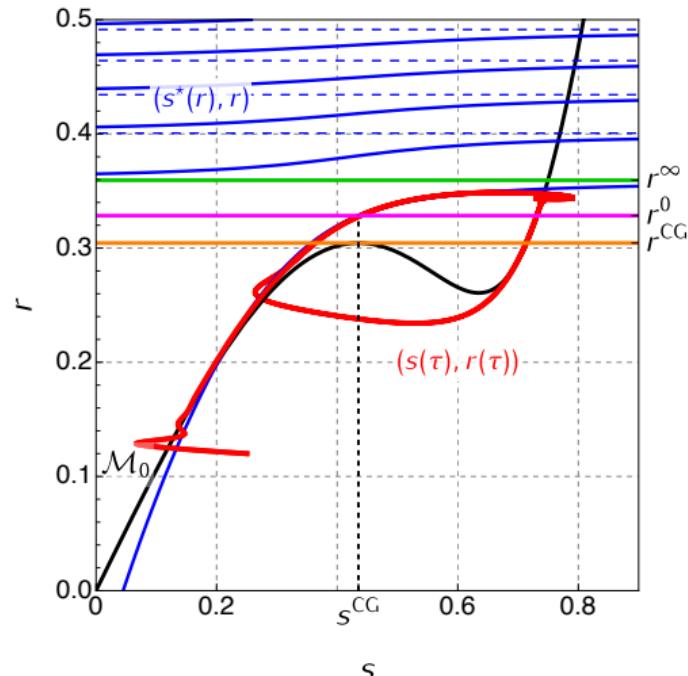
RÉDUCTION À LA VARIÉTÉ CENTRALE

LOI D'ÉCHELLE (DYNAMIQUE MOYENNÉE)

Expression analytique de s en fonction r :

$$s^*(r) = s^{CG} + \epsilon^{1/3} K_1 \frac{\text{Ai}'(-\epsilon^{-2/3} K_2 (r - r^{CG}))}{\text{Ai}(-\epsilon^{-2/3} K_2 (r - r^{CG}))}$$

- ▶ K_1 et K_2 : constantes dépendant des paramètres du modèle



RÉDUCTION À LA VARIÉTÉ CENTRALE

LOI D'ÉCHELLE (DYNAMIQUE MOYENNÉE)

Expression analytique de s en fonction r :

$$s^*(r) = s^{CG} + \epsilon^{1/3} K_1 \frac{\text{Ai}'(-\epsilon^{-2/3} K_2 (r - r^{CG}))}{\text{Ai}(-\epsilon^{-2/3} K_2 (r - r^{CG}))}$$

- K_1 et K_2 : constantes dépendant des paramètres du modèle

NOUVELLE ESTIMATION DU POINT D'ARRIVÉE (s^A, r^A)

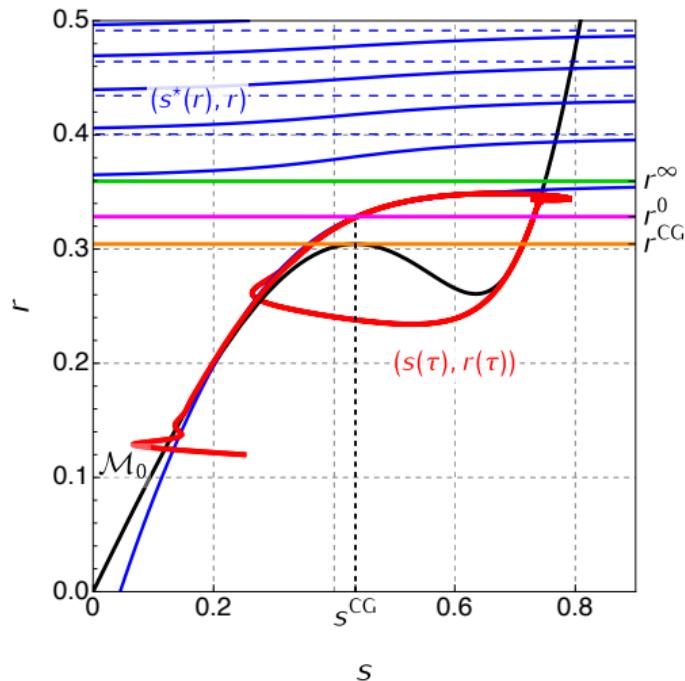
$$r^0 < r^a < r^\infty$$

r^0 : défini tel que $s^*(r) = s^{CG}$

⇒ premier zéro de la dérivée de la fonction de Airy

r^∞ : défini tel que $s^*(r) \rightarrow \infty$

⇒ premier zéro de la fonction de Airy



NOUVELLE PRÉDICTION THÉORIQUE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

À PARTIR DE L'ANALYSE À L'ORDRE 0

Valeur de ρ (notée ρ_0^*) solution de :

$$r_M^{\text{PF}} = r^{\text{a}} = r^{\text{CG}}$$

NOUVELLE PRÉDICTION THÉORIQUE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

À PARTIR DE L'ANALYSE À L'ORDRE 0

Valeur de ρ (notée ρ_0^*) solution de :

$$r_M^{\text{PF}} = r^{\text{a}} = r^{\text{CG}}$$

À PARTIR DE LA LOI D'ÉCHELLE

+ Ordre 0 valable en dehors des points-col

Borne inférieure : $\rho_{\epsilon,\text{inf}}^*$ solution de :

$$r_M^{\text{PF}} = r^{\text{a}} = r^{\infty}$$

Borne supérieure : $\rho_{\epsilon,\text{sup}}^*$ solution de :

$$r_M^{\text{PF}} = r^{\text{a}} = r^0$$

NOUVELLE PRÉDICTION THÉORIQUE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

À PARTIR DE L'ANALYSE À L'ORDRE 0

Valeur de ρ (notée ρ_0^*) solution de :

$$r_M^{PF} = r^a = r^{CG}$$

À PARTIR DE LA LOI D'ÉCHELLE

+ Ordre 0 valable en dehors des points-col

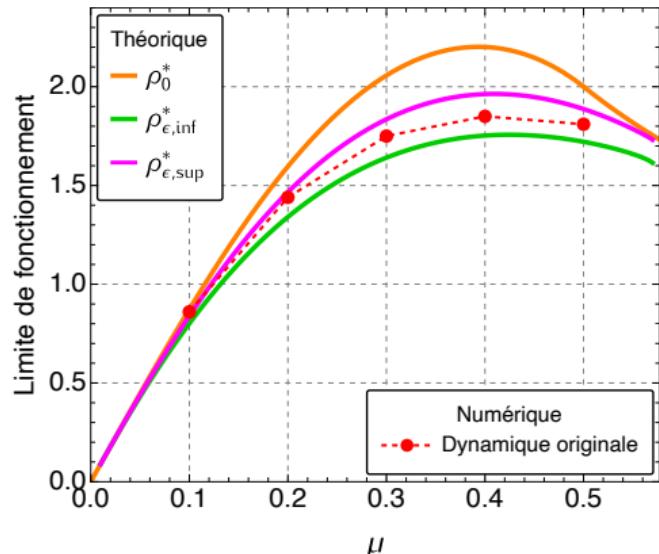
Borne inférieure : $\rho_{\epsilon,inf}^*$ solution de :

$$r_M^{PF} = r^a = r^\infty$$

Borne supérieure : $\rho_{\epsilon,sup}^*$ solution de :

$$r_M^{PF} = r^a = r^0$$

En fonction de μ pour $\epsilon = 0.015$:



NOUVELLE PRÉDICTION THÉORIQUE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

À PARTIR DE L'ANALYSE À L'ORDRE 0

Valeur de ρ (notée ρ_0^*) solution de :

$$r_M^{\text{PF}} = r^a = r^{\text{CG}}$$

À PARTIR DE LA LOI D'ÉCHELLE

+ Ordre 0 valable en dehors des points-col

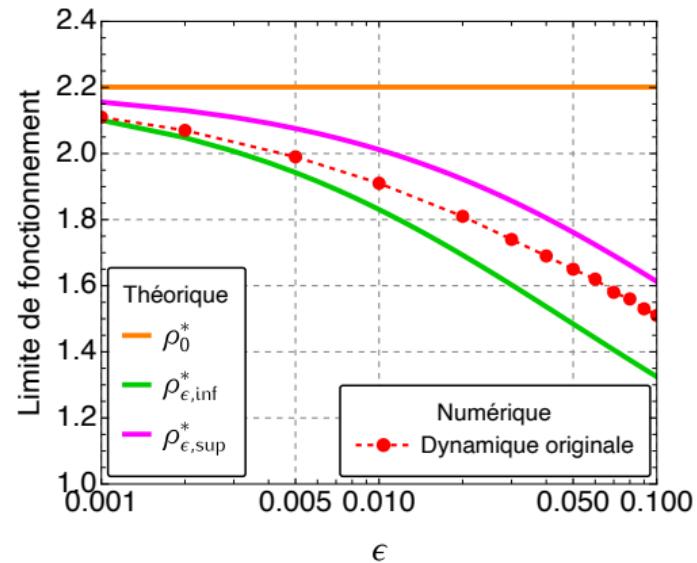
Borne inférieure : $\rho_{\epsilon,\text{inf}}^*$ solution de :

$$r_M^{\text{PF}} = r^a = r^\infty$$

Borne supérieure : $\rho_{\epsilon,\text{sup}}^*$ solution de :

$$r_M^{\text{PF}} = r^a = r^0$$

En fonction de ϵ pour $\mu = 0.4$:



PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

3.1. INTRODUCTION

3.2. RÉSULTATS : LOI D'ÉCHELLE ET NOUVELLE PRÉDICTION DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

3.3. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

CONCLUSIONS

- ▶ **Loi d'échelle** au niveau du point-col gauche de la dynamique moyennée d'un oscillateur auto-entretenue couplé à un NES
 - Permet l'**amélioration de la prédiction théorique de la limite de fonctionnement du NES**

CONCLUSIONS

- ▶ **Loi d'échelle** au niveau du point-col gauche de la dynamique moyennée d'un oscillateur auto-entretenu couplé à un NES
 - Permet l'**amélioration de la prédiction théorique de la limite de fonctionnement du NES**
- ▶ **Généralisation** à un système primaire à plusieurs DDL ne possédant qu'un **mode instable** :
 -  **B. BERGEOT** : Scaling law for the slow flow of an unstable mechanical system coupled to a nonlinear energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 503:116109, 2021.

CONCLUSIONS

- ▶ **Loi d'échelle** au niveau du point-col gauche de la dynamique moyennée d'un oscillateur auto-entretenu couplé à un NES
 - Permet l'**amélioration de la prédiction théorique de la limite de fonctionnement du NES**
- ▶ **Généralisation** à un système primaire à plusieurs DDL ne possédant qu'un **mode instable** :
 -  **B. BERGEOT** : Scaling law for the slow flow of an unstable mechanical system coupled to a nonlinear energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 503:116109, 2021.

PERSPECTIVE

- ▶ **Optimisation des paramètres du NES** dans le but de maximiser sa limite de fonctionnement

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4.1. INTRODUCTION

4.2. RÉSULTATS

4.3. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4.1. INTRODUCTION

4.2. RÉSULTATS

4.3. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

CONTEXT

AIM OF THE STUDY

- ▶ Investigate the influence of stochasticity on the dynamic behavior of a self-sustained oscillator coupled to an NES

RESULTS PRESENTED

- ▶ Dynamic behavior of Van der Pol oscillator undergoing a Gaussian white noise forcing and coupled to an NES
 -  **B. BERGEOT** : Effect of stochastic forcing on the dynamic behavior of a self-sustained oscillator coupled to a non-linear energy sink. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 150:104351, 2023.

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4.1. INTRODUCTION

4.2. RÉSULTATS

4.3. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

STOCHASTIC SLOW FLOW (OR AVERAGED) DYNAMICS

VAN DER POL OSCILLATOR WITH STOCHASTIC FORCING AND COUPLED TO AN NES

$$\ddot{x} + \epsilon \rho \dot{x} (rx^2 - 1) + x + \epsilon \mu (\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon \alpha (x - h)^3 = \epsilon v \xi(t)$$
$$\epsilon \ddot{h} + \epsilon \mu (\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon \alpha (x - h)^3 = 0$$

- ▶ NES léger $\Rightarrow 0 < \epsilon \ll 1$
- ▶ ξ : Gaussian white noise
- ▶ ϵv : noise level

STOCHASTIC SLOW FLOW (OR AVERAGED) DYNAMICS

VAN DER POL OSCILLATOR WITH STOCHASTIC FORCING AND COUPLED TO AN NES

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \epsilon p \dot{x} (rx^2 - 1) + x + \epsilon \mu (\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon \alpha (x - h)^3 &= \epsilon v \xi(t) \\ \epsilon \ddot{h} + \epsilon \mu (\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon \alpha (x - h)^3 &= 0\end{aligned}$$

- ▶ NES léger $\Rightarrow 0 < \epsilon \ll 1$
- ▶ ξ : Gaussian white noise
- ▶ ϵv : noise level

STOCHASTIC SLOW FLOW (OR AVERAGED) DYNAMICS

Obtained by means of the standard stochastic averaging method :

$$\begin{aligned}r' &= f(r, s, \Delta) + \sqrt{\epsilon} \sigma \xi(t) \\ \epsilon s' &= g_1(r, s, \Delta) \\ \epsilon \Delta' &= g_2(r, s, \Delta)\end{aligned}$$

- ▶ $\sigma = v/\sqrt{2}$
- ▶ r and s : amplitudes of $u_1 = x + \epsilon h$ et $u_2 = x - h$
- ▶ Δ : phase difference between u_2 et u_1

STOCHASTIC SLOW FLOW (OR AVERAGED) DYNAMICS

VAN DER POL OSCILLATOR WITH STOCHASTIC FORCING AND COUPLED TO AN NES

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \epsilon p \dot{x} (rx^2 - 1) + x + \epsilon \mu (\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon \alpha (x - h)^3 &= \epsilon v \xi(t) \\ \epsilon \ddot{h} + \epsilon \mu (\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon \alpha (x - h)^3 &= 0\end{aligned}$$

- ▶ NES léger $\Rightarrow 0 < \epsilon \ll 1$
- ▶ ξ : Gaussian white noise
- ▶ ϵv : noise level

STOCHASTIC SLOW FLOW (OR AVERAGED) DYNAMICS

Obtained by means of the standard stochastic averaging method :

$$\begin{aligned}r' &= f(r, s, \Delta) + \sqrt{\epsilon} \sigma \xi(t) \\ \epsilon s' &= g_1(r, s, \Delta) \\ \epsilon \Delta' &= g_2(r, s, \Delta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0 \\ \dot{s} &= g_1(r, s, \Delta, 0) \\ \dot{\Delta} &= g_2(r, s, \Delta, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r' &= f(r, s, \Delta) \\ 0 &= g_1(r, s, \Delta, 0) \\ 0 &= g_2(r, s, \Delta, 0)\end{aligned}$$

0th-order analysis identical to the deterministic case

\Rightarrow critical manifold and fixed points deterministic \Rightarrow effect of noise at $\mathcal{O}(\epsilon)$:

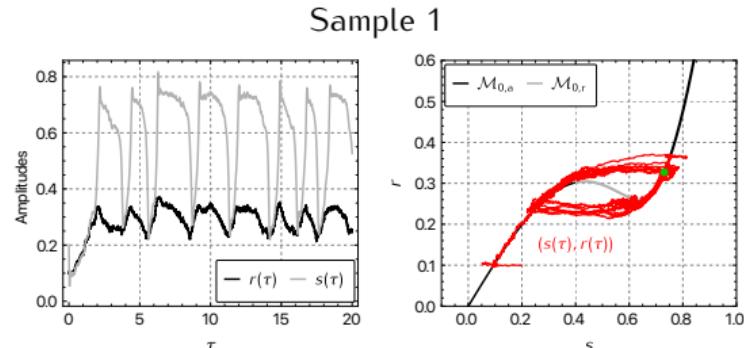
Question : Influence of noise mainly near the fold points (deterministic behavior elsewhere) ?

EXAMPLES OF SIMULATIONS

- ▶ $\rho < \rho^*$: Deterministic case : **SMR (mitigation)**

EXAMPLES OF SIMULATIONS

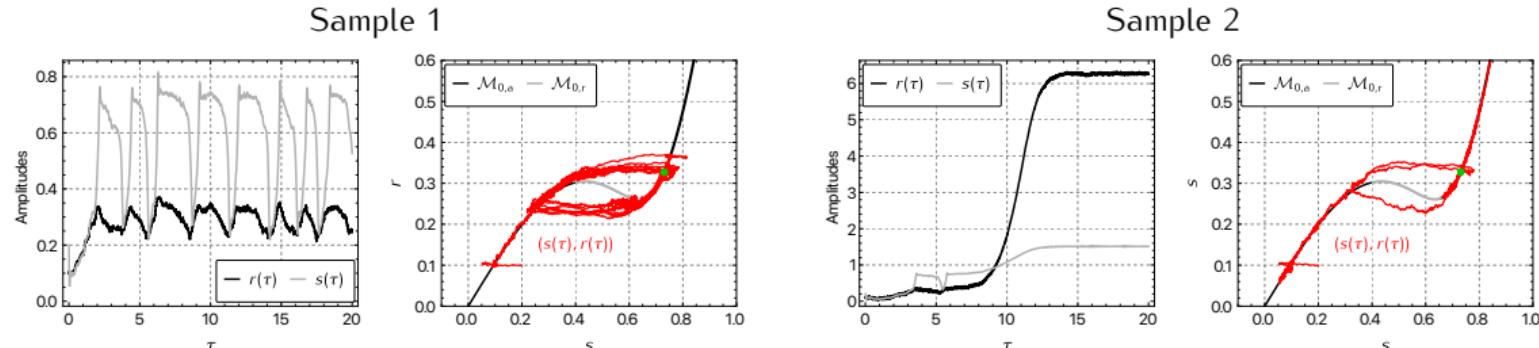
- $\rho < \rho^*$: Deterministic case : **SMR (mitigation)**
- Stochastic case (example of 2 samples) :



- Points fixe instable (s_M^{PF}, r_M^{PF}) de la dynamique moyennée déterministe

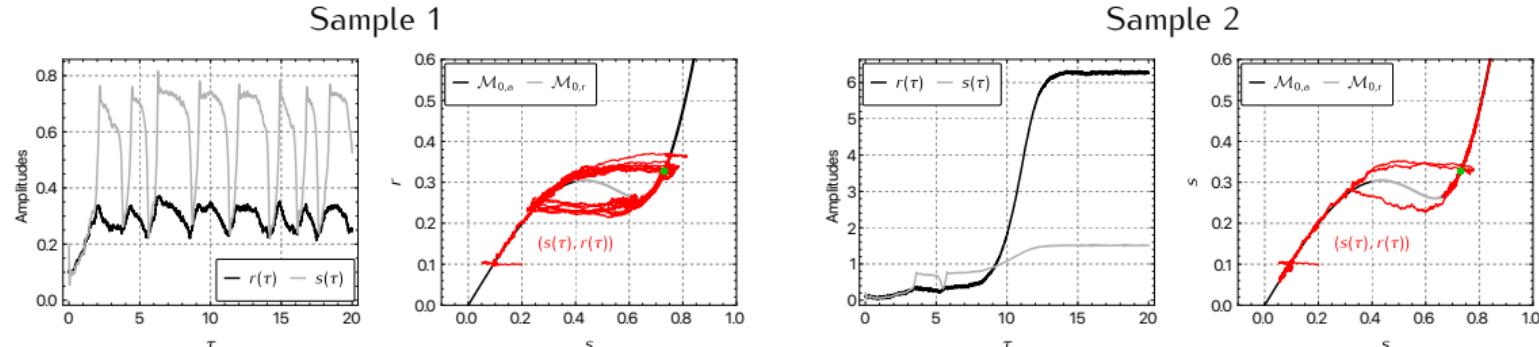
EXAMPLES OF SIMULATIONS

- ▶ $\rho < \rho^*$: Deterministic case : **SMR (mitigation)**
- ▶ Stochastic case (example of 2 samples) :



EXAMPLES OF SIMULATIONS

- ▶ $\rho < \rho^*$: Deterministic case : **SMR (mitigation)**
- ▶ Stochastic case (example of 2 samples) :

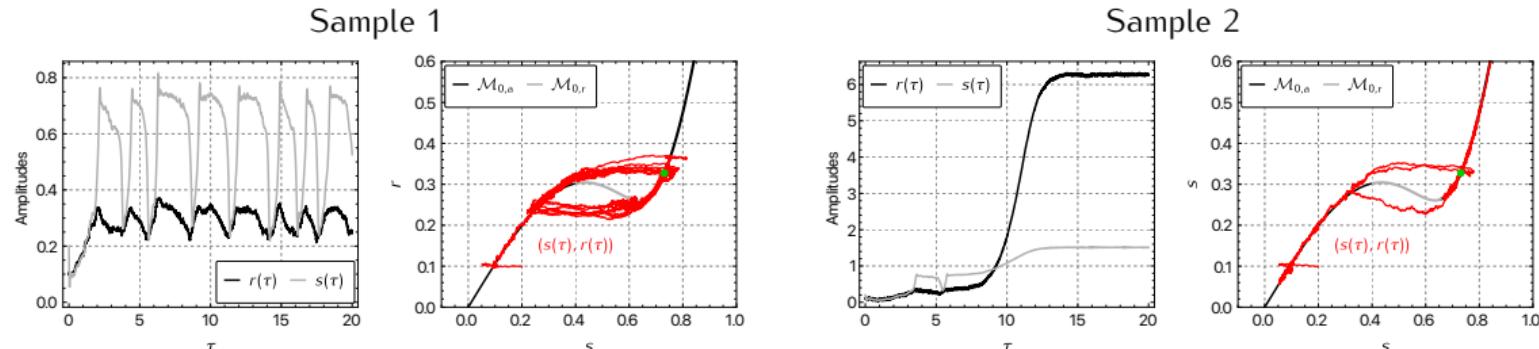


- Points fixe instable (s_M^{PF}, r_M^{PF}) de la dynamique moyennée déterministe

- ▶ Effect of noise important at $\mathcal{O}(\epsilon)$ everywhere (not only at the fold points) :
- ⇒ reasoning which allows to predict the system behavior in the deterministic case can be contradicted in presence of noise.

EXAMPLES OF SIMULATIONS

- ▶ $\rho < \rho^*$: Deterministic case : **SMR (mitigation)**
- ▶ Stochastic case (example of 2 samples) :



- Points fixe instable (s_M^{PF}, r_M^{PF}) de la dynamique moyennée déterministe

- ▶ Effect of noise important at $\mathcal{O}(\epsilon)$ everywhere (not only at the fold points) :
- ⇒ reasoning which allows to predict the system behavior in the deterministic case can be contradicted in presence of noise.
- ▶ On average, the ordinate of the arrival point in presence noise is larger than in the deterministic case ⇒ **noise promotes the non mitigation regimes.**

PROBABILITY OF BEING IN A MITIGATION REGIME

DEFINITION

The **probability of being in a mitigation regime**, denoted $p_{h,n}$, is the probability for the system of being in a mitigation regime after a given number n of full cycles of relaxation oscillations.

PROBABILITY OF BEING IN A MITIGATION REGIME

DEFINITION

The **probability of being in a mitigation regime**, denoted $p_{h,n}$, is the probability for the system of being in a mitigation regime after a given number n of full cycles of relaxation oscillations.

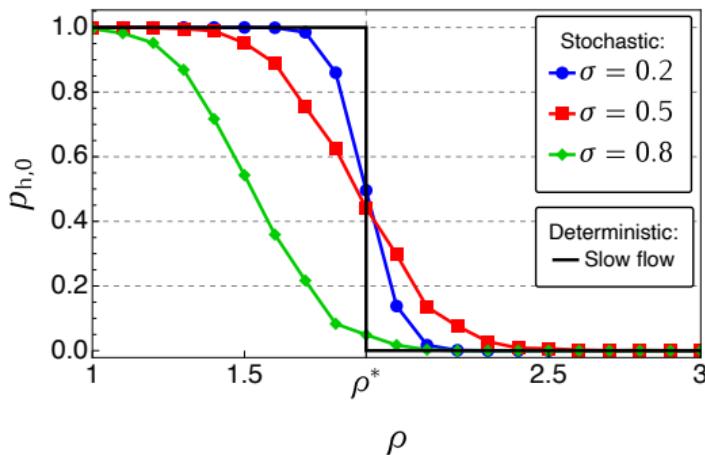


FIGURE : $p_{h,0}$ obtained using the Monte Carlo method with the stochastic slow flow

PROBABILITY OF BEING IN A MITIGATION REGIME

DEFINITION

The **probability of being in a mitigation regime**, denoted $p_{h,n}$, is the probability for the system of being in a mitigation regime after a given number n of full cycles of relaxation oscillations.

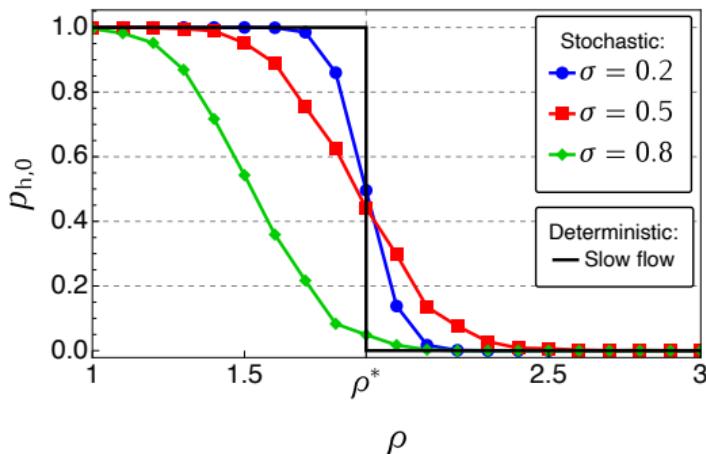


FIGURE : $p_{h,0}$ obtained using the Monte Carlo method with the stochastic slow flow

- ⇒ Discontinuity at ρ^* is lost in presence of noise
- ⇒ Noise promotes the non mitigation regime

PLAN

1. INTRODUCTION

2. ÉTAT DE L'ART

3. PRÉDICTION AMÉLIORÉE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4. INFLUENCE D'UN FORÇAGE STOCHASTIQUE SUR LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

4.1. INTRODUCTION

4.2. RÉSULTATS

4.3. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

CONCLUSIONS

- ▶ Effect of noise important at order ϵ everywhere (not only at the fold points).
- ▶ Noise smooths the system behavior at the mitigation limit and promotes the non mitigation regimes.
- ▶ Analyzing the system should be done entirely at the order ϵ (not only at the fold points).

CONCLUSIONS

- ▶ Effect of noise important at order ϵ everywhere (not only at the fold points).
- ▶ Noise smooths the system behavior at the mitigation limit and promotes the non mitigation regimes.
- ▶ Analyzing the system should be done entirely at the order ϵ (not only at the fold points).

PERSPECTIVES

- ▶ Theoretical analysis of the stochastic slow flow inspired by methodologies dedicated to the analysis of noisy slow-fast systems



Nils BERGLUND et Barbara GENTZ : Stochastic Dynamic Bifurcations and Excitability. In *Stochastic Methods in Neuroscience*. Oxford Scholarship Online, 2010.



Nils BERGLUND et Barbara GENTZ : *Berglund, Gentz - 2006 - Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems a sample-paths approach*. Springer London, 2006.

Deuxième partie

PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES DANS LES INSTRUMENTS DE MUSIQUE À ANCHE

Collaborateurs : Soizic Terrien¹ et Christophe Vergez²

¹Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (LAUM), UMR 6613, Le Mans Université, France

²CNRS, LMA UMR7031, Marseille, France

PLAN

5. INTRODUCTION

6. RETARD À LA BIFURCATION

7. BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUES

CONTEXTE

MODÈLE PHYSIQUE D'INSTRUMENT À ANCHE

- ▶ Système dynamique non linéaire reliant des **paramètres de contrôle** (pression de souffle) à des **variable de sorties** (pression dans le bec)
- ▶ Les études théoriques d'analyse de la production du son se font à **paramètres de contrôle constants**, elle montrent :
 - Apparition du son = **bifurcation de Hopf de la solution triviale** au profit d'une **solution périodique stable**
 - Présence de **multistabilité**



CONTEXTE

MODÈLE PHYSIQUE D'INSTRUMENT À ANCHE

- ▶ Système dynamique non linéaire reliant des **paramètres de contrôle** (pression de souffle) à des **variable de sorties** (pression dans le bec)
- ▶ Les études théoriques d'analyse de la production du son se font à **paramètres de contrôle constants**, elle montrent :
 - Apparition du son = **bifurcation de Hopf de la solution triviale** au profit d'une **solution périodique stable**
 - Présence de **multistabilité**

CONSTAT : le musicien fait varier des paramètres de contrôle dans le temps.



CONTEXTE

MODÈLE PHYSIQUE D'INSTRUMENT À ANCHE

- ▶ Système dynamique non linéaire reliant des **paramètres de contrôle** (pression de souffle) à des **variables de sorties** (pression dans le bec)
- ▶ Les études théoriques d'analyse de la production du son se font à **paramètres de contrôle constants**, elle montrent :
 - Apparition du son = **bifurcation de Hopf de la solution triviale** au profit d'une **solution périodique stable**
 - Présence de **multistabilité**

CONSTAT : le musicien fait varier des paramètres de contrôle dans le temps.

QUESTIONS

- ▶ Une variation dans le temps des paramètres \neq succession d'états statiques ?
- ▶ Si non, pendant un transitoire d'attaque, quelles conséquences :
 - sur l'apparition du son ? (notion de **retard à la bifurcation**)
 - sur le régime atteint en cas de multistabilité ? (notion de **bassin d'attraction « dynamique »**)



CONTEXTE

MODÈLE PHYSIQUE D'INSTRUMENT À ANCHE

- ▶ Système dynamique non linéaire reliant des **paramètres de contrôle** (pression de souffle) à des **variables de sorties** (pression dans le bec)
- ▶ Les études théoriques d'analyse de la production du son se font à **paramètres de contrôle constants**, elle montrent :
 - Apparition du son = **bifurcation de Hopf de la solution triviale** au profit d'une **solution périodique stable**
 - Présence de **multistabilité**

CONSTAT : le musicien fait varier des paramètres de contrôle dans le temps.

QUESTIONS

- ▶ Une variation dans le temps des paramètres \neq succession d'états statiques ?
- ▶ Si non, pendant un transitoire d'attaque, quelles conséquences :
 - sur l'apparition du son ? (notion de **retard à la bifurcation**)
 - sur le régime atteint en cas de multistabilité ? (notion de **bassin d'attraction « dynamique »**)

AUJOURD'HUI : cas d'une **variation linéaire du paramètre de contrôle « pression de souffle »**



PLAN

5. INTRODUCTION

6. RETARD À LA BIFURCATION

6.1. INTRODUCTION

6.2. ANALYSE DU MODÈLE

6.3. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

7. BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUES

7.1. INTRODUCTION

7.2. BACKGROUND AND DEFINITIONS

7.3. ILLUSTRATIONS

7.4. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

PLAN

5. INTRODUCTION

6. RETARD À LA BIFURCATION

6.1. INTRODUCTION

6.2. ANALYSE DU MODÈLE

6.3. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

7. BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUES

PLAN

5. INTRODUCTION

6. RETARD À LA BIFURCATION

6.1. INTRODUCTION

6.2. ANALYSE DU MODÈLE

6.3. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

7. BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUES

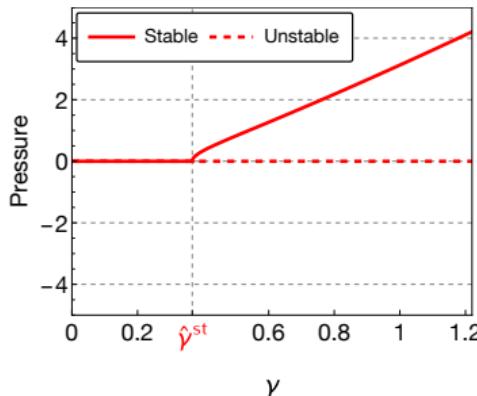
RETARD À LA BIFURCATION

ILLUSTRATION NUMÉRIQUE AVEC LA SIMULATION D'UN MODÈLE CLARINETTE

MODÈLE DE CLARINETTE (DYNAMIQUE ORIGINALE 3D)

- ▶ Variables de sortie : p (pression dans le bec) et \dot{p}
- ▶ Paramètre de contrôle : γ (pression de souffle)
- ▶ Bifurcation « statique » de Hopf : silence (point fixe trivial) → note (solution périodique)

Diagramme de bifurcation
statique



$\hat{\gamma}^{st}$: point de bifurcation **statique**

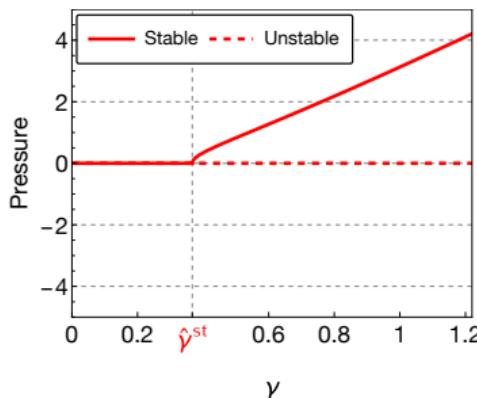
RETARD À LA BIFURCATION

ILLUSTRATION NUMÉRIQUE AVEC LA SIMULATION D'UN MODÈLE CLARINETTE

MODÈLE DE CLARINETTE (DYNAMIQUE ORIGINALE 3D)

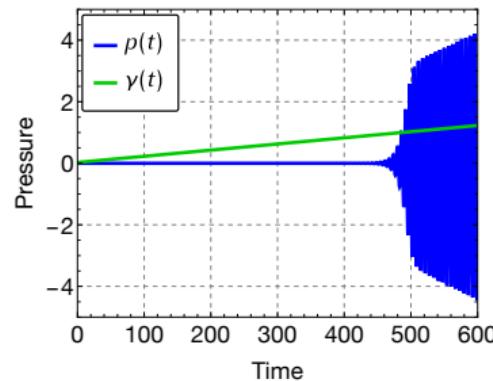
- ▶ Variables de sortie : p (pression dans le bec) et \dot{p}
- ▶ Paramètre de contrôle : γ (pression de souffle)
- ▶ Bifurcation « statique » de Hopf : silence (point fixe trivial) → note (solution périodique)

Diagramme de bifurcation
statique



$\hat{\gamma}^{st}$: point de bifurcation statique

Simulation numérique
temporelle



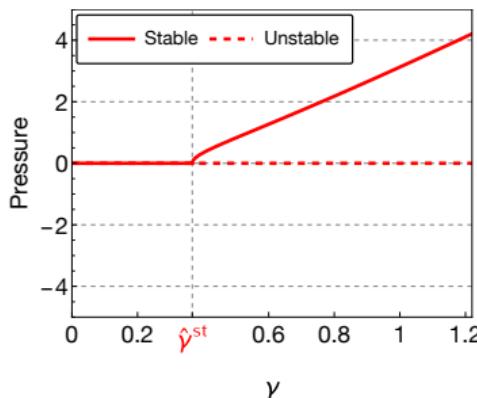
RETARD À LA BIFURCATION

ILLUSTRATION NUMÉRIQUE AVEC LA SIMULATION D'UN MODÈLE CLARINETTE

MODÈLE DE CLARINETTE (DYNAMIQUE ORIGINALE 3D)

- ▶ Variables de sortie : p (pression dans le bec) et \dot{p}
- ▶ Paramètre de contrôle : γ (pression de souffle)
- ▶ Bifurcation « statique » de Hopf : silence (point fixe trivial) → note (solution périodique)

Diagramme de bifurcation
statique



$\hat{\gamma}^{st}$: point de bifurcation statique

Simulation numérique
temporelle

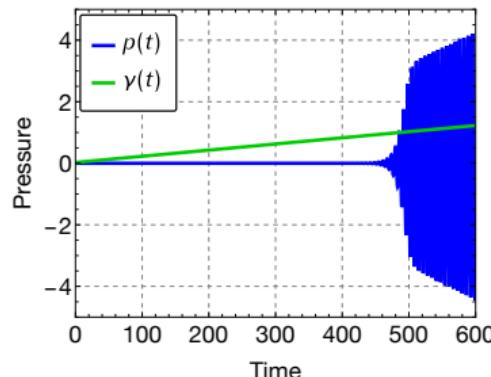
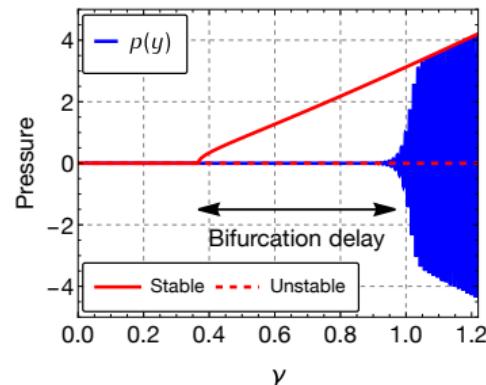
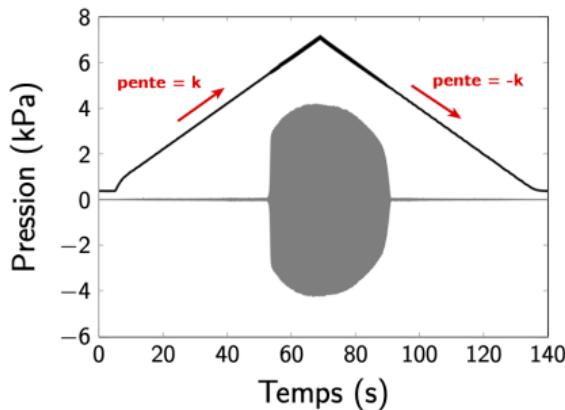


Diagramme de bifurcation
dynamique



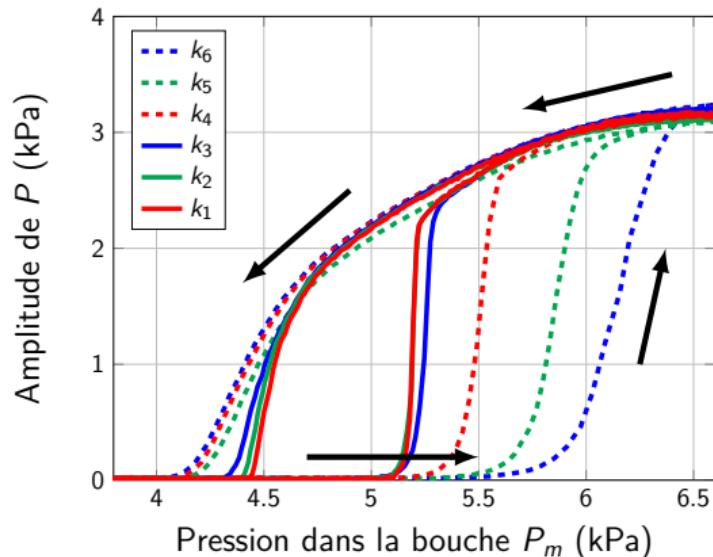
RETARD À LA BIFURCATION : UNE CURIOSITÉ NUMÉRIQUE ?

ILLUSTRATION EXPÉIMENTALE AVEC UNE BOUCHE ARTIFICIELLE ET UNE CLARINETTE DE LABORATOIRE



k_1 (très lent) < k_2 < … < k_6 (lent)

$100 \text{ Pa.s}^{-1} < \dots < 2681 \text{ Pa.s}^{-1}$



Figures tirées de :



B. BERGEOT, A. ALMEIDA, C. VERGEZ, B. GAZENGEL et D. FERRAND : Response of an artificially blown clarinet to different blowing pressure profiles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 135(1):479–490, 2014.

TRAVAIL PRÉSENTÉ

Prédiction théorique du retard à la bifurcation dans un modèle simple d'instrument à anche.

TRAVAIL PRÉSENTÉ

Prédiction théorique du retard à la bifurcation dans un modèle simple d'instrument à anche.

MODÈLE RETENU (HYPOTHÈSES CLASSIQUES TRÈS SIMPLIFICATRICES)

Instrument à anche \equiv oscillateur auto-entretenue de type Van der Pol avec ici :

- ▶ Pression dans la bouche y_t variant dans le temps (système lent-rapide)
- ▶ Terme stochastique = bruit blanc ξ_t

$$\ddot{p}_t + h(\dot{p}_t, p_t, y_t) + p_t = v \xi_t$$

TRAVAIL PRÉSENTÉ

Prédiction théorique du retard à la bifurcation dans un modèle simple d'instrument à anche.

MODÈLE RETENU (HYPOTHÈSES CLASSIQUES TRÈS SIMPLIFICATRICES)

Instrument à anche \equiv oscillateur auto-entretenue de type Van der Pol avec ici :

- ▶ Pression dans la bouche y_t variant dans le temps (système lent-rapide)
- ▶ Terme stochastique = bruit blanc ξ_t

$$\ddot{p}_t + h(\dot{p}_t, p_t, y_t) + p_t = v \xi_t$$

- ▶ Nouveau paramètre de bifurcation $y_t = \gamma_t - \hat{\gamma}^{\text{st}}$ ($\hat{\gamma}^{\text{st}} = 0$)
+
 - Croissance linéaire du paramètre de bifurcation : $y_t = \epsilon t + y_0$:
- \Rightarrow Système 3D autonome : $\ddot{p}_t + h(p_t, \dot{p}_t, y_t) + p_t = v \xi_t$

TRAVAIL PRÉSENTÉ

Prédiction théorique du retard à la bifurcation dans un modèle simple d'instrument à anche.

MODÈLE RETENU (HYPOTHÈSES CLASSIQUES TRÈS SIMPLIFICATRICES)

Instrument à anche \equiv oscillateur auto-entretenue de type Van der Pol avec ici :

- ▶ Pression dans la bouche y_t variant dans le temps (système lent-rapide)
- ▶ Terme stochastique = bruit blanc ξ_t

$$\ddot{p}_t + h(\dot{p}_t, p_t, y_t) + p_t = v \xi_t$$

- ▶ Nouveau paramètre de bifurcation $y_t = \gamma_t - \hat{\gamma}^{\text{st}}$ ($\hat{\gamma}^{\text{st}} = 0$)
+

Croissance linéaire du paramètre de bifurcation : $y_t = \epsilon t + y_0$:

\Rightarrow Système 3D autonome : $\ddot{p}_t + h(p_t, \dot{p}_t, y_t) + p_t = v \xi_t$

- ▶ Évolution du système en fonction de y :

\Rightarrow Système 2D non autonome : $\epsilon^2 \frac{d^2 p_y}{dy^2} + h(p_y, \epsilon \dot{p}_y, y) + p_y = \sqrt{\epsilon} v \xi_y$

PLAN

5. INTRODUCTION

6. RETARD À LA BIFURCATION

6.1. INTRODUCTION

6.2. ANALYSE DU MODÈLE

6.3. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

7. BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUES

DÉFINITION DU RETARD À LA BIFURCATION

DYNAMIQUE MOYENNÉE STOCHASTIQUE

⇒ Système 1D non autonome :

$$dx_y = \frac{1}{\epsilon} F(x_y, y) dy + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} dW_y$$

x_y : amplitude de p_y

σ : niveau de bruit tel que $\sigma = v/\sqrt{2}$

W_y : processus de Wiener tel que $\xi_y = dW_y/dy$

DÉFINITION DU RETARD À LA BIFURCATION

DYNAMIQUE MOYENNÉE STOCHASTIQUE

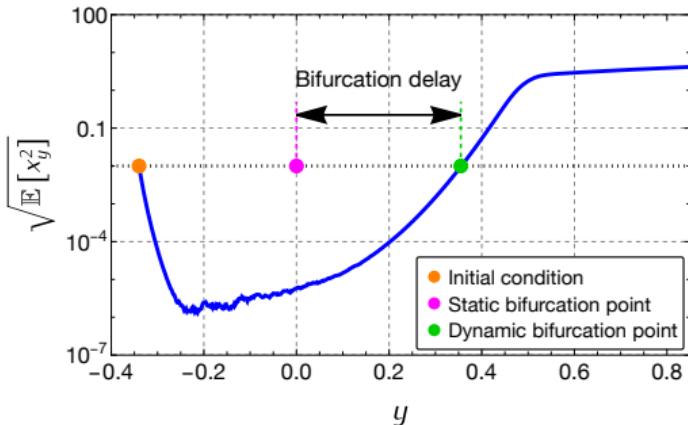
⇒ Système 1D non autonome :

$$dx_y = \frac{1}{\epsilon} F(x_y, y) dy + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} dW_y$$

x_y : amplitude de p_y

σ : niveau de bruit tel que $\sigma = v/\sqrt{2}$

W_y : processus de Wiener tel que $\xi_y = dW_y/dy$



POINT DE BIFURCATION DYNAMIQUE

Défini comme la valeur de y telle que

$$\sqrt{\mathbb{E}[x_y^2]} = x_{y_0}$$

RETARD À LA BIFURCATION

Retard à la bifurcation =
 Point de bifurcation dynamique
 – Point de bifurcation statique ($y = 0$)

SOLUTION DU SYSTÈME MOYENNÉ LINÉAIRE

- Solution **analytique** du système moyené linéarisé autour de $x_y = 0$:

$$dx_y = \frac{1}{\epsilon} a(y) x_y dy + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} dW_y \quad \Rightarrow \quad x_y = x^{\text{det}}(y) + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} e^{\frac{1}{\epsilon} A(y)} \int_{y_0}^y e^{-\frac{1}{\epsilon} A(y')} dW_{y'}$$

SOLUTION DU SYSTÈME MOYENNÉ LINÉAIRE

- Solution **analytique** du système moyené linéarisé autour de $x_y = 0$:

$$dx_y = \frac{1}{\epsilon} a(y) x_y dy + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} dW_y \quad \Rightarrow \quad x_y = x^{\text{det}}(y) + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} e^{\frac{1}{\epsilon} A(y)} \int_{y_0}^y e^{-\frac{1}{\epsilon} A(y')} dW_{y'}$$

- Espérance de x_y^2 :

$$\mathbb{E}[x_y^2] = \mathcal{D}(y) + \mathcal{S}(y) \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}(y) = (x^{\text{det}}(y))^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(y) = \frac{\sigma^2}{\epsilon} e^{\frac{2}{\epsilon} A(y)} \int_{y_0}^y e^{-\frac{2}{\epsilon} A(y')} dy$$

SOLUTION DU SYSTÈME MOYENNÉ LINÉAIRE

- Solution **analytique** du système moyen linéarisé autour de $x_y = 0$:

$$dx_y = \frac{1}{\epsilon} a(y) x_y dy + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} dW_y \quad \Rightarrow \quad x_y = x^{\text{det}}(y) + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} e^{\frac{1}{\epsilon} A(y)} \int_{y_0}^y e^{-\frac{1}{\epsilon} A(y')} dW_{y'}$$

- Espérance de x_y^2 :

$$\mathbb{E}[x_y^2] = \mathcal{D}(y) + \mathcal{S}(y) \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}(y) = (x^{\text{det}}(y))^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(y) = \frac{\sigma^2}{\epsilon} e^{\frac{2}{\epsilon} A(y)} \int_{y_0}^y e^{-\frac{2}{\epsilon} A(y')} dy$$

- ⇒ Trois régimes identifiés [Berglund and Gentz (2006)] :

Régime I

Déterministe

$$\mathcal{S}(y) < \mathcal{D}(y)$$

Régime II

Stochastique (σ petit)

$$\mathcal{S}(y) > \mathcal{D}(y)$$

Régime III

Stochastique (σ grand)

Non traité



Nils BERGLUND et Barbara GENTZ : Berglund, Gentz - 2006 - *Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems a sample-paths approach*. Springer London, 2006.

DOMAINES D'EXISTENCE DES RÉGIMES

- ▶ Frontière entre régimes I/II et III : dépend surtout de σ
- ▶ Frontière entre régimes I et II : dépend du triplet (ϵ, σ, y_0)

Détails dans :



B. BERGEOT et C. VERGEZ : Analytical prediction of delayed Hopf bifurcations in a simplified stochastic model of reed musical instruments. *Nonlinear Dynamics*, 107:3291–3312, 2022. Publisher : Springer Netherlands.

DOMAINES D'EXISTENCE DES RÉGIMES

- ▶ Frontière entre régimes I/II et III : dépend surtout de σ
- ▶ Frontière entre régimes I et II : dépend du triplet (ϵ, σ, y_0)

POINT DE BIFURCATION DYNAMIQUE

- ▶ Méthode : les régimes I (déterministe) et II (stochastique) sont traités séparément

Régime I

Déterministe

$$\mathbb{E}[x_y^2] = \mathcal{D}(y) + \cancel{\mathcal{S}(y)}$$

Point de bifurcation dynamique déterministe

Régime II

Stochastique (σ petit)

$$\mathbb{E}[x_y^2] = \cancel{\mathcal{D}(y)} + \mathcal{S}(y)$$

Point de bifurcation dynamique stochastique

Détails dans :

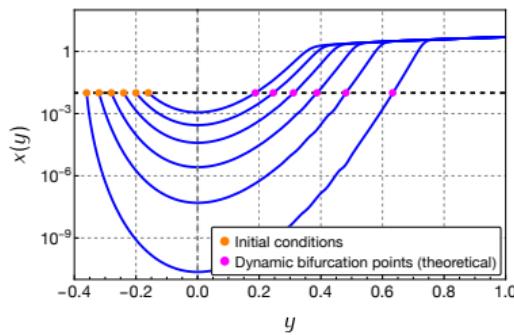


B. BERGEOT et C. VERGEZ : Analytical prediction of delayed Hopf bifurcations in a simplified stochastic model of reed musical instruments. *Nonlinear Dynamics*, 107:3291–3312, 2022. Publisher : Springer Netherlands.

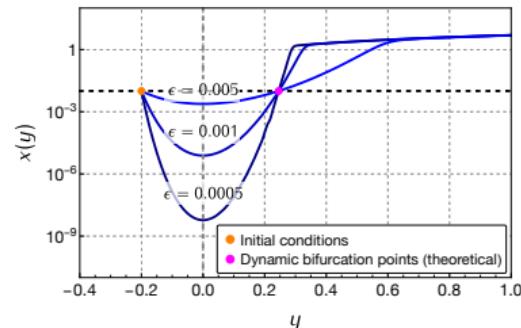
PROPRIÉTÉ DU RETARDS À LA BIFURCATION

CAS DÉTERMINISTE

En fonction de y_0 (\searrow)



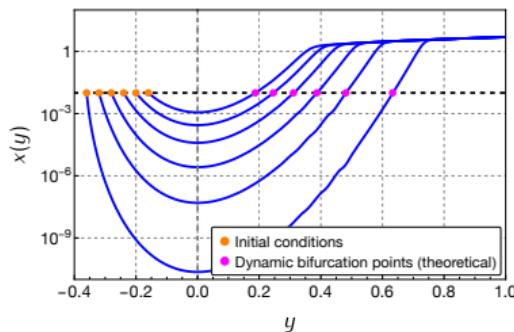
En fonction de ϵ (=)



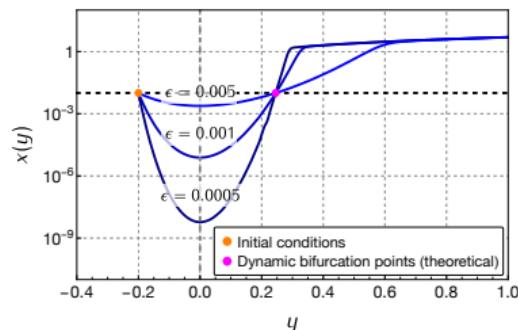
PROPRIÉTÉ DU RETARDS À LA BIFURCATION

CAS DÉTERMINISTE

En fonction de y_0 (\searrow)

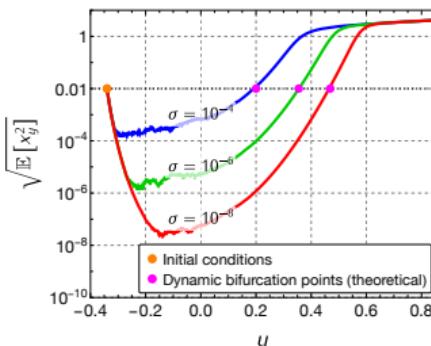


En fonction de ϵ (=)

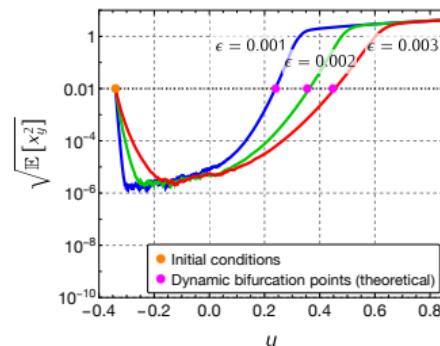


CAS STOCHASTIQUE

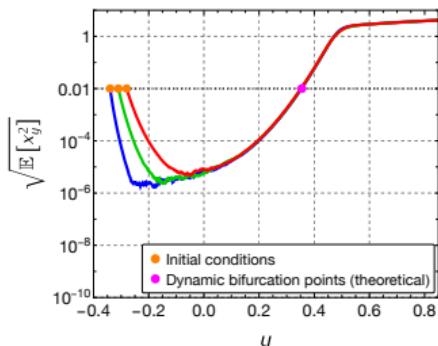
En fonction de σ (\searrow)



En fonction de ϵ (\nearrow)



En fonction de y_0 ($=$)



PLAN

5. INTRODUCTION

6. RETARD À LA BIFURCATION

6.1. INTRODUCTION

6.2. ANALYSE DU MODÈLE

6.3. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

7. BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUES

CONCLUSIONS

- ▶ Réponse à la question posée en introduction :
« Non, on ne peut pas considérer que faire varier un paramètre dans le temps, donne les mêmes résultats qu'une succession de tests à paramètres constants ».
- ▶ Limite du pouvoir prédictif des modèles déterministes.
- ▶ Mêmes conclusions qu'avec le modèle à temps discret dit de Raman (thèse B. Bergeot) et en accord avec l'état de l'art sur la bifurcation dynamique.

CONCLUSIONS

- ▶ Réponse à la question posée en introduction :
« Non, on ne peut pas considérer que faire varier un paramètre dans le temps, donne les mêmes résultats qu'une succession de tests à paramètres constants ».
- ▶ Limite du pouvoir prédictif des modèles déterministes.
- ▶ Mêmes conclusions qu'avec le modèle à temps discret dit de Raman (thèse B. Bergeot) et en accord avec l'état de l'art sur la bifurcation dynamique.

PERSPECTIVES ET TRAVAIL EN COURS

- ▶ Retard à la bifurcation dans un modèle plus complexe.
- ▶ Influence de la dynamique des paramètres sur les régimes établis en cas de **multistabilité** : lien avec les **bassins d'attraction** (section suivante).

PLAN

5. INTRODUCTION

6. RETARD À LA BIFURCATION

7. BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUES

7.1. INTRODUCTION

7.2. BACKGROUND AND DEFINITIONS

7.3. ILLUSTRATIONS

7.4. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

PLAN

5. INTRODUCTION

6. RETARD À LA BIFURCATION

7. BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUES

7.1. INTRODUCTION

7.2. BACKGROUND AND DEFINITIONS

7.3. ILLUSTRATIONS

7.4. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUE

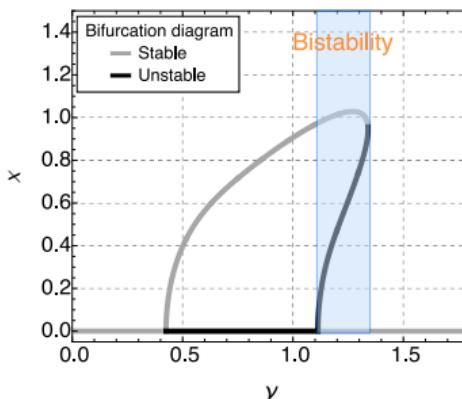
MODÈLE DE CLARINETTE (DYNAMIQUE MOYENNÉE 2D)

- ▶ **Variable de sortie :** x (amplitude de pression dans le bec p obtained by an **averaging method**)
- ▶ **Paramètre de contrôle :** γ (pression de souffle) variant linéairement dans le temps
- ▶ **Bifurcation « statique » fourche (pitchfork) :** silence (point fixe trivial) → note (point fixe non trivial)

BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUE

MODÈLE DE CLARINETTE (DYNAMIQUE MOYENNÉE 2D)

- ▶ **Variable de sortie :** x (amplitude de pression dans le bec p obtained by an **averaging method**)
- ▶ **Paramètre de contrôle :** γ (pression de souffle) variant linéairement dans le temps
- ▶ **Bifurcation « statique » fourche (pitchfork) :** silence (point fixe trivial) → note (point fixe non trivial)
- ⇒ Présence de **multistabilité**



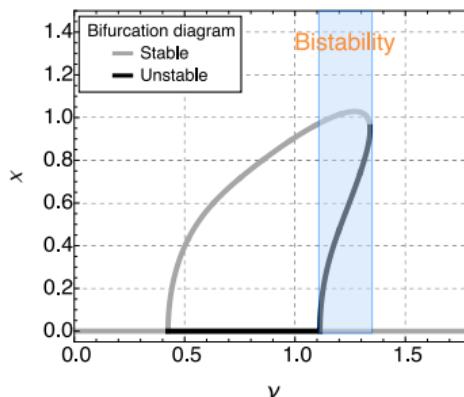
BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUE

MODÈLE DE CLARINETTE (DYNAMIQUE MOYENNÉE 2D)

- ▶ Variable de sortie : x (amplitude de pression dans le bec p obtained by an **averaging method**)
- ▶ Paramètre de contrôle : γ (pression de souffle) variant linéairement dans le temps
- ▶ Bifurcation « statique » fourche (pitchfork) : silence (point fixe trivial) → note (point fixe non trivial)
 - ⇒ Présence de **multistabilité**

PROBLÉMATIQUE (BASSIN D'ATTRACTION « DYNAMIQUE »)

- ▶ Partant d'une condition initiale donnée, quelle branche stable du diagramme de bifurcation la trajectoire du système va-t-elle longer quand elle traversera la zone de bistabilité ?



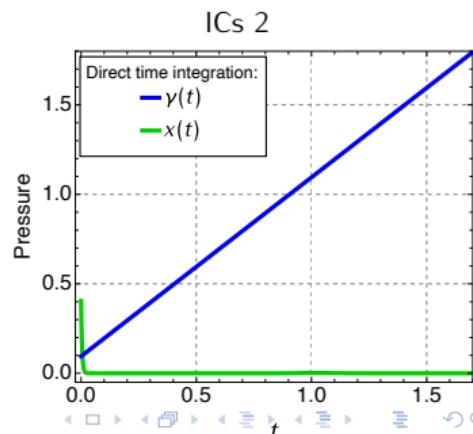
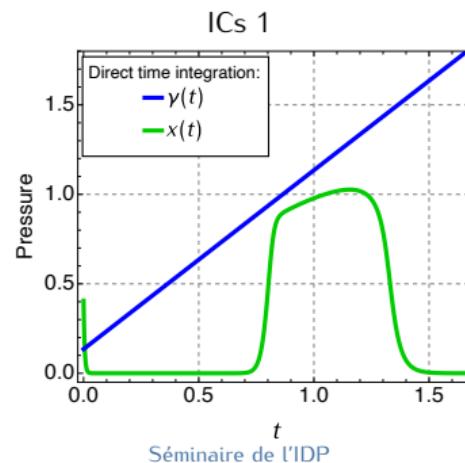
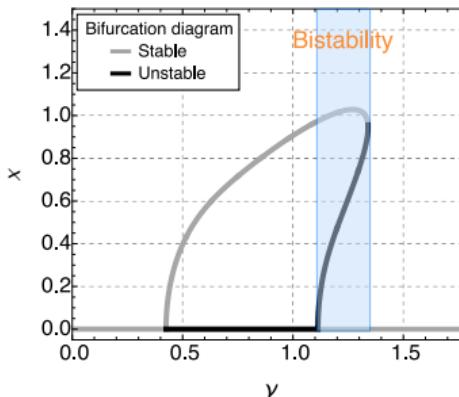
BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUE

MODÈLE DE CLARINETTE (DYNAMIQUE MOYENNÉE 2D)

- ▶ Variable de sortie : x (amplitude de pression dans le bec p obtained by an **averaging method**)
- ▶ Paramètre de contrôle : γ (pression de souffle) variant linéairement dans le temps
- ▶ Bifurcation « statique » fourche (pitchfork) : silence (point fixe trivial) → note (point fixe non trivial)
- ⇒ Présence de **multistabilité**

PROBLÉMATIQUE (BASSIN D'ATTRACTION « DYNAMIQUE »)

- ▶ Partant d'une condition initiale donnée, quelle branche stable du diagramme de bifurcation la trajectoire du système va-t-elle longer quand elle traversera la zone de bistabilité ?



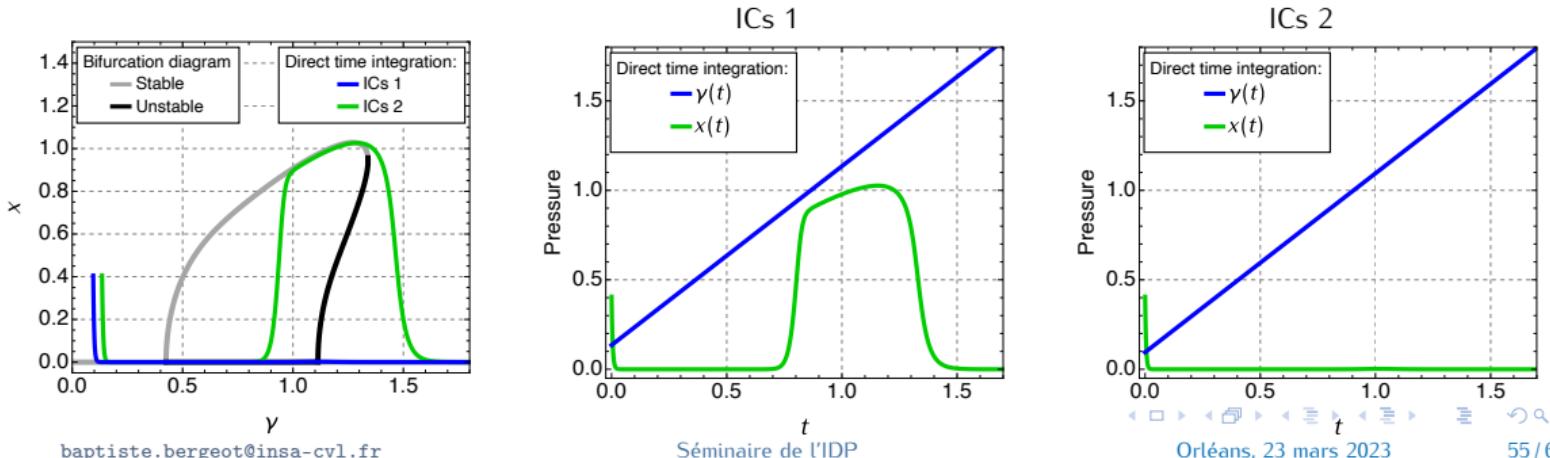
BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUE

MODÈLE DE CLARINETTE (DYNAMIQUE MOYENNÉE 2D)

- ▶ Variable de sortie : x (amplitude de pression dans le bec p obtained by an **averaging method**)
- ▶ Paramètre de contrôle : γ (pression de souffle) variant linéairement dans le temps
- ▶ Bifurcation « statique » fourche (pitchfork) : silence (point fixe trivial) → note (point fixe non trivial)
- ⇒ Présence de **multistabilité**

PROBLÉMATIQUE (BASSIN D'ATTRACTION « DYNAMIQUE »)

- ▶ Partant d'une condition initiale donnée, quelle branche stable du diagramme de bifurcation la trajectoire du système va-t-elle longer quand elle traversera la zone de bistabilité ?



PLAN

5. INTRODUCTION

6. RETARD À LA BIFURCATION

7. BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUES

7.1. INTRODUCTION

7.2. BACKGROUND AND DEFINITIONS

7.3. ILLUSTRATIONS

7.4. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

BACKGROUND

BASIN OF ATTRACTION IN THE CASE OF A CONSTANT BLOWING PRESSURE

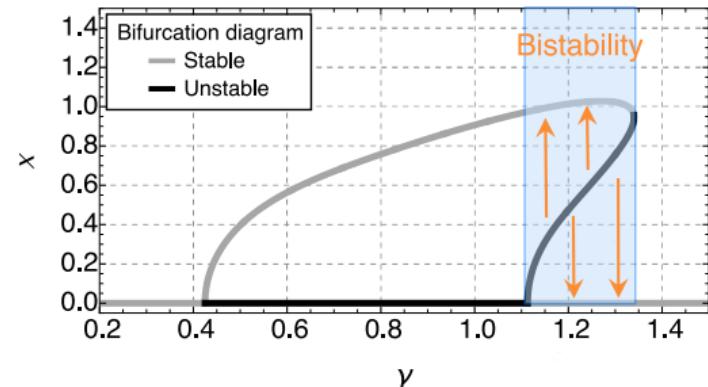
SIMPLIFIED CLARINET MODEL WITH CONSTANT BLOWING PRESSURE

- It is a 1D system : $\dot{x} = f(x, \gamma)$

x : the amplitude of the mouthpiece pressure p

γ : the mouth pressure (constant parameter)

- In the **bistability region** $f(x, \gamma) = 0$ has 3 solutions : 2 stable solutions, 1 unstable solution



BACKGROUND

BASIN OF ATTRACTION IN THE CASE OF A CONSTANT BLOWING PRESSURE

SIMPLIFIED CLARINET MODEL WITH CONSTANT BLOWING PRESSURE

- It is a 1D system : $\dot{x} = f(x, \gamma)$

x : the amplitude of the mouthpiece pressure p

γ : the mouth pressure (constant parameter)

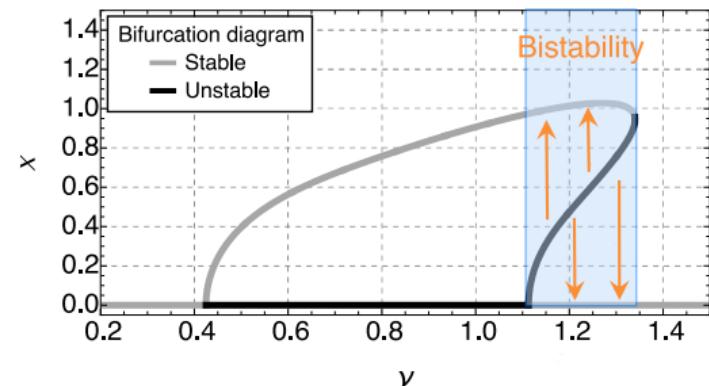
- In the **bistability region** $f(x, \gamma) = 0$ has **3 solutions** : 2 stable solutions, 1 unstable solution

DEFINITION ("STATIC" BASIN OF ATTRACTION)

For a given stable solution, the "*Static*" *basin of attraction* (SBA) is the set of initial conditions leading to this solution.

DEFINITION (SEPARATRIX BETWEEN TWO SBAs)

It is the boundary in the phase space that separates two SBAs.



BACKGROUND

BASIN OF ATTRACTION IN THE CASE OF A CONSTANT BLOWING PRESSURE

SIMPLIFIED CLARINET MODEL WITH CONSTANT BLOWING PRESSURE

- It is a 1D system : $\dot{x} = f(x, \gamma)$

x : the amplitude of the mouthpiece pressure p

γ : the mouth pressure (constant parameter)

- In the **bistability region** $f(x, \gamma) = 0$ has **3 solutions** : 2 stable solutions, 1 unstable solution

DEFINITION ("STATIC" BASIN OF ATTRACTION)

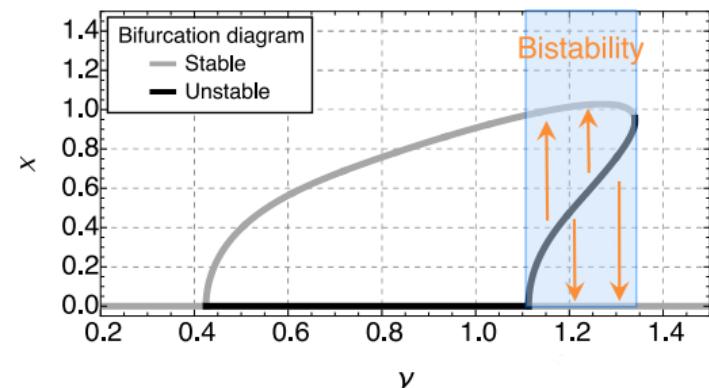
For a given stable solution, the "*Static*" *basin of attraction* (SBA) is the set of initial conditions leading to this solution.

DEFINITION (SEPARATRIX BETWEEN TWO SBAs)

It is the boundary in the phase space that separates two SBAs.

NATURE OF THE SEPARATRIX

For our 1D system, the separatrix between the SBAs of the two stable solutions is the unstable solution.



BACKGROUND

SIMPLIFIED CLARINET MODEL WITH TIME-VARYING BLOWING PRESSURE

It is a $(1, 1)$ -fast-slow system (2D)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \gamma) \\ \dot{\gamma} &= \epsilon\end{aligned}$$

The fast subsystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \gamma) \\ \dot{\gamma} &= 0\end{aligned}$$

The slow subsystem

$$\begin{aligned}0 &= f(x, \gamma) \\ \gamma' &= 1\end{aligned}$$

x : the amplitude of the mouthpiece pressure p (the fast variable)

γ : the mouth pressure (the slow variable)

BACKGROUND

SIMPLIFIED CLARINET MODEL WITH TIME-VARYING BLOWING PRESSURE

It is a $(1, 1)$ -fast-slow system (2D)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \gamma) \\ \dot{\gamma} &= \epsilon\end{aligned}$$

The fast subsystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \gamma) \\ \dot{\gamma} &= 0\end{aligned}$$

The slow subsystem

$$\begin{aligned}0 &= f(x, \gamma) \\ \gamma' &= 1\end{aligned}$$

x : the amplitude of the mouthpiece pressure p (the fast variable)

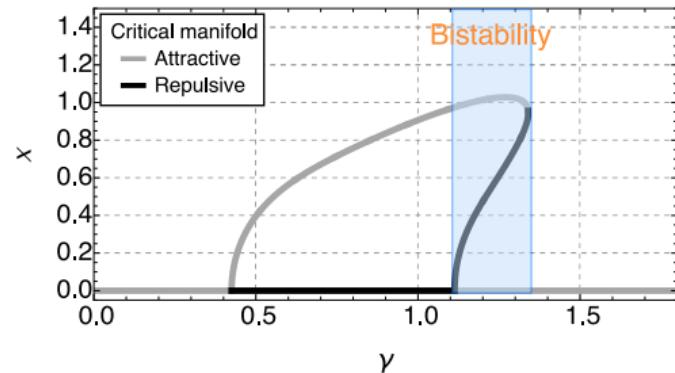
γ : the mouth pressure (the slow variable)

DEFINITION

The critical manifold is defined as

$$\mathcal{M}_0 = \{(x, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, \gamma) = 0\}$$

Critical manifold of the dynamic case
= Bifurcation diagram of the static case



BACKGROUND

SIMPLIFIED CLARINET MODEL WITH TIME-VARYING BLOWING PRESSURE

It is a $(1, 1)$ -fast-slow system (2D)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \gamma) \\ \dot{\gamma} &= \epsilon\end{aligned}$$

The fast subsystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \gamma) \\ \dot{\gamma} &= 0\end{aligned}$$

The slow subsystem

$$\begin{aligned}0 &= f(x, \gamma) \\ \gamma' &= 1\end{aligned}$$

x : the amplitude of the mouthpiece pressure p (the fast variable)

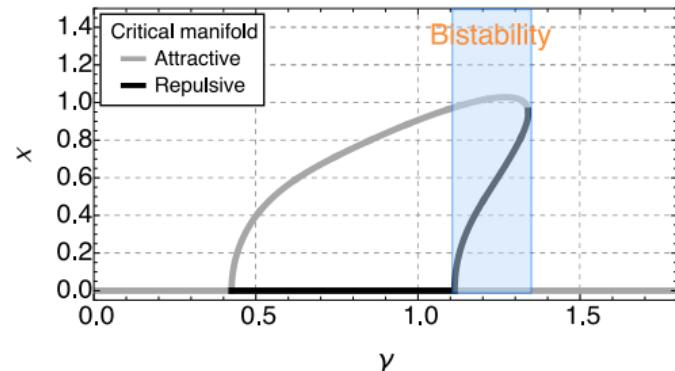
γ : the mouth pressure (the slow variable)

DEFINITION

The critical manifold is defined as

$$\mathcal{M}_0 = \{(x, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, \gamma) = 0\}$$

Critical manifold of the dynamic case
= Bifurcation diagram of the static case



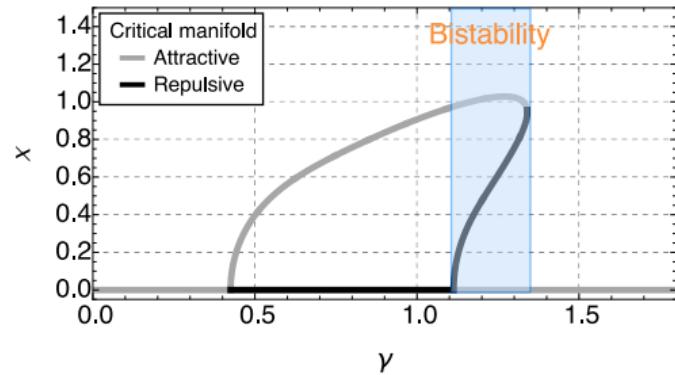
THEOREM (FENICHEL 1979)

If the critical manifold \mathcal{M}_0 is attractive (resp. repulsive), then there exists an invariant manifold \mathcal{M}_ϵ , which is ϵ -close to \mathcal{M}_0 . The invariant manifold \mathcal{M}_ϵ attracts (resp. repels) fastly neighboring orbits.

DEFINITIONS AND METHOD

DEFINITION (DYNAMIC BASIN OF ATTRACTION)

If the critical manifold \mathcal{M}_0 has two simultaneous attractive branches $\mathcal{M}_{0,a}$ (with two associated attractive invariant manifolds $\mathcal{M}_{\epsilon,a}$) separated by a repulsive branch $\mathcal{M}_{0,r}$ (with an associated repulsive) invariant $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$), then the *dynamic basin of attraction* (DBA) of a given attractive part is the subset of the phase space for which orbits originating from initial conditions in the DBA tend to follow this attractive invariant manifold when the bistability region is crossed.



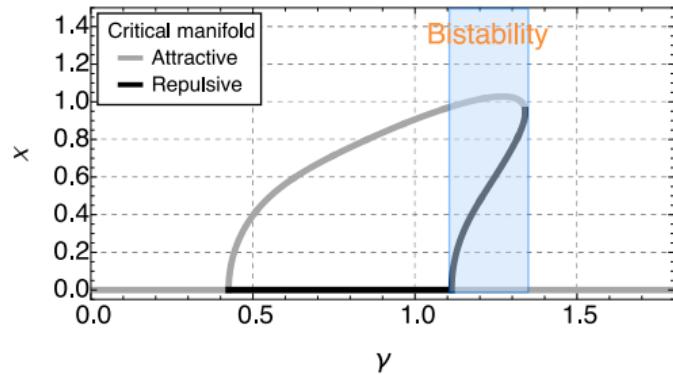
DEFINITIONS AND METHOD

DEFINITION (DYNAMIC BASIN OF ATTRACTION)

If the critical manifold \mathcal{M}_0 has two simultaneous attractive branches $\mathcal{M}_{0,a}$ (with two associated attractive invariant manifolds $\mathcal{M}_{\epsilon,a}$) separated by a repulsive branch $\mathcal{M}_{0,r}$ (with an associated repulsive) invariant $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$), then the *dynamic basin of attraction* (DBA) of a given attractive part is the subset of the phase space for which orbits originating from initial conditions in the DBA tend to follow this attractive invariant manifold when the bistability region is crossed.

DEFINITION (SEPARATRIX BETWEEN DBAs)

The *separatrix between DBAs* (SBDA) is the boundary in the phase space that separates two SBAs.



DEFINITIONS AND METHOD

DEFINITION (DYNAMIC BASIN OF ATTRACTION)

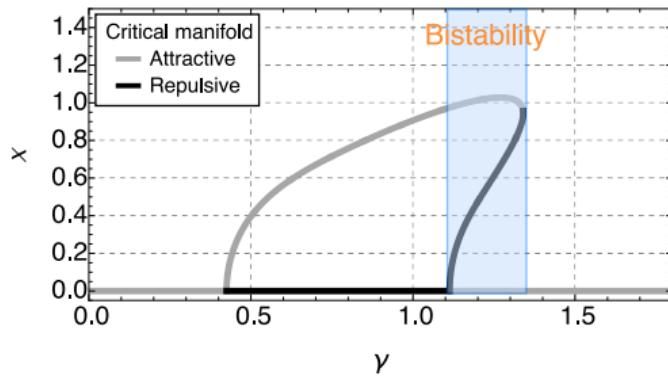
If the critical manifold \mathcal{M}_0 has two simultaneous attractive branches $\mathcal{M}_{0,a}$ (with two associated attractive invariant manifolds $\mathcal{M}_{\epsilon,a}$) separated by a repulsive branch $\mathcal{M}_{0,r}$ (with an associated repulsive) invariant $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$), then the *dynamic basin of attraction* (DBA) of a given attractive part is the subset of the phase space for which orbits originating from initial conditions in the DBA tend to follow this attractive invariant manifold when the bistability region is crossed.

DEFINITION (SEPARATRIX BETWEEN DBAs)

The *separatrix between DBAs* (SBDA) is the boundary in the phase space that separates two SBAs.

NATURE OF THE SEPARATRIX

For our 2D system, the SBDA is the repulsive invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ extended beyond the lower bound of the multistability domain to a point of the phase space having the smallest possible value of the slow variable.



DEFINITIONS AND METHOD

DEFINITION (DYNAMIC BASIN OF ATTRACTION)

If the critical manifold \mathcal{M}_0 has two simultaneous attractive branches $\mathcal{M}_{0,a}$ (with two associated attractive invariant manifolds $\mathcal{M}_{\epsilon,a}$) separated by a repulsive branch $\mathcal{M}_{0,r}$ (with an associated repulsive) invariant $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$), then the *dynamic basin of attraction* (DBA) of a given attractive part is the subset of the phase space for which orbits originating from initial conditions in the DBA tend to follow this attractive invariant manifold when the bistability region is crossed.

DEFINITION (SEPARATRIX BETWEEN DBAs)

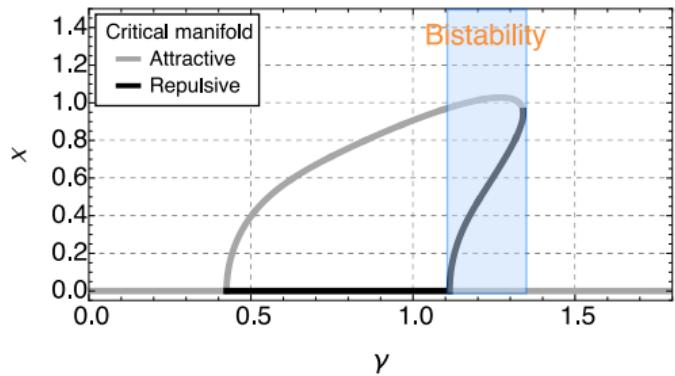
The *separatrix between DBAs* (SBDA) is the boundary in the phase space that separates two SBAs.

NATURE OF THE SEPARATRIX

For our 2D system, the SBDA is the repulsive invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ extended beyond the lower bound of the multistability domain to a point of the phase space having the smallest possible value of the slow variable.

METHOD FOR OBTAINING SBDA

SBDA obtained numerically by **time reversal procedure**



5. INTRODUCTION

6. RETARD À LA BIFURCATION

7. BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUES

7.1. INTRODUCTION

7.2. BACKGROUND AND DEFINITIONS

7.3. ILLUSTRATIONS

7.4. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

ILLUSTRATION WITH THE 2D AVERAGED CLARINET MODEL

TIME REVERSAL PROCEDURE = Numerical time integration of :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -f(x, \gamma) \\ \dot{\gamma} &= -\epsilon\end{aligned}$$

- ▶ The repulsive invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ becomes attractive
- ▶ Initial conditions **close to the critical manifold, on the upper boundary of the bistability region.**

ILLUSTRATION WITH THE 2D AVERAGED CLARINET MODEL

TIME REVERSAL PROCEDURE = Numerical time integration of :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -f(x, \gamma) \\ \dot{\gamma} &= -\epsilon\end{aligned}$$

- ▶ The repulsive invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ becomes attractive
- ▶ Initial conditions **close to the critical manifold, on the upper boundary of the bistability region.**

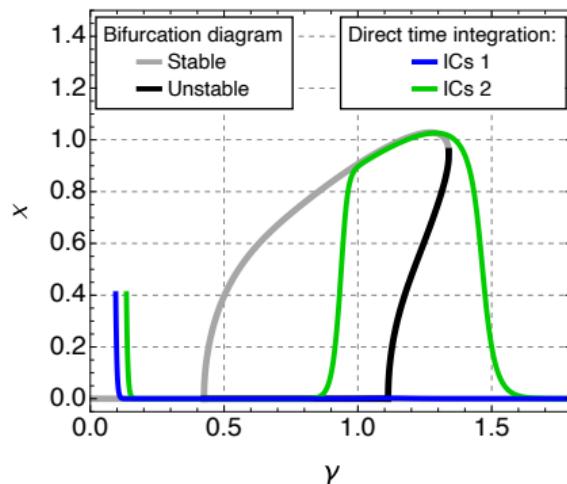


ILLUSTRATION WITH THE 2D AVERAGED CLARINET MODEL

TIME REVERSAL PROCEDURE = Numerical time integration of :

$$\dot{x} = -f(x, \gamma)$$

$$\dot{\gamma} = -\epsilon$$

- ▶ The repulsive invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ becomes attractive
- ▶ Initial conditions **close to the critical manifold, on the upper boundary of the bistability region.**

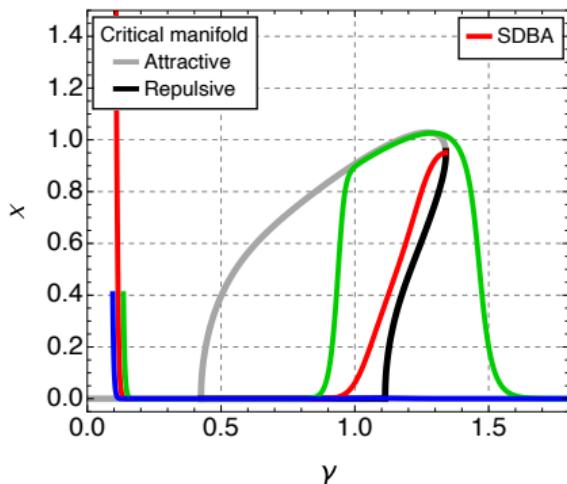


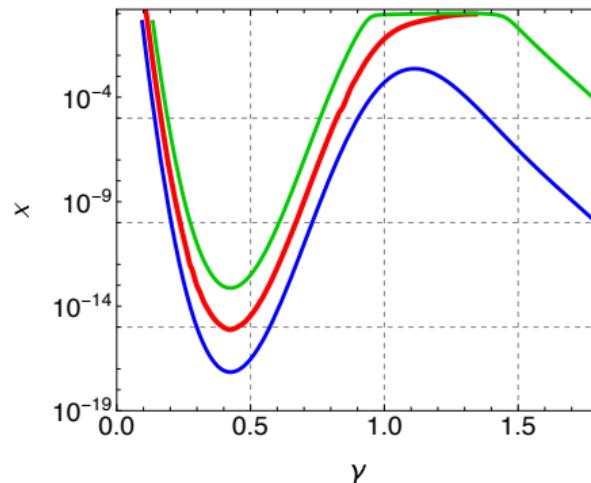
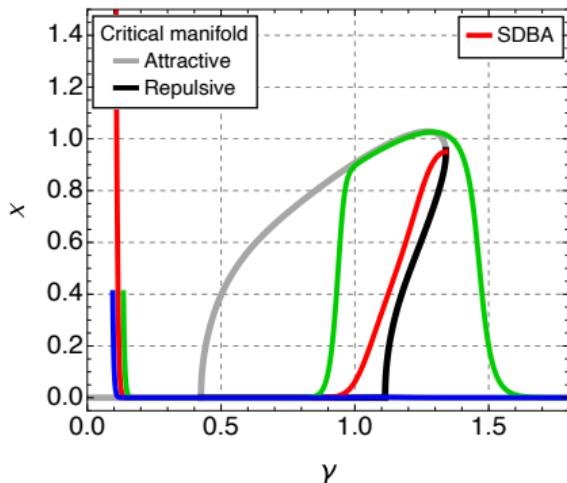
ILLUSTRATION WITH THE 2D AVERAGED CLARINET MODEL

TIME REVERSAL PROCEDURE = Numerical time integration of :

$$\dot{x} = -f(x, \gamma)$$

$$\dot{\gamma} = -\epsilon$$

- ▶ The repulsive invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ becomes attractive
- ▶ Initial conditions **close to the critical manifold, on the upper boundary of the bistability region.**



PLAN

5. INTRODUCTION

6. RETARD À LA BIFURCATION

7. BASSINS D'ATTRACTION DYNAMIQUES

7.1. INTRODUCTION

7.2. BACKGROUND AND DEFINITIONS

7.3. ILLUSTRATIONS

7.4. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

CONCLUSIONS

- ▶ Based on Fenichel's results : definitions of dynamic bassins of attraction and of the separatrix between them has been proposed in the case of a (1, 1)-fast-slow (2D) clarinet model.

CONCLUSIONS

- ▶ Based on Fenichel's results : definitions of dynamic bassins of attraction and of the separatrix between them has been proposed in the case of a (1, 1)-fast-slow (2D) clarinet model.

PERSPECTIVES AND WORK IN PROGRESS

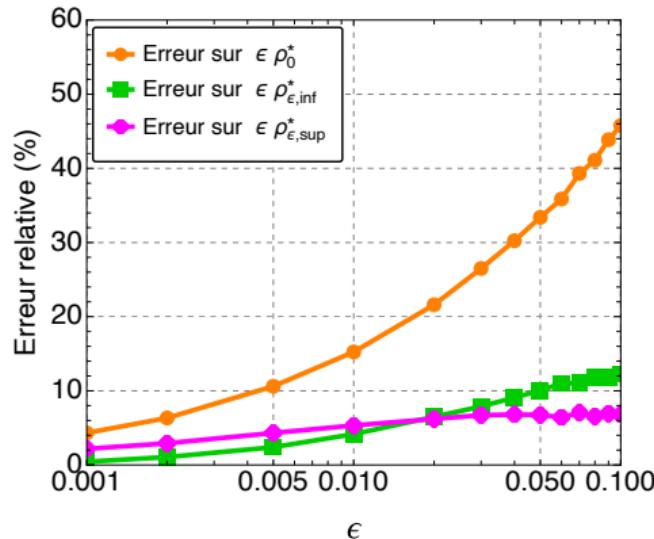
- ▶ Extension to the corresponding (2, 1)-fast-slow (3D) (**preliminary results in appendices**).
- ▶ More realistic time profiles of the blowing pressure (i.e. saturating profiles).
- ▶ Other kind of multistability : two simultaneous stable periodic solutions.
- ▶ Influence of noise (the separatrix can correspond to a very small amplitude).

Annexes

NOUVELLE PRÉDICTION THÉORIQUE DE LA LIMITÉ DE FONCTIONNEMENT

Limite de fonctionnement « physique » : $\ddot{x} + \epsilon \rho \dot{x} (x^2 - 1) + x = 0$

Erreur relative : $100 \times |\epsilon \rho_{\text{num}}^* - \epsilon \rho_{\text{th}}^*| / (\epsilon \rho_{\text{num}}^*)$ avec $\rho_{\text{th}}^* = \{\rho_0^*, \rho_{\epsilon,\text{inf}}^*, \rho_{\epsilon,\text{sup}}^*\}$



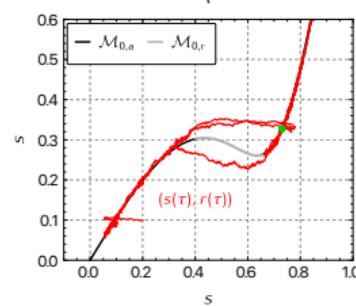
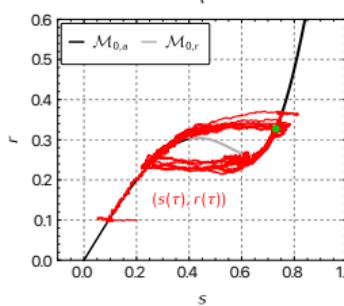
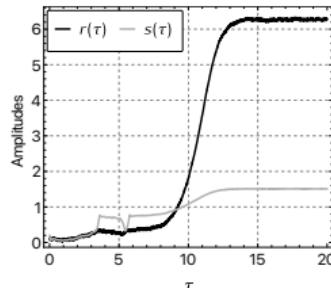
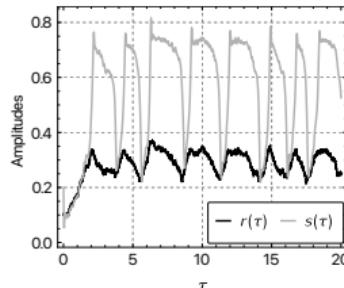
EXAMPLES OF SIMULATIONS

$\rho < \rho^*$ (SMR (mitigation) in deterministic case)

EXAMPLES OF SIMULATIONS

$\rho < \rho^*$ (SMR (mitigation) in deterministic case)

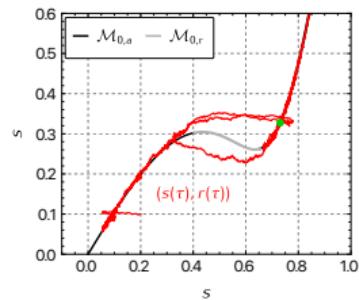
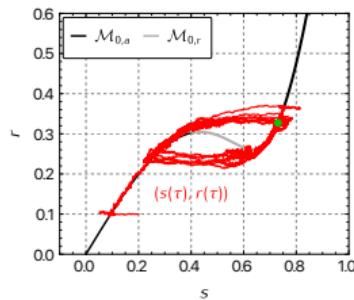
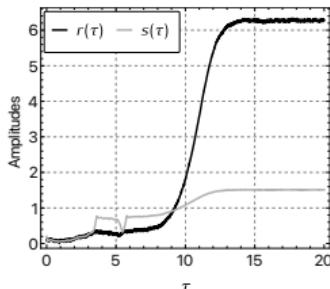
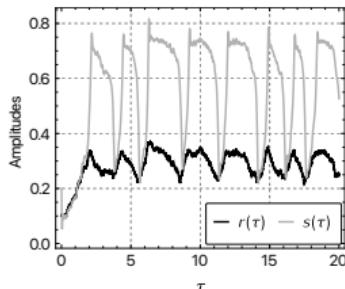
- ▶ Stochastic case (example of 2 samples) :



EXAMPLES OF SIMULATIONS

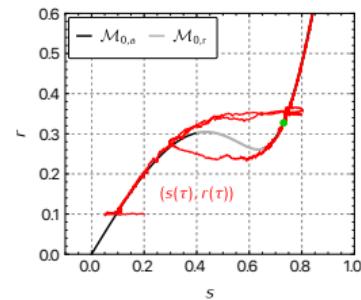
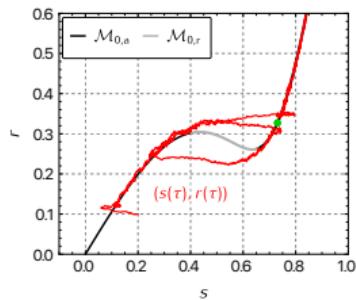
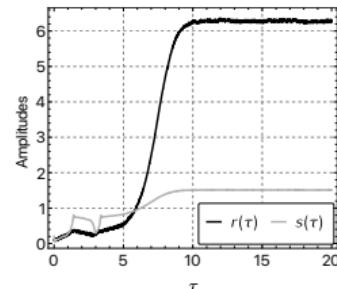
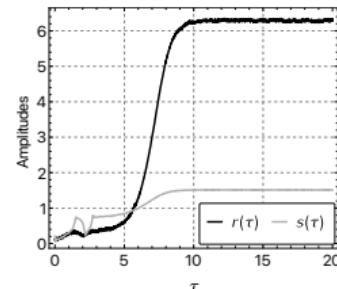
$\rho < \rho^*$ (SMR (mitigation) in deterministic case)

► Stochastic case (example of 2 samples) :



$\rho > \rho^*$ (no mitigation in deterministic case)

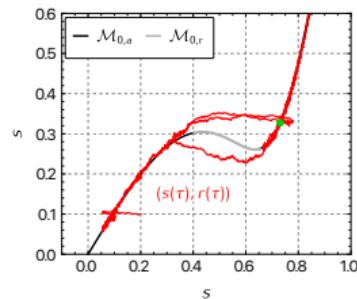
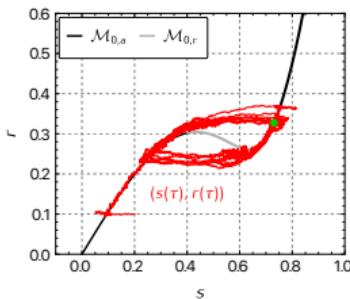
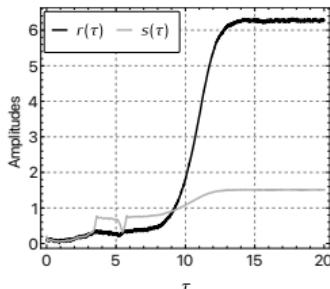
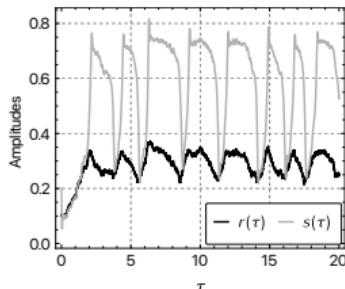
► Stochastic case (example of 2 samples) :



EXAMPLES OF SIMULATIONS

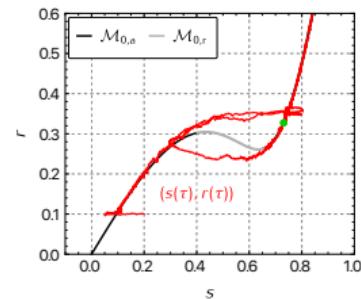
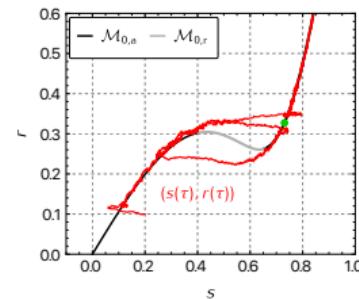
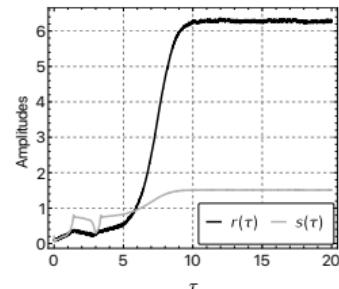
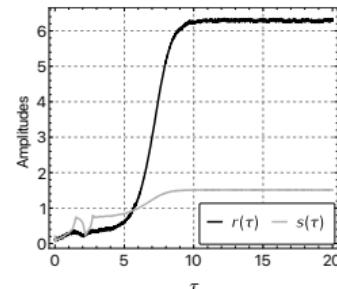
$\rho < \rho^*$ (SMR (mitigation) in deterministic case)

- Stochastic case (example of 2 samples) :



$\rho > \rho^*$ (no mitigation in deterministic case)

- Stochastic case (example of 2 samples) :

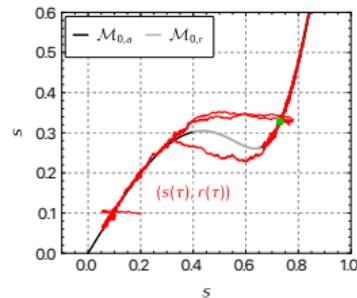
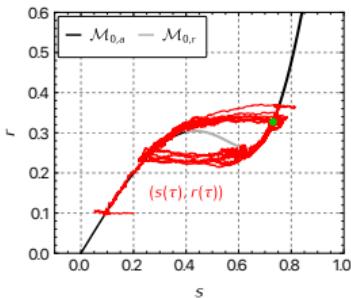
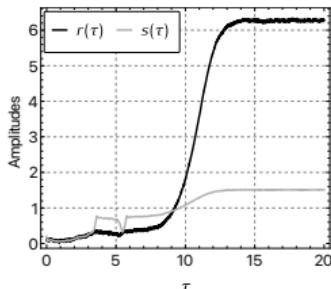
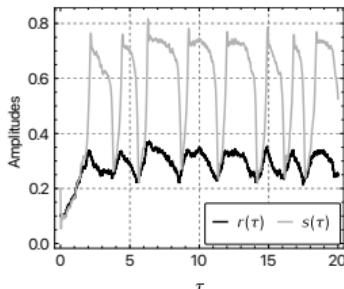


- Reasoning which allows to predict the system behavior in the deterministic case can be contradicted (the effect of noise is not only due to what happens at the left fold point).

EXAMPLES OF SIMULATIONS

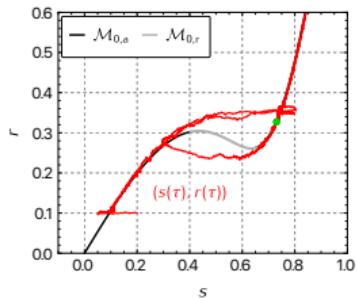
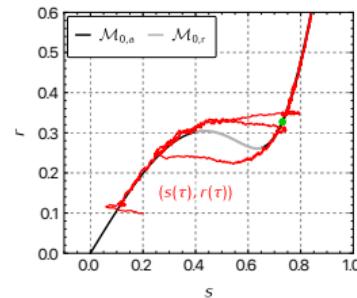
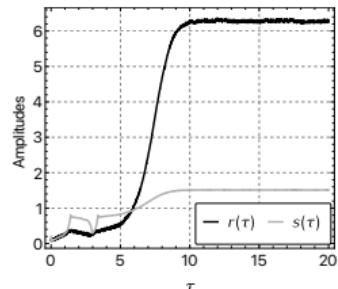
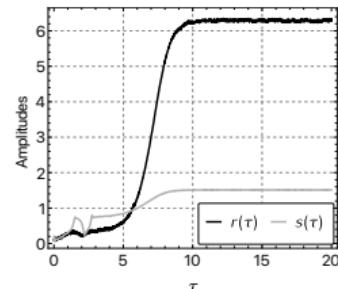
$\rho < \rho^*$ (SMR (mitigation) in deterministic case)

- Stochastic case (example of 2 samples) :



$\rho > \rho^*$ (no mitigation in deterministic case)

- Stochastic case (example of 2 samples) :



- Reasoning which allows to predict the system behavior in the deterministic case can be contradicted (the effect of noise is not only due to what happens at the left fold point).
- On average, the arrival point in presence noise is larger than in the deterministic case.

BOUCHE ARTIFICIELLE ASSERVIE

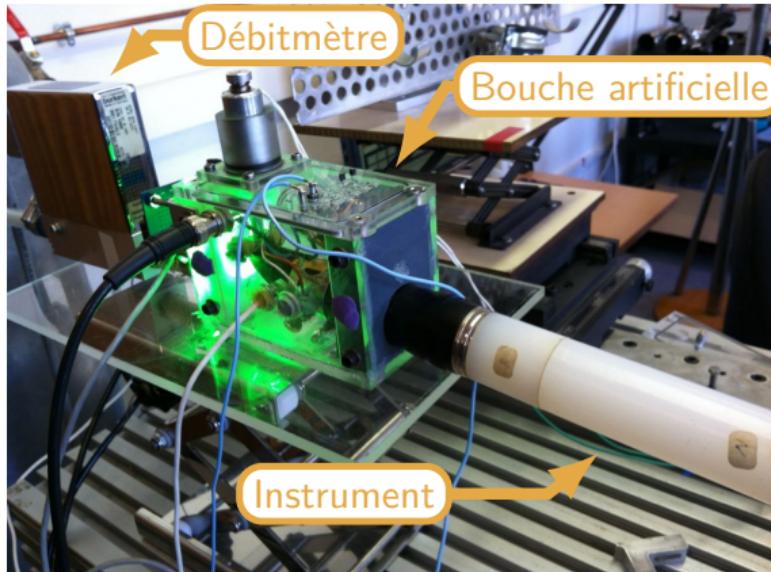
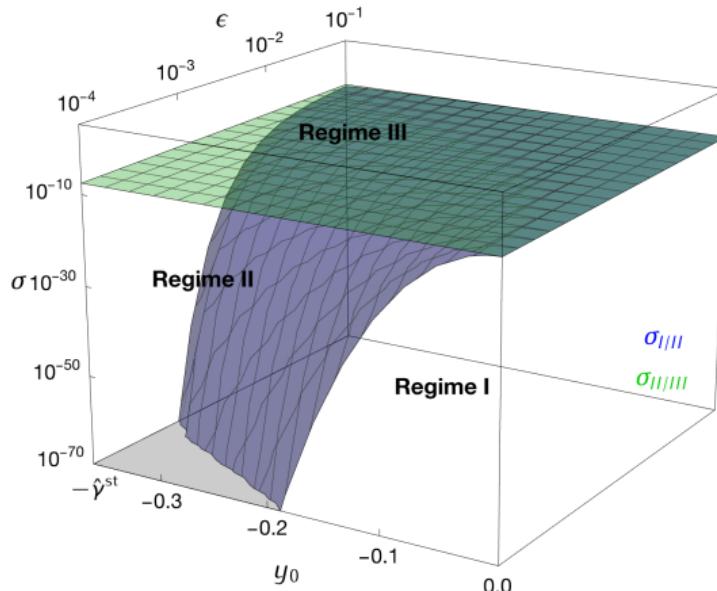


Figure – Bouche artificielle asservie du LMA.

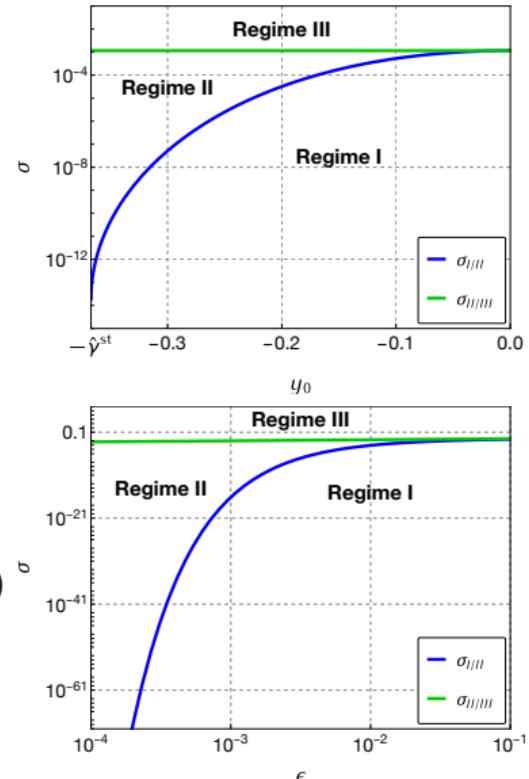
PRÉDICTION THÉORIQUE DES DOMAINES D'EXISTENCE DES RÉGIMES



Rappel :
 ϵ = vitesse de variation de y (i.e. de pression bouche)
 σ = importance du bruit
 y_0 = valeur initiale de y .

Frontière entre régimes I et II : dépend du triplet (ϵ, σ, y_0)

Frontière entre régimes I/II et III : dépend surtout de σ



DYNAMIC BASIN OF ATTRACTION

EXTENSION TO THE 3D ORIGINAL CLARINET MODEL

2D AVERAGED DYNAMICS

- ▶ Non trivial fixed points

3D ORIGINAL DYNAMICS

- ▶ Periodic solutions

DYNAMIC BASIN OF ATTRACTION

EXTENSION TO THE 3D ORIGINAL CLARINET MODEL

2D AVERAGED DYNAMICS

- ▶ Non trivial fixed points
- ▶ SBDA (1D) : extension of a repulsive 1D invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ associated to an unstable fixed point of the fast subsystem

3D ORIGINAL DYNAMICS

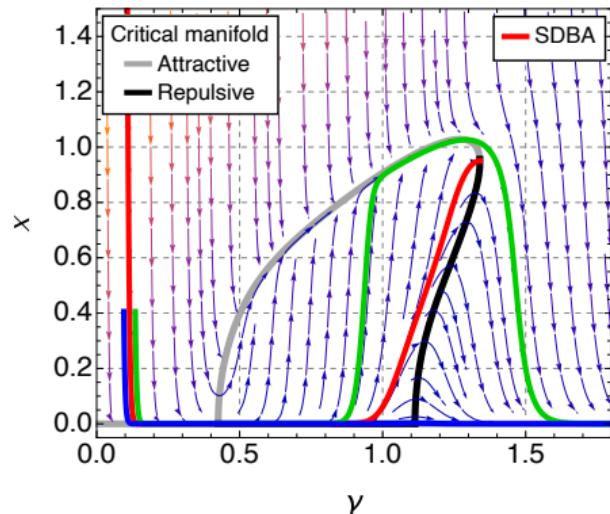
- ▶ Periodic solutions
- ▶ SBDA (2D) : extension of a repulsive 2D invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ associated to an unstable periodic solution of the fast subsystem ?

DYNAMIC BASIN OF ATTRACTION

EXTENSION TO THE 3D ORIGINAL CLARINET MODEL

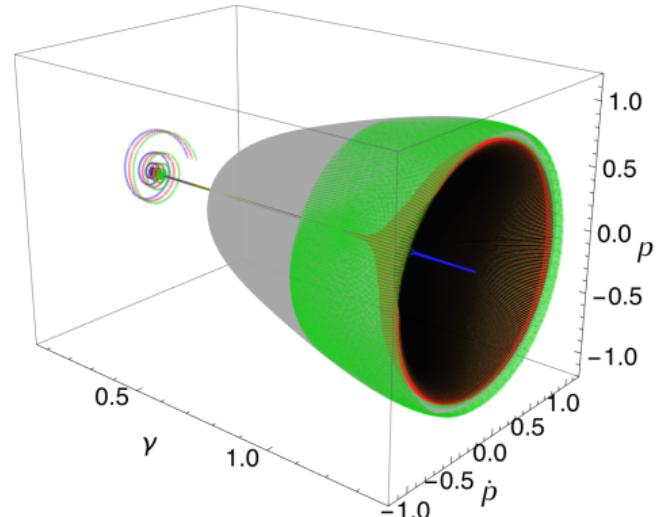
2D AVERAGED DYNAMICS

- ▶ Non trivial fixed points
- ▶ SBDA (1D) : extension of a repulsive 1D invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ associated to an unstable fixed point of the fast subsystem



3D ORIGINAL DYNAMICS

- ▶ Periodic solutions
- ▶ SBDA (2D) : extension of a repulsive 2D invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ associated to an unstable periodic solution of the fast subsystem ?

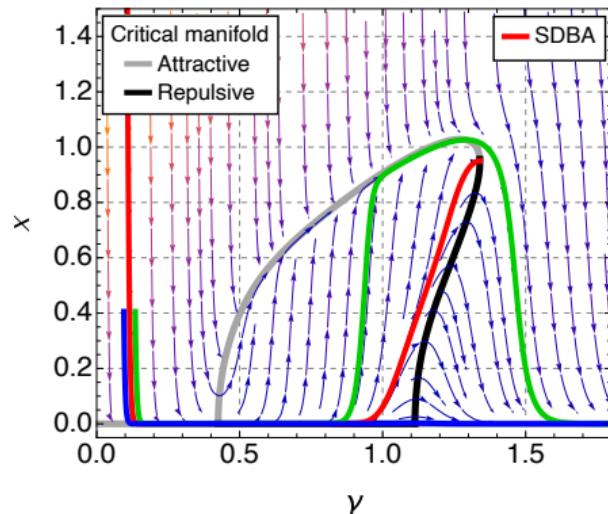


DYNAMIC BASIN OF ATTRACTION

EXTENSION TO THE 3D ORIGINAL CLARINET MODEL

2D AVERAGED DYNAMICS

- ▶ Non trivial fixed points
- ▶ SBDA (1D) : extension of a repulsive 1D invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ associated to an unstable fixed point of the fast subsystem



3D ORIGINAL DYNAMICS

- ▶ Periodic solutions
- ▶ SBDA (2D) : extension of a repulsive 2D invariant manifold $\mathcal{M}_{\epsilon,r}$ associated to an unstable periodic solution of the fast subsystem ?

