

# Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable

Baptiste Bergeot

Post-Doctorant à l'École Centrale Marseille (LMA)

---

Travaux de thèse (LAUM), dirigée par :

**André Almeida, Christophe Vergez et Bruno Gazengel**

12 Novembre 2013



# Sommaire

## 1 Introduction

## 2 État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale

## 3 Observations sur des systèmes maîtrisés

## 4 Étude analytique du cas dynamique

## 5 Conclusion

# Contexte général

## Projet ANR SDNS-AIMV

Systèmes Dynamiques Non Stationnaires - Application aux Instruments de Musique à Vent

Étude des transitoires d'attaque dans les clarinettes

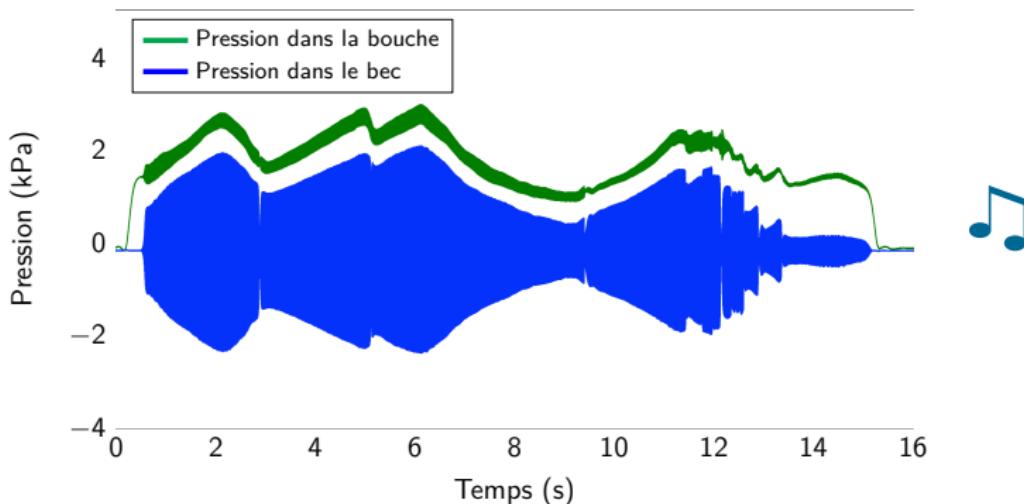


# Contexte général

## Projet ANR SDNS-AIMV

Systèmes Dynamiques Non Stationnaires - Application aux Instruments de Musique à Vent

### Étude des transitoires d'attaque dans les clarinettes



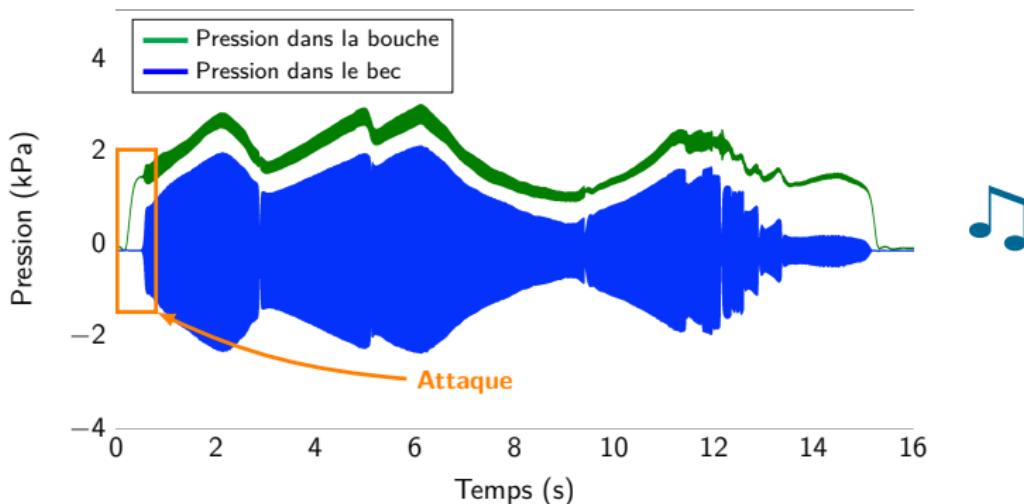
**Figure :** Exercice d'entraînement joué à la clarinette par P.A. Taillard sur un bocal instrumenté (SDNS-AIMV). Phrase musicale complète.

# Contexte général

## Projet ANR SDNS-AIMV

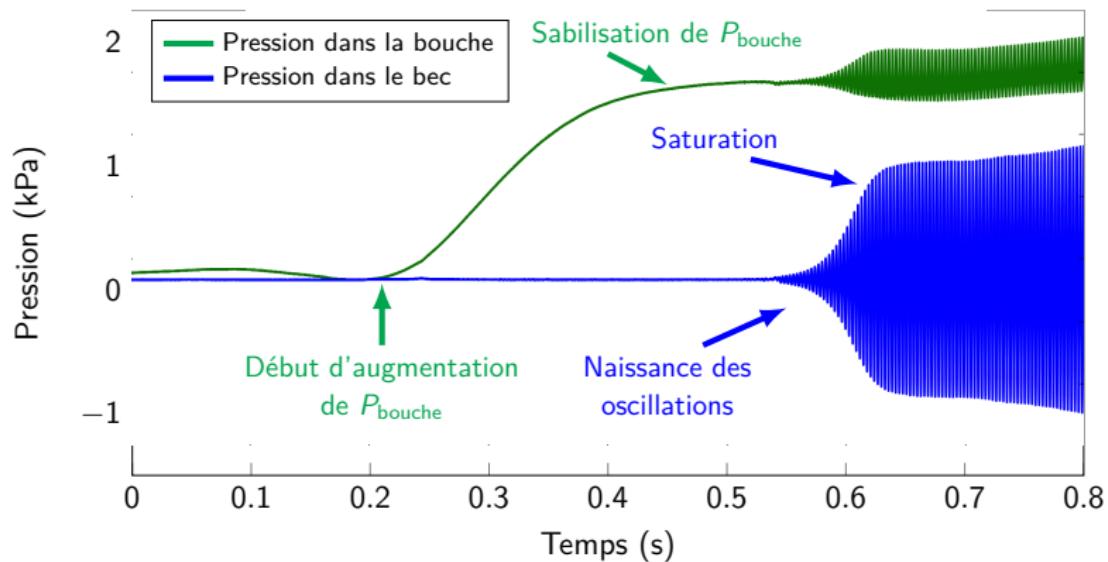
Systèmes Dynamiques Non Stationnaires - Application aux Instruments de Musique à Vent

### Étude des transitoires d'attaque dans les clarinettes



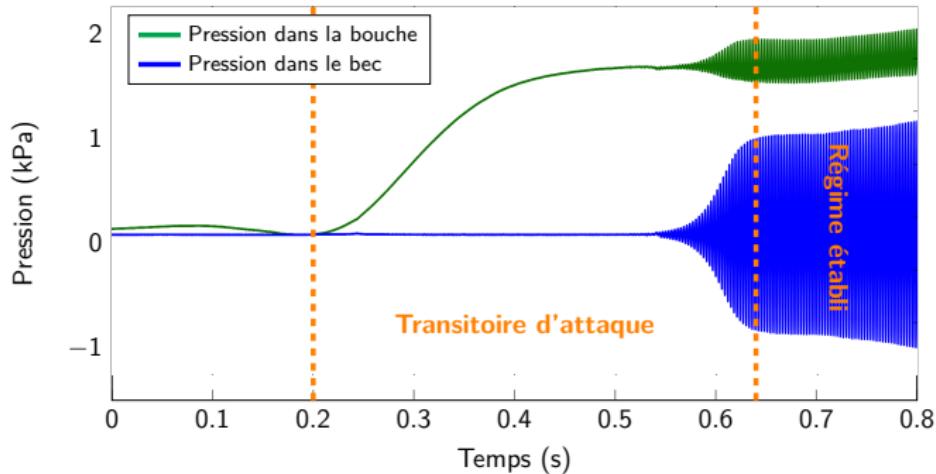
**Figure :** Exercice d'entraînement joué à la clarinette par P.A. Taillard sur un bocal instrumenté (SDNS-AIMV). Phrase musicale complète.

## Description de l'attaque



**Figure :** Exercice d'entraînement joué à la clarinette par P.A. Taillard sur un bœuf instrumenté (SDNS-AIMV). Description de l'attaque.

# Transitoire d'attaque



**Figure :** Exercice d'entraînement joué à la clarinette. Début et fin du transitoire d'attaque.

## Transitoire d'attaque :

- ⇒ **Début** : moment où la pression dans la bouche commence à augmenter ;
- ⇒ **Fin** : quand le régime établi sur la pression dans le bec est atteint.

**Pendant le transitoire d'attaque  
le musicien contrôle :**



**Pendant le transitoire d'attaque  
le musicien contrôle :**

⇒ la pression dans sa bouche;



**Pendant le transitoire d'attaque  
le musicien contrôle :**

- ⇒ la pression dans sa bouche ;
- ⇒ la force d'appui de sa lèvre sur l'anche ;



**Pendant le transitoire d'attaque  
le musicien contrôle :**

- ⇒ la pression dans sa bouche ;
- ⇒ la force d'appui de sa lèvre sur l'anche ;
- ⇒ conduit vocal ;



**Pendant le transitoire d'attaque  
le musicien contrôle :**

- ⇒ la pression dans sa bouche ;
- ⇒ la force d'appui de sa lèvre sur l'anche ;
- ⇒ conduit vocal ;
- ⇒ l'ouverture du canal d'anche avec sa langue ;



**Pendant le transitoire d'attaque  
le musicien contrôle :**

- ⇒ la pression dans sa bouche ;
- ⇒ la force d'appui de sa lèvre sur l'anche ;
- ⇒ conduit vocal ;
- ⇒ l'ouverture du canal d'anche avec sa langue ;
- ⇒ ...



**Pendant le transitoire d'attaque  
le musicien contrôle :**

- ⇒ la pression dans sa bouche ;
- ⇒ la force d'appui de sa lèvre sur l'anche ;
- ⇒ conduit vocal ;
- ⇒ l'ouverture du canal d'anche avec sa langue ;
- ⇒ ...

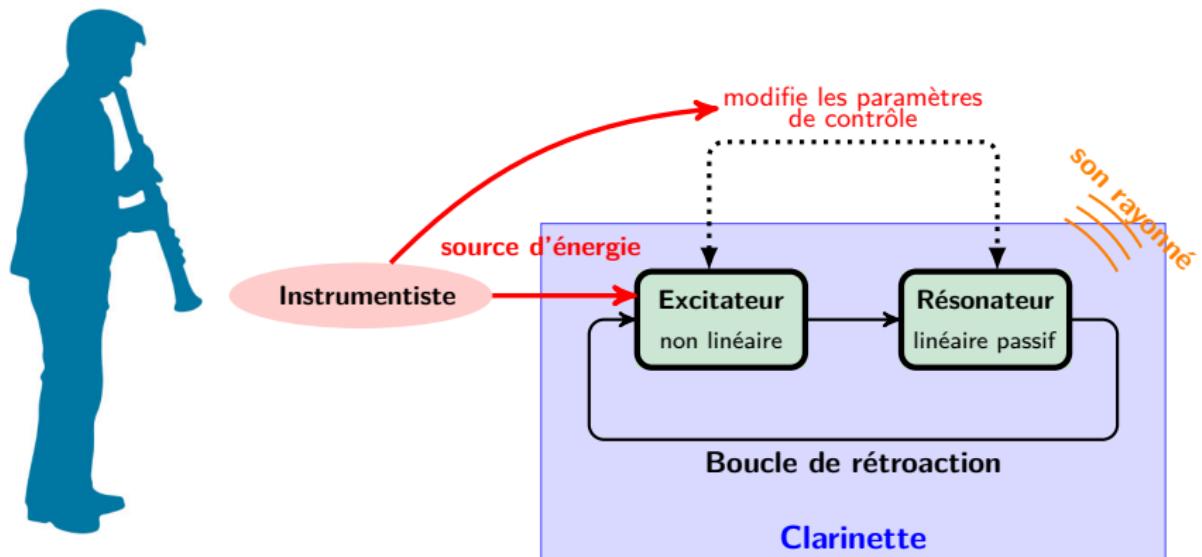
### Paramètres de contrôle



Geste instrumental



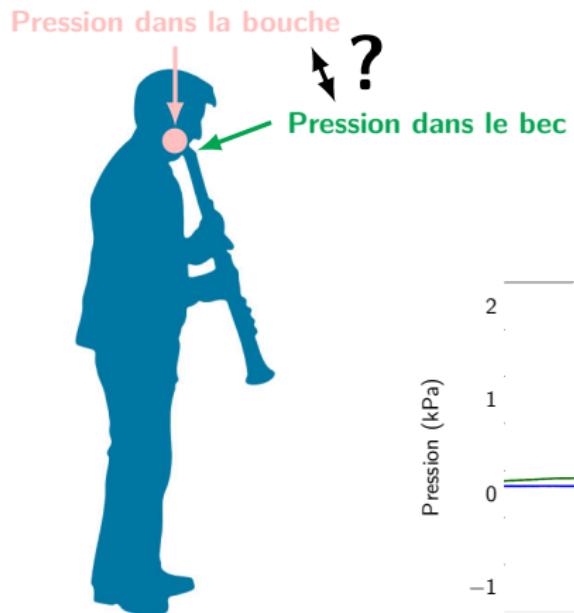
## La clarinette : un instrument auto-oscillant



[Mc Intyre et al., *On the oscillation of musical instruments*, JASA, 1983.]

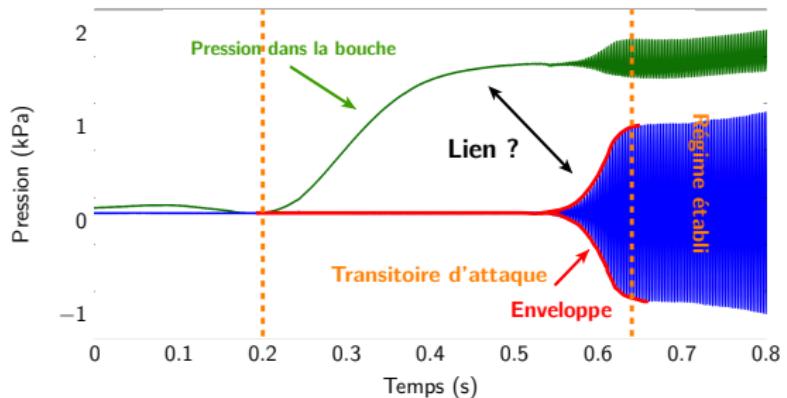
On s'intéresse à l'influence de la variation de la **pression dans la bouche** sur la naissance des auto-oscillations (**observées dans le bec.**)

On s'intéresse à l'influence de la variation de la **pression dans la bouche** sur la naissance des auto-oscillations (**observées dans le bec.**)

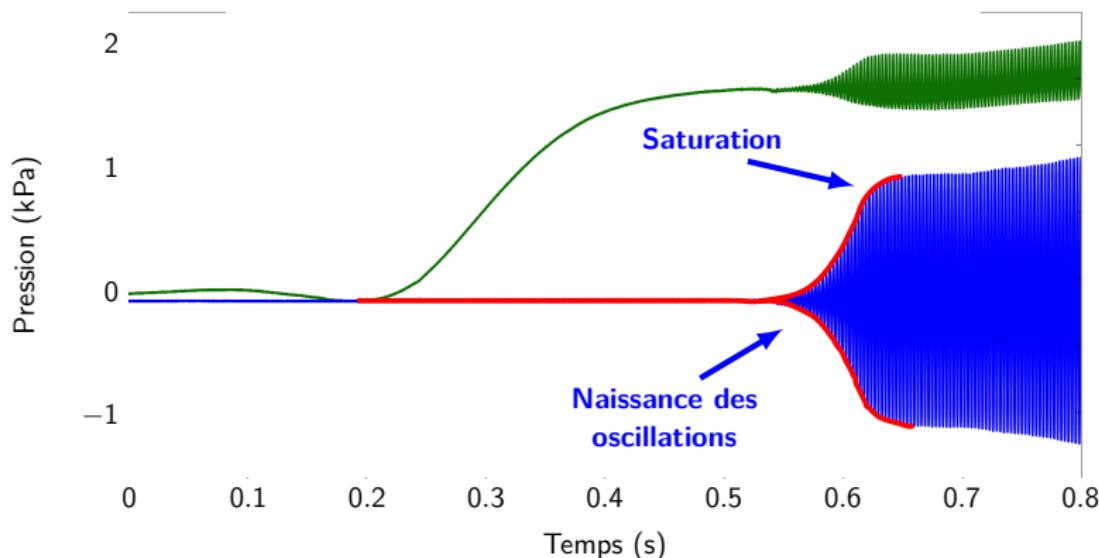


## Objectif

Relier l'**enveloppe de la pression dans le bec** au **profil temporel de la pression de la bouche**.

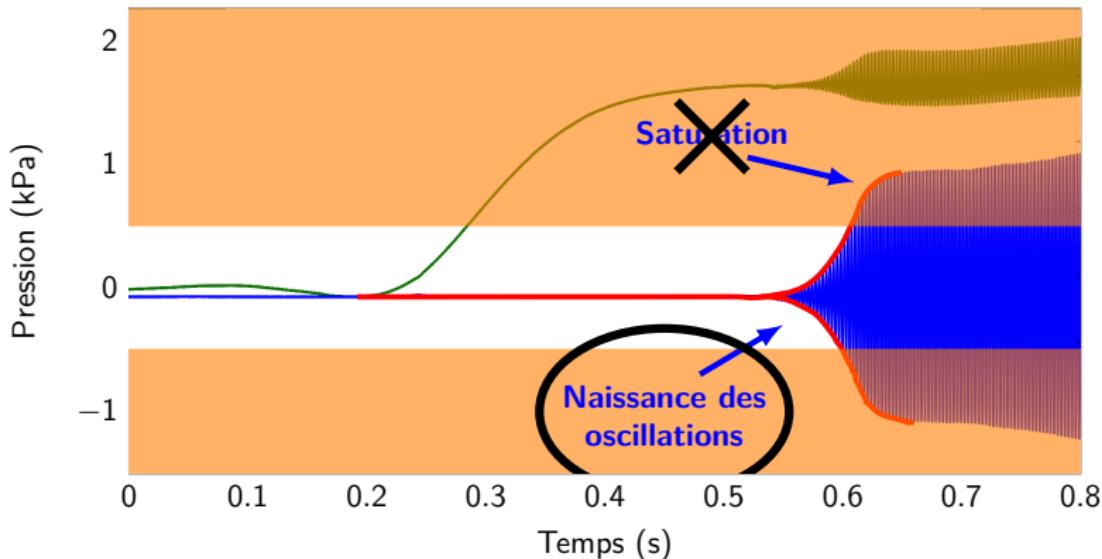


## Réduction du domaine d'étude :



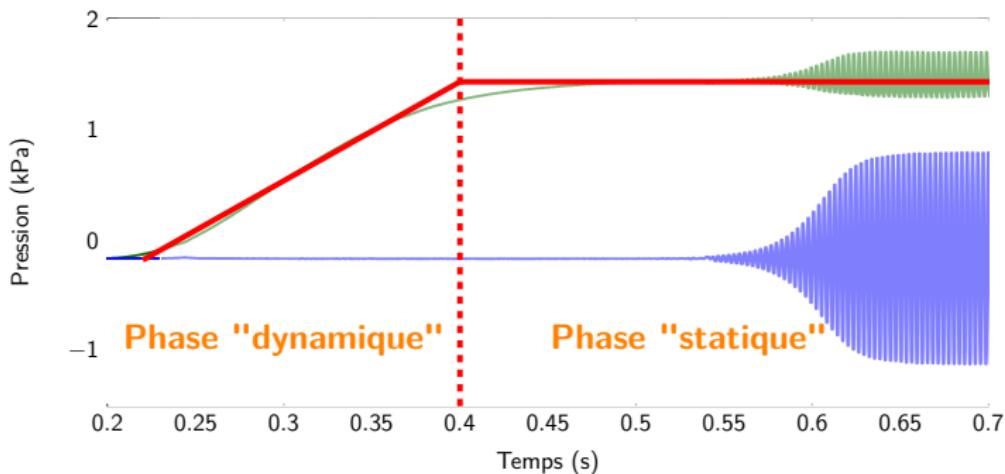
## Réduction du domaine d'étude :

⇒ On ne s'intéresse qu'à la naissance des oscillations. Pas à la saturation ;

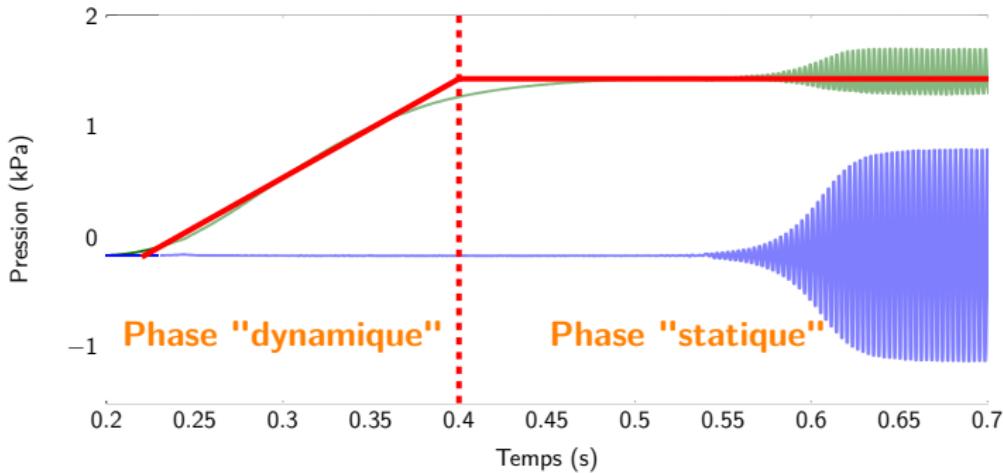


- ⇒ Pression dans la bouche variable, les autres paramètres de contrôle sont constants ;

- ⇒ Pression dans la bouche variable, les autres paramètres de contrôle sont constants ;
- ⇒ Profil idéal pour la pression dans la bouche :
  - Phase "dynamique" : la pression dans la bouche augmente linéairement.
  - Phase "statique" : la pression dans la bouche constante.



- ⇒ Pression dans la bouche variable, les autres paramètres de contrôle sont constants ;
- ⇒ Profil idéal pour la pression dans la bouche :
  - Phase "dynamique" : la pression dans la bouche augmente linéairement.
  - Phase "statique" : la pression dans la bouche constante.



### Vocabulaire

... "dynamique" : pression dans la bouche variable  
... "statique" : pression dans la bouche constante

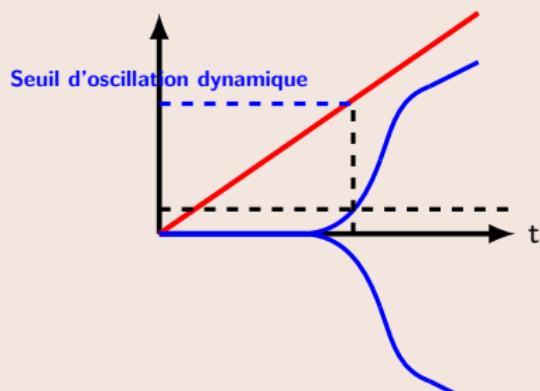
## Phase "Statique" :

- ⇒ Littérature importante en physique des instruments de musique ;
- ⇒ Comportement de l'instrument bien connu.

## Phase "Statique" :

- ⇒ Littérature importante en physique des instruments de musique ;
- ⇒ Comportement de l'instrument bien connu.

## Étude de la phase "dynamique"



$$P_{\text{bouche}}(t) = at + b$$

### Enveloppe du son

- ⇒ Descripteur de la naissance des oscillations :
- Seuil d'oscillation dynamique**

**Définition** : valeur de la pression dans la bouche après laquelle une seuil sur l'amplitude du son (arbitrairement défini) est dépassé

- ⇒ Influence de  $a$  et  $b$  sur le **seuil d'oscillation dynamique**.

# Sommaire

- ① Introduction
- ② État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale
  - Modèle de clarinette dit de "Raman"
  - Comportement "statique" du modèle
  - Comportement "dynamique" du modèle
- ③ Observations sur des systèmes maîtrisés
  - Mesure sur bouche artificielle
  - Simulations numériques du modèle de "Raman"
- ④ Étude analytique du cas dynamique
  - La théorie de la bifurcation dynamique
  - La courbe invariante
  - Prédiction de l'enveloppe
- ⑤ Conclusion

# Sommaire

## 1 Introduction

## 2 État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale

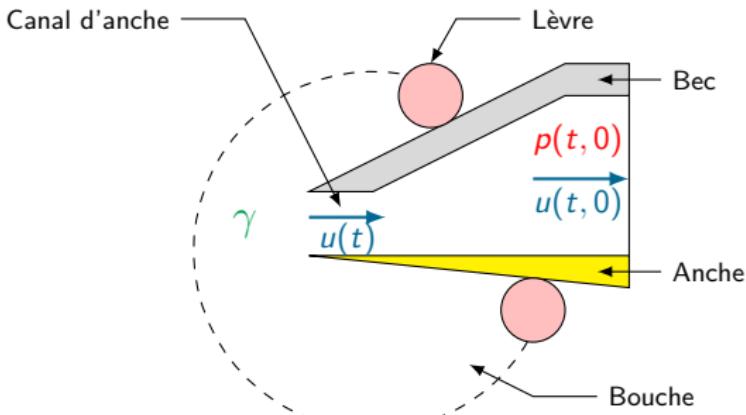
- Modèle de clarinette dit de "Raman"
- Comportement "statique" du modèle
- Comportement "dynamique" du modèle

## 3 Observations sur des systèmes maîtrisés

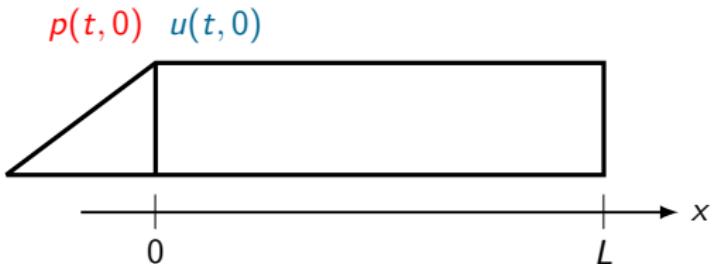
## 4 Étude analytique du cas dynamique

## 5 Conclusion

Le système  
anche bec  
(l'exciteur)



Le corps de  
l'instrument  
(le résonateur)



**Remarque :** utilisation de variables adimensionnées

[Chaigne & Kergomard, "Acoustique de instruments de musique", Chap. 9, 2008]

# Le modèle dit "de Raman" [Chaigne & Kergomard, Chap. 9, 2008]

**Clarinette  $\equiv$  résonateur cylindrique**

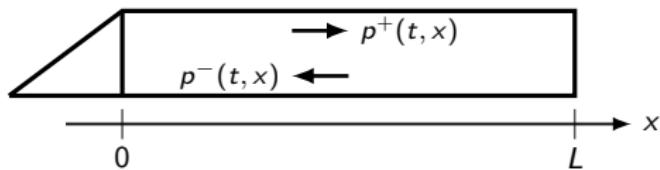
## Le modèle dit "de Raman" [Chaigne & Kergomard, Chap. 9, 2008]

Clarinette  $\equiv$  résonateur cylindrique

$\Rightarrow$  Propagation d'ondes planes : Représentation en onde aller  $p^+$  et onde retour  $p^-$

$$p = p^+ + p^-$$

$$u = p^+ - p^-$$

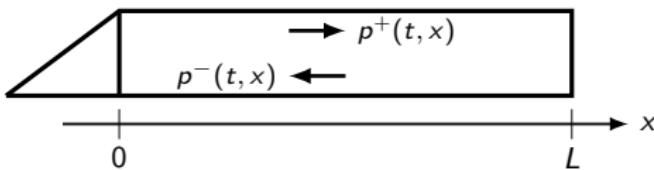


## Le modèle dit "de Raman" [Chaigne & Kergomard, Chap. 9, 2008]

### Clarinette $\equiv$ résonateur cylindrique

$\Rightarrow$  Propagation d'ondes planes : Représentation en onde aller  $p^+$  et onde retour  $p^-$

$$p = p^+ + p^- \quad u = p^+ - p^-$$



$\Rightarrow$  C.L.1 : Conditions à la limite à l'extrémité ( $x = L$ ) : Réflexion totale à l'extrémité d'un tube ouvert :

$$\text{À l'extrémité ; } x = L \quad p^-(t, L) = -p^+(t, L)$$

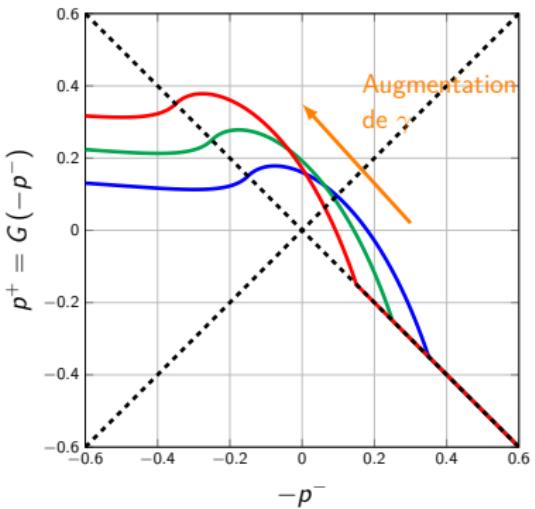
$$\text{Au niveau du bec ; } x = 0 \quad p^-(t, 0) = -\lambda p^+(t - \tau, 0)$$

$\tau$  : durée d'un aller-retour de l'onde dans le résonateur.

$\lambda$  : paramètre de pertes : constant pour une longueur donnée du résonateur

⇒ C.L.2 : Conditions à la limite au niveau du bec ( $x=0$ ) : **Non linéaire**  
 (hydrodynamique de l'écoulement à l'entrée du bec :  $u = F(\gamma - p)$  par Bernoulli)

$\{p; u\}$  <b>Bernoulli</b>	$\{p^+; p^-\}$  $p^+(t, 0) = G(-p^-(t, 0))$
------------------------------------	---



**Figure :** Fonction  $G$ . Effet de la variation de  $\gamma$ .

Expression analytique de  $G$  : [Taillard et al., "Iterated maps for clarinet-like systems", *Nonlinear dynamics*, 2010]

$$\mathbf{C.L.1 \text{ et } C.L.2} \implies p^+(t, 0) = G(\lambda p^+(t - \tau, 0))$$

$$\text{C.L.1 et C.L.2} \implies p^+(t, 0) = G(\lambda p^+(t - \tau, 0))$$

**Notation :**  $p^+(n\tau, 0) = p_n^+$  et  $G(\lambda x) = f(x)$ .

Le système est décrit par une **carte itérée** :  $p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$

Paramètre de contrôle  $\gamma$

[Maganza et al., *Europhysics Letters*, 1986]

$$\text{C.L.1 et C.L.2} \implies p^+(t, 0) = G(\lambda p^+(t - \tau, 0))$$

**Notation :**  $p^+(n\tau, 0) = p_n^+$  et  $G(\lambda x) = f(x)$ .

Le système est décrit par une **carte itérée** :  $p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$

Paramètre de contrôle  $\gamma$

[Maganza et al., *Europhysics Letters*, 1986]

**Modèle sans pertes** :  $\lambda = 1$

---

$$\text{C.L.1 et C.L.2} \implies p^+(t, 0) = G(\lambda p^+(t - \tau, 0))$$

**Notation :**  $p^+(n\tau, 0) = p_n^+$  et  $G(\lambda x) = f(x)$ .

Le système est décrit par une **carte itérée** :  $p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$

Paramètre de contrôle  $\gamma$

[Maganza et al., *Europhysics Letters*, 1986]

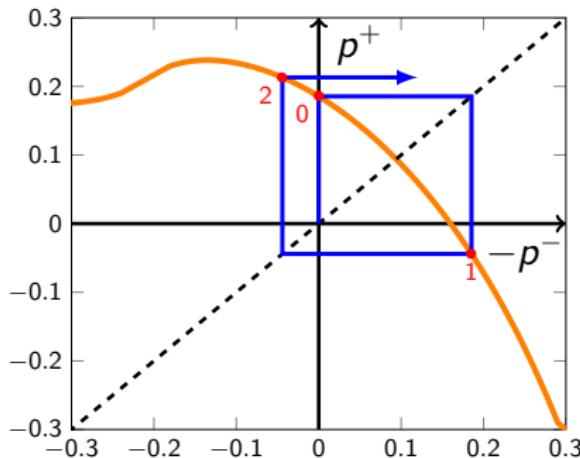
**Modèle sans pertes** :  $\lambda = 1$

**Figure :** Résolution graphique de

$$p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$$

— Fonction  $f$

- - - Identité



# Étude "statique" : comportement du modèle quand $\gamma$ est constant

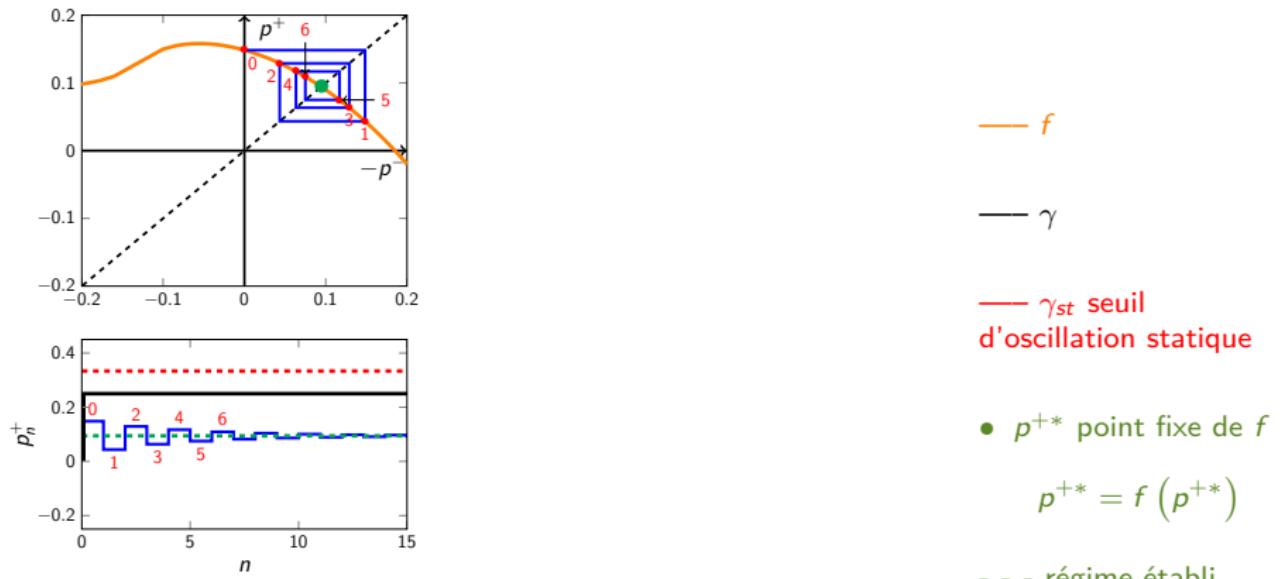
## Seuil d'oscillation statique

[Feigenbaum, *J. Stat. Phy.*, 1979] [Dalmont et al., JASA, 2005.] [Taillard et al., *Nonlinear dynam.*, 2010]

# Étude "statique" : comportement du modèle quand $\gamma$ est constant

## Seuil d'oscillation statique

[Feigenbaum, *J. Stat. Phy.*, 1979] [Dalmont et al., *JASA*, 2005.] [Taillard et al., *Nonlinear dynam.*, 2010]



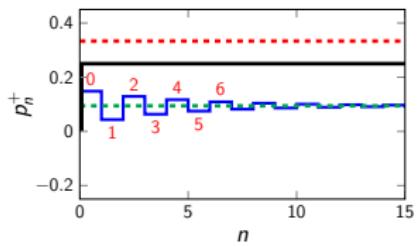
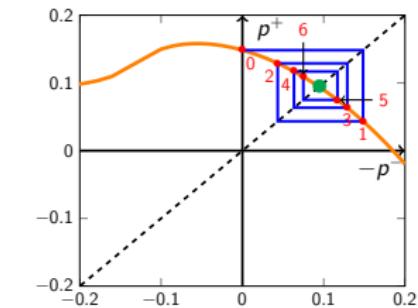
Point fixe de  $f$  stable ( $\gamma < \gamma_{st}$ )

Régime établi non oscillant

# Étude "statique" : comportement du modèle quand $\gamma$ est constant

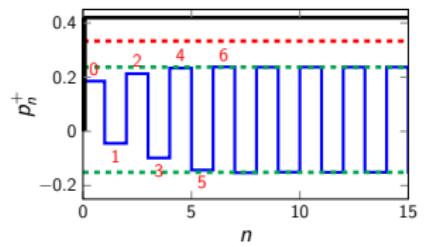
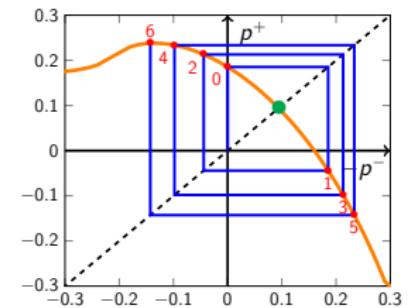
## Seuil d'oscillation statique

[Feigenbaum, *J. Stat. Phy.*, 1979] [Dalmont et al., *JASA*, 2005.] [Taillard et al., *Nonlinear dynam.*, 2010]



Point fixe de  $f$  stable ( $\gamma < \gamma_{st}$ )

Régime établi non oscillant



Point fixe de  $f$  instable ( $\gamma > \gamma_{st}$ )

Régime établi oscillant

—  $f$   
—  $\gamma$   
—  $\gamma_{st}$  seuil  
d'oscillation statique

- $p^{+*}$  point fixe de  $f$  :

$$p^{+*} = f(p^{+*})$$

- - - régime établi

## Enveloppe au début du transitoire, stabilité du point fixe de $f$ et seuil d'oscillation statique

Linéarisation de la fonction d'itération  $f$  autour de son point fixe  $p^{+*}$

$\Rightarrow$  L'écart au point  $w_n = p_n^+ - p^{+*}$

$$w_n \approx w_0 [f'(p^{+*})]^n.$$

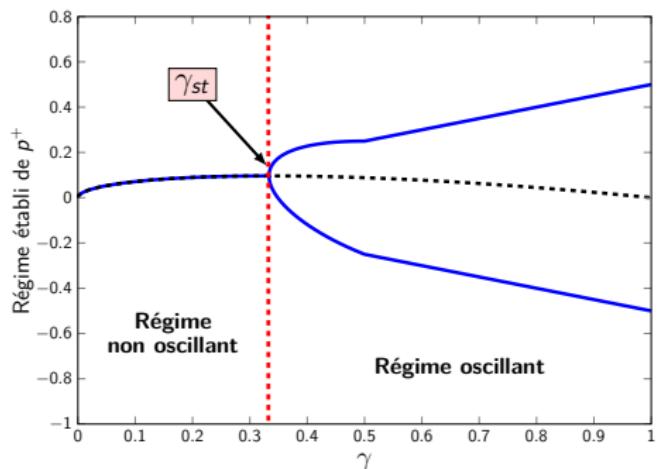
- $|f'(p^{+*})| < 1$  :  $p_n^+$  décroît exponentiellement vers  $p^{+*}$  ;
- $|f'(p^{+*})| > 1$  :  $p_n^+$  s'écarte exponentiellement de  $p^{+*}$ .

$\Rightarrow$  Condition de stabilité du point fixe :  $|f'(p^{+*})| < 1$

$\Rightarrow$  **Seuil d'oscillation statique**  $\gamma_{st}$  : valeur de  $\gamma$  solution de la condition de stabilité du point fixe.

## Diagramme de bifurcation "statique"

- ⇒ Représente l'amplitude du régime établi de  $p^+$  en fonction de  $\gamma$ .
- ⇒ Obtenu en choisissant une valeur de  $\gamma$  et en laissant le système atteindre son régime établi ;
- ⇒ Opération répétée pour chaque valeur  $\gamma$ .



**Figure :** Diagramme de bifurcation "statique" du modèle sans pertes.

$\gamma_{st}$  : Seuil d'oscillation statique

- - - : courbe des points fixes de  $f : p^{+*}(\gamma)$ .

# Comportement "dynamique" du modèle dans la littérature

[Atig et al., *Appl. Acoust.*, 2004]

- ⇒ (c) Simulation temporelle du modèle de "Raman" avec variation linéaire de la pression dans la bouche.
- ⇒ (a) Amplitude de la pression dans le bec vs. la pression dans la bouche.

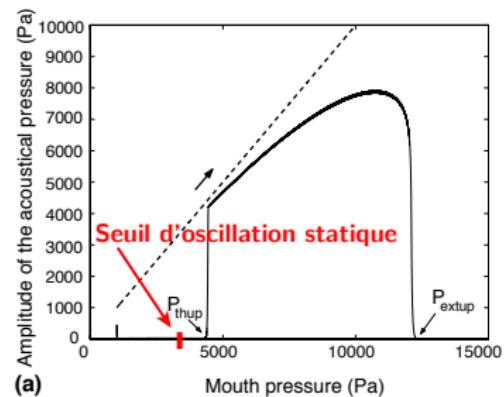
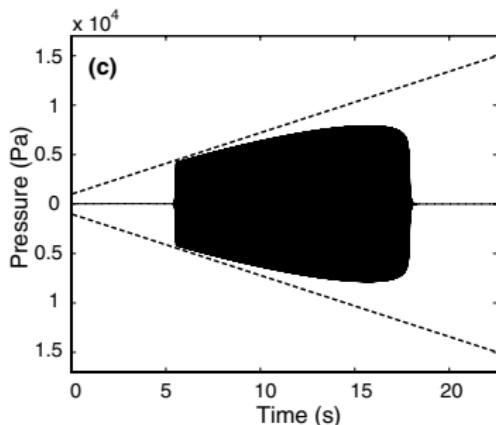
## Diagramme de bifurcation "dynamique"

- ⇒  $P_{thup}$  : "threshold of oscillation for increasing pressure".

## Seuil d'oscillation "dynamique"

### Observations :

- ⇒ Seuil statique < Seuil dynamique
- ⇒ Variation lente de la pression dans la bouche : Seuil dynamique → Seuil statique

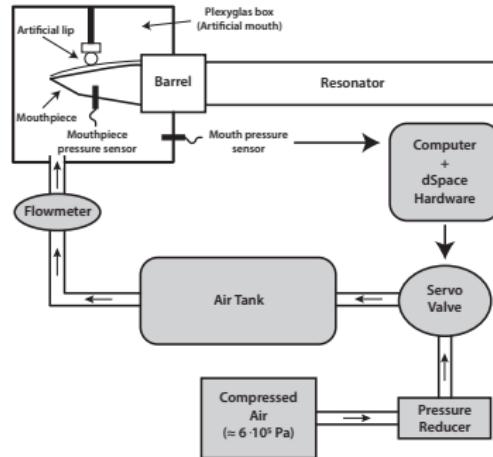
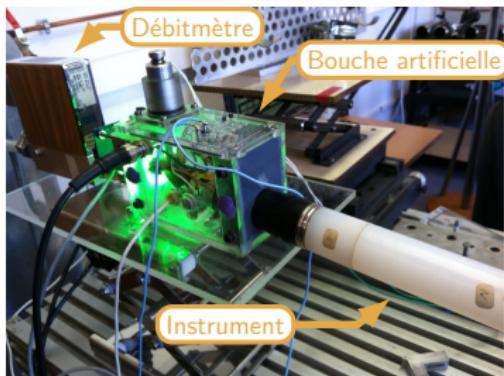


# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale
- 3 Observations sur des systèmes maîtrisés
  - Mesure sur bouche artificielle
  - Simulations numériques du modèle de "Raman"
- 4 Étude analytique du cas dynamique
- 5 Conclusion

# Dispositif expérimental

## Bouche artificielle asservie en pression d'alimentation + Clarinette de laboratoire



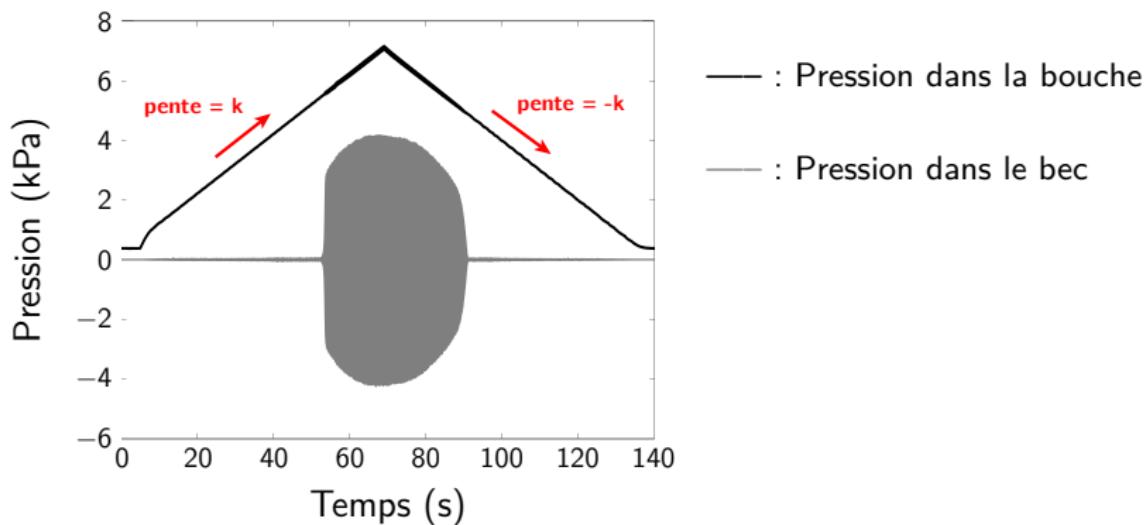
Mesure simultanée de :

$P_m$  : pression dans la bouche ;  $P$  : pression dans le bec ;  $U$  : débit créé par  $P_m - P$ .

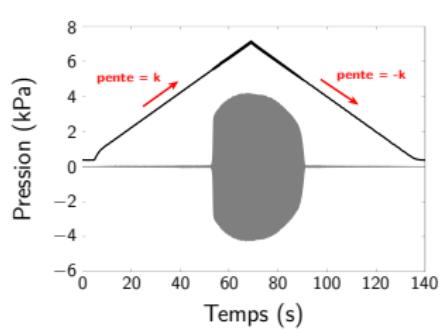
---

[Bergeot et al., "Response of a artificially blown clarinet to different blowing pressure profile", JASA, 2013.]

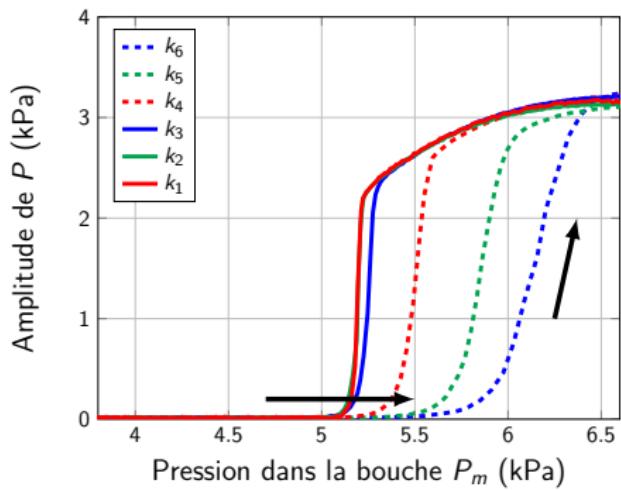
## Description de l'expérience



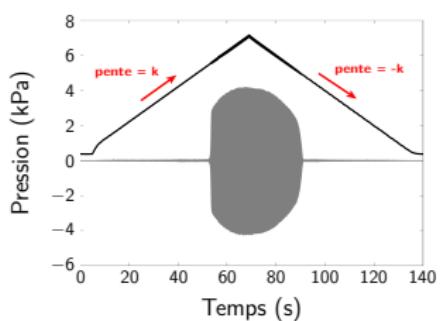
## Résultats expérimentaux



$k$  : pente de  $P_m(t)$   
 $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$ .



# Résultats expérimentaux

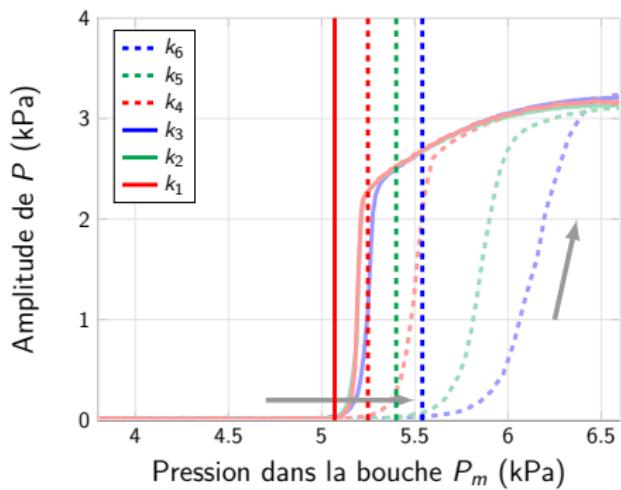


$k$  : pente de  $P_m(t)$   
 $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$ .

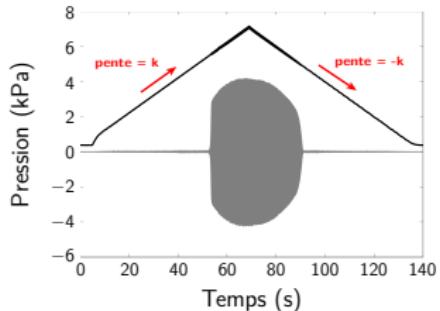
| : positions des seuils d'oscillation dynamiques expérimentaux.

## Observations :

⇒ **Seuil d'oscillation dynamique augmente quand  $k$  augmente.**



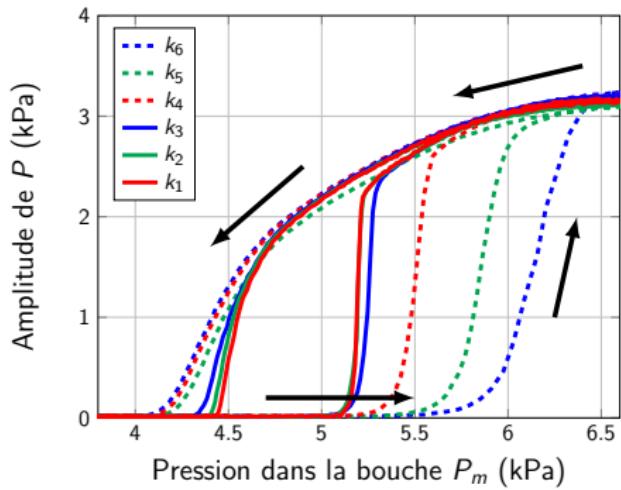
# Résultats expérimentaux



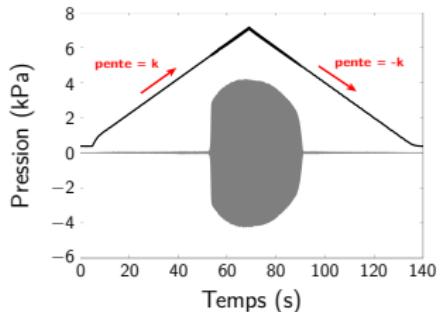
$k$  : pente de  $P_m(t)$   
 $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$ .

## Observations :

⇒ Seuil d'oscillation dynamique  
**augmente quand  $k$  augmente.**



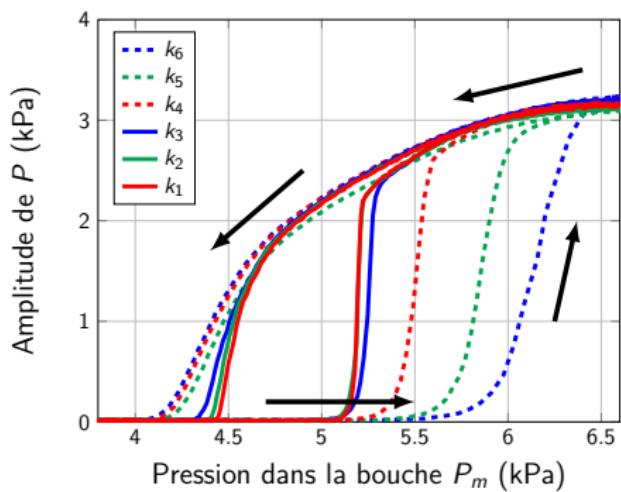
# Résultats expérimentaux



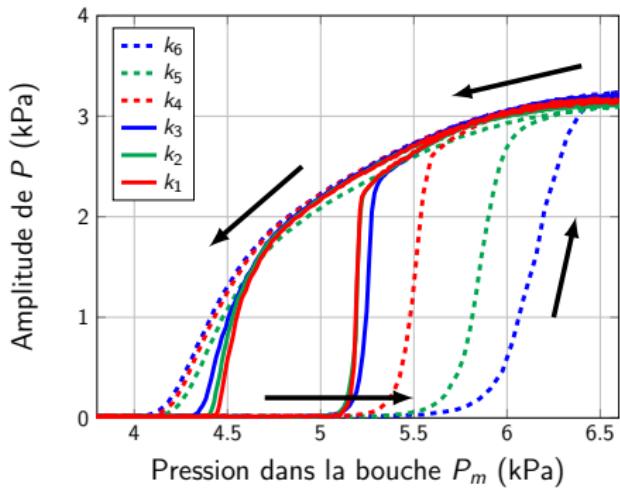
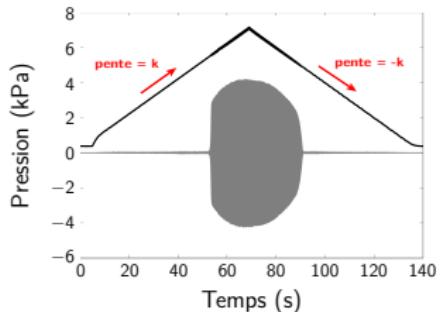
$k$  : pente de  $P_m(t)$   
 $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$ .

## Observations :

- ⇒ **Seuil d'oscillation dynamique augmente quand  $k$  augmente.**
- ⇒ **Seuil d'oscillation dynamique (mesuré en montée) supérieur au Seuil d'extinction (mesurée en descente)**



# Résultats expérimentaux



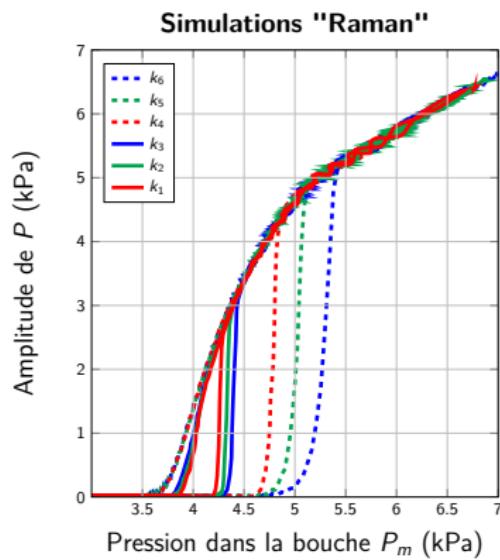
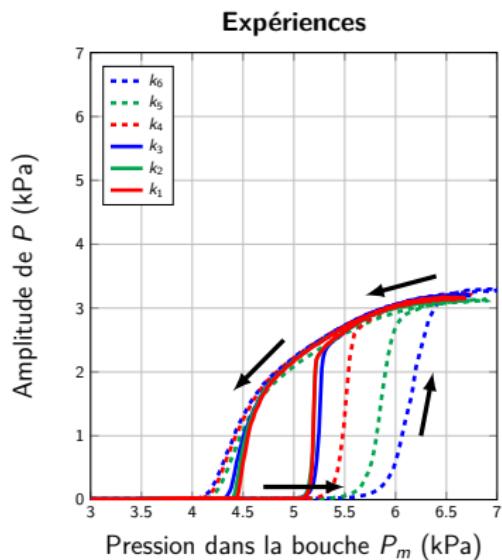
$k$  : pente de  $P_m(t)$   
 $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$ .

## Observations :

- ⇒ Seuil d'oscillation dynamique augmente quand  $k$  augmente.
- ⇒ Seuil d'oscillation dynamique (mesuré en montée) supérieur au Seuil d'extinction (mesurée en descente)
- ⇒ [Dalmont et al., JASA, 2007.] ; Seuil d'oscillation d'extinction proche du Seuil d'oscillation statique théorique ;

# Résultats expérimentaux

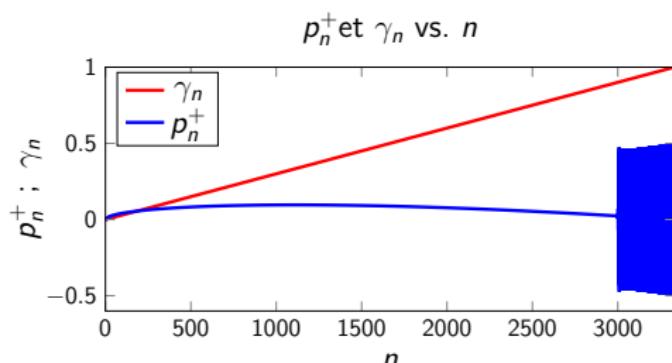
## Comportement similaire du modèle de "Raman"



## Simulations :

- ⇒ Extraction des paramètres à partir de la mesure du débit entrant  $U(t)$  ;
- ⇒ Effectuée avec les profils mesurés de pression dans la bouche.

# Propriétés du seuil dynamique



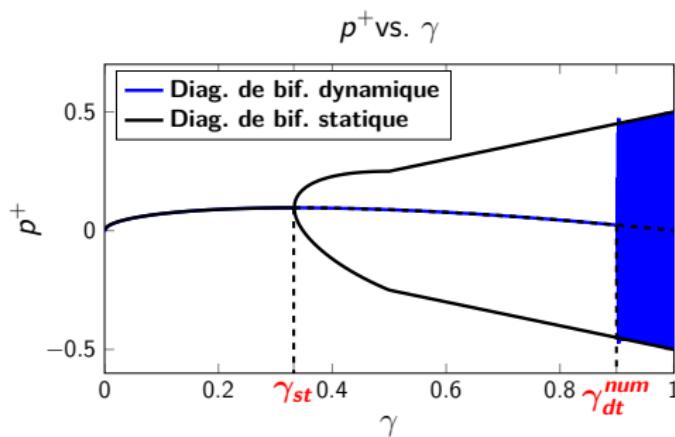
Variation linéaire de  $\gamma$  :

$$\gamma_n = \epsilon n + \gamma_0$$

$p_n^+$  en fonction de  $\gamma_n$



Diagramme de bifurcation dynamique



$\gamma_{st}$  : seuil d'oscillation statique

$\gamma_{dt}^{num}$  : seuil d'oscillation dynamique "numérique".

Calculé sur les simulations numériques du modèle de "Raman".

## La dépendance au bruit

Illustration sur des simulations effectuées à précision finie

## La dépendance au bruit

Illustration sur des simulations effectuées à précision finie

**Précision :**

- ⇒ Nombre de chiffres significatifs utilisés par l'ordinateur ;
- ⇒ Contrôlable avec *mpmath* (Python)

[Bergeot et al., "Prediction of ... blowing pressure : influence of noise", *Nonlinear Dynam.*, 2013]

Précision finie  $\equiv$  bruit blanc additif

**Exemple :**

Précision = 15  $\iff$  Bruit blanc  $\sigma = 10^{-15}$

## La dépendance au bruit

Illustration sur des simulations effectuées à précision finie

Précision :

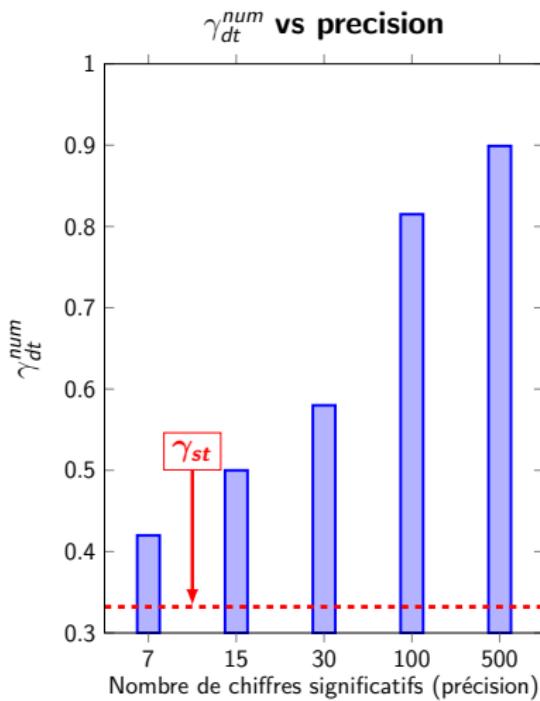
- ⇒ Nombre de chiffres significatifs utilisés par l'ordinateur ;
- ⇒ Contrôlable avec *mpmath* (Python)

[Bergeot et al., "Prediction of ... blowing pressure : influence of noise", *Nonlinear Dynam.*, 2013]

Précision finie  $\equiv$  bruit blanc additif

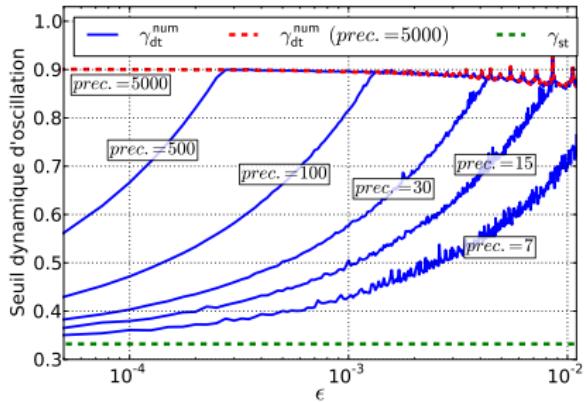
Exemple :

Précision = 15  $\iff$  Bruit blanc  $\sigma = 10^{-15}$



## Influence du paramètre de vitesse d'augmentation de $\gamma$

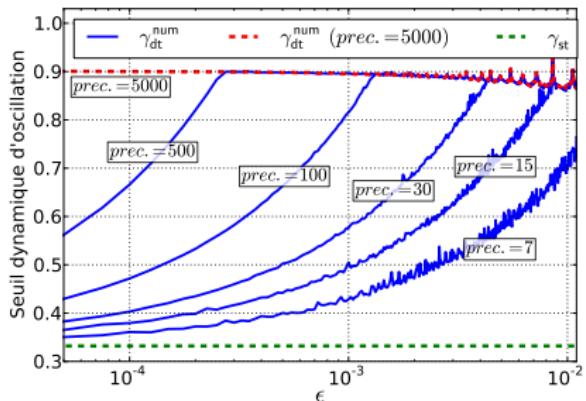
$\gamma_{dt}^{num}$  vs.  $\epsilon$  pour plusieurs précisions ( $\gamma_0 = 0$ )



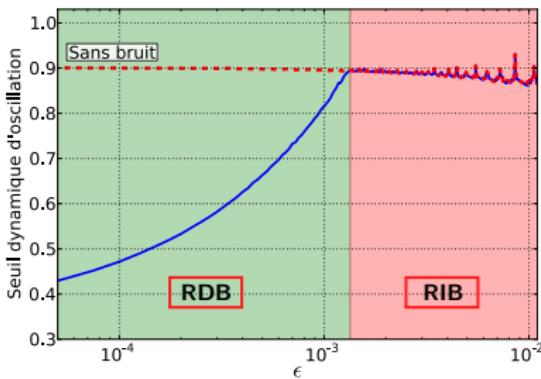
Précision = 5000  $\iff$  cas idéal sans bruit

## Influence du paramètre de vitesse d'augmentation de $\gamma$

$\gamma_{dt}^{num}$  vs.  $\epsilon$  pour plusieurs précisions ( $\gamma_0 = 0$ )



Précision = 5000  $\iff$  cas idéal sans bruit

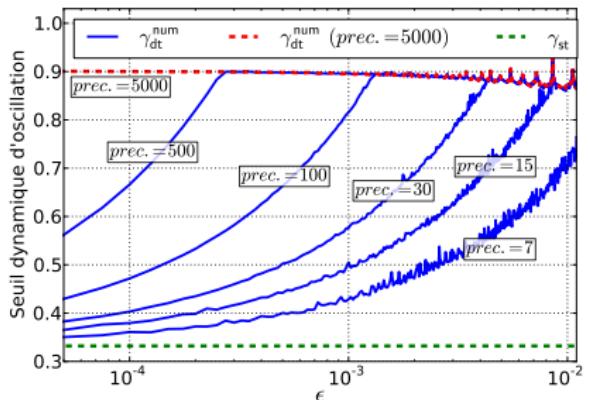


### Deux régimes de fonctionnement :

- $\Rightarrow$  Régime Dépendant du Bruit (RDB);
- $\Rightarrow$  Régime Indépendant du Bruit (RIB).

## Influence du paramètre de vitesse d'augmentation de $\gamma$

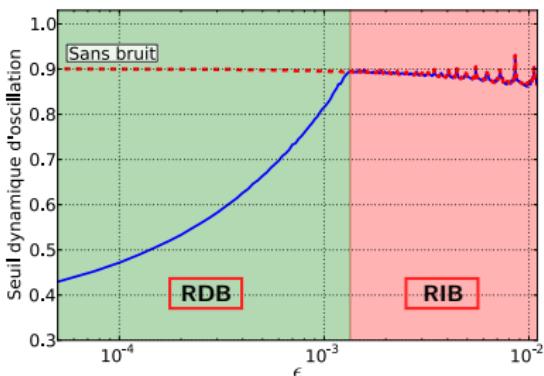
$\gamma_{dt}^{num}$  vs.  $\epsilon$  pour plusieurs précisions ( $\gamma_0 = 0$ )



Précision = 5000  $\iff$  cas idéal sans bruit

### Deux régimes de fonctionnement :

- $\Rightarrow$  Régime Dépendant du Bruit (RDB);
- $\Rightarrow$  Régime Indépendant du Bruit (RIB).

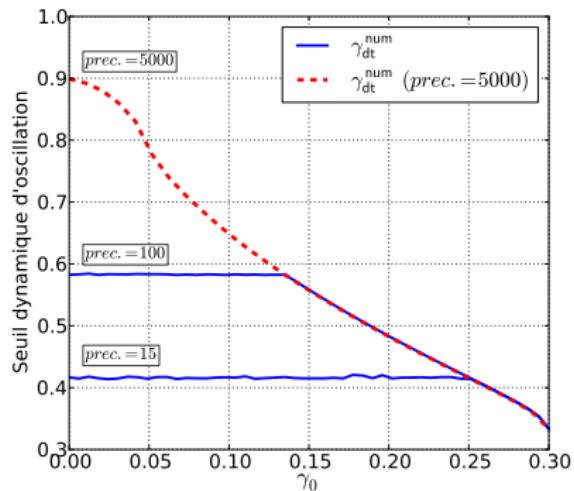


### Propriété du seuil dynamique d'oscillation :

- $\Rightarrow$  RDB :  $\gamma_{dt}^{num}$  augmente avec  $\epsilon$ ;
- $\Rightarrow$  RIB :  $\gamma_{dt}^{num}$  "indépendant" de  $\epsilon$ ;

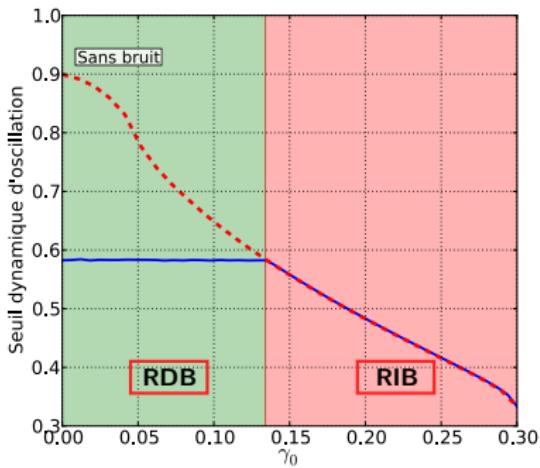
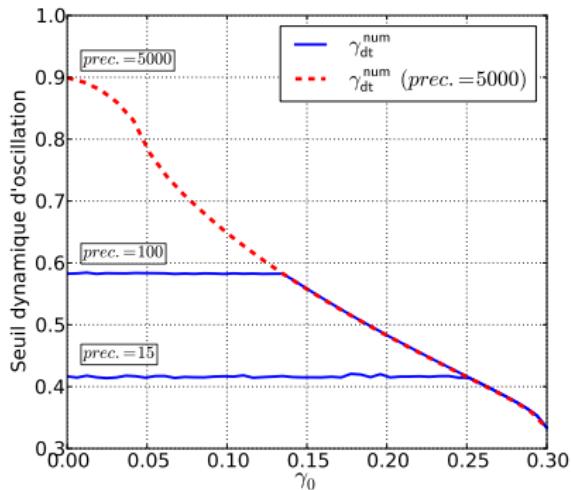
## Influence de la valeur initiale de $\gamma$

$\gamma_{dt}^{num}$  vs.  $\gamma_0$  pour plusieurs précisions ( $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ )



## Influence de la valeur initiale de $\gamma$

$\gamma_{dt}^{num}$  vs.  $\gamma_0$  pour plusieurs précisions ( $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ )



### Propriété du seuil dynamique d'oscillation :

- ⇒ RDB :  $\gamma_{dt}^{num}$  indépendant de  $\gamma_0$  ;
- ⇒ RIB :  $\gamma_{dt}^{num}$  diminue avec  $\gamma_0$  ;

## Résumé des observations

⇒ **Expériences & Simulations du modèle de "Raman" :**

- Seuil dynamique numérique et expérimental > Seuil statique

## Résumé des observations

⇒ **Expériences & Simulations du modèle de "Raman" :**

- Seuil dynamique numérique et expérimental > Seuil statique

⇒ **Simulations : Propriétés de  $\gamma_{dt}^{num}$  ⇒ 2 régimes**

- Régime dépendant du bruit
- Régime Indépendant du bruit

# Sommaire

1 Introduction

2 État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale

3 Observations sur des systèmes maîtrisés

4 Étude analytique du cas dynamique

- La théorie de la bifurcation dynamique
- La courbe invariante
- Prédiction de l'enveloppe

5 Conclusion

# Équations du système quand $\gamma$ augmente linéairement

- ⇒ La variation de  $\gamma$  est linéaire :  $\gamma_n = \epsilon n + \gamma_0$  ou  $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon$
- ⇒ Le paramètre  $\gamma$  varie lentement :  $\epsilon \ll 1$ .

Cas Statique

$$p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$$

Cas Dynamique

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon \end{cases}$$

# Équations du système quand $\gamma$ augmente linéairement

- ⇒ La variation de  $\gamma$  est linéaire :  $\gamma_n = \epsilon n + \gamma_0$  ou  $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon$
- ⇒ Le paramètre  $\gamma$  varie lentement :  $\epsilon \ll 1$ .

## Cas Statique

$$p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$$

$$\implies$$

## Cas Dynamique

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon \end{cases}$$

Étude du système "dynamique" dans le cadre de la **théorie de la bifurcation dynamique** :

Seuil dynamique > Seuil statique : **Retard à la bifurcation**

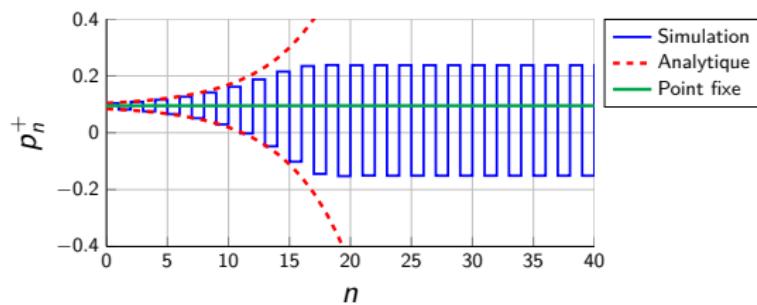
[Baesens, "Slow sweep through a period-doubling cascade : Delayed bifurcation and renormalisation", *Physica D*, 1991.]

# Référence pour le calcul de l'enveloppe

## Cas statique

- ⇒ Référence  $\equiv$  point fixe  $p^{+*}$
- ⇒ Linéarisation du système autour de son point fixe  $p^{+*} \Rightarrow$  Expression de  $w = p^+ - p^{+*}$  au début du transitoire (naissance des oscillations) :

$$w_n \approx w_0 [f' (p^{+*})]^n.$$



- ⇒ Point fixe  $p^{+*}$  : **définition** :

$$p^{+*} = f (p^{+*})$$

Si le système est initialisé précisément sur le point fixe, il y reste indéfiniment

## Cas dynamique

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon \end{cases}$$

Quelle référence pour le calcul de l'enveloppe ?

⇒ Référence ≡ **courbe invariante**  $\phi_\epsilon(\gamma)$ .

Si le système est initialisé précisément sur la courbe invariante, il y reste indéfiniment :

$n - 1$

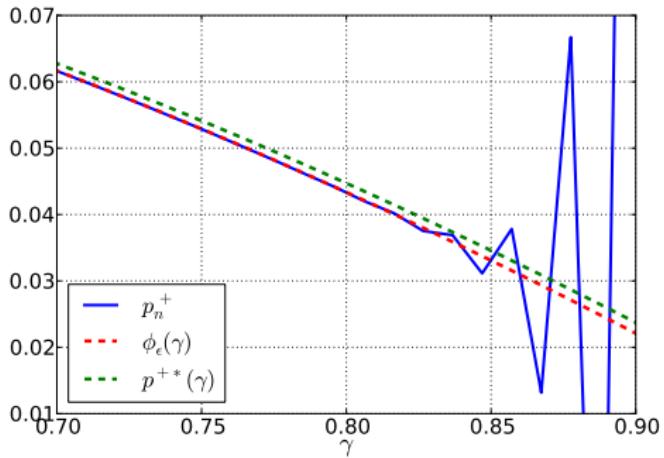
$n$

$$p_{n-1}^+ = \phi_\epsilon(\gamma_{n-1}) \implies \text{Système dynamique} \implies p_n^+ = \phi_\epsilon(\gamma_n)$$

⇒ La courbe invariante  $\phi_\epsilon$  doit satisfaire :  $\phi_\epsilon(\gamma) = f(\phi_\epsilon(\gamma - \epsilon), \gamma)$

**Remarque** : En dynamique la courbe des points fixes  $p^{+*}(\gamma)$  n'est plus la courbe invariante.

⇒ Courbe invariante  $\phi_\epsilon$  :  $\phi_\epsilon(\gamma) = f(\phi_\epsilon(\gamma - \epsilon), \gamma)$  ⇒ pas de solution exacte ⇒ solution approchée par méthode perturbative .



- ⇒ Linéarisation du système autour de la courbe invariante  $\phi_\epsilon$  ⇒ Expression analytique  $\hat{w}$  de l'écart à la courbe invariante  $p^+ - \phi(\gamma)$
- ⇒  $\hat{w}$  : prédiction du seuil d'oscillation dynamique.

## Prise en compte du bruit dans le modèle

### Système sans bruit (Déterministe)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

### Système avec bruit (Stochastique)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) + \xi_n \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

$\xi$  : bruit blanc de moyenne nulle et d'amplitude  $\sigma$

## Prise en compte du bruit dans le modèle

### Système sans bruit (Déterministe)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

### Système avec bruit (Stochastique)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) + \xi_n \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

$\xi$  : bruit blanc de moyenne nulle et d'amplitude  $\sigma$

⇒ Linéarisation du "système avec bruit"  
autour de  $\phi_\epsilon$  ⇒ Expression de  $\hat{w}_n$

$$\hat{w}_n = \sqrt{\underbrace{A_n}_{\text{RIB}} + \underbrace{B_n}_{\text{RDB}}}$$

⇒  $A_n$  décrit le Régime Indépendant du Bruit;  
⇒  $B_n$  décrit le Régime Dépendant du Bruit.

## Prise en compte du bruit dans le modèle

### Système sans bruit (Déterministe)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

### Système avec bruit (Stochastique)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) + \xi_n \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

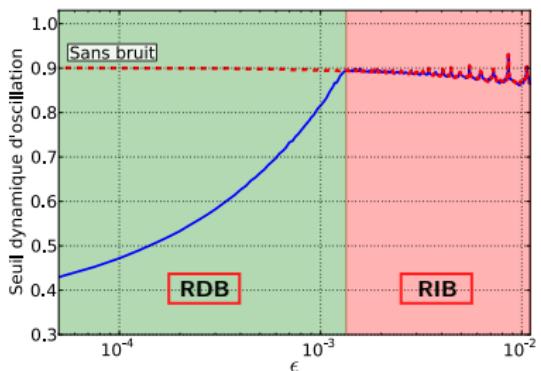
$\xi$  : bruit blanc de moyenne nulle et d'amplitude  $\sigma$

⇒ Linéarisation du "système avec bruit" autour de  $\phi_\epsilon$  ⇒ Expression de  $\hat{w}_n$

$$\hat{w}_n = \sqrt{A_n + B_n}$$

A<sub>n</sub>  
RIB
B<sub>n</sub>  
RDB

⇒  $A_n$  décrit le Régime Indépendant du Bruit;  
 ⇒  $B_n$  décrit le Régime Dépendant du Bruit.



⇒  $A_n \ll B_n$  : système évolue en RDB ;  
 ⇒  $A_n \gg B_n$  : système évolue en RIB.

## Enveloppe pour le Régime Indépendant du Bruit

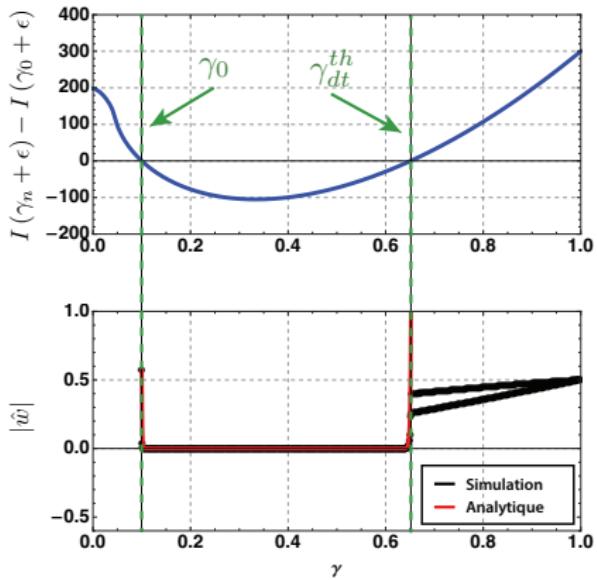
Traitement du terme  $A_n \Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\gamma_{dt}^{th}$

### Enveloppe pour le RIB

$(A_n \gg B_n)$  :

$$\hat{w}_n \approx \sqrt{A_n} =$$

$$|\hat{w}_0| \exp [I(\gamma_n + \epsilon) - I(\gamma_0 + \epsilon)]$$



[Bergeot et al., "Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with time-varying blowing pressure", *Nonlinear dynamics*, 2013.]

## Enveloppe pour le Régime Indépendant du Bruit

Traitement du terme  $A_n \Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\gamma_{dt}^{th}$

### Enveloppe pour le RIB

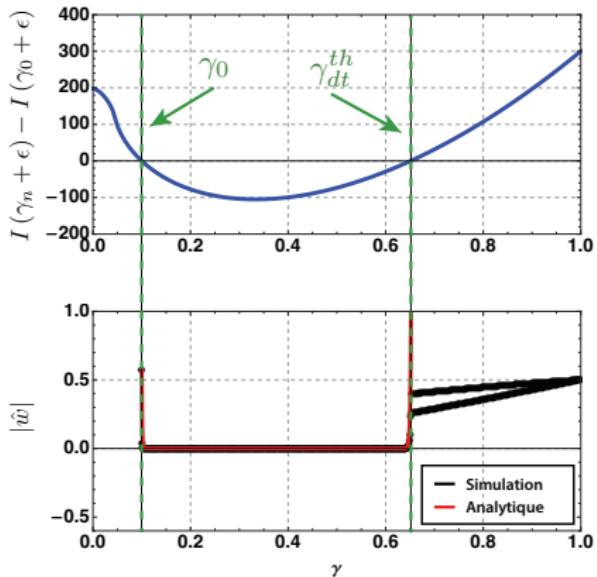
$(A_n \gg B_n)$  :

$$\hat{w}_n \approx \sqrt{A_n} =$$

$$|\hat{w}_0| \exp [I(\gamma_n + \epsilon) - I(\gamma_0 + \epsilon)]$$

Critère pour  $\gamma_{dt}^{th}$  :

$$I(\gamma_{dt}^{th} + \epsilon) - I(\gamma_0 + \epsilon) = 0$$



$I(\gamma)$  : intégrale non calculable analytiquement.

[Bergeot et al., "Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with time-varying blowing pressure", *Nonlinear dynamics*, 2013.]

## Enveloppe pour le Régime Dépendant du Bruit

Traitement du terme B  $\Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$

**Enveloppe pour le RDB** ( $A_n \ll B_n$ ) :  $\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n}$

$B_n$  : expression faisant intervenir l'intégrale /

## Enveloppe pour le Régime Dépendant du Bruit

Traitement du terme B  $\Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$

**Enveloppe pour le RDB** ( $A_n \ll B_n$ ) :  $\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n}$

$B_n$  : expression faisant intervenir l'intégrale  $I$

**Simplification** : Le bruit diminue le seuil d'oscillation dynamique.

Développement limité à l'ordre 2 de  $I$  autour de  $\gamma_{st}$   $\Longrightarrow I^{D.L.2}$ .

## Enveloppe pour le Régime Dépendant du Bruit

Traitement du terme B  $\Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$

**Enveloppe pour le RDB** ( $A_n \ll B_n$ ) :  $\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n}$

$B_n$  : expression faisant intervenir l'intégrale  $I$

**Simplification** : Le bruit diminue le seuil d'oscillation dynamique.

Développement limité à l'ordre 2 de  $I$  autour de  $\gamma_{st} \implies I^{D.L.2}$ .

$$\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n} \approx \frac{\sigma}{\epsilon^{1/4}} \left( \frac{\pi}{K} \right)^{1/4} \exp [I^{D.L.2}(\gamma_n) - I^{D.L.2}(\gamma_{st})]$$

**Remarque** : valable uniquement après  $\gamma_{st}$

## Enveloppe pour le Régime Dépendant du Bruit

Traitement du terme B  $\Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$

**Enveloppe pour le RDB** ( $A_n \ll B_n$ ) :  $\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n}$

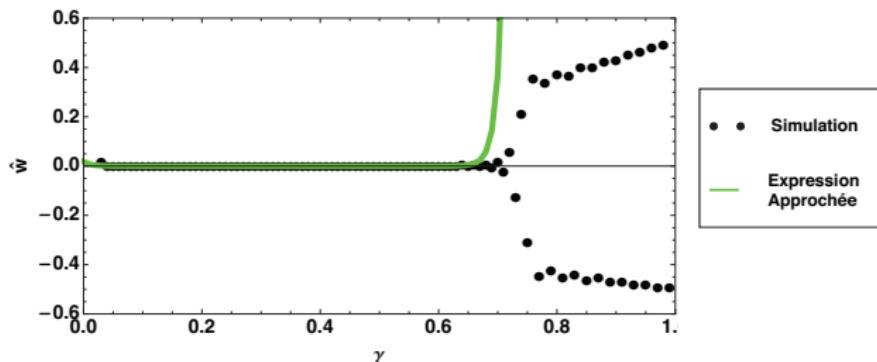
$B_n$  : expression faisant intervenir l'intégrale  $I$

**Simplification** : Le bruit diminue le seuil d'oscillation dynamique.

Développement limité à l'ordre 2 de  $I$  autour de  $\gamma_{st}$   $\Rightarrow I^{D.L.2}$ .

$$\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n} \approx \frac{\sigma}{\epsilon^{1/4}} \left( \frac{\pi}{K} \right)^{1/4} \exp [I^{D.L.2}(\gamma_n) - I^{D.L.2}(\gamma_{st})]$$

**Remarque** : valable uniquement après  $\gamma_{st}$

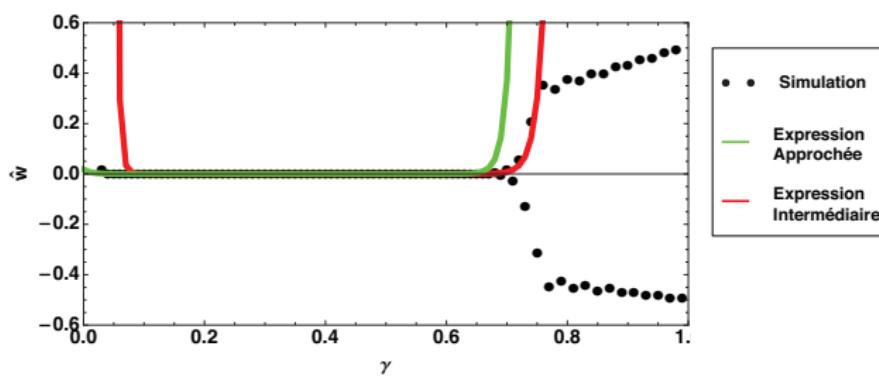


[Bergeot et al., "Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with time-varying blowing pressure : influence of noise", *Nonlinear dynam.*, 2013.]

## Expression intermédiaire :

$$\hat{w}_n \approx \underbrace{\frac{\sigma}{\epsilon^{1/4}} \left( \frac{\pi}{K} \right)^{1/4} \exp [I^{D.L.2}(\gamma_n) - I^{D.L.2}(\gamma_{st})]}_{\text{Expression approchée [1]}}$$

$$\Rightarrow \hat{w}_n \approx \underbrace{\frac{\sigma}{\epsilon^{1/4}} \left( \frac{\pi}{K} \right)^{1/4} \exp [I(\gamma_n) - I(\gamma_{st})]}_{\text{Expression intermédiaire [2]}}$$

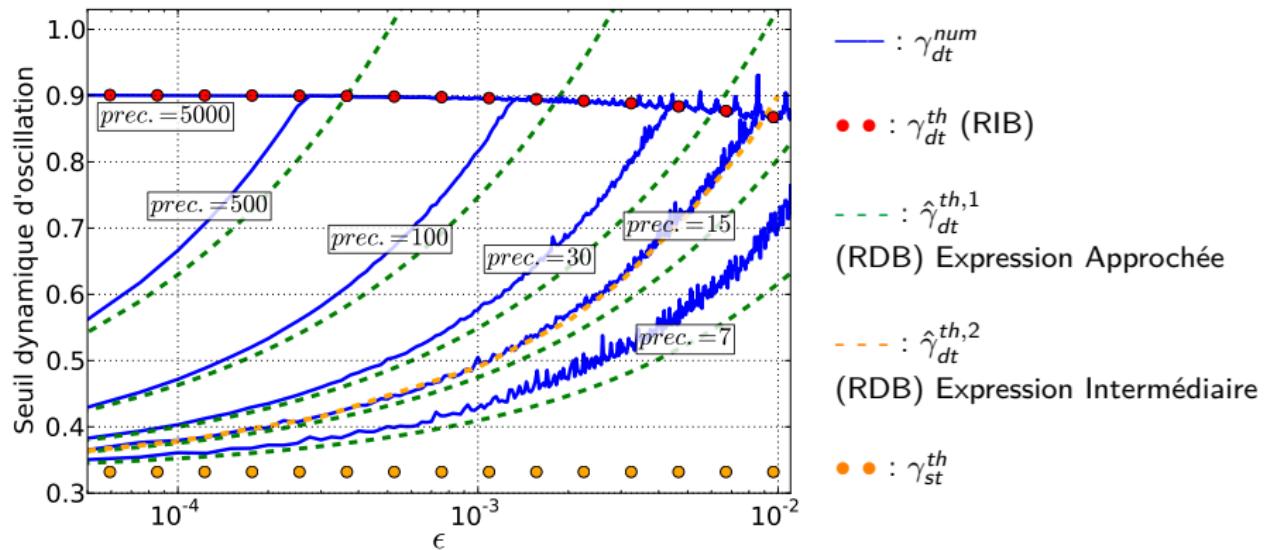


- [1] [Bergeot et al., "Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with time-varying blowing pressure : influence of noise", *Nonlinear dynam.*, 2013.]
- [2][Bergeot et al., "Estimation of the attack transient in a clarinet model with time-varying blowing pressure", *En cours d'écriture*, 2013.]

## Comparaison entre les seuil d'oscillation dynamiques théoriques $\gamma_{dt}^{th}$ (RID) et $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ (RDB) et le seuil dynamique numérique $\gamma_{dt}^{num}$

RIB :  $A_n \implies \gamma_{dt}^{th}$

RDB :  $B_n : \{\text{Expr. App.}; \text{Expr. Int.}\} \implies \{\hat{\gamma}_{dt}^{th,1}; \hat{\gamma}_{dt}^{th,2}\}$



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale
- 3 Observations sur des systèmes maîtrisés
- 4 Étude analytique du cas dynamique
- 5 Conclusion

- Point de départ : étude des transitoires d'attaque dans les clarinettes ;
- Focalisation sur l'influence de la variation de la pression dans la bouche sur la naissance des oscillations ⇒ Première étape importante ;
- 1<sup>ère</sup> Étape : Mise en évidence des phénomènes :

#### Notion de "seuil dynamique d'oscillation" :

- Réinterprétation de résultats anciens de l'acoustique musicale [Atig et al., 2004] ;
  - Mesure du seuil statique : on comprend pourquoi il est si difficile de le mesurer en augmentant lentement la pression dans la bouche.
- 
- 2<sup>nde</sup> Étape : Expression analytique de l'enveloppe du son (étude "dynamique" du modèle de "Raman")
    - Utilisation des outils d'analyse de la théorie de la bifurcation dynamique ;
    - La courbe invariante : un outil précieux.
  - Enveloppe analytique ⇒ Prédiction du seuil d'oscillation dynamique :
    - Comparaison *quantitative* avec les simulations ;
    - Comparaison *qualitative* avec l'expérience.

**Merci de votre attention !**

- ⇒ Email : [baptiste.bergeot@centrale-marseille.fr](mailto:baptiste.bergeot@centrale-marseille.fr)
- ⇒ Articles et thèse disponibles sur HAL