Vibrations des structures

Absorbeurs Dynamiques Accordés (ADA)

Tuned Mass Damper (TMD)

Baptiste Bergeot

Maître de Conférences - `baptiste.bergeot@insa-cvl.fr` - bureau C06

4A INSA Centre Val de Loire

Génie des Systèmes Industriels (GSI)

Année 2021/2022

INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
CENTRE VAL DE LOIRE

1. Introduction

2. Théorie et optimisation des ADA pour des SP à 1DDL
2.1 SP non amortie - ADA non amorti
2.2 SP non amortie - ADA amorti
2.3 SP amortie - ADA amorti

3. Références

Plan du cours

1. Introduction

2. Théorie et optimisation des ADA pour des SP à 1DDL

3. Références

Définitions

- Un **absorbeur dynamique accordé** (ADA) est un dispositif constitué d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur qui est fixé à une structure primaires (SP) afin de réduire la réponse dynamique de cette dernière.
- La **fréquence de l'absorbeur est accordée à une fréquence structurelle particulière** de sorte que lorsque cette fréquence est excitée, l'absorbeur **oscille en opposition de phase avec la structure**.
- Dans ces conditions, l'**énergie vibratoire est transférée de la structure primaire vers l'ADA où elle dissipée**.

Définitions

- Un **absorbeur dynamique accordé** (ADA) est un dispositif constitué d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur qui est fixé à une structure primaires (SP) afin de réduire la réponse dynamique de cette dernière.
- La **fréquence de l'absorbeur est accordée à une fréquence structurelle particulière** de sorte que lorsque cette fréquence est excitée, l'absorbeur **oscille en opposition de phase avec la structure**.
- Dans ces conditions, l'**énergie vibratoire est transférée de la structure primaire vers l'ADA où elle dissipée**.

Historique

- Le concept d'ADA a été appliqué pour la première fois par Frahm en 1909 pour réduire le mouvement de roulis des bateaux ainsi que les vibrations de la coque des bateaux également.
- La théorie de l'ADA a été présentée plus tard dans l'article d'Ormondroyd & Den Hartog (1928), suivie d'une discussion détaillée sur leur optimisation paramétrique dans le livre de Den Hartog sur les vibrations mécaniques (1940).

Plan du cours

1. Introduction

2. Théorie et optimisation des ADA pour des SP à 1DDL
2.1 SP non amortie - ADA non amorti
2.2 SP non amortie - ADA amorti
2.3 SP amortie - ADA amorti

3. Références

Plan du cours

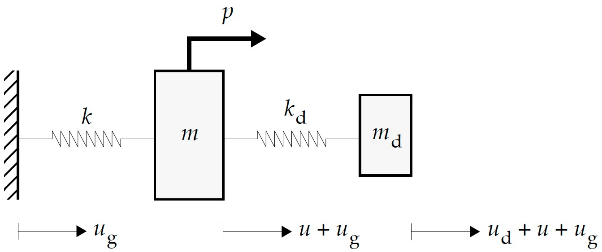
1. Introduction

2. Théorie et optimisation des ADA pour des SP à 1DDL
2.1 SP non amortie - ADA non amorti
2.2 SP non amortie - ADA amorti
2.3 SP amortie - ADA amorti

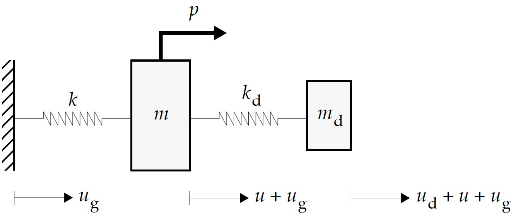
3. Références

Système étudié

- **SP :** masse m relié au support par un ressort de raideur k et soumise une excitation par force imposée p et par mouvement du support d'accélération a_{g}.
- **ADA :** masse m_{d} reliée au SP par un ressort de raideur k_{d}.



Équations du mouvement



- $\boxed{u_g}$: déplacement du support. On a donc $\ddot{u}_g = a_g$
- $\boxed{u_1}$: déplacement absolu de la masse m (SP). On pose $\boxed{u = u_1 - u_g}$ son déplacement relatif par rapport au support et donc $\boxed{u_1 = u + u_g}$
- $\boxed{u_2}$: déplacement absolu de m_d (ADA). On pose $\boxed{u_d = u_2 - u_1}$ son déplacement relatif par rapport au SP et donc $\boxed{u_2 = u_d + u + u_g}$

Équations du mouvement

$$\begin{aligned} m_d \ddot{u}_2 + k_d (u_2 - u_1) &= 0 \\ m \ddot{u}_1 + k (u_1 - u_d) + k_d (u_1 - u_2) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} m_d [\ddot{u}_d + \ddot{u}] + k_d u_d &= -m_d a_g \\ m\ddot{u} + ku - k_d u_d &= -m a_g + p \end{aligned}}$$

Solution

On considère des excitations périodique de pulsation Ω : $\boxed{a_\mathrm{g} = \hat{a}_\mathrm{g} \sin(\Omega t)}$ et $\boxed{p = \hat{p} \sin(\Omega t)}$

On pose donc un solution de la forme : $\boxed{u = \hat{u} \sin(\Omega t)}$ et $\boxed{u_\mathrm{d} = \hat{u}_\mathrm{d} \sin(\Omega t)}$ que l'on introduit dans les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \left[\Omega^2 + k_\mathrm{d}\right] \hat{u}_\mathrm{d} - m_\mathrm{d}\Omega^2 \hat{u} &= -m_\mathrm{d}\hat{a}_\mathrm{g} \\ -k_\mathrm{d}\hat{u}_\mathrm{d} + \left[-m\Omega^2 + k\right] \hat{u} &= -m\hat{a}_\mathrm{g} + \hat{p} \end{aligned}$$

qui est de la forme $[\mathcal{D}] \begin{Bmatrix} \hat{u}_\mathrm{d} \\ \hat{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$ avec

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} -m_\mathrm{d}\Omega^2 + k_\mathrm{d} & -m_\mathrm{d}\Omega^2 \\ -k_\mathrm{d} & -m\Omega^2 + k \end{bmatrix}, \quad F_1 = m_\mathrm{d}\hat{a}_\mathrm{g} \quad \text{et} \quad F_2 = -m\hat{a}_\mathrm{g} + \hat{p}.$$

Solution

La solution du système précédent est :

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{\hat{p}}{k}\left(\frac{1-\rho_{\mathrm{d}}^2}{D_1}\right) - \frac{m\hat{a}_{\mathrm{g}}}{k}\left(\frac{1+\bar{m}-\rho_{\mathrm{d}}^2}{D_1}\right)\\ \hat{u}_{\mathrm{d}} &= \frac{\hat{p}}{k_{\mathrm{d}}}\left(\frac{\bar{m}\rho^2}{D_1}\right) - \frac{m\hat{a}_{\mathrm{g}}}{k_{\mathrm{d}}}\left(\frac{\bar{m}}{D_1}\right)\end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{D_1 = \left[1-\rho^2\right]\left[1-\rho_{\mathrm{d}}^2\right] - \bar{m}\rho^2}, \quad \boxed{\rho = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{k/m}}}, \quad \boxed{\rho_{\mathrm{d}} = \frac{\Omega}{\omega_{\mathrm{d}}} = \frac{\Omega}{\sqrt{k_{\mathrm{d}}/m_{\mathrm{d}}}}}$$

et $\boxed{\bar{m} = \frac{m_{\mathrm{d}}}{m}}$ le rapport des masse entre le SP et ADA.

Remarque

- Sans ADA résonance pour $\boxed{\Omega = \omega}$
- Avec ADA résonance si $\boxed{D_1 = 0}$

Optimisation de l'ADA

En sélectionnant $\bar{m}$ et ρ_d tels que $\boxed{1+\bar{m}-\rho_\mathrm{d}^2=0}$ on montre que $\hat{u}$ et $\hat{u}_\mathrm{d}$:

$$\hat{u} = \frac{\hat{p}}{k}$$
$$\hat{u}_\mathrm{d} = -\frac{\hat{p}}{k_\mathrm{d}}\rho^2 + \frac{m\hat{a}_\mathrm{g}}{k_\mathrm{d}}$$

Ce choix :

- **isole le mouvement relatif du SP du mouvement du support** et **réduit la réponse due à la force externe à la valeur pseudo-statique** $\frac{\hat{p}}{k}$. Une plage typique pour $\bar{m}$ est de 0.01 à 0.1.
- **élimine la résonance**.

Les **paramètres optimaux de l'ADA** sont donc :

$$\boxed{\omega_\mathrm{d}\big|_\mathrm{opt} = \frac{\Omega}{\sqrt{1+\bar{m}}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_\mathrm{d}\big|_\mathrm{opt} = \left[\omega_\mathrm{d}\big|_\mathrm{opt}\right]^2 m_\mathrm{d} = \frac{\Omega^2 m\bar{m}}{1+\bar{m}}}$$

Optimisation de l'ADA

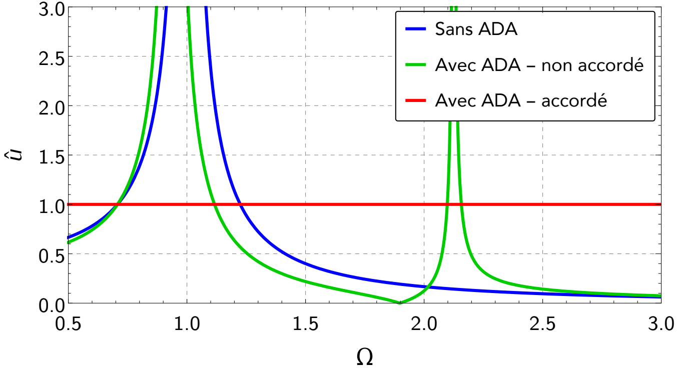


Figure – Evolution fréquentielle du déplacement $\hat{u}$ du SP pour $m = 1$, $k = 1$, $k_{\mathrm{d}} = 1$, $\hat{p} = 1$, $\hat{a}_{\mathrm{g}} = 0.5$ et $\bar{m} = 0.1$

Plan du cours

1. Introduction

2. Théorie et optimisation des ADA pour des SP à 1DDL

2.1 SP non amortie - ADA non amorti

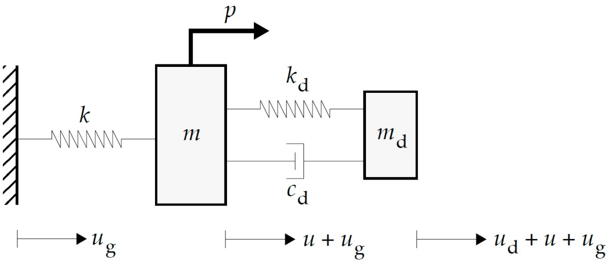
2.2 SP non amortie - ADA amorti

2.3 SP amortie - ADA amorti

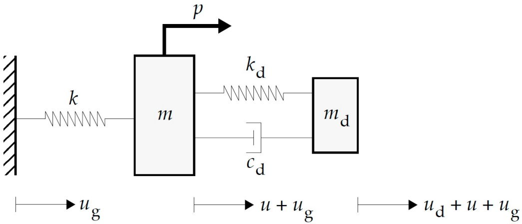
3. Références

Système étudié

- SP : masse m relié au support par un ressort de raideur k et soumise une excitation par force imposée p et par mouvement du support d'accélération a_{g}.
- ADA : masse m_{d} reliée au SP par un ressort de raideur k_{d} et un amortisseur de coefficient d'amortissement c_{d} .



Équations du mouvement



- $\boxed{u_g}$: déplacement du support. On a donc $\ddot{u}_g = a_g$
- $\boxed{u_1}$: déplacement absolu de la masse m (SP). On pose $\boxed{u = u_1 - u_g}$ son déplacement relatif par rapport au support et donc $\boxed{u_1 = u + u_g}$
- $\boxed{u_2}$: déplacement absolu de m_d (ADA). On pose $\boxed{u_d = u_2 - u_1}$ son déplacement relatif par rapport au SP et donc $\boxed{u_2 = u_d + u + u_g}$

Équations du mouvement

$$\boxed{\begin{aligned} m_d\ddot{u}_d + c_d\dot{u}_d + k_d u_d + m_d\ddot{u} &= -m_d a_g \\ m\ddot{u} + ku - c_d\dot{u}_d - k_d u_d &= -m a_g + p \end{aligned}}$$

Solution

On considère des excitations périodique de pulsation Ω : $\boxed{a_\mathrm{g} = \hat{a}_\mathrm{g}\sin(\Omega t)}$ et $\boxed{p = \hat{p}\sin(\Omega t)}$

Comme il y a de l'amortissement, on pose un solution complexe de la forme : $\boxed{u = \bar{u}e^{j\Omega t}}$ et $\boxed{u_\mathrm{d} = \bar{u}_\mathrm{d}e^{j\Omega t}}$ que l'on introduit dans les équations du mouvement :

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[-m_\mathrm{d}\Omega^2 + jc_\mathrm{d}\Omega + k_\mathrm{d}\right]\bar{u}_\mathrm{d} - m_\mathrm{d}\Omega^2\bar{u} = -m_\mathrm{d}\hat{a}_\mathrm{g} \\ &-\left[jc_\mathrm{d}\Omega + k_\mathrm{d}\right]\bar{u}_\mathrm{d} + \left[-m\Omega^2 + k\right]\bar{u} = -m\hat{a}_\mathrm{g} + \hat{p} \end{aligned}}$$

qui est de la forme $[\mathcal{D}]\begin{Bmatrix}\bar{u}_\mathrm{d}\\ \bar{u}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\end{Bmatrix}$ avec

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} -m_\mathrm{d}\Omega^2 + jc_\mathrm{d}\Omega + k_\mathrm{d} & -m_\mathrm{d}\Omega^2 \\ -\left[jc_\mathrm{d}\Omega + k_\mathrm{d}\right] & -m\Omega^2 + k \end{bmatrix}, \quad F_1 = m_\mathrm{d}\hat{a}_\mathrm{g} \quad \text{et} \quad F_2 = -m\hat{a}_\mathrm{g} + \hat{p}.$$

Solution

La solution du système précédent est :

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{\hat{p}}{kD_2}\left[f^2-\rho^2+j2\xi_{\mathrm{d}}\rho f\right]-\frac{\hat{a}_{\mathrm{g}}m}{kD_2}\left[(1+\bar{m})f^2-\rho^2+j2\xi_{\mathrm{d}}\rho f(1+\bar{m})\right]\\ \bar{u}_{\mathrm{d}} &= \frac{\hat{p}\rho^2}{kD_2}-\frac{\hat{a}_{\mathrm{g}}m}{kD_2}\end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{\xi_{\mathrm{d}}=c_{\mathrm{d}}/(2\omega_{\mathrm{d}}m_{\mathrm{d}})}$$

$$\boxed{D_2=\left[1-\rho^2\right]\left[f^2-\rho^2\right]-\bar{m}\rho^2f^2+j2\xi_{\mathrm{d}}\rho f\left[1-\rho^2(1+\bar{m})\right]},\qquad \boxed{f=\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\omega}}$$

Remarque

- Sans ADA résonance pour $\boxed{\Omega=\omega}$
- Avec ADA résonance si $\boxed{D_2=0}$

Solution

Les expressions précédentes sont exprimées sous forme polaire :

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{\hat{p}}{k} H_1 \mathrm{e}^{j\delta_1} - \frac{\hat{a}_{\mathrm{g}} m}{k} H_2 \mathrm{e}^{j\delta_2} \\ \bar{u}_{\mathrm{d}} &= \frac{\hat{p}}{k} H_3 \mathrm{e}^{-j\delta_3} - \frac{\hat{a}_{\mathrm{g}} m}{k} H_4 \mathrm{e}^{-j\delta_4}\end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{H_1 = \frac{\sqrt{\left[f^2 - \rho^2\right]^2 + \left[2\xi_{\mathrm{d}} \rho f\right]^2}}{|D_2|}} \quad ; \quad \boxed{H_2 = \frac{\sqrt{\left[(1+\bar{m}) f^2 - \rho^2\right]^2 + \left[2\xi_{\mathrm{d}} \rho f (1+\bar{m})\right]^2}}{|D_2|}}$$

$$\boxed{H_3 = \frac{\rho^2}{|D_2|}} \quad ; \quad \boxed{H_4 = \frac{1}{|D_2|}}$$

$$\boxed{|D_2| = \sqrt{\left(\left[1-\rho^2\right]\left[f^2-\rho^2\right] - \bar{m}\rho^2 f^2\right)^2 + \left(2\xi_{\mathrm{d}} \rho f \left[1 - \rho^2(1+\bar{m})\right]\right)^2}}$$

Remarque

Dans la plupart des application on a $\bar{m} \approx 0.05 \ll 1$, par conséquent $\boxed{H_1 \approx H_2}$

Solution

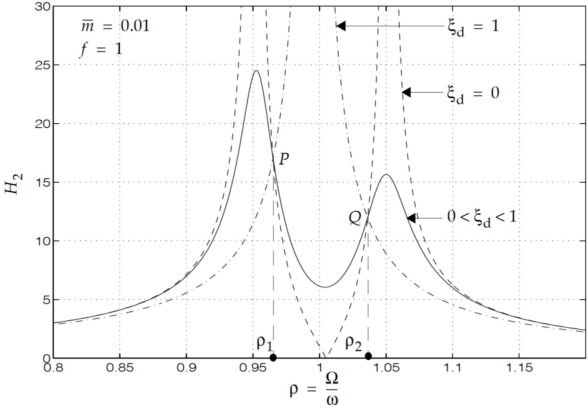


Figure - H_2 en fonction de ρ.

- On passe de 1 pic pour $\xi_d = 1$ à deux pic $\xi_d = 0$ $\Rightarrow$ **Optimal entre les deux**
- Toutes les courbe passent par les points P et Q $\Rightarrow$ **position indépendante de ξ_d**

Optimisation de l'ADA

Position de P et Q

On écrit H_2 sous la forme suivante :

$$H_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + \xi_d^2 a_2^2}{a_3^2 + \xi_d^2 a_4^2}} = \frac{a_2}{a_4}\sqrt{\frac{a_1^2/a_2^2 + \xi_d^2}{a_3^2/a_4^2 + \xi_d^2}}$$

qui devient indépendant de ξ_d si $\boxed{|a_1/a_2| = |a_3/a_4|}$, dans ce cas : $\boxed{H_2|_{P,Q} = \frac{a_2}{a_4}}$

En remplaçant les expressions de a dans $|a_1/a_2| = |a_3/a_4|$ on obtient une équation du 2nd degré en ρ^2 :

$$\boxed{\rho^4 - \left[(1+\bar{m})f^2 + \frac{1+0.5\bar{m}}{1+\bar{m}}\right]\rho^2 + f^2 = 0}$$

dont les deux racines positive sont notées ρ_1 et ρ_2. On a donc finalement :

$$\boxed{H_2|_{P,Q} = \frac{1+\bar{m}}{\left|1-\rho_{1,2}^2(1+\bar{m})\right|}}$$

Optimisation de l'ADA

Stratégie d'optimisation

On souhaite **minimiser l'amplitude maximale de H_2**, pour cela on va :

1. égaliser les deux valeur de $H_2|_{P,Q}$, ceci équivaut à :

$$|1-\rho_1^2(1+\bar{m})| = |1-\rho_2^2(1+\bar{m})|$$

   qui conduit à :

$$\boxed{f_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{1-0.5\bar{m}}}{1+\bar{m}}} \; ; \; \boxed{\omega_{\text{d}}|_{\text{opt}} = f_{\text{opt}}\,\omega} \Rightarrow \boxed{\rho_{1,2}|_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{0.5\bar{m}}}{1+\bar{m}}}} \; ; \; \boxed{H_2|_{\text{opt}} = \frac{1+\bar{m}}{\sqrt{0.5\bar{m}}}}$$

2. augmenter la valeur de ξ_{d} jusqu'à ce que les pics coincident avec les points P et Q, on obtient :

$$\boxed{\xi_{\text{d}}|_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\bar{m}(3-\sqrt{0.5\bar{m}})}{8(1+\bar{m})(1-0.5\bar{m})}}}$$

$\Rightarrow$ **Cet état correspond aux performances optimales de l'ADA**

Optimisation de l'ADA

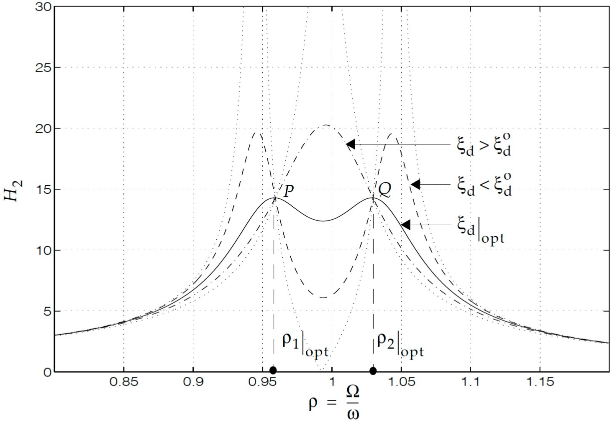
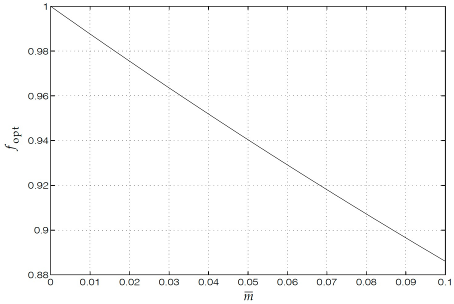
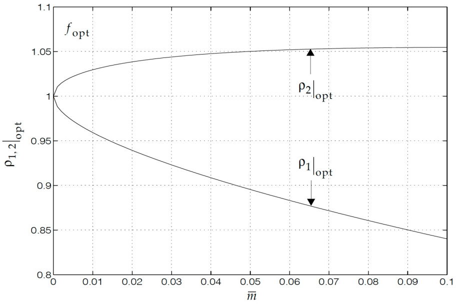


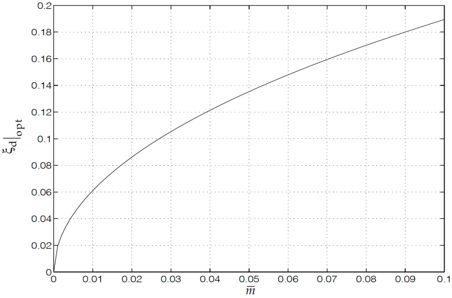
Figure – H_2 en fonction de ρ.

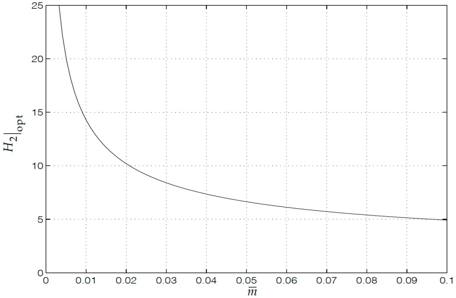
Optimisation de l'ADA





Optimisation de l'ADA





Plan du cours

1. Introduction

2. Théorie et optimisation des ADA pour des SP à 1DDL

2.1 SP non amortie - ADA non amorti

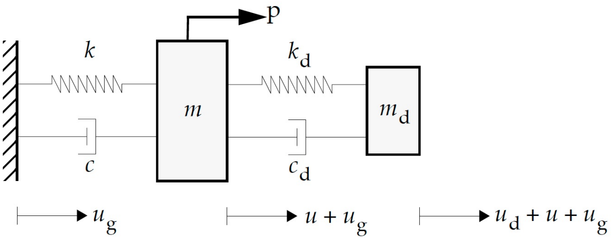
2.2 SP non amortie - ADA amorti

2.3 SP amortie - ADA amorti

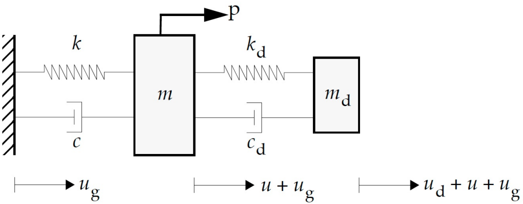
3. Références

Système étudié

- **SP :** masse m relié au support par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient d'amortissement c et soumise une excitation par force imposée p et par mouvement du support d'accélération a_{g}.
- **ADA :** masse m_{d} reliée au SP par un ressort de raideur k_{d} et un amortisseur de coefficient d'amortissement c_{d} .



Équations du mouvement



- $\boxed{u_g}$: déplacement du support. On a donc $\ddot{u}_g = a_g$
- $\boxed{u_1}$: déplacement absolu de la masse m (SP). On pose $\boxed{u = u_1 - u_g}$ son déplacement relatif par rapport au support et donc $\boxed{u_1 = u + u_g}$
- $\boxed{u_2}$: déplacement absolu de m_d (ADA). On pose $\boxed{u_d = u_2 - u_1}$ son déplacement relatif par rapport au SP et donc $\boxed{u_2 = u_d + u + u_g}$

Équations du mouvement

$$\boxed{\begin{aligned} m_d\ddot{u}_d + c_d\dot{u}_d + k_d u_d + m_d\ddot{u} &= -m_d a_g \\ m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - c_d\dot{u}_d - k_d u_d &= -m a_g + p \end{aligned}}$$

Solution

On procédant comme précédemment on arrive à :

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\hat{p}}{k} H_5 \mathrm{e}^{j\delta_5} - \frac{\hat{a}_\mathrm{g} m}{k} H_6 \mathrm{e}^{j\delta_6} \\ \bar{u}_\mathrm{d} &= \frac{\hat{p}}{k} H_7 \mathrm{e}^{-j\delta_7} - \frac{\hat{a}_\mathrm{g} m}{k} H_8 \mathrm{e}^{-j\delta_8} \end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{H_4 = \frac{\sqrt{\left[f^2 - \rho^2\right]^2 + \left[2\xi_\mathrm{d}\rho f\right]^2}}{|D_3|}} \quad ; \quad \boxed{H_6 = \frac{\sqrt{\left[(1+\bar{m})f^2 - \rho^2\right]^2 + \left[2\xi_\mathrm{d}\rho f(1+\bar{m})\right]^2}}{|D_3|}}$$

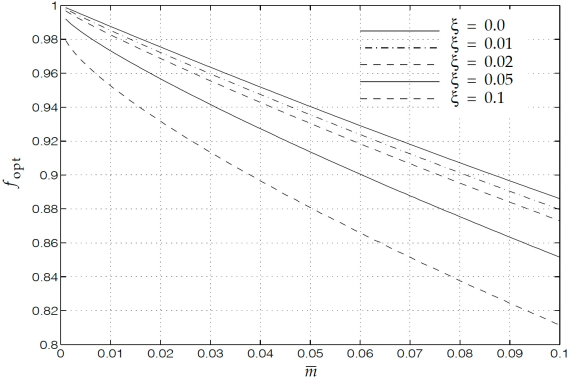
$$\boxed{H_7 = \frac{\rho^2}{|D_3|}} \quad ; \quad \boxed{H_8 = \frac{\sqrt{1 + [2\xi\rho]^2}}{|D_3|}} \quad ; \quad \boxed{\xi = c/(2\omega m)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |D_3| = &\left[-f^2\rho^2\bar{m} + \left(1-\rho^2\right)\left(f^2-\rho^2\right) - 4\xi\xi_d f\rho^2\right]^2 \\ &+4\left[\xi\rho\left(f^2-\rho^2\right) + \xi_d f\rho\left(1-\rho^2(1+\bar{m})\right)^2\right] \end{aligned}}$$

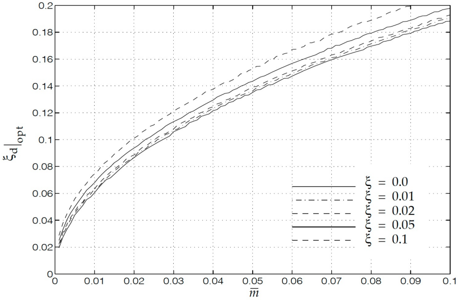
Optimisation de l'ADA

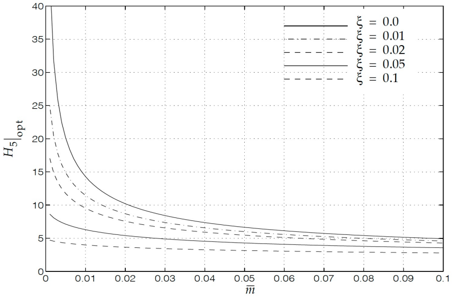
Stratégie d'optimisation

Le même que pour **SP non amortie - ADA amorti** mais pas de résultat analytique.
$\Rightarrow$ Les différentes équations sont résolues numériquement.



Optimisation de l'ADA





Plan du cours

1. Introduction

2. Théorie et optimisation des ADA pour des SP à 1DDL

3. Références

Ce document à été rédigé à l'aide de l'ouvrage suivant :

- Jerome J. Connor, *Introduction to Structural Motion Control*, 2002, Prentice Hall (ISBN 0130091383), Chapitre 4