Absorbeurs dynamiques accordés

Tuned Mass Damper (TMD)

Baptiste Bergeot

Maître de Conférences - baptiste.bergeot@insa-cvl.fr - bureau C06

4A INSA Centre Val de Loire

Génie des Systèmes Industriels (GSI)

Année 2020/2021

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES CENTRE VAL DE LOIRE

Plan du cours

Définitions

- Un **absorbeur dynamique accordé** (ADA) est un dispositif constitué d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur qui est fixé à une structure primaires (SP) afin de réduire la réponse dynamique de cette dernière.
- La **fréquence de l'absorbeur est accordée à une fréquence structurelle particulière** de sorte que lorsque cette fréquence est excitée, l'absorbeur **oscille en opposition de phase avec la structure**.
- Dans ces conditions, l'**énergie vibratoire est transférée de la structure primaire vers l'ADA où elle dissipée**.

Définitions

- Un **absorbeur dynamique accordé** (ADA) est un dispositif constitué d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur qui est fixé à une structure primaires (SP) afin de réduire la réponse dynamique de cette dernière.
- La **fréquence de l'absorbeur est accordée à une fréquence structurelle particulière** de sorte que lorsque cette fréquence est excitée, l'absorbeur **oscille en opposition de phase avec la structure**.
- Dans ces conditions, l'**énergie vibratoire est transférée de la structure primaire vers l'ADA où elle dissipée**.

Historique

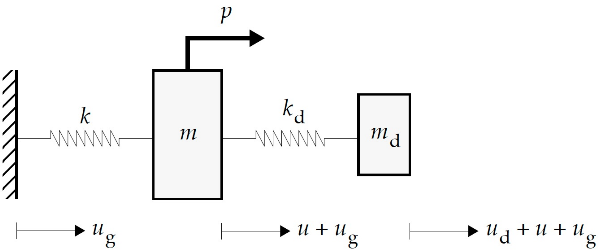
- Le concept d'ADA a été appliqué pour la première fois par Frahm en 1909 pour réduire le mouvement de roulis des bateaux ainsi que les vibrations de la coque des bateaux également.
- La théorie de l'ADA a été présentée plus tard dans l'article d'Ormondroyd & Den Hartog (1928), suivie d'une discussion détaillée sur leur optimisation paramétrique dans le livre de Den Hartog sur les vibrations mécaniques (1940).

Plan du cours

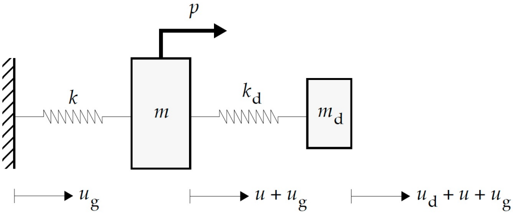
Plan du cours

Système étudié

- **SP :** masse m relié au support par un ressort de raideur k et soumise une excitation par force imposée p et par mouvement du support d'accélération a_g.
- **ADA :** masse m_d reliée au SP par un ressort de raideur k_d.



Équations du mouvement



- $\boxed{u_g}$: déplacement du support. On a donc $\ddot{u}_g = a_g$
- $\boxed{u_1}$: déplacement absolu de la masse m (SP). On pose $\boxed{u = u_1 - u_g}$ son déplacement relatif par rapport au support et donc $\boxed{u_1 = u + u_g}$
- $\boxed{u_2}$: déplacement absolu de m_d (ADA). On pose $\boxed{u_d = u_2 - u_1}$ son déplacement relatif par rapport au SP et donc $\boxed{u_2 = u_d + u + u_g}$

Équations du mouvement

$$\begin{aligned} m_d \ddot{u}_2 + k_d (u_2 - u_1) &= 0 \\ m \ddot{u}_1 + k (u_1 - u_d) + k_d (u_1 - u_2) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} m_d [\ddot{u}_d + \ddot{u}] + k_d u_d &= -m_d a_g \\ m \ddot{u} + k u - k_d u_d &= -m a_g + p \end{aligned}}$$

Solution

On considère des excitations périodique de pulsation Ω : $\boxed{a_\mathrm{g} = \hat{a}_\mathrm{g} \sin(\Omega t)}$ et $\boxed{p = \hat{p} \sin(\Omega t)}$

On pose donc un solution de la forme : $\boxed{u = \hat{u} \sin(\Omega t)}$ et $\boxed{u_\mathrm{d} = \hat{u}_\mathrm{d} \sin(\Omega t)}$ que l'on introduit dans les équations du mouvement :

$$\boxed{\begin{aligned} \left[\Omega^2 + k_\mathrm{d}\right] \hat{u}_\mathrm{d} - m_\mathrm{d}\Omega^2 \hat{u} &= -m_\mathrm{d}\hat{a}_\mathrm{g} \\ -k_\mathrm{d}\hat{u}_\mathrm{d} + \left[-m\Omega^2 + k\right] \hat{u} &= -m\hat{a}_\mathrm{g} + \hat{p} \end{aligned}}$$

qui est de la forme $[\mathcal{D}] \begin{Bmatrix} \hat{u}_\mathrm{d} \\ \hat{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$ avec

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} -m_\mathrm{d}\Omega^2 + k_\mathrm{d} & -m_\mathrm{d}\Omega^2 \\ -k_\mathrm{d} & -m\Omega^2 + k \end{bmatrix}, \quad F_1 = m_\mathrm{d}\hat{a}_\mathrm{g} \quad \text{et} \quad F_2 = -m\hat{a}_\mathrm{g} + \hat{p}.$$

Solution

La solution du système précédent est :

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{\hat{p}}{k}\left(\frac{1-\rho_\mathrm{d}^2}{D_1}\right) - \frac{m\hat{a}_\mathrm{g}}{k}\left(\frac{1+\bar{m}-\rho_\mathrm{d}^2}{D_1}\right)\\ \hat{u}_\mathrm{d} &= \frac{\hat{p}}{k_\mathrm{d}}\left(\frac{\bar{m}\rho^2}{D_1}\right) - \frac{m\hat{a}_\mathrm{g}}{k_\mathrm{d}}\left(\frac{\bar{m}}{D_1}\right)\end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{D_1 = \left[1-\rho^2\right]\left[1-\rho_\mathrm{d}^2\right] - \bar{m}\rho^2}, \quad \boxed{\rho = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{k/m}}}, \quad \boxed{\rho_\mathrm{d} = \frac{\Omega}{\omega_\mathrm{d}} = \frac{\Omega}{\sqrt{k_\mathrm{d}/m_\mathrm{d}}}}$$

et $\boxed{\bar{m} = \frac{m_\mathrm{d}}{m}}$ le rapport des masse entre le SP et ADA.

Remarque

- Sans ADA résonance pour $\boxed{\Omega = \omega}$
- Avec ADA résonance si $\boxed{D_1 = 0}$

Optimisation de l'ADA

En sélectionnant $\bar{m}$ et ρ_d tels que $\boxed{1+\bar{m}-\rho_\mathrm{d}^2=0}$ on montre que $\hat{u}$ et $\hat{u}_\mathrm{d}$:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{\hat{p}}{k}\\ \hat{u}_\mathrm{d} &= -\frac{\hat{p}}{k_\mathrm{d}}\rho^2+\frac{m\hat{a}_\mathrm{g}}{k_\mathrm{d}}\end{aligned}}$$

Ce choix :

- **isole le mouvement relatif du SP du mouvement du support** et **réduit la réponse due à la force externe à la valeur pseudo-statique** $\frac{\hat{p}}{k}$. Une plage typique pour $\bar{m}$ est de 0.01 à 0.1.
- **élimine la résonance**.

Les **paramètres optimaux de l'ADA** sont donc :

$$\boxed{\omega_\mathrm{d}\big|_\mathrm{opt}=\frac{\Omega}{\sqrt{1+\bar{m}}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_\mathrm{d}\big|_\mathrm{opt}=\left[\omega_\mathrm{d}\big|_\mathrm{opt}\right]^2 m_\mathrm{d}=\frac{\Omega^2 m\bar{m}}{1+\bar{m}}}$$

Optimisation de l'ADA

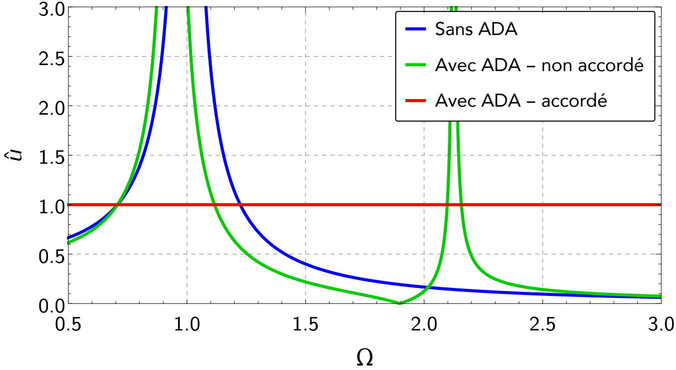
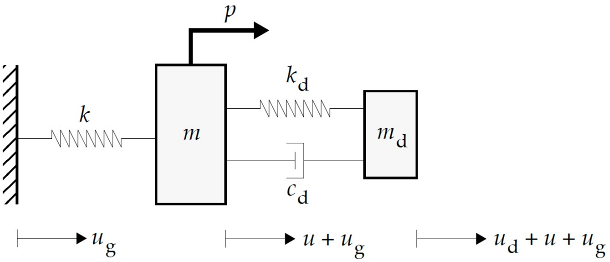


Figure – Evolution fréquentielle du déplacement $\hat{u}$ du SP pour $m = 1$, $k = 1$, $k_\mathrm{d} = 1$, $\hat{p} = 1$, $\hat{a}_\mathrm{g} = 0.5$ et $\bar{m} = 0.1$

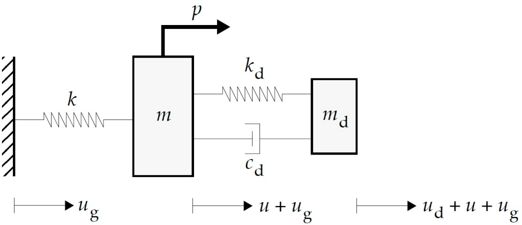
Plan du cours

Système étudié

- **SP :** masse m relié au support par un ressort de raideur k et soumise une excitation par force imposée p et par mouvement du support d'accélération a_g.
- **ADA :** masse m_d reliée au SP par un ressort de raideur k_d et un amortisseur de coefficient d'amortissement c_d .



Équations du mouvement



- $\boxed{u_g}$: déplacement du support. On a donc $\ddot{u}_g = a_g$
- $\boxed{u_1}$: déplacement absolu de la masse m (SP). On pose $\boxed{u = u_1 - u_g}$ son déplacement relatif par rapport au support et donc $\boxed{u_1 = u + u_g}$
- $\boxed{u_2}$: déplacement absolu de m_d (ADA). On pose $\boxed{u_d = u_2 - u_1}$ son déplacement relatif par rapport au SP et donc $\boxed{u_2 = u_d + u + u_g}$

Équations du mouvement

$$\boxed{\begin{aligned} m_d\ddot{u}_d + c_d\dot{u}_d + k_d u_d + m_d\ddot{u} &= -m_d a_g \\ m\ddot{u} + ku - c_d\dot{u}_d - k_d u_d &= -m a_g + p \end{aligned}}$$

Solution

On considère des excitations périodique de pulsation Ω : $\boxed{a_{\mathrm{g}} = \hat{a}_{\mathrm{g}} \sin(\Omega t)}$ et $\boxed{p = \hat{p} \sin(\Omega t)}$

Comme il y a de l'amortissement, on pose un solution complexe de la forme : $\boxed{u = \bar{u}\, e^{j\Omega t}}$ et $\boxed{u_{\mathrm{d}} = \bar{u}_{\mathrm{d}} e^{j\Omega t}}$ que l'on introduit dans les équations du mouvement :

$$\boxed{\begin{aligned} \left[-m_{\mathrm{d}}\Omega^2 + jc_{\mathrm{d}}\Omega + k_{\mathrm{d}}\right] \bar{u}_{\mathrm{d}} - m_{\mathrm{d}}\Omega^2 \bar{u} &= -m_{\mathrm{d}} \hat{a}_{\mathrm{g}} \\ -[jc_{\mathrm{d}}\Omega + k_{\mathrm{d}}]\, \bar{u}_{\mathrm{d}} + \left[-m\Omega^2 + k\right] \bar{u} &= -m\hat{a}_{\mathrm{g}} + \hat{p} \end{aligned}}$$

qui est de la forme $[\mathcal{D}] \begin{Bmatrix} \bar{u}_{\mathrm{d}} \\ \bar{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$ avec

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} -m_{\mathrm{d}}\Omega^2 + jc_{\mathrm{d}}\Omega + k_{\mathrm{d}} & -m_{\mathrm{d}}\Omega^2 \\ -[jc_{\mathrm{d}}\Omega + k_{\mathrm{d}}] & -m\Omega^2 + k \end{bmatrix}, \quad F_1 = m_{\mathrm{d}} \hat{a}_{\mathrm{g}} \quad \text{et} \quad F_2 = -m\hat{a}_{\mathrm{g}} + \hat{p}.$$

Solution

La solution du système précédent est :

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{\hat{p}}{kD_2}\left[f^2 - \rho^2 + j2\xi_\mathrm{d}\rho f\right] - \frac{\hat{a}_\mathrm{g} m}{kD_2}\left[(1+\bar{m})f^2 - \rho^2 + j2\xi_\mathrm{d}\rho f(1+\bar{m})\right]\\ \bar{u}_\mathrm{d} &= \frac{\hat{p}\rho^2}{kD_2} - \frac{\hat{a}_\mathrm{g} m}{kD_2}\end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{\xi_\mathrm{d} = c_\mathrm{d}/(2\omega_\mathrm{d} m_\mathrm{d})}$$

$$\boxed{D_2 = \left[1-\rho^2\right]\left[f^2-\rho^2\right] - \bar{m}\rho^2 f^2 + j2\xi_\mathrm{d}\rho f\left[1-\rho^2(1+\bar{m})\right]}, \quad \boxed{f = \frac{\omega_\mathrm{d}}{\omega}}$$

Remarque

- Sans ADA résonance pour $\boxed{\Omega = \omega}$
- Avec ADA résonance si $\boxed{D_2 = 0}$

Solution

Les expressions précédentes sont exprimées sous forme polaire :

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\hat{p}}{k} H_1 \mathrm{e}^{j\delta_1} - \frac{\hat{a}_\mathrm{g} m}{k} H_2 \mathrm{e}^{j\delta_2} \\ \bar{u}_\mathrm{d} &= \frac{\hat{p}}{k} H_3 \mathrm{e}^{-j\delta_3} - \frac{\hat{a}_\mathrm{g} m}{k} H_4 \mathrm{e}^{-j\delta_4} \end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{H_1 = \frac{\sqrt{\left[f^2 - \rho^2\right]^2 + \left[2\xi_\mathrm{d}\rho f\right]^2}}{|D_2|}} \quad ; \quad \boxed{H_2 = \frac{\sqrt{\left[(1+\bar{m})f^2 - \rho^2\right]^2 + \left[2\xi_\mathrm{d}\rho f(1+\bar{m})\right]^2}}{|D_2|}}$$

$$\boxed{H_3 = \frac{\rho^2}{|D_2|}} \quad ; \quad \boxed{H_4 = \frac{1}{|D_2|}}$$

$$\boxed{|D_2| = \sqrt{\left(\left[1-\rho^2\right]\left[f^2-\rho^2\right] - \bar{m}\rho^2 f^2\right)^2 + \left(2\xi_\mathrm{d}\rho f\left[1-\rho^2(1+\bar{m})\right]\right)^2}}$$

Remarque

Dans la plupart des application on a $\bar{m} = 0.05 \ll 1$, par conséquent $\boxed{H_1 \approx H_2}$

Solution

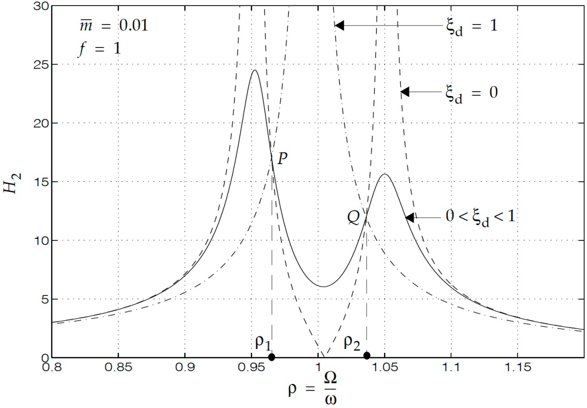


Figure – H_2 en fonction de ρ.

- On passe de 1 pic pour $\xi_d = 1$ à deux pic $\xi_d = 0$ $\Rightarrow$ **Optimal entre les deux**
- Toutes les courbe passent par les points P et Q $\Rightarrow$ **position indépendante de ξ_d**

Optimisation de l'ADA

Position de P et Q

On écrit H_2 sous la forme suivante :

$$H_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + \xi_d^2 a_2^2}{a_3^2 + \xi_d^2 a_4^2}} = \frac{a_2}{a_4}\sqrt{\frac{a_1^2/a_2^2 + \xi_d^2}{a_3^2/a_4^2 + \xi_d^2}}$$

qui devient indépendant de ξ_d si $\boxed{|a_1/a_2| = |a_3/a_4|}$, dans ce cas : $\boxed{H_2|_{P,Q} = \frac{a_2}{a_4}}$

En remplaçant les expressions de a dans $|a_1/a_2| = |a_3/a_4|$ on obtient une équation du 2nd degré en ρ^2 :

$$\boxed{\rho^4 - \left[(1+\bar{m})f^2 + \frac{1+0.5\bar{m}}{1+\bar{m}}\right]\rho^2 + f^2 = 0}$$

dont les deux racines positive sont notées ρ_1 et ρ_2. On a donc finalement :

$$\boxed{H_2|_{P,Q} = \frac{1+\bar{m}}{\left|1-\rho_{1,2}^2(1+\bar{m})\right|}}$$

Optimisation de l'ADA

Stratégie d'optimisation

On souhaite **minimiser l'amplitude maximale de H_2**, pour cela on va :

1. égaliser les deux valeur de $H_2|_{P,Q}$, ceci équivaut à :

$$|1 - \rho_1^2(1 + \bar{m})| = |1 - \rho_2^2(1 + \bar{m})|$$

qui conduit à :

$$\boxed{f_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{1 - 0.5\bar{m}}}{1 + \bar{m}}} \; ; \; \boxed{\omega_{\text{d}}|_{\text{opt}} = f_{\text{opt}}\,\omega} \Rightarrow \boxed{\rho_{1,2}|_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{0.5\bar{m}}}{1 + \bar{m}}}} \; ; \; \boxed{H_2|_{\text{opt}} = \frac{1 + \bar{m}}{\sqrt{0.5\bar{m}}}}$$

2. augmenter la valeur de ξ_{d} jusqu'à ce que les pics coincident avec les points P et Q, on obtient :

$$\boxed{\xi_{\text{d}}|_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\bar{m}(3 - \sqrt{0.5\bar{m}})}{8(1 + \bar{m})(1 - 0.5\bar{m})}}}$$

$\Rightarrow$ **cet état correspond aux performances optimales de l'ADA**

Optimisation de l'ADA

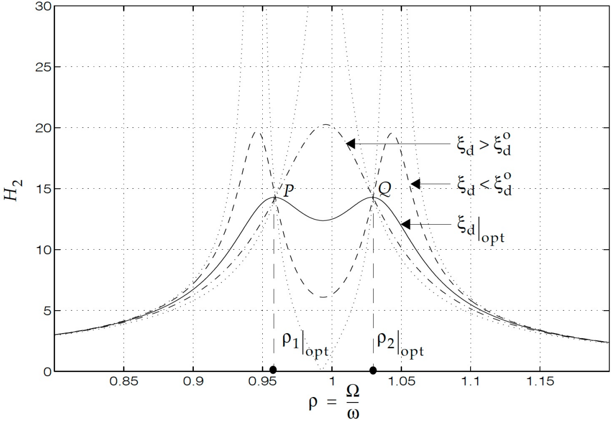
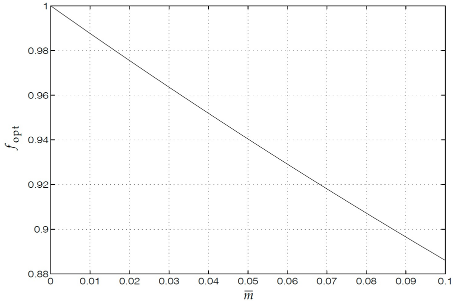
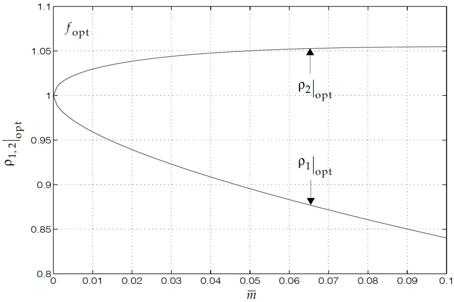


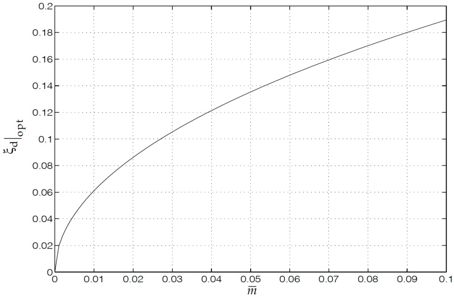
Figure – H_2 en fonction de ρ.

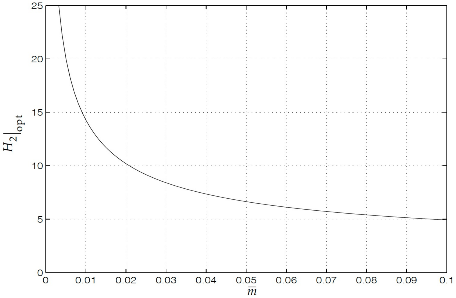
Optimisation de l'ADA





Optimisation de l'ADA

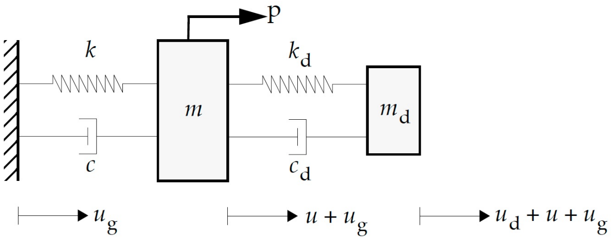




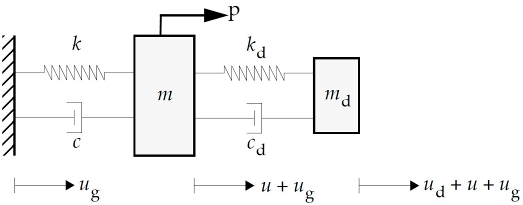
Plan du cours

Système étudié

- **SP :** masse m relié au support par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient d'amortissement c et soumise une excitation par force imposée p et par mouvement du support d'accélération a_{g}.
- **ADA :** masse m_{d} reliée au SP par un ressort de raideur k_{d} et un amortisseur de coefficient d'amortissement c_{d} .



Équations du mouvement



- $\boxed{u_g}$: déplacement du support. On a donc $\ddot{u}_g = a_g$
- $\boxed{u_1}$: déplacement absolu de la masse m (SP). On pose $\boxed{u = u_1 - u_g}$ son déplacement relatif par rapport au support et donc $\boxed{u_1 = u + u_g}$
- $\boxed{u_2}$: déplacement absolu de m_d (ADA). On pose $\boxed{u_d = u_2 - u_1}$ son déplacement relatif par rapport au SP et donc $\boxed{u_2 = u_d + u + u_g}$

Équations du mouvement

$$\boxed{\begin{aligned} m_d\ddot{u}_d + c_d\dot{u}_d + k_d u_d + m_d\ddot{u} &= -m_d a_g \\ m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - c_d\dot{u}_d - k_d u_d &= -m a_g + p \end{aligned}}$$

Solution

On procédant comme précédemment on arrive à :

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{\hat{p}}{k} H_5 \mathrm{e}^{j\delta_5} - \frac{\hat{a}_{\mathrm{g}} m}{k} H_6 \mathrm{e}^{j\delta_6} \\ \bar{u}_{\mathrm{d}} &= \frac{\hat{p}}{k} H_7 \mathrm{e}^{-j\delta_7} - \frac{\hat{a}_{\mathrm{g}} m}{k} H_8 \mathrm{e}^{-j\delta_8}\end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{H_4 = \frac{\sqrt{\left[f^2 - \rho^2\right]^2 + \left[2\xi_{\mathrm{d}} \rho f\right]^2}}{|D_3|}} \quad ; \quad \boxed{H_6 = \frac{\sqrt{\left[(1+\bar{m}) f^2 - \rho^2\right]^2 + \left[2\xi_{\mathrm{d}} \rho f (1+\bar{m})\right]^2}}{|D_3|}}$$

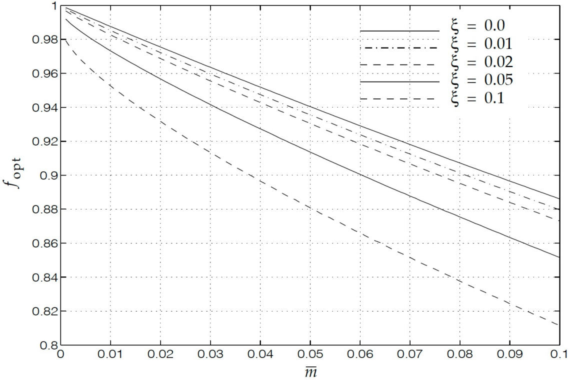
$$\boxed{H_7 = \frac{\rho^2}{|D_3|}} \quad ; \quad \boxed{H_8 = \frac{\sqrt{1 + [2\xi\rho]^2}}{|D_3|}} \quad ; \quad \boxed{\xi = c/(2\omega m)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}|D_3| = &\left[-f^2\rho^2\bar{m} + \left(1-\rho^2\right)\left(f^2-\rho^2\right) - 4\xi\xi_d f\rho^2\right]^2 \\ &+4\left[\xi\rho\left(f^2-\rho^2\right) + \xi_d f\rho\left(1-\rho^2(1+\bar{m})\right)^2\right]\end{aligned}}$$

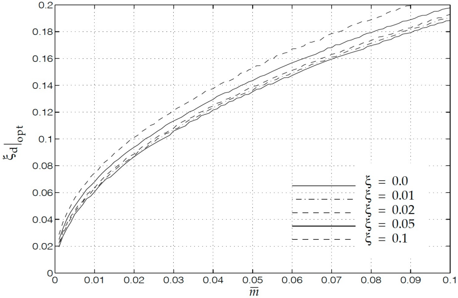
Optimisation de l'ADA

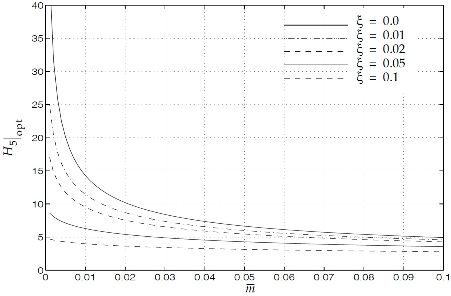
Stratégie d'optimisation

Le même que pour **SP non amortie - ADA amorti** mais pas de résultat analytique.
⇒ Les différentes équations sont résolues numériquement.



Optimisation de l'ADA





Plan du cours

Ce document à été rédigé à l'aide de l'ouvrage suivant :

- Jerome J. Connor, *Introduction to Structural Motion Control*, 2002, Prentice Hall (ISBN 0130091383), Chapitre 4