Pricing d'Options

Arbres binomiaux et méthode de Monte Carlo

28 mai 2019

Préambule

Définition

L'option européenne d'achat (de vente) est un contrat qui donne à son détenteur le droit d'acheter (de vendre) l'actif sous-jacent au contrat à la date d'échéance N, au prix d'exercice fixé à l'avance. Notons S_n le cours de l'actif sous-jacent au temps n.

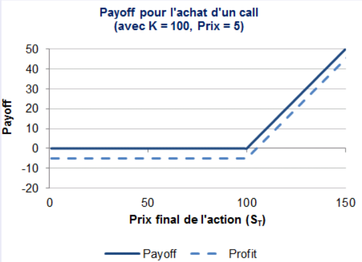

Figure – Payoff d'une option d'achat

La valeur de l'option à l'échéance est appelée fonction de paiement. Pour un Call, son payoff est Max(S_n- K ; 0) =(S_n- K$)_+$. Pour un put : Max($K - S_n$; 0)= (K -$S_n)_+$.

Introduction

Problématique Nous étudirons différentes méthodes de pricing d'options :

- Méthode des arbres binomiaux
- Méthode de Monte Carlo
- Réduction de variance par fonction d'importance et variable de contrôle

Modèle : Hypothèses

- S évolue selon une marché aléatoire selon des facteurs 0<d<1<u tel que si le cours à l'instant n est S, le cours à l'instant n+1 peut prendre 2 valeurs, $S_u = S * u$ ou $S_d = S * d$
- L'absence des coûts de transaction,
- L'absence de dividende sur les titres,
- La possibilité d'emprunt illimité à un taux sans risque, constant et connu à l'avance,
- Les actifs sont liquides. Il y a toujours des vendeurs et des acheteurs pour tout produits,
- L'absence d'opportunité d'arbitrage

Définitions et théorèmes

Définitions

[Probabilité risque-neutre] On dit que P^* est une probabilité risque-neutre si :

- P^* est équivalente à la probabilité réelle, i.e. $\forall A \subset \Omega, P^*(A) = 0$ ssi $P(A) = 0$
- $(S_n/\varepsilon_n(U))_{n \leq N}$ est une martingale sous P^*

Définition

(Portefeuille autofinancé) On définit $\prod = (\beta_N, \delta_N)$ le portefeuille composé au temps N de β_N unités de la bond B et de δ_N unités du stock S. La valeur du portefeuille est alors définie de la manière suivante : $X_N^{\prod} = \beta_N B_N + \delta_N S_N$. C'est au temps N que nous déterminons les nouveaux coefficients $\prod = (\beta_{N+1}, \delta_{N+1})$ du portfeuille . On considère que la valeurs du portefeuille avant et après réinvestisssent est la même, c'est à dire que :

$$\beta_N B_N + \delta_N S_N = \beta_{N+1} B_N + \delta_{N+1} S_N$$

Définitions et théorèmes

Définitions

(On s'intéresse ici à l'évolution du marché jusqu'à une date N fixée.) On dit qu'il existe une opportunité d'arbitrage s'il existe un portefeuille autofinancé Π tel que :

$$X_0^\Pi = 0,\ \forall n \leq N, X_n^\Pi \geq 0 \text{ et } \mathbb{P}(X_N^\Pi > 0) > 0$$

Définition

(Portefeuille de couverture) Un portefeuille Π est un portefeuille de couverture, si sa valeur à l'échéance est supérieure ou égale à la fonction de paiement f, i.e. si $\forall w \in \Omega, X_N^\Pi(w) \geq f(w)$

Théorème

Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage si et seulement si il existe au moins une probabilité risque-neutre.

Définition

(Marché Complet) Le marché B-S est dit complet si pour toute variable aléatoire $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$, il existe un portefeuille autofinancée Π qui réplique f à l'échéance N, i.e tel que $\forall \omega \in \Omega, f(\omega) = X_n^\Pi(\omega)$

Arbre Binomiaux

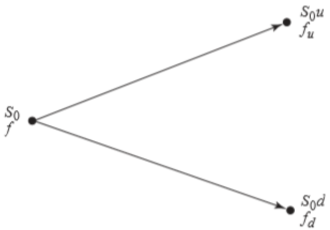

Figure – Arbre Binomial à deux périodes

On crée un portefeuille $\prod = (\beta, \delta)$ de valeur $X_0^{\prod} = \beta + \delta S_0$ à t = 0 tel que :

$$\begin{aligned} X^{\prod_d} &= \beta(1+r) + \delta S_d = f_d \\ X^{\prod_u} &= \beta(1+r) + \delta S_u = f_u \end{aligned}$$

dont la solution est $\delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$ et $\beta = (1+r)^{-1} \frac{uf_d - df_u}{S_u - S_d}$

La valeur du portefeuille initiale $X_0^{\prod} = \beta + \delta S_0$

Definitions et théorèmes

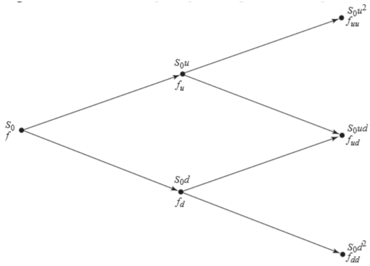

Figure – Arbre Binomial à deux périodes

B évolue au taux (1+r) $\longrightarrow$ taux $\exp(r\Delta T)$ où Δt représente l'écart entre deux périodes.
Récurrence pour trouver les valeurs de δ et β à chaque étape. $\delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$ et $\beta = e^{-r\Delta T}\frac{uf_d - df_u}{S_u - S_d}$.
$X^{\Pi} = \beta + \delta S$ en remplaçant β et δ on obtient alors $X^{\Pi} = e^{-r\Delta T}(p^* f_u + (1 - p^*)f_d$ avec
$p^* = \frac{\exp(r\Delta T) - d}{(u-d)}$
On définit alors $\mathbb{P}^*$ la probabilité appelée risque-neutre définie comme :
$\mathbb{P}^*(S_{n+1} = S_u) = p^* = \frac{\exp(r\Delta T) - d}{(u-d)}$ et $\mathbb{P}^*(S_{n+1} = S_d) = 1 - p^* = \frac{u - \exp(r\Delta T)}{(u-d)}$

Implémentation en C++ de l'arbre binomial

Une classe mère (abstraite) et deux classes filles (AmericanOption et EuropeanOption)
Attributs (portée protected) :

- *So : le prix du sous-jacent à t=0*
- *K : le strike*
- *r : le taux sans risque*
- *T : la maturité*
- σ *: la volatilité*
- *N : le nombre de périodes*

Méthodes :

- Des constructeurs et un destructeur
- Des accesseurs et mutateurs pour nos attributs
- Méthode price
- Méthode display

Implémentation en C++ de l'arbre binomial

```
double EuropeanOption::price(){
    double prob = riskNeutralProb();

    vector<double> table(N+1);

    for (int compteur=0; compteur <=N; compteur++){
        table[compteur]=payOff(getStock(N-compteur,N),K,type);
    }
    for (int col=1;col<=N;col++){
        for (int index=0; index<=N-col; index++){
            table[index]=(prob*table[index]+(1-prob)*table[index+1])*exp(-r*T/N);
        }
        table.pop_back();
    }
    return table[0];
}
```

```
-----------------------------
Current price     : 50 $
Strike            : 52 $
Maturity          : 2 years
Risk-free rate    : 0.05
Volatility        : 0.7
Number of steps   : 10000
=============================
-----------------------------
Value of American put : 17.7574 $
-----------------------------
...................................
Calculation time: 9.17549 secondes
...................................
Program ended with exit code: 0
```

Figure – Fonction Price pour la classe EuropeanOption sous C++ et exemple d'affichage avec la fonction display

Definitions et théorèmes

Lemme

Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage si et seulement si il existe au moins une probabilité risque-neutre.

Théorème

Considérons un marché B-S sans opportunité d'arbitrage. On a l'équivalence :
Le marché est complet $\iff$ *Il existe une unique probabilité risque-neutre* $\mathbb{P}^*$*.*

Définition

Marché Complet Le marché B-S est dit complet si pour toute variable aléatoire $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$, il existe un portefeuille autofinancée Π qui réplique f à l'échéance N, i.e tel que
$\forall \omega \in \Omega, f(\omega) = X_n^{\Pi}(\omega)$

Définitions et théorèmes

Théorème

Supposons qu'il existe une probabilité risque neutre P^*.Alors, la valeur réactualisée $(\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^{\prod})_{N\geq 0}$ d'un portfeuille autofinancé $\prod$ est une martingale sous P^*

Définition

(Portefeuille de couverture) Un portefeuille Π est un portefeuille de couverture, si sa valeur à l'échéance est supérieure ou égale à la fonction de paiement f, i.e. si $\forall w \in \Omega, X_N^{\Pi}(w) \geq f(w)$

Plaçons nous maintenant sous l'hypothèse que le marché B-S est sans opportunité d'arbitrage et complet, notons alors $\mathbb{P}^*$ l'unique probabilité risque-neutre.

Définition

(Prix d'une option européenne) Le prix C d 'une option européenne de fonction de paiement f et d'échéance N correspond à la quantité
$C := inf\{X_0^{\Pi}$ tel que : Π est autofinancé et $\forall \omega \in \Omega, X_n^{\Pi} \geq f(\omega)\}$

Théorème

Le prix d'une option européenne de fct de paiement f à l'échéance N est $C = \mathbb{E}^*[\varepsilon_N(U)^{-1}f]$.

Réduction de variance par variable de contrôle

- Principe : "$\mathbb{E}[f(X) - h(X)] + \mathbb{E}[h(X)]$" de telle sorte que l'on sache calculer $\mathbb{E}[h(X)]$.
- On réduira la variance de la méthode de Monte Carlo si $\mathbb{V}(f(X) - h(X)) \leq \mathbb{V}(f(X))$.
- $f(S_N) = (S_N - K)_+$ et $f_2(S_N) = (K - S_N)_+$.

$$\begin{aligned} C - P &= \mathbb{E}^*(f(S_N)/\epsilon_N(U)) - \mathbb{E}^*(f_2(S_N)/\epsilon_N(U)) \\ &= \mathbb{E}^*((S_N - K)/\epsilon_N(U)) = S_0 - K\epsilon_N(U)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \mathbb{E}^*(f_2(S_N)/\epsilon_N(U)) + \mathbb{E}^*(h(S_N)/\epsilon_N(U)) \text{ avec } \mathrm{h}(S_N)\text{=}(S_N\text{-K}) \\ &= \mathbb{E}^*((f(S_N) - h(S_N))/\epsilon_N(U)) + \mathbb{E}^*(h(S_N)/\epsilon_N(U)) \\ & \quad (\text{car } f(S_N) - h(S_N) = (S_N - K)_+ - (S_N - K) = (K - S_N)_+ = f_2(S_N)) \end{aligned}$$

- $S_0 - K\epsilon_N(U)^{-1} + \frac{\epsilon_N(U)^{-1}}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(S_{N,1}) - h(S_{N,n})) \xrightarrow{\mathbb{P}^*} C$ pour $S_{N,1}, S_{N,2} ... S_{N,n}$ i.i.d de même loi que S_N

Réduction de variance par variable de contrôle

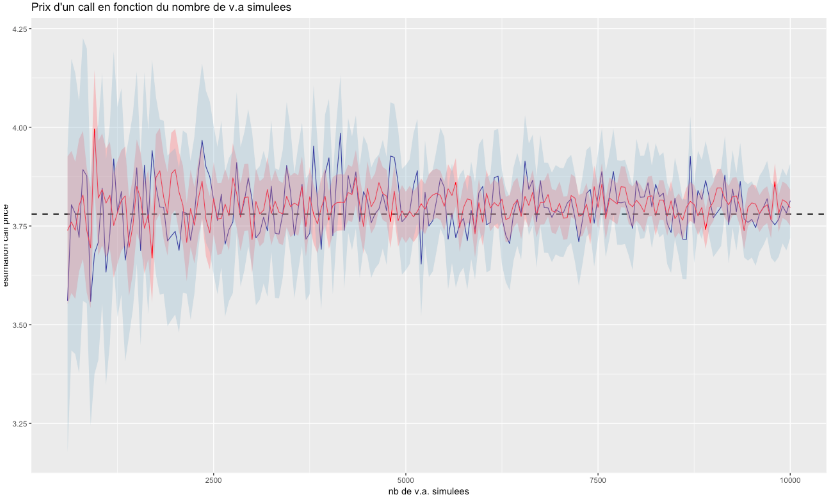

Figure – Estimation prix du Call(S=31, K=30, vol=0.2, r=0.05, nb s\-périodes=100,T=1) avec (rouge) et sans (bleu) réduction et int. de conf. à 95% (R)

Réduction de variance par fonction d'importance

- N nombre de s\-périodes de l'arbre, p probabilité d'un mouvement up
- Y$\sim\mathscr{B}(N,p)$ et dénombre le nombre de up dans l'arbre. Ainsi : $S_N = S_0 \times u^Y \times d^{N-Y} = S_N(Y)$
- Notre fonction payoff définie par $\phi(Y) = max(0, S_N(Y) - K)$
- On propose une famille de fonction de masse : $\mathscr{F} = \{f_p, p \in [0,1]\}$ avec f_p la fonction de masse d'une $\mathscr{B}(N,p)$.

On montre que $C = \epsilon_N(U)^{-1}\mathbb{E}^*[\phi(Y)] = \epsilon_N(U)^{-1}\mathbb{E}[\frac{f_*(Y)*\phi(Y)}{f_p(Y)}]$ $\forall$p $\in$[0,1]

Nous avons deux méthodes de Monte-Carlo pour approcher C :

$$\frac{\epsilon_N(U)^{-1}}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_*(Y_i)*\phi(S_N(Y_i))}{f_p(Y_i)} \xrightarrow{\mathbb{P}} C \text{ avec des } Y_1, Y_2\text{...i.i.d de même loi que Y} \backsim \text{B(N,p)}$$

$$\frac{\epsilon_N(U)^{-1}}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(X_i) \xrightarrow{\mathbb{P}} C \quad \text{avec des } X_1\text{,}X_2\text{...i.i.d de même loi que X} \backsim \text{B(N,p*)}$$

La première méthode est plus intéresante que la deuxième si $\mathbb{V}(\frac{f_*(Y)*\phi(S_N(Y))}{f_p(Y)}) \leq \mathbb{V}(\phi(X))$.

Réduction de variance par fonction d'importance

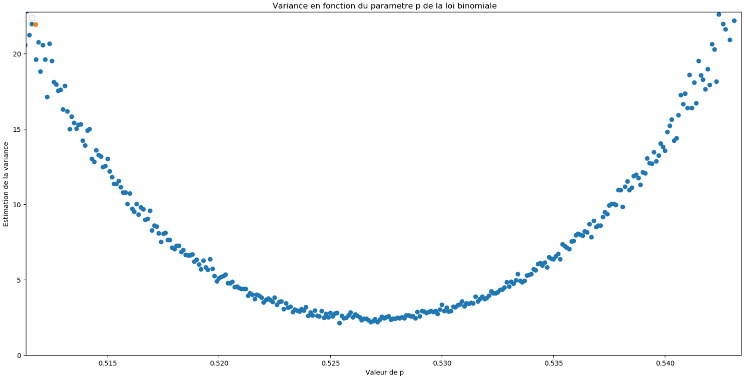

Figure – Estimation de la variance en fonction du paramètre p (le point orange correspond à l'estimation de $\mathbb{V}[\varepsilon_N(U)^{-1}\phi(X)]$ obtenu pour p=p^*)

Réduction de variance par fonction d'importance

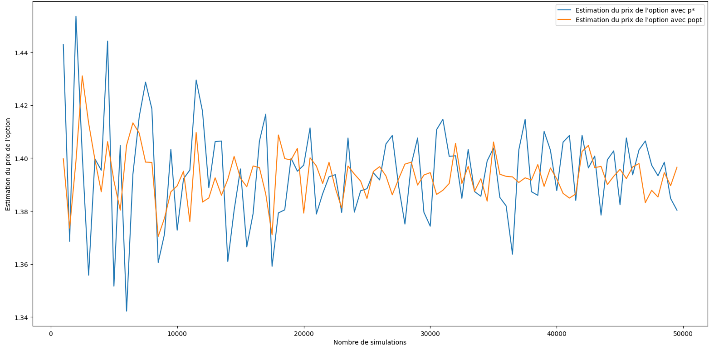

Figure – Estimation du prix du $Call(S_0 = 29, K = 30, vol = 0.2, N = 365, n = 1000, r = 0.05)$ avec et sans réduction de variance, en fonction du nombre de simulations, sous Python.