Exercices Quantiques

Exercice 18 : Projecteur

1. Écrire les projecteurs $\hat{P}_0$ et $\hat{P}_1$ qui projettent respectivement sur les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ dans la base canonique. On vérifiera la complétude de $\hat{P}_0$ et $\hat{P}_1$.

- Rappels :
  $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Respectivement :
  $\langle 0| = [1 \quad 0]$ et $\langle 1| = [0 \quad 1]$

- Écrire les projecteurs $\hat{P}_0$ et $\hat{P}_1$ qui projettent respectivement sur les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ dans la base canonique :

$$\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 1\times 1 & 1\times 0 \\ 0\times 1 & 0\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- On vérifiera la complétude de $\hat{P}_0$ et $\hat{P}_1$:

$$\hat{P}_0 + \hat{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \hat{I}$$

$\{\hat{P}_0, \hat{P}_1\}$ est bien un ensemble complet de projecteur car $\hat{P}_0 + \hat{P}_1$ est bien égal à $\hat{I}$.

---

2. En utilisant $\hat{P}_0$ et $\hat{P}_1$, déterminer les probabilités de trouver $|0\rangle$ et de trouver $|1\rangle$ lorsqu'une mesure de l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt[2]{3}}|0\rangle + \sqrt[2]{\frac{2}{3}}|1\rangle$ est effectuée.
   Rappels :
   $\langle 0|0\rangle = 1$ et $\langle 1|1\rangle = 1$
   $\langle 0|1\rangle = 0$ et $\langle 1|0\rangle = 0$

- En utilisant $\hat{P}_0$ et $\hat{P}_1$, déterminer les probabilités de trouver $|0\rangle$ et de trouver $|1\rangle$ lorsqu'une mesure de l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt[2]{3}}|0\rangle + \sqrt[2]{\frac{2}{3}}|1\rangle$ est effectuée.

$$\hat{P}_0\psi = |0\rangle\langle 0| \left(\frac{1}{\sqrt[2]{3}}|0\rangle + \sqrt[2]{\frac{2}{3}}|1\rangle \right) = \hat{P}_0\psi = \frac{1}{\sqrt[2]{3}}|0\rangle \langle 0|0\rangle + \sqrt[2]{\frac{2}{3}}|0\rangle \langle 1|0\rangle$$

$$P_0[0] = \langle\psi|\hat{P}_0|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0| + \sqrt[2]{\frac{2}{3}}\langle 1|\right)\frac{1}{\sqrt[2]{3}}|0\rangle = \langle\psi|\hat{P}_0|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt[2]{3}}\frac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0\rangle + \sqrt[2]{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 1|0\rangle = \frac{1}{3}$$

$$\langle\psi|\hat{P}_0|\psi\rangle \iff P_0[0] = |\langle 0|\psi\rangle|^2$$

On peut également faire ainsi :

$$P_1[1] = \langle\psi|\hat{P}_1|\psi\rangle = |\sqrt[2]{\frac{2}{3}}|^2 = \frac{2}{3}$$

---

3. Écrire les projecteurs $\hat{P}_+$ et $\hat{P}_-$ qui projettent respectivement sur les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ dans la base canonique.
   On vérifiera la complétude de $\hat{P}_+$ et $\hat{P}_-$ où l'on rappelle que $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt[2]{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ et $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt[2]{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.
   Rappels :
   $\langle +| = |+\rangle^\dagger$

- Écrire les projecteurs $\hat{P}_+$ et $\hat{P}_-$ qui projettent respectivement sur les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ dans la base canonique :

$$\hat{P}_+ = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt[2]{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt[2]{2}}\right) = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_- = \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt[2]{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| - \langle 1|}{\sqrt[2]{2}}\right) = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- On vérifiera la complétude de $\hat{P}_+$ et $\hat{P}_-$ où l'on rappelle que $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt[2]{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ et $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt[2]{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

$$\hat{P}_+ + \hat{P}_- = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \hat{I}$$

$\{\hat{P}_+, \hat{P}_-\}$ est bien un ensemble complet de projecteur car $\hat{P}_+ + \hat{P}_-$ est bien égal à $\hat{I}$.