## **Exercices Quantiques**

## **Exercice 18: Projecteur**

- 1. Écrire les projecteurs  $\hat{P}_0$  et  $\hat{P}_1$  qui projettent respectivement sur les états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  dans la base canonique. On vérifiera la complétude de  $\hat{P}_0$  et  $\hat{P}_1$ .
- Rappels:

$$|0
angle = egin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 et  $|1
angle = egin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 

Respectivement :

$$\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Écrire les projecteurs  $\hat{P}_0$  et  $\hat{P}_1$  qui projettent respectivement sur les états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  dans la base canonique :

$$egin{aligned} \hat{P}_0 &= |0
angle\langle 0| = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 \end{bmatrix} [1 & 0] = egin{bmatrix} 1 imes 1 & 1 imes 0 \ 0 imes 1 & 0 imes 0 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{P}_1 &= |1
angle\langle 1| = egin{bmatrix} 0 \ 1 \end{bmatrix} [0 & 1] = egin{bmatrix} 0 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• On vérifiera la complétude de  $\hat{P}_0$  et  $\hat{P}_1$  :

$$\hat{P}_0+\hat{P}_1=egin{bmatrix}1&0\0&0\end{bmatrix}+egin{bmatrix}0&0\0&1\end{bmatrix}=egin{bmatrix}1&0\0&1\end{bmatrix}=\hat{I}$$

 $\{\hat{P}_0,\hat{P}_1\}$  est bien un ensemble complet de projecteur car  $\hat{P}_0+\hat{P}_1$  est bien égal à  $\hat{I}$ .

2. En utilisant  $\hat{P}_0$  et  $\hat{P}_1$ , déterminer les probabilités de trouver  $|0\rangle$  et de trouver  $|1\rangle$  lorsqu'une mesure de l'état  $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}|0\rangle+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}|1\rangle$  est effectuée.

Rappels:

$$\langle 0|0 \rangle = 1$$
 et  $\langle 1|1 \rangle = 1$ 

$$\langle 0|1\rangle=0$$
 et  $\langle 1|0\rangle=0$ 

• En utilisant  $\hat{P}_0$  et  $\hat{P}_1$ , déterminer les probabilités de trouver  $|0\rangle$  et de trouver  $|1\rangle$  lorsqu'une mesure de l'état  $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}|0\rangle+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}|1\rangle$  est effectuée.

$$\hat{P}_0\psi=|0
angle\langle 0|\left(rac{1}{\sqrt[2]{3}}|0
angle+\sqrt[2]{rac{2}{3}}|1
angle
ight)=\hat{P}_0\psi=rac{1}{\sqrt[2]{3}}|0
angle\left\langle 0|0
angle+\sqrt[2]{rac{2}{3}}|0
angle\left\langle 1|0
angle$$

$$P_0[0] = \langle \psi | \hat{P}_0 | \psi 
angle = \left(rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0| + \sqrt[2]{rac{2}{3}}\langle 1|
ight)rac{1}{\sqrt[2]{3}}|0
angle = \langle \psi | \hat{P}_0 | \psi 
angle = rac{1}{\sqrt[2]{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 1|0
angle = rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 1|0
angle = rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 1|0
angle = rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 1|0
angle = rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 1|0
angle = rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 1|0
angle = rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 1|0
angle = rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 1|0
angle = rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle = rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{rac{2}{3}}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{3}rac{1}{\sqrt[2]{3}}\langle 0|0
angle + \sqrt[2]{3}\sqrt[2]{3}\langle 0|$$

On peut également faire ainsi :

$$P_1[1]=\langle\psi|\hat{P}_1|\psi
angle=|\sqrt[2]{rac{2}{3}}|^2=rac{2}{3}$$

3. Écrire les projecteurs  $\hat{P}_+$  et  $\hat{P}_-$  qui projettent respectivement sur les états  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$  dans la base canonique.

On vérifiera la complétude de  $\hat{P}_+$  et  $\hat{P}_-$  où l'on rappelle que  $|+\rangle=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$  et  $|-\rangle=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$ .

Rappels:

$$\langle +|=|+\rangle^{\dagger}$$

• Écrire les projecteurs  $\hat{P}_+$  et  $\hat{P}_-$  qui projettent respectivement sur les états  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$  dans la base canonique :

$$\hat{P}_{+} = \left(rac{\ket{0}+\ket{1}}{\sqrt[2]{2}}
ight)\left(rac{ra{0}+ra{1}}{\sqrt[2]{2}}
ight) = rac{1}{2}(\ket{0}ra{0}+\ket{0}ra{1}+\ket{1}ra{0}+\ket{1}ra{1}) = rac{1}{2}igg[f{1} & 1 \ 1 & 1igg] \ \hat{P}_{-} = \left(rac{\ket{0}-\ket{1}}{\sqrt[2]{2}}
ight)\left(rac{ra{0}-ra{1}}{\sqrt[2]{2}}
ight) = rac{1}{2}(\ket{0}ra{0}-\ket{0}ra{1}-\ket{1}ra{0}+\ket{1}ra{1}) = rac{1}{2}igg[f{1} & -1 \ -1 & 1igg]$$

• On vérifiera la complétude de  $\hat{P}_+$  et  $\hat{P}_-$  où l'on rappelle que  $|+\rangle=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$  et  $|-\rangle=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$ .

$$\hat{P}_+ + \hat{P}_- = rac{1}{2}egin{bmatrix}1 & 1\1 & 1\end{bmatrix} + rac{1}{2}egin{bmatrix}1 & -1\-1 & 1\end{bmatrix} = rac{1}{2}egin{bmatrix}2 & 0\0 & 2\end{bmatrix} = egin{bmatrix}1 & 0\0 & 1\end{bmatrix} = \hat{I}$$

 $\{\hat{P}_+,\hat{P}_-\}$  est bien un ensemble complet de projecteur car  $\hat{P}_++\hat{P}_-$  est bien égal à  $\hat{I}$ .