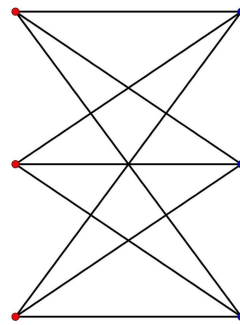
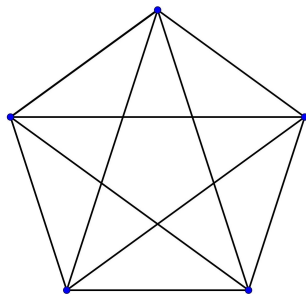


FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER



MASTER 1 MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES
TRAVAIL ENCADRÉ DE RECHERCHE

Théorème de Kuratowski & Conjecture de Heawood



VICTOR BALEUX
BAPTISTE CELLIER-VALENCIA

Tuteur : JÉRÉMIE BRIEUSSEL
Année : 2022-2023

Mai 2023

Table des matières

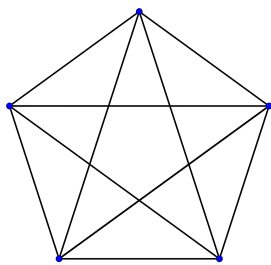
1	Introduction	2
2	Preuve du Théorème de Kuratowski	3
3	Définitions et Rappels Topologiques sur les surfaces	9
4	Borne supérieure de Heawood	11
5	Conjecture de Heawood et Théorème du Graphe Complet	13
6	Conjecture du Graphe Complet	14

1 Introduction

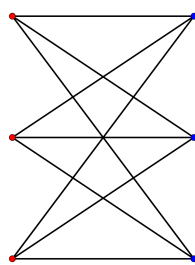
Ce travail encadré de recherche en mathématiques s'intéresse à la manière dont on peut dessiner un graphe sur une surface sans que les arêtes ne se croisent.

Il s'agit, dans un premier temps, de démontrer le théorème de Kuratowski suivant :

Théorème 1.1 (Théorème de Kuratowski). *Un graphe est planaire si et seulement s'il n'admet pas pour sous-graphe une subdivision du graphe complet à 5 sommets K_5 ou du graphe complet biparti à 3 sommets $K_{3,3}$.*



K_5



$K_{3,3}$

Ce théorème caractérise les graphes qui peuvent être dessinés sur le plan ou sur la sphère. Nous pouvons noter que le théorème de Robertson-Seymour démontré en 2004 généralise ce théorème à des surfaces quelconques.

Dans un second temps nous nous intéresserons au genre minimal d'une surface fermée orientable sur laquelle on peut tracer un graphe complet. En particulier nous étudierons la conjecture de Heawood, qui donne la coloriabilité d'une surface orientable fermée :

Théorème 1.2 (conjecture de Heawood). *Soit S une surface fermée orientable de caractéristique d'Euler $c \leq 1$, Alors*

$$\chi(S) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24c}}{2} \right\rfloor$$

Ce théorème a été conjecturé en 1890 par John Percy Heawood, qui a seulement réussi à montrer l'inégalité $\chi(S) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24c}}{2} \right\rfloor$ qui est connue sous le nom de *Théorème de la borne supérieure de Heawood*. C'est seulement en 1968 que Gerhard Ringels et John William Theodore Youngs ont démontré le résultat, en construisant des exemples extrémaux. Nous présenterons donc la stratégie globale de leur démonstration et en particulier son lien important avec le théorème du Graphe Complet qui permet de prouver la conjecture de Heawood. Notons que le Théorème reste vrai pour $c = 2$, c'est-à-dire dans le cas de la sphère. C'est le *Théorème des 4 Couleurs*. Nous n'aborderons pas sa démonstration ici.

2 Preuve du Théorème de Kuratowski

Cette démonstration s'appuie sur le livre de Franck Harary, *Graph Theory* [HAR69].

Considérons G un graphe non-planaire minimal qui ne contient pas de subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$. C'est-à-dire que si l'on retire une arête quelconque à G , il devient planaire.

Sans restreindre la généralité, on peut le considérer connexe et de degré 3 (le degré maximal de ses sommets est 3). En effet, un graphe est non-planaire si et seulement si une de ses composantes connexes ne l'est pas et les graphes de degré 1 ou 2 sont tous planaires (ce sont des chaînes ou des cycles).

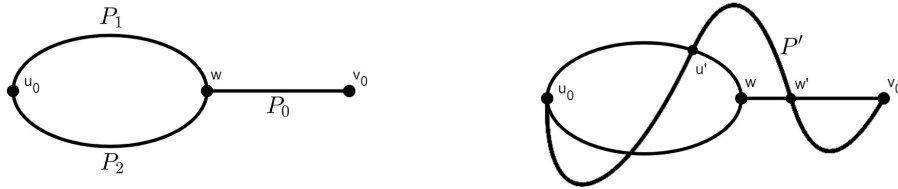
Si on pose x_0 une arête quelconque de G et u_0 et v_0 ses sommets adjacents, alors le graphe $F = G - x_0$ est nécessairement planaire et connexe par minimalité de G .

Définition : soit w un sommet du graphe F . On dit que w est un point de coupure du graphe F , si F privé de w et de ses arêtes adjacentes contient au moins deux composantes connexes. Une de ces composantes connexes à laquelle on rajoute w et les arêtes le reliant à celle-ci est appelée un bloc.

Lemme 2.1. *Il existe un sommet w de F qui est commun à tous les chemins de u_0 à v_0 .*

Démonstration. Supposons que les points appartenant à des chemins de u_0 à v_0 ne soient pas des points de coupure. Soit U l'ensemble des points différents de u_0 qui se trouvent sur un cycle contenant u_0 et appartenant à un chemin de u_0 à v_0 . Puisque F a au moins 3 points et que les points adjacents à u_0 des chemins allant de u_0 à v_0 ne sont pas des points de coupure, ils appartiennent à U . Donc $U \neq \emptyset$.

Supposons que v_0 ne soit pas dans U . Soit w un point de U pour lequel la distance $d(w, v_0)$ est minimale. Soit P_0 un plus court chemin $w - v_0$ et soient P_1 et P_2 les deux chemins $u_0 - w$ d'un cycle contenant u_0 et w . Comme w n'est pas un point de coupure, il existe un chemin $u_0 - v_0$ noté P' ne contenant pas w . Soit w' le point le plus proche de v_0 dans P' qui est aussi dans P_0 et soit u' le dernier point du sous-chemin $u_0 - w'$ de P' dans P_1 ou P_2 . Sans perte de généralité, on suppose que u' est dans P_1 .

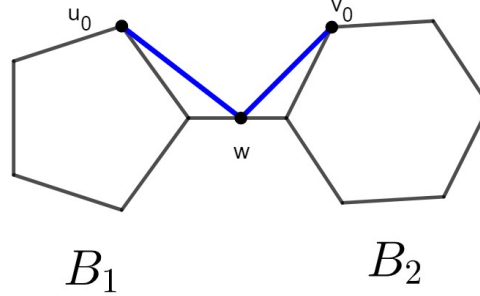


Soit Q_1 le chemin $u_0 - w'$ constitué du sous-chemin $u_0 - u'$ de P_1 , et le sous-chemin $u' - w'$ de P' . Soit Q_2 le chemin $u_0 - w'$ constitué de P_2 concaténé avec le sous-chemin $w - w'$ de P_0 . Alors Q_1 et Q_2 sont des chemins $u_0 - w'$ disjoints. Concaténés, ils forment un cycle, donc w' est dans U . Puisque w' est sur un chemin $w - v_0$ le plus court, $d(w', v_0) < d(w, v_0)$, cela contredit notre choix de w et cela implique que u_0 et v_0 sont sur un cycle, ce qui est faux par supposition. On a donc l'existence d'au moins un point de coupure, w sur l'un des chemins $u_0 - v_0$, w étant un point de coupure tous les chemins $u_0 - v_0$ passent par w . \square

Lemme 2.2. *Il existe un cycle de F qui contient u_0 et v_0 .*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il n'y ait aucun cycle contenant u_0 et v_0 dans F . Par connexité de F il existe un chemin reliant u_0 à v_0 .

Considérons le graphe F_0 obtenu en ajoutant à F les arêtes wu_0 et wv_0 si elles ne sont pas déjà présentes. Dans le graphe F_0 , u_0 et v_0 se trouvent toujours dans des blocs différents, disons B_1 et B_2 , qui ont nécessairement le point w en commun. B_1 et B_2 ont chacun moins d'arêtes que G , donc soit B_1 est planaire, soit il contient un sous-graphe homéomorphe à une subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$. Cependant, si l'insertion de wu_0 , induit un tel sous-graphe H , alors le sous-graphe de G obtenu en remplaçant wu_0 , par un chemin de u_0 à w qui commence par x_0 est nécessairement homéomorphe à une subdivision de H et donc à une subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$, mais c'est impossible par hypothèse sur G . Par conséquent, B_1 est planaire. De même pour B_2 .

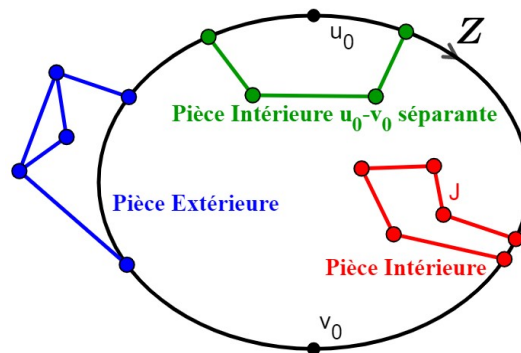


B_1 et B_2 peuvent alors être projetés dans le plan de sorte que les lignes wu_0 et wv_0 délimitent la face non-bornée. Il est donc possible de dessiner le graphe F_0 dans le plan avec wu_0 et wv_0 qui délimitent la face non bornée. Dès lors, on peut ajouter x_0 sans compromettre la planarité de F_0 . Puisque G est un sous-graphe de $F_0 + x_0$, G est planaire. Cette contradiction montre qu'il existe un cycle dans F contenant u_0 et v_0 . \square

Définitions et notations :

Soit F dessiné dans le plan de telle manière qu'il y ait un cycle Z contenant u_0 et v_0 ayant le maximum de régions intérieures possible. On munit ensuite le cycle Z d'une orientation. Pour tout u et v , des sommets de Z :

- Notons $Z[u, v]$ le chemin de u à v suivant Z selon son orientation.
- Si u ne précède pas directement v sur Z , Notons $Z(u, v)$ le chemin $Z[u, v]$ privé de u et v .
- Une pièce extérieure (resp. intérieure) est une composante connexe du sous graphe de F privé de Z et de son intérieur (resp. extérieur) à laquelle on adjoint les sommets de Z qui lui sont adjacents.
- Une pièce extérieure ou intérieure est appelée $u - v$ séparante si elle rencontre $Z(u, v)$ et $Z(v, u)$.



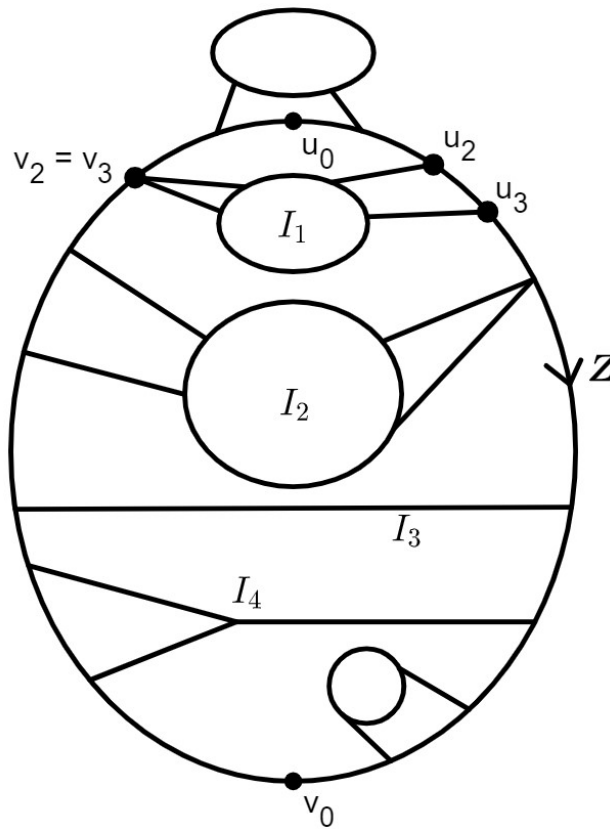
Observations :

- Puisque F est connexe, toutes les pièces intérieures comme extérieures doivent rencontrer Z au moins une fois.
- La minimalité de G impose que chaque pièce doit rencontrer Z en au moins deux points différents. En effet, si une pièce rencontre Z en un seul point, alors le graphe G amputé de cette pièce continue d'être non-planaire.
- Aucune pièce extérieure ne peut rencontrer $Z(u, v)$ ou $Z(v, u)$ en plus d'un point, sinon on aurait l'existence d'un cycle ayant plus de régions intérieures que Z .
- Par le même argument, aucune pièce extérieure ne peut rencontrer u_0 ou v_0 .
- Ainsi toutes les pièces extérieures sont $u_0 - v_0$ séparantes et rencontrent Z en exactement deux points.
- Puisque x_0 ne peut pas être ajouté à F de manière planaire, il existe au moins une pièce intérieure $u_0 - v_0$ séparante.

Lemme 2.3. *Il existe une pièce extérieure $u_0 - v_0$ séparante rencontrant $Z(u_0, v_0)$ en un point noté u_1 , et rencontrant $Z(v_0, u_0)$ en un point noté v_1 , telle qu'il existe une pièce intérieure qui soit à la fois $u_0 - v_0$ séparante et $u_1 - v_1$ séparante*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons le résultat faux. On ordonne les pièces intérieures $u_0 - v_0$ séparantes comme suit : On parcourt $Z(u_0, v_0)$ selon son orientation et on numérote $(I_1, I_2, I_3 \dots)$ à chaque fois que l'on rencontre une pièce intérieure qui est $u_0 - v_0$ séparante.

Soit u_2 et u_3 les premier et dernier points de rencontre entre I_1 et $Z(u_0, v_0)$ et soient v_2 et v_3 les premier et dernier points de rencontre entre I_1 et $Z(v_0, u_0)$.



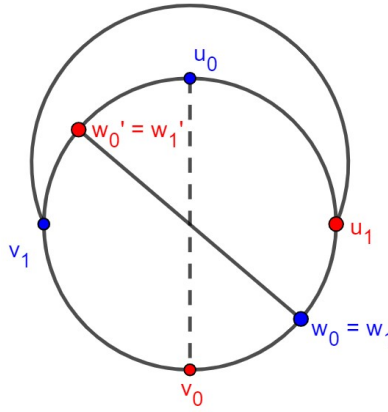
Toutes les pièces extérieures ont nécessairement leurs deux points de contact avec Z soit sur $Z[v_3, u_2]$ soit sur $Z[u_3, v_2]$, sinon il existerait une pièce extérieure rencontrant $Z(u_0, v_0)$ en u_1 et $Z(v_0, u_0)$ en v_1 et une pièce intérieure qui serait à la fois $u_0 - v_0$ séparante et $u_1 - v_1$ séparante, ce qui est faux par hypothèse.

L'absence de pièce extérieure dont le sommet de rencontre avec Z serait sur $Z(u_2, u_3)$ ou sur $Z(v_3, v_2)$ assure que I_1 peut être transféré à l'extérieur de Z de manière planaire. On procède de la même manière pour montrer que les autres pièces intérieures $u_0 - v_0$ séparantes peuvent être transférées à l'extérieur de Z . Cela nous permet alors de dessiner x_0 de manière planaire. Cela aboutit à une contradiction dans la mesure où G est non-planaire. \square

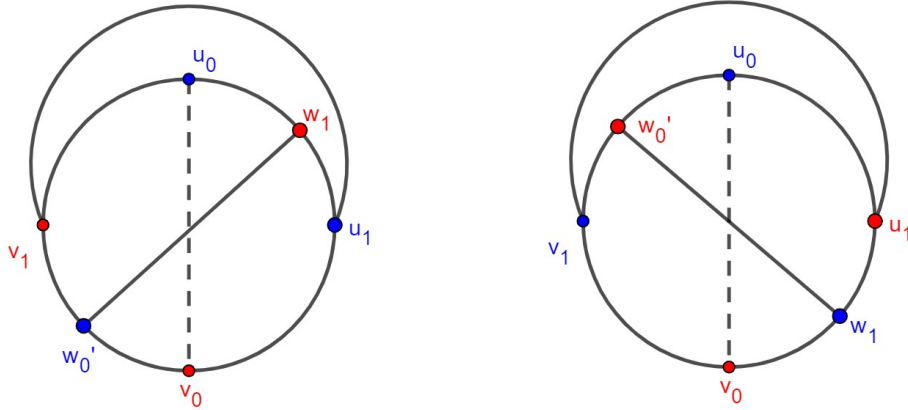
Disjonction de cas

Posons H une pièce intérieure à la fois $u_0 - v_0$ séparante et $u_1 - v_1$ séparante dont l'existence est garantie par le Lemme 2. Soit w_0, w'_0, w_1 et w'_1 les points de H rencontrant respectivement $Z(u_0, v_0)$, $Z(v_0, u_0)$, $Z(u_1, v_1)$ et $Z(v_1, u_1)$. Nous allons opérer une disjonction de cas sur la position relative de w_1 et w'_1 sur Z .

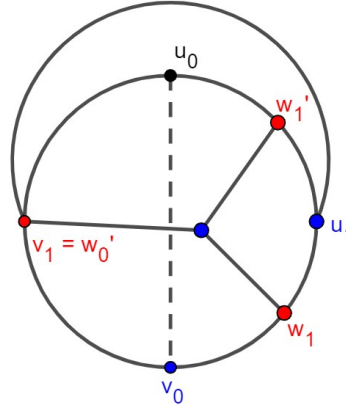
Cas 1 : On suppose d'abord que l'un des sommets w_1, w'_1 est sur $Z(u_0, v_0)$ et l'autre est sur $Z(v_0, u_0)$. Sans restreindre la généralité, on peut prendre $w_0 = w_1$ et $w'_0 = w'_1$. G possède alors un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$:



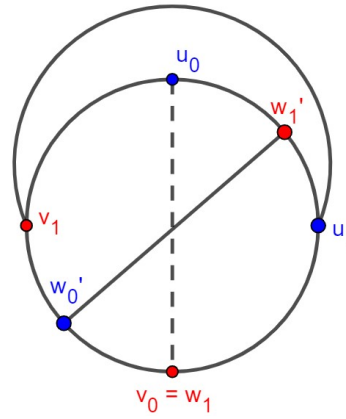
Cas 2 : On suppose que les deux sommets w_1 et w'_1 sont sur $Z(u_0, v_0)$ ou sur $Z(v_0, u_0)$. Sans restreindre la généralité, on peut considérer la première option. Il y a deux sous-cas possibles : Si $v_0 \neq w'_0$ alors on voit que G contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$:



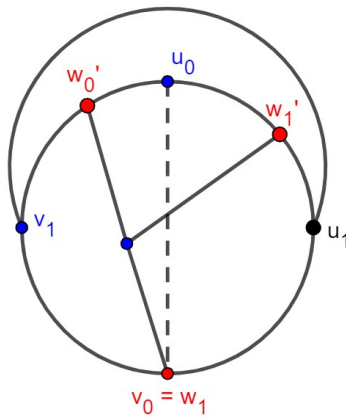
Si au contraire $v_0 = w'_0$, alors H contient un sommet duquel on peut rejoindre v_0 , w_1 et w'_1 en parcourant H . Dans ce cas, G contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$:



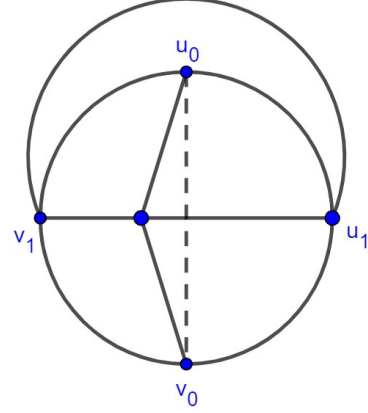
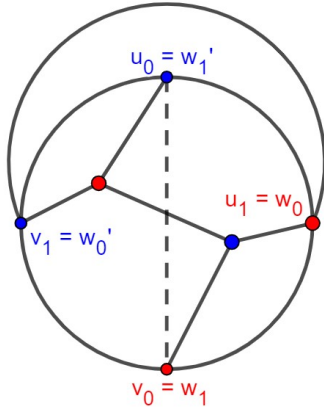
Cas 3 : On suppose maintenant que $w_1 = v_0$ et $w'_1 \neq u_0$. Sans restreindre la généralité, on peut considérer que $w'_1 \in Z(u_0, v_0)$. Si $w'_0 \in Z(v_0, v_1)$ on a bien G qui admet $K_{3,3}$ comme sous-graphe.



Au contraire, si $w'_1 \in Z(v_1, u_1)$, alors H contient un sommet duquel on peut rejoindre v_0 , w_1 et w'_0 en parcourant H . Dans ce cas, G contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$:



Cas 4 : On suppose maintenant que $w_1 = v_0$ et $w'_1 = u_0$. On ne considère que $w_0 = u_1$ et $w'_0 = v_1$ puisque sinon on peut se ramener à un des trois cas précédemment traités. On pose P_0 et P_1 les plus courts chemins respectifs de u_0 à v_0 et de u_1 à v_1 selon H . Deux sous-cas s'offrent à nous : soit P_0 et P_1 ont plus d'un sommet en commun, auquel cas G contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$, soit ils ont exactement un sommet en commun et alors G possède un sous-graphe homéomorphe à K_5 .



■

3 Définitions et Rappels Topologiques sur les surfaces

Définitions :

- On appelle surface un espace topologique S localement homéomorphe au plan \mathbb{R}^2 ou au demi-plan de \mathbb{R}^2 au voisinage de tout point de S . L'ensemble des points de S dont tous les voisinages sont homéomorphes au demi-plan est appelé le bord de S . Une surface est dite simple si elle ne possède pas de bord.
- Le genre g d'une surface S est le nombre maximal de courbes fermées que l'on peut tracer sur cette surface sans la déconnecter (c'est-à-dire que le complémentaire de l'union des courbes reste connexe). Un "tore à n trous" est de genre n .
- Une surface fermée est une surface simple, connexe et compacte.
- Si on a S_1 et S_2 deux surfaces connexes, on peut définir la somme connexe de ces deux surfaces. C'est la surface définie à homéomorphisme près que l'on obtient en retirant un ouvert homéomorphe au disque aux deux surfaces et en identifiant les deux bords créés. On la note $S_1 * S_2$. La sphère S^2 est l'élément neutre de cette opération.

Théorème 3.1. *Théorème de Classification des Surfaces :* Une surface fermée, orientable de genre $n \geq 1$ est homéomorphe à une somme connexe de n tores, c'est-à-dire un "tore à n trous".

Nous admettons ce résultat dont la preuve nous écarterait trop de notre projet.

Décomposition cellulaire :

Une décomposition cellulaire d'une surface S est une partition finie de cette surface en ensembles homéomorphes à \mathbb{R}^p avec $p \leq 2$.

Si on a $S = \bigcup_{i=1}^n S_i = (\bigcup_{i=1}^{n_0} S_i) \cup (\bigcup_{i=n_0+1}^{n_1} S_i) \cup (\bigcup_{i=n_1+1}^{n_2} S_i)$ une décomposition cellulaire de S telle que :

- S_i est homéomorphe à \mathbb{R}^0 pour $i \leq n_0$
- S_i est homéomorphe à \mathbb{R}^1 pour $n_0 < i \leq n_1$
- S_i est homéomorphe à \mathbb{R}^2 pour $n_1 < i \leq n_2$

Alors en posant $c_0 = n_0$, $c_1 = n_1 - n_0$, $c_2 = n_2 - n_1$ on peut définir $c(S) = c_0 - c_1 + c_2$.

Théorème 3.2. Le nombre $c(S)$ est indépendant de la décomposition cellulaire choisie pour faire le calcul et ne dépend que de la surface S . C'est la caractéristique d'Euler de cette surface.

Nous admettons aussi ce résultat.

Exemples :

- La caractéristique d'Euler de la sphère S^2 est 2 car la sphère est la réunion disjointe d'un point et d'une partie homéomorphe au plan \mathbb{R}^2 .
- La caractéristique d'Euler du tore T est $c(T) = 0$. En effet, le tore peut être partitionné en un point ($c_0 = 1$), deux parties homéomorphes à la droite réelle ($c_1 = 2$) et un ensemble homéomorphe au plan ($c_2 = 1$). D'où $c(T) = 1 - 2 + 1 = 0$.

Théorème 3.3. Si S et S' sont deux surfaces connexes, on a la formule suivante :

$$c(S * S') = c(S) + c(S') - 2$$

Une récurrence immédiate nous donne $c(T_n) = 2 - 2n$ pour T_n le "tore à n trous".

Démonstration. D'après le procédé de construction d'une somme connexe, en se donnant une décomposition cellulaire de S et S' , on retire un élément homéomorphe à \mathbb{R}^2 de chaque décomposition et l'un des deux bords est supprimé mais il contient autant d'arête que de sommet donc cela n'affecte pas la caractéristique d'Euler. On a alors une décomposition cellulaire de $c(S * S')$ et nous avons le résultat : $c(S * S') = c(S) + c(S') - 2$ \square

Application à la théorie des graphes :

Soit $G = (V, E)$ un graphe plongé sur une surface S :

- F est l'ensemble des faces de G , ce sont les composantes connexes de $S - G$.
- Un coloriage à k couleurs de G est une application $f : V \rightarrow \llbracket 1, k \rrbracket$ telle que $\forall (v, v') \in E$ on ait $f(v) \neq f(v')$.
- $\chi(G)$ est le nombre chromatique de G , c'est le minimum des $k \in \mathbb{N}$ tel que G admette un coloriage à k couleurs.
- $\chi(S)$ est le nombre chromatique de S , c'est le plus petit nombre tel que pour tout graphe G plongé sur S :

$$\chi(G) \leq \chi(S)$$

La donnée d'une décomposition cellulaire d'une surface est aussi la donnée d'un graphe connexe plongé dans cette surface. On peut en effet identifier les parties homéomorphes à \mathbb{R}^0 à des sommets, les parties homéomorphes à \mathbb{R}^1 à des arêtes et les parties homéomorphes à \mathbb{R}^2 à des faces. On obtient ainsi la formule d'Euler :

$$c(S) = \#V - \#E + \#F$$

Notons qu'un graphe plongé dans S peut être complété en une décomposition cellulaire par l'ajout d'arêtes qui laisse constant le nombre de sommets et de faces, ce qui donne la formule générale :

$$c(S) \leq \#V - \#E + \#F$$

De plus, on rappelle qu'une surface est dite triangulée si l'on peut en faire une décomposition cellulaire où toutes les faces sont des triangles. Dans ce cas, si deux triangles adjacents sont orientés, alors leur orientation est compatible si et seulement si, les deux demi-arêtes d'adjacence ont des orientations inverses.

Le travail suivant se propose d'étudier le nombre chromatique des surfaces fermées orientables, c'est-à-dire le nombre chromatique des tores à n trous.

4 Borne supérieure de Heawood

Nous cherchons à montrer ici l'inégalité suivante [HEA90] : Pour S une surface fermée orientable de caractéristique d'Euler c , nous avons :

$$\chi(S) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24c}}{2} \right\rfloor$$

Définitions et notations :

- $d(G)$ est le degré moyen de G :

$$d(G) = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{\#V}$$

- Un graphe G est chromatiquement critique si la suppression d'une de ses arêtes implique une diminution du nombre $\chi(G)$

Théorème 4.1. Soient S une surface de caractéristique d'Euler c et G un graphe plongé dans S , Alors :

$$d(G) \leq 6 - \frac{6c}{\#V}$$

Démonstration. Un plongement d'un graphe sur une surface est maximal si l'ajout d'une arête quelconque à ce graphe ne permet plus de le plonger dans S . Si c'est le cas alors toutes les faces sont des triangles. Par double-dénombrement d'arêtes on obtient l'égalité $3\#F = 2\#E$. Pour un plongement quelconque on a donc l'inégalité $3\#F \leq 2\#E$.

En considérant l'inégalité d'Euler $c \leq \#V - \#E + \#F$ on obtient $c \leq \#V - \frac{1}{3}\#E$ et $\#E \leq 3\#V - 3c$.

De plus, on a toujours l'égalité

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\#E$$

Donc

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \leq 6\#V - 6c$$

et finalement

$$d(G) \leq 6 - \frac{6c}{\#V}$$

□

Théorème 4.2. Soit S une surface fermée et G un graphe plongé dans S chromatiquement critique tel que $\chi(G) = \chi(S)$, Alors pour tout v appartenant à V ,

$$\chi(S) - 1 \leq \deg(v)$$

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ un graphe chromatiquement critique plongé dans S et soit $v \in V$, on suppose par l'absurde que $\deg(v) < \chi(S) - 1$.

Alors le graphe $G - v$ a moins d'arêtes que G et peut donc être colorié avec $\chi(S) - 1$ couleurs. Tout au plus $\chi(S) - 2$ couleurs sont utilisées pour colorier les sommets voisins de v . Il nous reste alors au moins une couleur pour colorier v en le rajoutant. On a alors obtenu un coloriage de G avec $\chi(S) - 1$ couleurs ce qui est absurde. □

Théorème 4.3 (Borne supérieure de Heawood). Soit S une surface fermée de caractéristique d'Euler $c \leq 1$, Alors

$$\chi(S) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24c}}{2} \right\rfloor$$

où $\lfloor a \rfloor$ est la partie entière a .

Démonstration. Si $c = 1$ alors $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24c}}{2} \right\rfloor = 6$, et S n'est autre que le plan projectif. Sachant que K_6 se plonge dans le plan projectif, 4.2 nous donne $\chi(S) \leq 6$ (En fait, comme $\chi(K_6) = 6$, on a même l'égalité).

Supposons à présent que $c \leq 0$.

Soit G un graphe plongé dans S chromatiquement critique tel que $\chi(G) = \chi(S)$.

Par 4.1 $d(G) \leq 6 - \frac{6c}{\#V}$, et par 4.2 $\chi(S) - 1 \leq \deg(v)$ dont on en déduit

$$\chi(S) - 1 \leq 6 - \frac{6c}{\#V}$$

De plus $\chi(S) \leq \#V$ et puisque c est négatif on a alors $\frac{-6c}{\#V} \leq \frac{-6c}{\chi(S)}$. Donc $\chi(S) - 1 \leq 6 - \frac{6c}{\chi(S)}$ et finalement

$$\chi(S)^2 - 7\chi(S) + 6c \leq 0$$

On factorise alors l'expression :

$$\left(\chi(S) - \frac{7 - \sqrt{49 - 24c}}{2} \right) \left(\chi(S) - \frac{7 + \sqrt{49 - 24c}}{2} \right) \leq 0$$

Puisque $c \leq 0$ on a alors $7 - \sqrt{49 - 24c} \leq 0$ et donc nécessairement $\chi(S) \leq \frac{7 + \sqrt{49 - 24c}}{2}$. De plus $\chi(S) \in \mathbb{N}$, ce qui permet de montrer la borne supérieure de Heawood :

$$\chi(S) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24c}}{2} \right\rfloor$$

□

5 Conjecture de Heawood et Théorème du Graphe Complet

Nous voudrions ici montrer la conjecture de Heawood [RY69] : Soit S une surface fermée de caractéristique d'Euler $c \leq 1$, Alors

$$\chi(S) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24c}}{2} \right\rfloor$$

Compte tenu du *Théorème de la borne supérieure de Heawood*, il suffit de montrer l'inégalité dans l'autre sens pour prouver le théorème.

Notons d'abord que pour S_p une surface fermée orientable de genre p , on a sa caractéristique d'Euler $c = 2 - 2p$, la conjecture de Heawood peut donc se réécrire $\chi(S_p) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rfloor$

Notons K_n le graphe complet à n sommets.

On note $\gamma(K_n)$ le genre le K_n , c'est-à-dire le plus petit entier p tel que K_n puisse être plongé dans la surface fermée orientable de genre p . Un tel plongement est alors appelé plongement minimal de K_n .

Théorème 5.1. *Soit M une surface de genre $\gamma(K_n)$, alors chaque composante de $(M - K_n)$ est une 2-cellule. Autrement dit, un plongement minimal de K_n dans M a la propriété d'être une décomposition cellulaire de M .*

Nous nous contenterons d'admettre ce résultat qui peut paraître assez naturel mais dont la preuve est difficile [RY68].

Considérons alors un plongement minimal de K_n , par 5.1 la formule de la caractéristique d'Euler est applicable :

$$\begin{aligned} 2 - 2\gamma(K_n) &= n - \frac{n(n-1)}{2} + \#F \\ \gamma(K_n) &= \frac{n^2 - 7n + 12}{12} + \frac{2n^2 + 2n}{12} - \frac{1}{2} \sum_{i \geq 3} f_i \end{aligned}$$

où f_i est le nombre de polygones à i côtés dans la décomposition cellulaire.

$$\gamma(K_n) = \frac{(n-3)(n-4)}{12} + \frac{1}{6}(n(n-1) - 3 \sum_{i \geq 3} f_i)$$

Par double-dénombrement du nombre d'arêtes, on obtient la formule :

$$\gamma(K_n) = \frac{(n-3)(n-4)}{12} + \frac{1}{6} \sum_{i \geq 3} (i-3)f_i$$

d'où

$$\gamma(K_n) = \frac{(n-3)(n-4)}{12} + \frac{1}{6}(f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \dots)$$

Notons $I(n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$ le plus petit entier plus grand que $\frac{(n-3)(n-4)}{12}$.

Théorème 5.2 (Théorème du Graphe Complet). *Pour $n \geq 3$ on a $\gamma(K_n) \geq I(n)$*

L'égalité $\gamma(K_n) = I(n)$ est appelée conjecture du graphe complet et permet de montrer la conjecture de Heawood. En effet, notons $H(p) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rfloor$.

Si l'on considère vraie l'hypothèse du graphe complet :

Pour $n \geq 7$, soit p un entier tel que $I(n) \leq p < I(n+1)$ alors on a $H(p) = n$.

Si on pose S_p (resp. $S_{I(n)}$) la surface fermée orientable de genre p (resp. de genre $I(n)$), on a $\chi(S_p) \geq \chi(S_{I(n)})$. Par hypothèse du graphe complet, on obtient $\chi(S_p) \geq \chi(S_{\gamma(K_n)})$.

De plus, puisque K_n est plongé dans $S_{\gamma(K_n)}$, on a nécessairement $\chi(S_{\gamma(K_n)}) \geq n$.

Finalement on obtient $\chi(S_p) \geq H(p)$ ce qui montre bien la conjecture de Heawood.

6 Conjecture du Graphe Complet

L'objet de cette partie est de démontrer l'hypothèse du graphe complet dans un certain nombre de cas [YOU67] : $n \geq 7$ et $n \equiv 0, 3, 4, 7$ [12], $\gamma(K_n) = I(n)$

Remarquons grâce à la formule

$$\gamma(K_n) = \frac{(n-3)(n-4)}{12} + \frac{1}{6}(f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \dots)$$

obtenue précédemment qui si tous les polygones dans la décomposition cellulaire sont des triangles (on dit que K_n est plongé triangulairement dans $S_{\gamma(K_n)}$) alors l'hypothèse est vérifiée.

Nous allons donc donner une condition suffisante pour que K_n soit plongé triangulairement dans une certaine surface M . On admettra de plus que cette surface est de genre $\gamma(K_n)$, c'est-à-dire qu'un plongement triangulaire est forcément minimal [YOU67, Section IX].

Notations : Pour un graphe donné $K = (V, E)$:

- On autorise les arêtes qui relient le même sommet, ce sont des arcs singuliers.
- On munit chaque arête de E (sauf les arcs singuliers) d'une orientation. On note E^* l'ensemble des arêtes orientées et des arcs singuliers. Ainsi, si E possède n arêtes alors E^* possède $2n - \sigma$ arêtes où σ est le nombre d'arcs singuliers. De plus, si $\alpha \in E^*$ on note α^{-1} l'arête orientée dans l'autre sens.
- Une rotation sur un sommet $v \in V$ est une permutation cyclique de toutes les arêtes orientées qui ont v pour sommet terminal. Une rotation sur K est un ensemble de rotations sur tous les sommets de K .
- Une rotation r sur G induit une application R sur E^* définie comme suit : $\forall \alpha \in E^*$, $C(\alpha) = r(\alpha)^{-1}$. Or $\forall \alpha \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $R^k(\alpha) = \alpha$. Donc $\alpha, R(\alpha), \dots, R^{k-1}(\alpha)$ est un chemin fermé de longueur k sur E^* . On l'appelle un circuit.
- On dit qu'un circuit C_1 rencontre C_2 si et seulement si il existe $\alpha \in C_1$ tel que $\alpha^{-1} \in C_2$.
- Un graphe de courant est un triplet (K, G, λ) où K est un graphe orienté, G un groupe fini et une application $\lambda : E^* \rightarrow G$ telle que pour tout $\alpha \in E^*$, $\lambda(\alpha)\lambda(\alpha^{-1}) = e$, c'est-à-dire $\lambda(\alpha^{-1}) = \lambda(\alpha)^{-1}$.
- Si α est un arc singulier, alors $\alpha = \alpha^{-1}$ et $\lambda(\alpha)$ est d'ordre 2 dans G (ou 1 si c'est e).
- On dit que $\lambda(\alpha)$ est le courant sur α et que α est porteur du courant $\lambda(\alpha)$. Le courant $\lambda(\alpha) = \lambda(\{v, w\})$ sort de v et rentre dans w .

Exemples : Les schémas suivants illustrent des graphes de courants à 4 sommets construits sur les groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.



Notons que les arêtes qui ne possèdent qu'un seul sommet symbolisent des arcs singuliers, c'est pour cela que leur orientation n'est pas précisée.

Définition : Soit G un groupe d'ordre n et H un sous-groupe d'ordre m , un graphe quotient $S(G/H)$ (au sens de Ringels et Youngs) est un graphe tel que :

- i. $S(G/H)$ possède une rotation à chaque sommet. (horaire ou antihoraire)
- ii. Il y a $N = \frac{n}{m}$ circuits induits par les rotations. Chaque circuit $|X|$ est associé à une classe $X \in G/H$, et chacun de ces circuits est de longueur $n - 1$. N est appelé l'indice du graphe quotient $S(G/H)$.
- iii. Tous les arcs orientés de $S(G/H)$ sont porteurs d'un courant $g \in G - \{e\}$.
- iv. $S(G/H)$ est un graphe de courant.
- v. Pour $X \in G/H$ tout courant de $G - \{e\}$ est porté par un et un seul arc de $|X|$.
- vi. $|X|$ rencontre $|Y| \neq |X|$ sur les arcs de $|X|$ porteurs des courants de la classe $X^{-1}Y$ et nulle part ailleurs.
- vii. $|X|$ se rencontre lui même sur les arcs porteurs de courant appartenant à $X^{-1}X - \{e\}$ et nulle part ailleurs. De plus la rencontre est sur un arc singulier si et seulement si le courant porté par cet arc est d'ordre 2.
- viii. Tous les sommets de $S(G/H)$ sont de degré 1 ou 3.
- ix. Pour tout sommet de degré 3, le produit des courants sortants (pris dans le sens de la rotation associée) est égal à e . On appelle cette propriété la loi de Kirchhoff (on la note KLC).
- x. Le courant entrant dans les sommets de degré 1 est d'ordre 3 dans G .

Exemples : Les schémas suivants illustrent des graphes quotients :

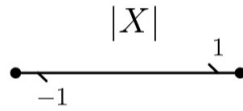


FIGURE 1 –

La Figure 1 illustre le graphe quotient associé à $G = H = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. En effet, les deux sommets possèdent la rotation horaire qui induit un seul circuit $|X|$ associé au seul élément de G/H . Chaque des arêtes orientées est porteuse d'un courant 1 ou -1 . Les deux sommets sont de degré 1, et la propriété x est bien vérifiée puisque 1 et -1 sont d'ordre 3 dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

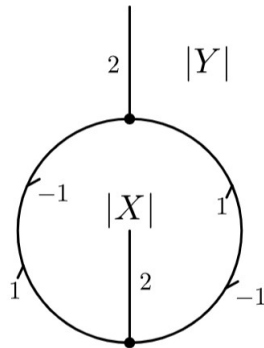


FIGURE 2 –

La Figure 2 illustre le graphe quotient associé à $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En effet, les deux sommets possèdent la rotation horaire qui induit deux circuits $|X|$ et $|Y|$ associés aux deux éléments de G/H . $|X|$ est le circuit qui parcourt le graphe par l'intérieur et $|Y|$ le parcourt par l'extérieur. Les deux sommets respectent bien la loi de Kirchhoff. Les arcs singuliers sont bien d'ordre 2 dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Remarque : Si on a $S(G/H)$ un graphe quotient alors, pour chaque circuit $|X|$, pour $X \in G/H$, on peut définir une permutation de $G - \{e\}$ de la manière suivante :

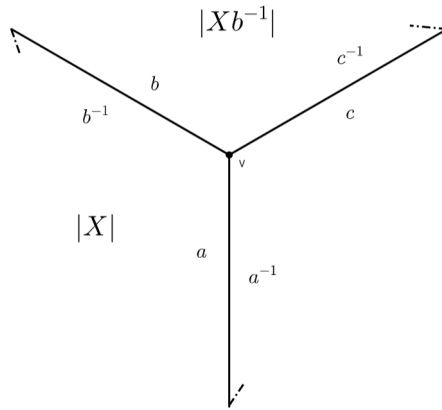
$\{X\}(a) = b$ si et seulement si dans le circuit $|X|$, le successeur immédiat de l'arc porteur du courant a est l'arc porteur du courant b .

Lemme 6.1. Si $\{X\}(a) = b^{-1}$ et $\{Xb^{-1}\}(b) = c^{-1}$ alors $\{Xa\}(c) = a^{-1}$ et $cba = e$.

Notons ici que $|Xg|$ est le cycle qui rencontre $|X|$ suivant l'arc porteur du courant g^{-1} , ce qui est bien défini en vertu de la propriété (vi).

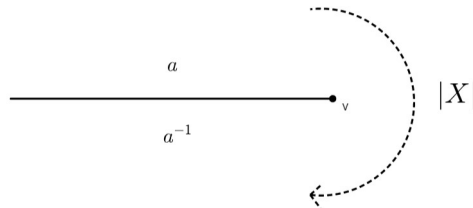
Démonstration. $\{X\}(a) = b^{-1}$ signifie que sur le circuit $|X|$, le sommet terminal de l'arc porteur du courant a est le sommet initial de l'arc porteur du courant b^{-1} . Notons v ce sommet, d'après (viii), il est de degré 1 ou 3.

Cas I : Si v est de degré 3, le schéma suivant résume les hypothèses :



La rotation de v se fait ici dans le sens horaire. La loi de Kirchhoff nous donne donc $a^{-1}b^{-1}c^{-1} = e$ et donc $cba = e$. De plus, on constate que $|Xb^{-1}|$ rencontre $|Xb^{-1}c^{-1}| = |Xa|$ selon l'arc porteur du courant c^{-1} . Donc $|Xa|$ rencontre $|Xb^{-1}|$ selon l'arc porteur du courant c , et le successeur de l'arc porteur du courant c sur le cycle $|Xa|$ est alors a^{-1} . D'où l'égalité $\{Xa\}(c) = a^{-1}$.

Cas II : Si v est de degré 1, le schéma suivant résume les hypothèses :



La rotation de v se fait ici dans le sens horaire. Le (x) nous donne $a^3 = e$ et on a $\{X\}(a) = a^{-1}$. Mais $\{X\}(a) = b^{-1}$ par hypothèse, donc $b = a$. De plus, $|X|$ se rencontre lui-même selon l'arc porteur du courant a , donc $a \in X^{-1}X - \{e\}$ par (vii). Cela implique donc $Xa = X = Xa^{-1}$. Et par hypothèse, $\{Xb^{-1}\}(b) = c^{-1}$ ce qui se traduit par $\{X\}(a) = c^{-1}$, d'où $c = a$. La conclusion du lemme est donc vraie puisque l'on a d'une part $\{Xa\}(c) = \{X\}(a) = a^{-1}$ et d'autre part, $cba = a^3 = e$.

□

Théorème 6.2. Si $S(G/H)$ est un graphe quotient où G est d'ordre n et H un sous-groupe de G , alors il existe un plongement triangulaire de K_n .

Démonstration. Soit $x \in G$, soit $X \in G/H$ l'unique classe telle que $x \in X$. On pose $\{x\} = \{X\}$ la permutation précédemment définie.

On considère n polygones à $n - 1$ côtés que l'on associe chacun à un élément $x \in G$ et que l'on note (x) .

Considérons un certain polygone (x) , on lui fixe une orientation.

Posons $g_1 \in G - e$ et considérons un côté de (x) . On note à présent ce côté (x, g_1) . L'orientation de (x) permet de considérer un successeur à (x, g_1) , que l'on note (x, g_2) où $g_2 = \{x\}(g_1)$. De cette manière, on peut numéroter tous les côtés de (x) pour tout $x \in G$.

Remarquons que $(x, g) = (y, k) \Leftrightarrow x = y$ et $g = k$ et définissons $(x, g)^{-1} = (xg, g^{-1})$.

Considérons la relation d'équivalence sur l'ensemble $A = \{(x, g) | x \in G, g \in G - e\}$ définie par

$$(x, g) \sim (y, k) \Leftrightarrow (x, g) = (y, k) \text{ ou } (x, g)^{-1} = (y, k)$$

Si on quotiente l'ensemble A par la relation \sim , on remarque que chaque classe d'équivalence possède exactement deux éléments. En effet, comme $g \neq e$, on a bien $(x, g) \neq (x, g)^{-1} = (xg, g^{-1})$. En identifiant les côtés qui sont dans la même classe d'équivalence, on procède au recollement des n polygones. La remarque précédente est suffisante pour affirmer que la surface obtenue est fermée puisque sans bord. Pour chaque identification, on recolle les arêtes de manière à ce qu'elles soient orientées dans le sens inverse l'une de l'autre. Cela nous donne une surface orientée puisque le recollement préserve les orientations de chacun des polygones.

On remarque que M possède une décomposition cellulaire naturelle donnée par les polygones et les classes d'équivalences qui deviennent les arêtes d'un graphe S .

De plus, pour tout $x \neq y \in G$, le bord $(x, x^{-1}y)$ de x est dans la même classe d'équivalence que le bord $(y, y^{-1}x)$ de y . Ce qui signifie que sur la surface M , le polygone (x) est limitrophe avec le polygone (y) . Ce qui équivaut à dire que le dual de S est K_n car S possède $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

Si nous montrons que tous les sommets de S sont de degré 3, nous aurons terminé la preuve puisque cela signifiera que le plongement de K_n dans M est triangulaire.

Si on considère l'application λ qui à une arête orientée (x, g) de S associe l'élément $g \in G$, alors le triplet (S, G, λ) est un graphe de courant. Soit v un sommet de S . Soit (x) tel que (x) possède un côté dont le sommet terminal est v . Notons a le courant porté par cette arête.

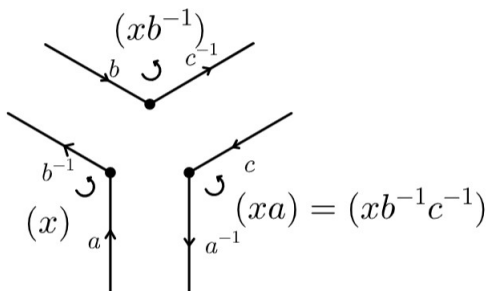
Posons $b^{-1} = \{x\}(a)$ donc (x) rencontre (xa) le long de l'arête (x, a) et (xb^{-1}) le long de l'arête de courant b^{-1} . Posons $c^{-1} = \{xb^{-1}\}(b)$.

Comme $\exists X \in G/H$ tel que $x \in X$, on a

$$\{x\} = \{X\}, \{xa\} = \{Xa\} \text{ et } \{xb^{-1}\} = \{Xb^{-1}\}$$

D'où

$$\{X\}(a) = \{x\}(a) = b^{-1} \text{ et } \{Xb^{-1}\}(b) = \{xb^{-1}\}(b) = c^{-1}$$



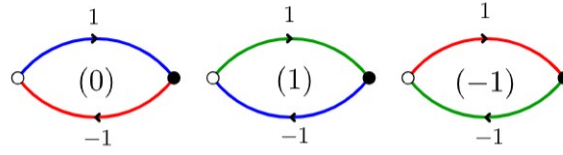
Alors par le lemme 6.1, on a $\{xa\}(c) = \{Xa\}(c) = a^{-1}$ et $cba = e$.

Donc $a = b^{-1}c^{-1}$ donc les polygones (xa) et $(xb^{-1}c^{-1})$ sont les mêmes et par recollement v est de degré 3.

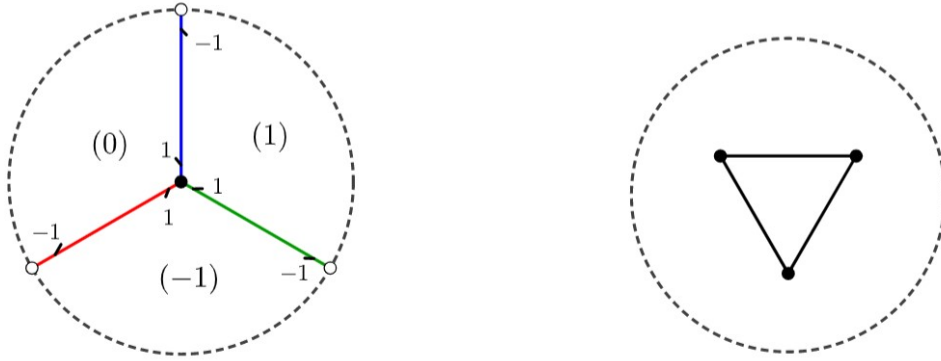
□

Exemples : Reprenons les cas des Figures 1 et 2 comme exemple de recollement.

- Pour le cas de la Figure 1, on considère 3 polygones à 2 côtés que l'on munit de la même orientation et que l'on note (0), (1) et (-1) :

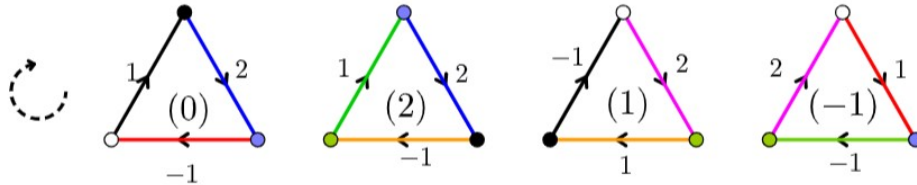


Il est facile de voir que les arêtes de la même couleur sont dans la même classe d'équivalence. En les recollant, on obtient une surface homéomorphe à la sphère :



En considérant le dual du graphe ainsi construit, on obtient une triangulation de K_3 sur la sphère.

- Pour le cas de la Figure 2, on considère 4 triangles que l'on munit de la même orientation et que l'on note (0), (1), (2) et (-1) :



On vérifie que les polygones (0) et (2) qui sont dans la même classe de G/H induisent le même circuit correspondant à $|Y|$ alors que les polygones (1) et (-1) induisent le circuit $|X|$. De même, on vérifie que les arêtes qui sont de même couleur sont dans la même classe d'équivalence. En recollant les triangles, on obtient un tétraèdre, surface homéomorphe à la sphère.



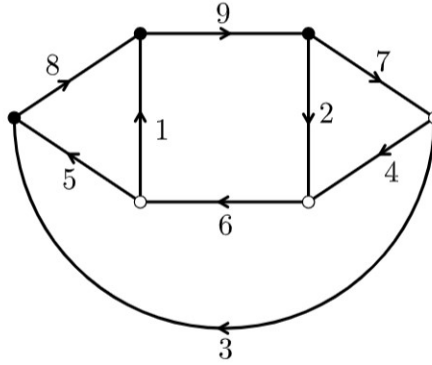
En considérant le dual du graphe ainsi construit, on obtient une triangulation de K_4 sur la sphère.

Applications : Le théorème 6.2 nous donne une condition suffisante pour trianguler un graphe complet à n sommets sur la surface optimale. Il s'agit maintenant de trouver des graphes quotients pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant, Ringels et Youngs [YOU67], ainsi que d'autres contributeurs [GUS63] ont montré que cela n'est possible que pour certains cas. Il s'agit des cas où n est congru à 0, 3, 4 ou 7 modulo 12. Nous allons donc exhiber un exemple de graphe quotient pour chacune des congruences :

Dans chacun des graphes suivants, les sommets en noir ont une rotation horaire alors que les sommets en blanc ont une rotation trigonométrique.

Cas $n = 19$: Considérons le graphe suivant associé au quotient de groupe $\mathbb{Z}_{19}/\mathbb{Z}_{19}$ où $\mathbb{Z}_{19} = \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$.

Notons que l'orientation des arêtes correspond à l'élément dans \mathbb{Z}_{19} associé. Si l'arête est parcourue dans le sens inverse à l'orientation indiquée, il suffit de considérer l'opposé dans \mathbb{Z}_{19} du courant notifié.

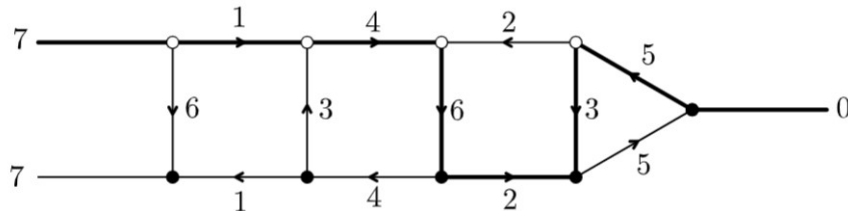


On vérifie facilement que ce graphe est un graphe quotient, en particulier, que tous les sommets sont de degré 3, que la loi de Kirchhoff s'applique et qu'il n'y a qu'un seul circuit que l'on peut parcourir comme suit :

$$9, 7, 4, -2, -9, -1, 5, -3, -7, 2, 6, 1, -8, -5, -6, -4, 3, 8, 9...$$

Si l'on remonte tout le raisonnement, on a $I(19) = 20$ et $I(20) = 23$ donc on peut affirmer que des surfaces fermées, orientables de genre 20, 21 et 22 admettent 19 comme nombre chromatique.

Cas $n = 28$: On considère le graphe suivant associé au quotient de groupe G_{28}/G_{28} où $G_{28} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{14}$: Notons ici que les traits en gras représentent les arêtes portant le courant 1 dans \mathbb{Z}_2 et que les traits fins représentent le courant 0 dans \mathbb{Z}_2 . Les nombres représentent les courants portés dans \mathbb{Z}_{14} . Une fois encore, chaque arête est orientée dans un seul sens. Lorsque celle-ci est parcourue dans le sens inverse, il suffit de considérer l'inverse dans $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{14}$ du courant notifié. De plus, les arêtes portant les courants $(1, 7)$, $(0, 7)$ et $(1, 0)$ (bien d'ordre 2) sont des arcs singuliers, il est inutile de leur affecter une orientation.



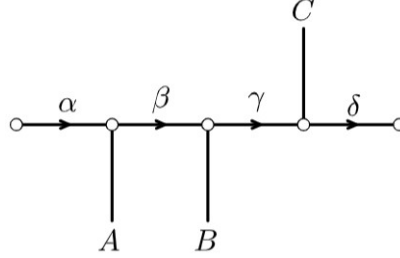
On vérifie facilement que ce graphe est un graphe quotient, en particulier, que tous les sommets sont de degré 3, que la loi de Kirchhoff s'applique et qu'il n'y a qu'un seul circuit que l'on peut parcourir comme suit :

$$(1, 1), (0, -3), (0, -4), (1, -6), (0, -2), (1, 3), (0, 5), (1, 5), (0, 2), (1, -4), (1, -1), (1, 7), (0, 6), \\ (0, -1), (0, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 2), (1, -3), (1, -5), (1, 0), (0, -5), (1, -2), (0, 4), (0, 1), (0, 7), \\ (0, -6), (1, 1)...$$

On constate dans ce cas que les surfaces fermées et orientables dont le nombre chromatique est 28, sont celles de genre 50, 51, 52 et 53.

Cas $n = 12$: On considère le graphe suivant associé au quotient de groupe A_4/A_4 où A_4 est le groupe alterné d'ordre 4 :

On pose $\alpha = (123)$, $\beta = (134)$, $\gamma = (142)$, $\delta = (234)$, $A = (12)(34)$, $B = (13)(24)$ et $C = (14)(23)$. On considère les mêmes conventions que précédemment :



On vérifie facilement que ce graphe est un graphe quotient, en particulier, que tous les sommets sont de degré 1 ou 3, que la loi de Kirchhoff s'applique, que les sommets de degré 1 sont traversés par des courants d'ordre 3 et qu'il n'y a qu'un seul circuit, que l'on peut parcourir comme suit :

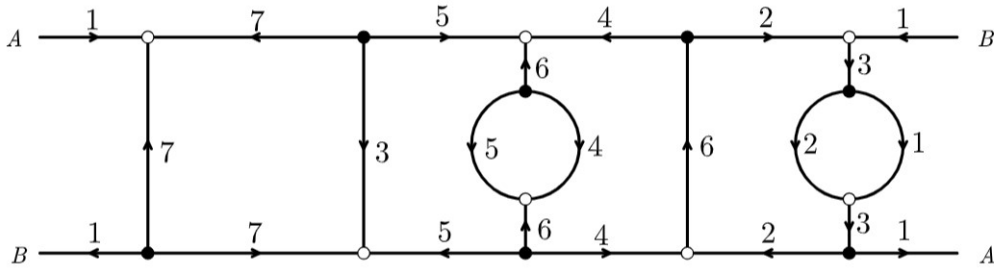
$$\alpha, A, \beta, B, \gamma, \delta, \delta^{-1}, C, \gamma^{-1}, \beta^{-1}, \alpha^{-1}, \alpha \dots$$

On déduit ce cas que les surfaces fermées et orientables dont le nombre chromatique est 12, sont celles de genre 6 et 7.

Remarque : On connaît d'autres graphes quotient pour le cas $n = 12$, en particulier celui associé au groupe \mathbb{Z}_{12} quotienté par le sous-groupe engendré par l'élément $\{4\}$. Il est cependant plus complexe puisqu'il contient $N = 4$ circuits.

Cas $n = 15$: On considère le graphe suivant associé au quotient de groupe $\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_5$:

Notons ici que les arêtes notifiées A (resp. B) sont les mêmes. Le graphe peut être tracé sur un ruban de Möbius. Une fois encore, chaque arête est orientée dans un seul sens. Comme $N = 3$, il est normal de voir plusieurs arêtes porteuses du même courant.



On vérifie facilement que ce graphe est un graphe quotient, en particulier, que tous les sommets sont de degré 3, que la loi de Kirchhoff s'applique et qu'il y a trois circuits exactement, dont l'un que l'on peut parcourir comme suit :

$$1, -7, 7, -5, 6, -4, 5, -6, 4, -2, -3, -1, 2, 3, 1 \dots$$

La conclusion de ce cas est que les surfaces fermées et orientables dont le nombre chromatique est 15, sont celles de genre 11 et 12.

L'enjeu pour la résolution du problème dans sa globalité est donc de réussir à trouver des graphes quotients pour tous les entiers n . Cependant, il a été montré que seules les congruences 0, 3, 4 et 7 modulo 12 admettaient une généralisation de graphes quotients. Les autres cas sont connus sous le nom de cas non-réguliers.

À propos des cas non-réguliers : Pour les cas non réguliers, c'est-à-dire n n'est pas congru à 0, 3, 4 ou 7, la stratégie de résolution du problème se décompose en deux parties distinctes [YOU70] :

- I. Partie régulière :** Avec j plus petit que n , on va considérer $(K_n - K_j)$, le graphe K_n privé des arêtes de K_j vu comme sous graphe de K_n . Grâce à un graphe quotient on réussit à trianguler $(K_n - K_j)$ sur une surface fermée, orientable S de genre strictement plus petit que $I(n)$.
- II. Partie non-régulière :** On opère une somme connexe de S avec un ou plusieurs tores pour obtenir $S_{I(n)}$. On montre que grâce à cette somme connexe, on peut rajouter les $\binom{j}{2}$ arêtes précédemment retirées et obtenir un plongement minimal de K_n . On conclut grâce au Théorème du Graphe Complet.

Références

- [GUS63] W. GUSTIN. Orientable embedding of cayley graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 69 :272–275, 1963.
- [HAR69] F. HARARY. *Graph Theory*. ADDISON-WESLEY, 1969.
- [HEA90] P.J. HEAWOOD. Map colour theorem. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 24 :332–338, 1890.
- [RY68] G. RINGELS and J. W. T. YOUNGS. Solution of the heawood map-coloring problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 60 :438–445, 1968.
- [RY69] G. RINGELS and J. W. T. YOUNGS. Solution of the heawood map-coloring problem. *Journal of Combinatorial Theory*, 7 :71–93, 1969.
- [YOU67] J. W. T. YOUNGS. *Graph Theory and Theoretical Physics*. Academic Press, 1967.
- [YOU70] J. W. T. YOUNGS. Solution of the heawood map-coloring problem case 3, 5, 6 and 9. *Journal of Combinatorial Theory*, 8 :175–219, 1970.