

FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER



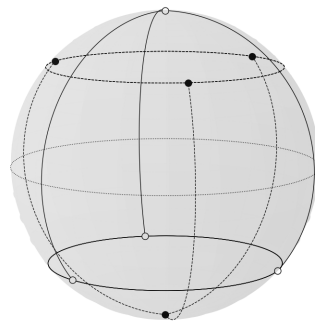
UNIVERSITÉ DE
MONTPELLIER



MASTER 2 MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

MÉMOIRE

Graphes Auto-Duaux & Applications



BAPTISTE CELLIER-VALENCIA

Tuteur : JORGE RAMIREZ-ALFONSIN

août 2025

Table des matières

1	Dualité et Involution :	3
1.1	Rappels sur les graphes :	3
1.2	Graphes Auxiliaires	4
1.3	Dualité	5
1.4	Forte involution	7
1.5	Familles de Graphes antipodalement auto-duaux	9
1.6	Construction de graphes auto-duaux :	13
1.7	Cas des Polyèdres :	14
2	Utilisation des graphes auto-duaux en théorie des noeuds :	18
2.1	Rappels et Premières définitions :	18
2.2	Achiralité et symétrie centrale :	19
2.3	Familles de Liens Achiraux :	21
2.4	Construction de Liens Achiraux :	23
2.5	Symétrie antipodale sur \mathbb{S}^3 :	23
3	Polynôme de Tutte :	26
3.1	Premières définitions :	26
3.2	Quelques propriétés :	27
3.3	Orientations :	28
4	Complexité des graphes antipodalement auto-duaux	30
4.1	Arêtes conjuguées :	30
4.2	Première hypothèse :	31
4.3	Graphes de Courants :	32
4.4	Application aux graphes antipodalement auto-duaux	34
4.5	Fin de la preuve :	35
5	Annexe : Le Théorème de Kirchoff	37
5.1	Quelques rappels	37
5.2	Théorème	37
5.3	Démonstration du théorème	38
5.4	Formule de Cayley	39
5.5	Pour aller plus loin	39
	Bibliographie	41

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude des **graphes auto-duaux et antipodalement auto-duaux**, objets situés à la frontière entre combinatoire et topologie. L'enjeu est de comprendre comment certaines propriétés topologiques, liées au plongement des graphes sur la sphère, se traduisent par des conditions combinatoires, et comment ces structures interviennent dans des domaines connexes comme la théorie des nœuds.

La **première partie** s'attache à analyser la dualité et les involutions dans le cas des graphes planaires. L'accent est mis sur le *caractère topologique* de l'auto-dualité : un graphe plongé sur la sphère admet un dual qui peut lui être isomorphe et antipodalement symétrique. On cherche alors à exprimer cette propriété par des *conditions purement combinatoires*. L'introduction de graphes auxiliaires enrichit cette approche, ce qui conduit à l'identification de familles particulières de graphes (roues, oreilles, pancakes, polyèdres) satisfaisant ces contraintes.

La **deuxième partie** illustre la portée de ces concepts en théorie des nœuds. En utilisant le *plongement antipodal* des graphes de Tait associés aux diagrammes de liens, on établit un lien direct entre auto-dualité et *achiralité* : la symétrie centrale d'un graphe médial se traduit en effet par une symétrie dans l'entrelacs, garantissant l'existence de familles de liens achiraux. Ce passage de la combinatoire des graphes à la topologie des nœuds met en évidence la richesse des interactions entre ces deux domaines.

La **troisième partie** présente le *polynôme de Tutte*, invariant combinatoire central en théorie des graphes. Sa construction repose sur des opérations de contraction et de suppression d'arêtes, et ses évaluations en des points particuliers permettent de retrouver des quantités classiques (nombre d'arbres couvrants, sous-graphes, orientations, etc.). Cette section, plus brève, souligne surtout l'intérêt de disposer d'un invariant algébrique adapté à l'étude des propriétés d'auto-dualité.

Enfin, la **quatrième partie** explore une propriété remarquable des graphes antipodalement auto-duaux au travers de la notion de *complexité*, définie comme le nombre d'arbres couvrants. On démontre que, dans ce cas, la complexité est toujours un **carré parfait**, plus précisément le carré du nombre d'arbres couvrants auto-duaux. Ce résultat met en évidence une structure algébrique profonde liée à la symétrie antipodale.

1 Dualité et Involution :

Toute la première partie s'appuie sur [4]

1.1 Rappels sur les graphes :

Définition. Un graphe G est un couple (V, E) où V est un ensemble de sommets, pas nécessairement fini et $E = \{(v_1, v_2, k) \in V^2 \times \mathbb{N}\}$ est un ensemble d'arêtes comptées avec multiplicité.

Définition. Un graphe G est dit planaire s'il existe un plongement de G sur la sphère \mathbb{S}^2 . Un tel plongement est appelé une carte. Les composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus G$ sont appelées les faces. On pourra éventuellement identifier une face avec son adhérence dans \mathbb{S}^2 .

On dit que deux cartes $G_1 = (V_1, E_1, F_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2, F_2)$ sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme $\Phi : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{S}^2$ tel que :

- $\Phi(V_1) = V_2$
- $\forall e_1 \in E_1, \exists ! e_2 \in E_2$ tel que $\Phi(e_1) = e_2$
- $\forall f_1 \in F_1, \exists ! f_2 \in F_2$ tel que $\Phi(f_1) = f_2$

Définition. Étant donné un graphe $G = (V, E, F)$, on construit son graphe dual $G^* = (V^*, E^*, F^*)$ comme suit :

- On place un sommet f^* sur chaque face $f \in F$
- Pour chaque $e \in E$ qui sépare f_1 et f_2 , on trace l'arête e^* qui relie f_1^* et f_2^*

Un graphe est dit auto-dual si et seulement si G et G^* sont isomorphes.

Remarque. G et G^{**} sont toujours isomorphes.

Définition. On définit un morphisme de dualité comme une application bijective $\phi : G \mapsto G^*$ telle que $\phi(V) = F^*$, $\phi(E) = E^*$, $\phi(F) = V^*$ avec la condition :

$$e \begin{cases} \text{relie} & e_1 \text{ et } e_2 \\ \text{sépare} & f_1 \text{ et } f_2 \end{cases} \iff \phi(e) \begin{cases} \text{sépare} & \phi(e_1) \text{ et } \phi(e_2) \\ \text{relie} & \phi(f_1) \text{ et } \phi(f_2) \end{cases}$$

Proposition. Toutes les cartes d'un même graphe sont isomorphes, on peut donc identifier une carte avec son graphe associé.

Définition. Un graphe G est auto-dual si et seulement si G et G^* sont isomorphes.

Remarque. G et G^{**} sont toujours isomorphes.

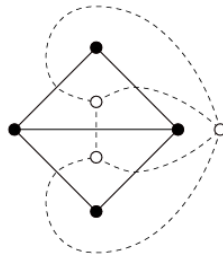


FIGURE 1 – G en noir et son dual G^* en blanc

1.2 Graphes Auxiliaires

On pose $G = (E, V, F)$ un graphe et $G^* = (E^*, V^*, F^*)$ son dual.

Définition. Le graphe carré de G est G^\square le graphe obtenu par le plongement de $G \cup G^*$ et en considérant aussi les sommets obtenus comme intersection des arêtes de E et E^* .

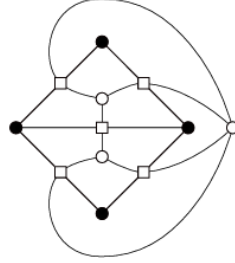


FIGURE 2 – G^\square

Remarque. Les faces de G^\square sont des carrés avec une diagonale d'intersection (qui relie des sommets d'intersection) et une diagonale incidente (qui relie un sommet de V avec un sommet de V^*).

Définition. Le graphe d'incidence $I(G)$ est le graphes dont les sommets sont dans $V \cup V^*$ et les arêtes sont les diagonales d'incidences. C'est un graphe biparti.

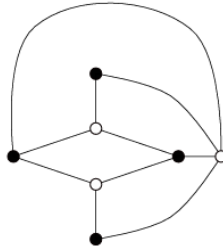


FIGURE 3 – $I(G)$

Définition. Le graphe médial $med(G)$ est le graphes dont les sommets sont les intersections de E et E^* et dont les arêtes sont les diagonales d'intersection.

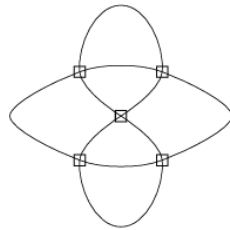


FIGURE 4 – $med(G)$

Proposition. On a $I(G)^* = med(G)$

Construisons $I(G)^\square$ pour vérifier cette affirmation :

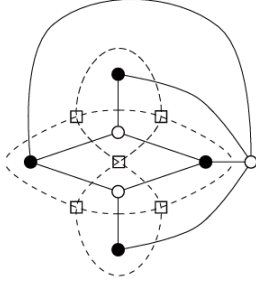


FIGURE 5 – $I(G) \cup med(G)$

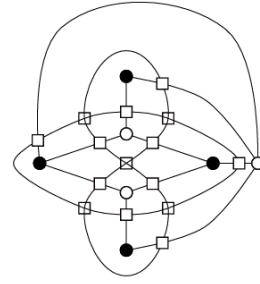


FIGURE 6 – $I(G)^\square$

1.3 Dualité

On considère $Aut(G)$ le groupe des automorphismes de G alors le morphisme de dualité ϕ vérifie $\phi^2 \in Aut(G)$. On pose $Cor(G)$ l'ensemble des morphismes de dualité de G . Si G est auto-dual, alors les morphismes de dualité sont des bijections et ils induisent sur $V \cup E \cup F$ des permutations qui préservent les incidences mais inversent les dimensions. On pose $Dual(G) = Aut(G) \cup Cor(G)$ le groupe des auto-dualités (c'est-à-dire les permutations qui préservent les incidences).

Proposition. On a $[Dual(G) : Aut(G)] = 2$

Lemme. Soit G une carte, alors $\exists \rho : S^2 \rightarrow S^2$ un homéomorphisme tel que $\forall \sigma \in Aut(G)$, $\rho\sigma \in Isom(S^2)$

On peut étendre ce résultat pour les cartes auto-duales : On a G et G^* des cartes telles que $Dual(G)$ se réalise comme un sous-groupe de $Isom(S^2)$. A partir de maintenant on ne considèrera que de telles cartes et on notera $\widehat{G} = \rho(G)$.

Définition. Une carte auto-duale G est dite antipodale auto-duale si et seulement si $\widehat{G} = -\widehat{G}^*$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \forall x \in V(\widehat{G}), -x \in V(\widehat{G}^*) \\ \forall x \in E(\widehat{G}), -x \in E(\widehat{G}^*) \\ \forall x \in F(\widehat{G}), -x \in F(\widehat{G}^*) \end{cases}$$

Définition. Un cycle symétrique C d'un graphe planaire G est un cycle tel qu'il existe un automorphisme σ de G tel que : $\begin{cases} \sigma(C) = C \\ \sigma(int(C)) = ext(C) \end{cases}$

Théorème 1. Soit G un graphe antipodale auto-duale, alors $I(G)$ admet un cycle symétrique. De plus, tous les cycles symétriques de $I(G)$ sont de longueur $2n$ avec n impair

Définition. Une carte G symétriquement antipodale est une carte telle que $-\widehat{G} = \widehat{G}$.

Remarque. Pour toute carte G , on a :

- i) $med(G) = med(G^*)$
- ii) Si G est auto-duale, alors $|V(med(G))|$ est pair : en effet, la formule d'Euler appliquée à G nous donne $|V(G)| + |F(G)| = 2 + |E(G)|$ et comme $|V(G)| = |F(G)|$ par auto-dualité, $|V(med(G))| = |E(G)| = 2|V(G)| - 2$ est pair.
- iii) Si G est symétriquement antipodale, G^* l'est aussi et son nombre de face est pair.

Lemme. Soit G une carte antipodale auto-duale. Alors $med(G)$ et $I(G)$ sont antipodalement symétriques.

Démonstration. Prouvons le lemme pour le graphe médial.

Regroupons les faces de G^\square par paire symétrique. Une telle face est de la forme $F = \{e_1, e_2, e_1^*, e_2^*\}$ avec e_i, e_i^* des demi-arêtes de G et G^* . Comme G est antipodale auto-duale, on a $\{f_1^*, f_2^*, f_1, f_2\}$ les arêtes symétriques de $\{e_1, e_2, e_1^*, e_2^*\}$. Donc $F^* = \{f_1^*, f_2^*, f_1, f_2\}$ est symétrique de F . Ainsi, les diagonales d'intersection de F et F^* peuvent être plongées symétriquement. C'est exactement le graphe médial.

On réalise la même construction avec les arêtes d'incidence pour obtenir le résultat sur $I(G)$. \square

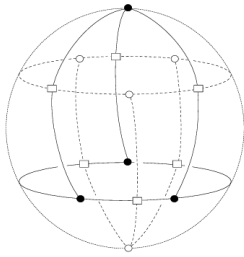


FIGURE 7 – Un plongement antipodal de K_4

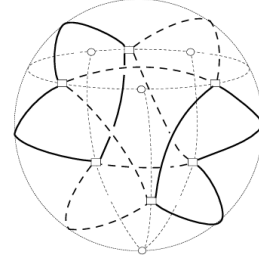


FIGURE 8 – $med(K_4)$ en gras et $I(K_4)$ en pointillé

Remarque. Ce lemme sera très utilisé dans la partie suivante sur la théorie des noeuds.

Question Ouverte. Il est légitime de se demander si tous les graphes antipodalement symétriques sont obtenus comme graphe médial ou graphe d'incidence d'un graphe antipodalement auto-dual.

A présent, prouvons le **Théorème 1** :

Démonstration. Soit G une carte antipodale auto-duale. Considérons $\widehat{med(G)}$ le plongement de $med(G)$ tels que tous les automorphismes se réalisent comme isométries de S^2 . Appelons E , l'équateur de S^2 et supposons qu'il ne contienne aucun sommet de $\widehat{med(G)}$.

On pose $\{f_1, f_2, \dots, f_k = f_1\}$ la suite de faces traversées par l'équateur. Comme $med(G)^* = I(G)$, cette suite de face correspond à un cycle C de $I(G)$. On rappelle de même que les sommets de $I(G)$ appartiennent alternativement à G et G^* .

Si $int(C)$ est le sous-graphe de $I(G)$ plongé dans le pôle nord, et $ext(C)$ celui plongé dans le pôle sud, comme $\widehat{med(G)}$ est symétriquement antipodal, toutes les faces de $int(C)$ sont symétriques aux faces de $ext(C)$ et C se réalise comme cycle symétrique de $I(G)$.

Etudions le cas où E contient un sommet de $\widehat{\text{med}}(G)$:

Comme les graphes considérés sont finis, on a $x \in S^2$ tel que $x, -x \notin V(\widehat{\text{med}}(G))$ (on a même x qui n'est pas un pôle nord ou sud). Cela nous permet de définir E_α , la rotation de E d'un angle α autour de la droite $(x, -x)$.

Posons alors $\beta = \min\{\alpha > 0, E_\alpha \text{ ne contient aucun sommet de } \widehat{\text{med}}(G)\}$ de sorte que $E_{\frac{\beta}{2}}$ soit un équateur qui ne contienne aucun sommet de $\widehat{\text{med}}(G)$. On se retrouve alors dans le premier cas.

Finalement, on trouve bien C un cycle symétrique de $I(G)$ sur lequel alternent les sommets de G et G^* . Il est de longueur $2n$. De plus, comme G est antipodalemment auto-dual, la symétrie envoie un sommet de G sur un sommet de G^* , ce qui force n à être impair. \square

Remarque.

- i) Une carte G antipodalemment auto-duale induit un isomorphisme involutif auto-dual.
- ii) Le graphe suivant nous donne un contre-exemple au théorème. Puisque $I(G')$ admet un cycle symétrique de longueur 8, G' n'est pas antipodalemment auto-dual :

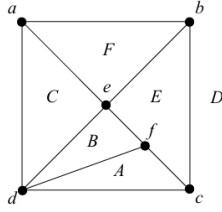


FIGURE 9 – G'

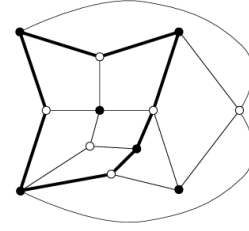


FIGURE 10 – $I(G')$

1.4 Forte involution

Définition. Soit G un graphe auto-dual et σ un isomorphisme d'involution de dualité. On dit que G est fortement involutif si :

- i) $\forall (u, v) \in V(G)^2, u \in \sigma(v) \Leftrightarrow v \in \sigma(u)$
- ii) $\forall v \in V(G) v \notin \sigma(v)$

Soit $G = \{V, E, F\}$, on se donne un jeu de données $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ avec $1 \leq x_i \leq |V|$ et on définit la conjugaison par $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ avec la convention $\bar{\bar{x}}_i = x_i$. En pratique, on prendra $x_i = i$.

Définition. Un étiquetage involutif est une application $\Lambda : V \rightarrow \mathcal{P}(X \cup \bar{X})$ telle que :

- $\forall v \in V(G), |\Lambda(v)| \in \{1, 2\}$
- Si $|\Lambda(v)| = 2$, alors $\Lambda(v) = \{x_i, \bar{x}_i\}$
- $\Lambda(u) \cap \Lambda(v) \neq \emptyset$ alors $u = v$
- $\{\Lambda^{-1}(x_i), \Lambda^{-1}(x_j)\} \in E \Leftrightarrow \{\Lambda^{-1}(\bar{x}_i), \Lambda^{-1}(\bar{x}_j)\} \in E$

Remarque.

- Un étiquetage involutif de $I(G)^\square$ induit l'automorphisme de $I(G)$ suivant

$$\begin{array}{ccc} \sigma_\Lambda : & V \cup V^* & \longrightarrow & V \cup V^* \\ & v & \longmapsto & u \end{array}$$

où $\Lambda(u) = \Lambda(\bar{v})$

- un sommet noté k et \bar{k} est fixé par σ_Λ
- $\sigma_\Lambda^2 = Id$
- σ_Λ est un isomorphisme de dualité si et seulement si les étiquettes des sommets de G sont les conjuguées des étiquettes de G^* dans $I(G)^\square$
- G est fortement involutif si et seulement si $I(G)$ admet un étiquetage involutif sans arêtes dont les sommets sont notées k et \bar{k}

Remarque. Pour $\sigma \in Aut(G)$, on peut définir $\sigma^\square \in Aut(G^\square)$ de manière à ce que σ^\square prolonge σ en conservant les incidences. Par contre, $\square : Aut(G) \rightarrow Aut(G^\square)$ n'est pas forcément injectif.

Lemme. Soit H une carte et $\sigma \in Aut(G)$, on a l'équivalence entre :

- $\hat{\sigma}$ fixe un point de S^2
- σ fixe un sommet de H^\square

Démonstration. Soit $x \in S^2$, on a $x \in V$, $x \in E$ ou $x \in F$ et dans les trois cas $x \in x^\square$. Si $\hat{\sigma}(x) = x$, alors $\sigma^\square(x^\square) = x^\square$

Réciproquement, soit $v \in V^\square = \{V_V \cup V_E \cup V_F\}$ tel que $\sigma^\square(v^\square) = v^\square$:

Si $v \in V_V$: alors on a clairement $\hat{\sigma}(v) = v$

Si $v \in V_E$: alors v correspond à une arête e de H qui est fixée par $\hat{\sigma}$. Cette arête est homéomorphe au segment $[0, 1]$ et le théorème du point fixe de Brouwer assure l'existence de $x \in e$ tel que $\hat{\sigma}(x) = x$.

De même, si $v \in V_F$: alors v correspond à une face f de H qui est fixée par $\hat{\sigma}$. Cette face est homéomorphe au carré $[0, 1]^2$ et le théorème du point fixe de Brouwer assure l'existence de $x \in f$ tel que $\hat{\sigma}(x) = x$. \square

Théorème 2. Soit G une carte auto-duale, alors :

G est antipodalement auto-dual $\iff I(G)^\square$ admet un étiquetage involutif sans point fixe

Démonstration. Si G est antipodalement auto-dual, alors \widehat{G} est isomorphe à G tels que $-\widehat{G} = \widehat{G}^*$.

Soit $a : x \mapsto -x$ qui induit naturellement $a_I \in Aut(\widehat{I(G)})$ et $a^\square \in Aut(\widehat{I(G)^\square})$.

De cette manière, $a_I^2 = Id$ ce qui implique que $I(G)^\square$ admet un étiquetage involutif sur ses sommets. Comme a n'a pas de point fixe sur S^2 , a^\square n'a pas de point fixe sur $I(G)^\square$ par le lemme précédent et l'étiquetage n'a pas de point fixe non plus.

Réciproquement, si $I(G)^\square$ admet un étiquetage involutif sans point fixe, le lemme précédent affirme que l'automorphisme induit par l'étiquetage $\hat{\sigma} : I(G) \rightarrow I(G)$ n'a pas de point fixe sur S^2 . Or les seules isométries de S^2 d'ordre 2 sont l'identité, les rotations d'angle π , les symétries par rapport à un hyperplan et la symétrie centrale $x \mapsto -x$. Par absence de point fixe, $\sigma = x \mapsto -x$. Ce qui donne que G est antipodalement auto-dual. \square

Corollaire. Soit G un graphe auto-dual. Si un sommet de G a degré impair dans $I(G)$ et qu'il est incident à toutes les faces de G alors il n'est pas antipodalement auto-dual.

Démonstration. Soit v un sommet de G . Si v est incident à toutes les faces de G , pour chaque étiquetage involutif de $I(G)^\square$ noté Λ , on a une arête qui porte les sommets k et \bar{k} . On a donc σ_Λ , un automorphisme de $I(G)$ qui envoie cette arête sur une autre arête $\{k, \bar{k}\}$. Par hypothèse sur le degré, au moins une arête $\{k, \bar{k}\}$ est fixée par σ_Λ , ce qui signifie qu'elle est un point fixe de Λ . Le **théorème 2** nous donne que G n'est pas antipodalement auto-dual. \square

Corollaire. Soit G une carte auto-duale, alors G fortement involutif $\Rightarrow G$ antipodalement auto-duale.

Démonstration. Montrons que $I(G)^\square$ admet un étiquetage involutif.

Soit $\sigma : G \rightarrow G^*$ un isomorphisme de dualité qui ne fixe évidemment pas de sommet. Ainsi, σ_I et $\sigma_{I(G)^\square}$ ne fixent respectivement aucun sommets de $I(G)$ et $I(G)^\square$.

Par forte involution, $\forall u \in V(G^*)$, $u \notin \sigma(u)$. Ceci implique que $I(G)$ n'admet pas d'arêtes dont les sommets sont marqués par k et \bar{k} , d'où le fait que σ^\square ne fixe pas de sommets de type V_E .

Montrons que σ^\square ne fixe aucun sommet du type V_F . Par l'absurde, si c'est le cas, notons ce sommet u_f , associé à la face f de $I(G)$. On pose f' , la face de $I(G)$ telle que $f' = \sigma(u_f)$. f et f' sont des carrés formés par les sommets respectifs $\{x, y, z, w\}$ et $\{x', y', z', w'\}$ avec

$$\begin{cases} w, y \in V(G) \\ w', y' \in V(G) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x, z \in V(G^*) \\ x', z' \in V(G^*) \end{cases}$$

Comme σ^\square fixe u_f , on a $u_f = \sigma(u_f)$, et donc

$$\{\sigma(w), \sigma(y)\} = \{w', y'\} \text{ et } \{\sigma(x), \sigma(z)\} = \{x', z'\}$$

Cependant, ceci implique l'existence d'un arête dont les sommets sont marqués par k et \bar{k} , ce qui est une contradiction. \square

Exemple. Le cas suivant est un graphe antipodalement auto-dual mais non fortement involutif.

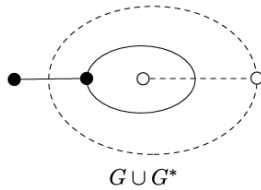


FIGURE 11 – $G \cup G^*$

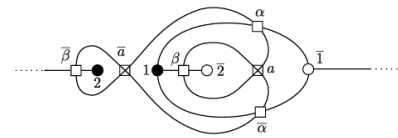


FIGURE 12 – $I(G)^\square$

1.5 Familles de Graphes antipodalement auto-duaux

1.5.1 Les Roues

On définit pour $n \geq 3$ la n^{ieme} roue W_n comme le graphe constitué d'un n -cycle et d'un centre relié à tous les sommets du cycle.

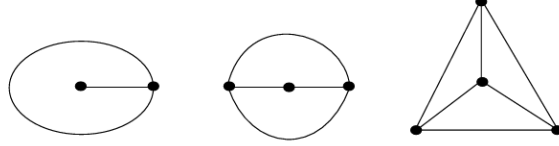


FIGURE 13 – W_1 , W_2 et W_3

Proposition. La n -roue est antipodalement auto-duale si et seulement si n est impair.

Démonstration. Si n est impair, construisons ϕ un isomorphisme de W_n fortement involutif.

Le centre est noté n et les sommets sont notés $0, 1, \dots, n-1$

$$\phi : i \mapsto \begin{cases} \text{la face extérieure si } i = n \\ \text{la face } \{i, i + \frac{n-1}{2}, i + \frac{n-1}{2} - 1\} \text{ si } i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \end{cases}$$

ϕ donne bien l'isomorphisme d'involution désiré.

Si n est pair, alors $I(W_n)$ admet un cycle de longueur $2n$ symétrique formé par les sommets de la roue que l'on alterne avec les sommets des faces bornées. Par le **théorème 1**, W_n n'est pas antipodalement auto-dual. \square

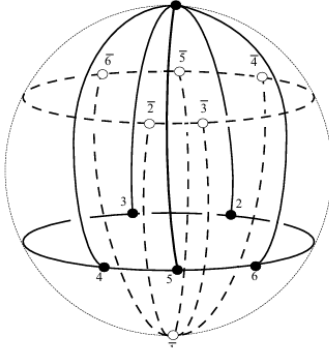


FIGURE 14 – Un plongement antipodalement auto-dual de W_5

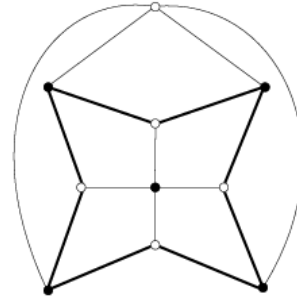


FIGURE 15 – $I(W_4)$ admet un cycle symétrique de longueur 8

1.5.2 Les Oreilles

Pour $n \geq 2$, on définit la n -oreille E_n comme un cycle de longueur n et on ajoute 1 sommet (oreille) par paire de sommets consécutifs du cycle ainsi qu'un centre qui connecte toutes les oreilles.

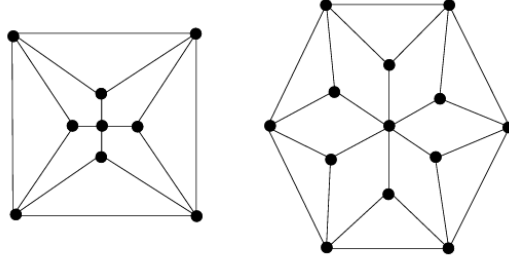


FIGURE 16 – E_4 et E_6

Proposition. Une n -oreille est antipodalement auto-duale si et seulement si $n \geq 4$ est pair.

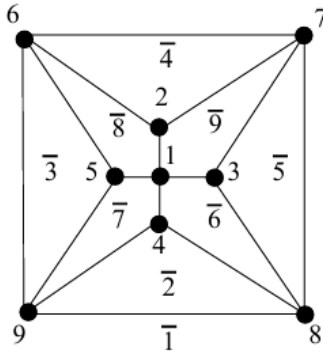


FIGURE 17 – Un isomorphisme de forte involution de E_4 donné par $\sigma(k) = \bar{k}$

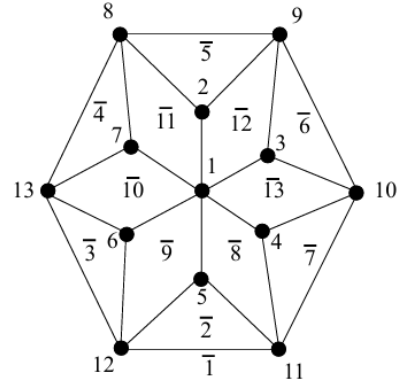


FIGURE 18 – Un isomorphisme de forte involution de E_6

Remarque. A partir de ces exemples, on comprend la structure des isomorphismes d'involutions qui permettent de prouver l'auto-dualité antipodale dans le cas général.

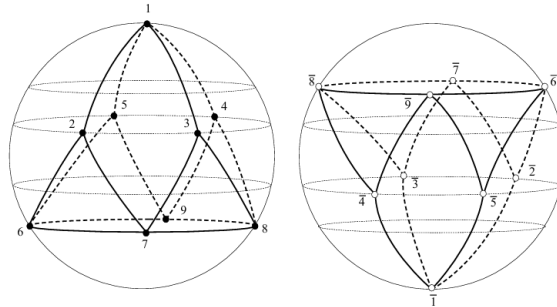


FIGURE 19 – Un plongement antipodalement auto-dual de E_4

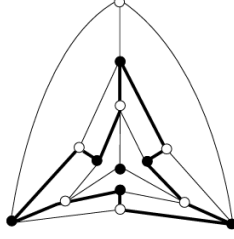


FIGURE 20 – $I(E_3)$ admet un cycle symétrique de longueur 12

Remarque. Dans le cas impair, l'exemple de E_3 nous permet de généraliser pour trouver des cycles symétriques de longueur divisible par 4.

1.5.3 Les Pancakes

Pour $n \geq 3$ et $l \geq 1$, on définit un (n, l) -pancake P_l^n le graphe formé par les n -cycles notés $\{v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1\}, \dots, \{v_1^l, v_2^l, \dots, v_n^l\}$ auxquels on ajoute un sommet central v_0 et les arêtes $\{v_i^{j-1}, v_i^j\} \forall i, j$.

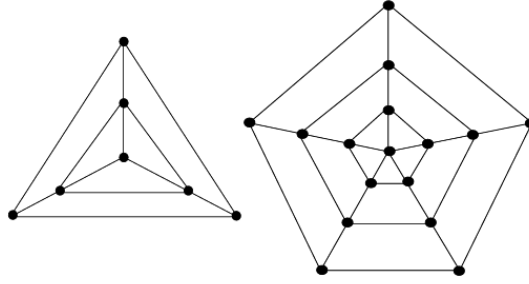


FIGURE 21 – P_3^2 et P_5^3

Proposition. Une (n, l) -pancake est antipodalemment auto-dual si et seulement si $l \geq 3$ est impair.

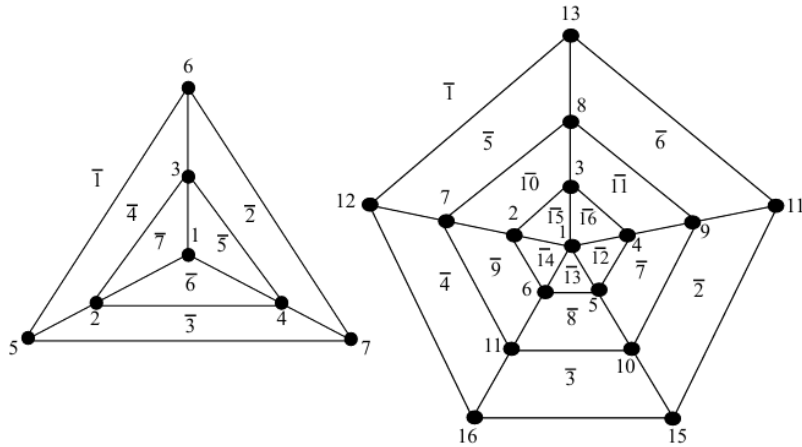


FIGURE 22 – P_3^2 et P_5^3 avec leurs isomorphismes de forte involution respectifs donnés par $\sigma(k) = \bar{k}$

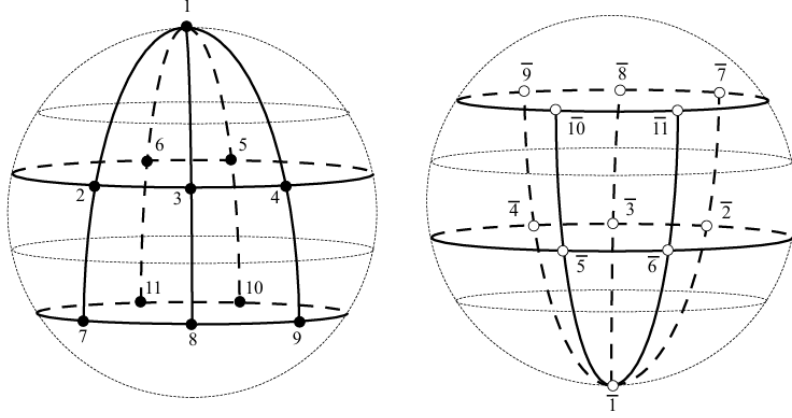


FIGURE 23 – Un plongement antipodalement auto-dual de P_5^2

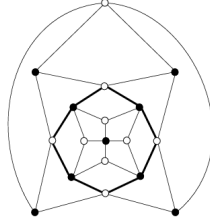


FIGURE 24 – Un cycle symétrique de P_4^2 de longueur 8

1.6 Construction de graphes auto-duaux :

Soit G un graphe connexe, planaire et G^* son dual. Posons x et x^* les sommets de G et G^* correspondant aux faces non bornées de G^* et G^{**} .

On construit $H = G \diamond G^*$ le graphe obtenu par la formule $G \cup G^* / \{x = x^*\}$.

Lemme. Soit G un graphe planaire connexe, alors $G \diamond G^*$ est auto-dual.

Démonstration. Si $H = G \diamond G^*$ alors $H^* = (G \diamond G^*)^* = (G \cup G^* / \{x = x^*\})^*$. Or $G \cup G^* = G^* \cup G$ et $x^{**} = x$, d'où $H^* = H$. \square

Théorème 3. Soit G un graphe planaire connexe. Alors $H = G \diamond G^*$ est antipodalement auto-dual.

Démonstration. Soit x (resp. x^*) le sommet associé à la face extérieure de G^* (resp. $G^{**} = G$).

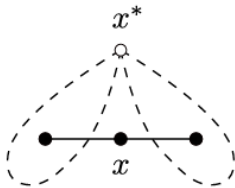


FIGURE 25 – $G \cup G^*$

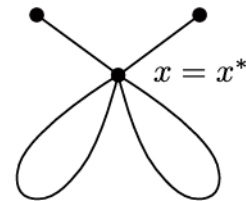
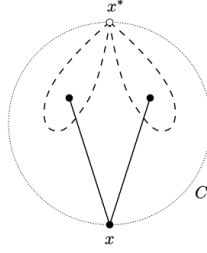


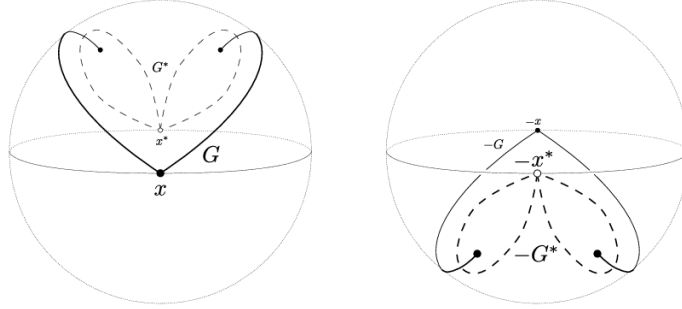
FIGURE 26 – $G \diamond G^*$

On dessine G et G^* à l'intérieur d'un cercle C de manière à ce que x et x^* soient antipodaux par rapport au centre du cercle.

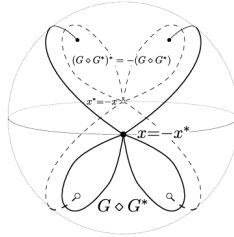


On considère la sphère dont C est l'équateur.

On peut alors construire deux plongements du graphe H sur les hémisphères nord et sud de manière antipodale, de sorte que la projection orthogonale au plan du cercle C redonne le dessin initial.



On recolle alors les deux hémisphères en identifiant $x_{nord} = x_{sud}^*$ et $x_{sud} = x_{nord}^*$



□

Remarque. La question de savoir si un graphe antipodalement auto-dual qui possède un isthme (arête unique qui relie deux composantes connexes) est encore aujourd'hui une question ouverte.

1.7 Cas des Polyèdres :

On s'intéresse ici au papier suivant :[\[1\]](#)

Définition. Un graphe est 3-connexe si et seulement il est connexe et la suppression de n'importe quelle paire de sommet le laisse connexe.

Un polyèdre est un graphe simple, planaire et 3-connexe.

Théorème 4. Un graphe 3-connexe est soit une roue, soit obtenu à partir d'une roue en ajoutant des arêtes entre deux sommets et en divisant un sommet v de degré ≥ 4 en deux sommets v' et v'' de manière à ce que le nouveau graphe soit 3-connexe.

Définition. Soit G un polyèdre et $e = \{u, v\}$ une arête de G . $G \setminus e$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e et G/e est le graphe obtenu en identifiant les sommets u et v .

Si $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ sont des sommets de G , $G \setminus X$ est le graphe obtenu en supprimant les sommets de X et leurs arêtes adjacentes. X est une n -coupe si X possède n sommets et que $G \setminus X$ n'est pas connexe.

Si $G \setminus e$ (resp. G/e) est un polyèdre, e est dite effaçable (resp. contractable). Si e n'est ni effaçable ni contractable, elle est dite essentielle.

Proposition. On a équivalence entre :

- G est une roue
- Toutes les arêtes de G sont essentielles
- Un sommet de G à degré 3 et toutes ses arêtes sont sur un triangle (cycle à trois sommets)

Remarque. Cette proposition n'est qu'une reformulation du **théorème 4**.

Posons $P = (V, E, F, \tau)$ un polyèdre fortement involutif.

On suppose que $\{a, b\} \in E$, alors $\tau(a)$ et $\tau(b)$ sont des faces adjacentes, on a donc $\{x, y\} \in E$ telle que $\{x, y\} = \tau(a) \cap \tau(b)$ et puisqu'il y a forte involution, $\{a, b\} = \tau(x) \cap \tau(y)$.

On pose alors $\tau(ab) = (xy)$. On dit que (ab) est un diamètre si et seulement si $a \in \tau(b)$ et $b \in \tau(a)$.

Lemme. Si (ab) et (xy) sont des diamètres, alors P est le tétraèdre K_4 .

Démonstration. A partir des hypothèses, on peut déduire que $a \in \tau(x) \cap \tau(y) \cap \tau(b)$ et donc que $\{a, x\} \subseteq \tau(y) \cap \tau(b)$.

Par 3-connexité du graphe, l'intersection de deux faces quelconques est soit vide, soit une seule arête, soit un seul sommet.

Ainsi (ax) est une arête ou une 2-coupe (mais il n'y a pas de 2-coupe). De manière analogue, (by) est une arête. Mais de manière symétrique, (ay) et (bx) sont des arêtes aussi.

Le graphe induit par $\{a, b, x, y\}$ est un graphe complet K_4 . On a que $\tau(a)$, $\tau(b)$, $\tau(x)$ et $\tau(y)$ sont des triangles. Supposons que $v \in V \setminus \{a, b, x, y\}$ est tel que v est relié à a , mais alors $\tau(a)$ est au moins un cycle de longueur 4, ce qui contredit le fait que ce soit un triangle. \square

Lemme. Si (ab) est un diamètre mais pas (xy) , alors $\{a, b, x\}$ et $\{a, b, y\}$ sont des 3-coupes de P .

Démonstration. A partir des hypothèses, on peut déduire que $(\tau(a) \cup \tau(b)) \setminus (xy)$ et $(\tau(x) \cup \tau(y)) \setminus (ab)$ sont des cycles d'intersection $\{a, b\}$, disons γ_1 et γ_2 . On a alors $(\tau(a) \cup \tau(b)) \setminus (xy) \cup (ab)$ qui est l'union de deux cycles dont l'intersection est l'arête (ab) .

$P \setminus \gamma_1$ forme deux composantes connexes R_1 et R_2

$P \setminus \gamma_2$ forme deux composantes connexes S_1 et S_2

Comme $\tau(x) \cap \tau(y) = \gamma_1 \cap \gamma_2 = (ab)$, on peut supposer que $\tau(x) \setminus (ab) \in R_1 \cap \S_1$ et $\tau(y) \setminus (ab) \in R_2 \cap \S_2$.

On a alors forcément $\omega \in \tau(y) \setminus (ab) \setminus \gamma_1 \in R_2 \cap S_2$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors $\tau(y) = \gamma_1$ et $x \in \tau(y)$ ce qui n'est pas le cas car (xy) , n'est pas un diamètre. De la même manière, on a $\omega \in \tau(x) \setminus (ab) \setminus \gamma_2 \in R_1 \cap S_1$. Ainsi, dans $P \setminus \{a, b, x\}$ et $P \setminus \{a, b, y\}$, il n'y a aucun chemin entre u et ω . \square

Théorème 5. Si P n'est pas une roue, alors on a une arête e qui vérifie les conditions suivantes :

- i) e n'est pas sur une face triangulaire
- ii) e n'est pas dans une 3-coupe
- iii) e n'est pas un diamètre

Démonstration. D'après la proposition précédente, il existe une arête non-essentielle. Sans restreindre la généralité, on peut la supposer contractable (sinon son arête duale l'est dans P^* qui est isomorphe à P).

- i) e n'est donc pas sur une face triangulaire, sinon P/e ne serait pas simple
- ii) e n'est pas dans une 3-coupe, sinon P/e aurait une 2-coupe
- iii) Si e est un diamètre, alors :
 - Si $\tau(e)$ est un diamètre, alors $P = K_4$ le tétraèdre, ce qui contredit que P n'est pas une roue.
 - Si $\tau(e)$ n'est pas un diamètre, alors e est dans une 3-coupe d'après le lemme précédent, ce qui est impossible en vertu du ii).

\square

Théorème 6. Soit $e = (ab)$ une arête qui vérifie les conditions précédentes, alors $P_{ab}^\diamond = (P/e) \setminus \tau(e)$ est un polyèdre auto-dual fortement involutif.

Démonstration. Comme $e = (ab)$ vérifie les trois conditions précédentes, P/e est un polyèdre et son dual $P \setminus e$ est aussi un polyèdre.

P^\diamond est simple et planaire.

Si P^\diamond possède une 2-coupe $\{m, n\}$, comme $\tau(a)$ et $\tau(b)$ sont des faces qui vérifient $\tau(a) \cap \tau(b) = (ab)$, on a $m \in \tau(a)$ et $n \in \tau(b)$

Le sommet $a = b$ doit être dans $\{m, n\}$ car sinon, $\{m, n\}$ est une 2-coupe de $P \setminus (\tau(ab))$ ce qui est impossible.

Ainsi, dans P , $a \in \tau(b)$ et $b \in \tau(a)$, ce qui aboutit à une contradiction car (ab) n'est pas un diamètre.

Par définition, P^\diamond est auto-dual et fortement involutif avec

$$\tau^\diamond : \begin{cases} u \mapsto \tau(u) \text{ si } u \notin \{a, b\} \\ a = b \mapsto \text{la face obtenue par l'union de } \tau(a) \text{ et } \tau(b) \text{ en supprimant } \tau(ab) \end{cases}$$

\square

Corollaire.

- Par le **théorème 6**, étant donné P et P^* , on peut contracter une arête (ab) et supprimer son arête duale $\tau(ab)$ et obtenir un nouveau polyèdre fortement involutif.

- Inversement, en ajoutant une arête à l'intérieur d'une face qui n'est pas triangulaire et en subdivisant son sommet dual, on obtient un nouveau polyèdre auto-dual fortement involutif

Remarque. Soit G un polyèdre fortement involutif, on peut vérifier que G^\square est encore un polyèdre. On le plonge sur S^2 de sorte que $Aut(G^\square) \subset Isom(S^2)$:

On remarque alors que les faces de G^\square sont des quadrilatères $(vafb)$ telles que :

- $v \in V(G)$
- $a, b \in E(G)$
- $f \in F(G)$

Théorème 7. Soit τ une forte involution de P , alors $\hat{\tau}$ est l'application antipodale de S^2

Démonstration. τ est un isomorphisme de P^\square donc $\hat{\tau}$ est une isométrie de S^2 , et la forte involution implique $\hat{\tau} = Id_{S^2}$.

Si τ est une réflexion par rapport au plan H . Soit $v \in V(P)$, $a, b \in E(P)$, $f \in F(P)$ tels que H intersecte $Q = (vafb)$ dans son intérieur. H ne peut couper Q que dans les points a et b , ce qui donne $\tau(v) = f$ et donc $v\tau(v)$, ce qui est impossible.

Si τ est une rotation d'angle π autour de la droite définie par $\{p, -p\}$, on considère $Q = (vafb)$ le quadrilatère qui contient p . Si p est le barycentre de Q , alors $\tau(v) = f$ et $v\tau(f)$. Si $p = a$ ou $p = b$, (par exemple, $p = a$), alors $\tau(va) = (af')$ où f' est une face distincte de f qui contient v . Mais alors on a un quadrilatère Q' qui contient v et f' et donc $\tau(v) = f'$ et $v \in \tau(v)$, ce qui est impossible par forte involution. Ainsi, il ne reste que $\hat{\tau} : x \mapsto -x$ □

Corollaire. Pour un polyèdre fortement involutif, il n'y a qu'un seul morphisme de dualité qui réalise cette forte involution

2 Utilisation des graphes auto-duaux en théorie des noeuds :

Dans cette partie qui s'appuie exclusivement sur [3], nous allons étudier une application des graphes antipodalement auto-duaux en théorie des noeuds.

2.1 Rappels et Premières définitions :

Définition. • Un *graphe bicolore* est un graphe $G = (V, E, F)$ munie d'une coloration $C_X : X \rightarrow \{\text{noir}, \text{blanc}\}$, où X est soit $V(G)$, $E(G)$ ou $F(G)$.

Un *graphe signé* est un graphe $G = (V, E, F)$ munie d'une signature $S_Y : Y \rightarrow \{+, -\}$, où Y est soit $V(G)$, $E(G)$ ou $F(G)$.

- Un nœud L est défini comme un plongement du cercle \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^3 .
- Un lien est la réunion de plusieurs nœuds.
- Un diagramme de lien $D(L)$ d'un lien L est une projection régulière de L dans \mathbb{R}^2 , de telle sorte que la projection de chaque composante soit lisse et qu'au plus deux courbes se coupent en un point quelconque. À chaque point d'intersection du diagramme d'entrelacs, la courbe qui passe par-dessus l'autre est spécifiée.

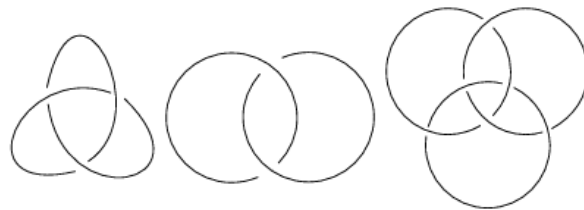


FIGURE 27 – Diagrammes classiques

- A partir d'un diagramme $D(L)$, on peut définir un graphe D 4-régulier appelé ombre de l'entrelacs, en oubliant quelle courbe passe au-dessus. Puisque ce graphe est 4-régulier, on obtient une bicoloration propre (deux faces qui partagent la même arête ont des couleurs différentes).
- En plaçant des sommets sur les faces noires et en les reliant par une arête si ils sont adjacents à un même sommet de D , on obtient un graphe N_D , on procède de manière analogue pour construire B_D sur les faces blanches.

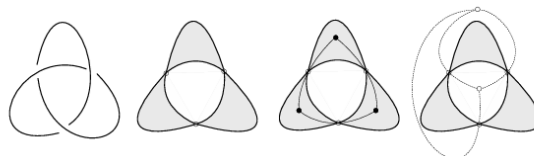
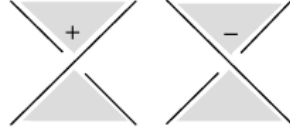


FIGURE 28 – Construction de N_D et B_D dans le cas du trèfle

Remarque. On se convainc facilement que $B_D = (N_D)^*$ et $\text{med}(B_D) = \text{med}(N_D) = D$.

Définition. A partir d'un diagramme de lien, on peut obtenir une signature des arêtes de N_D et B_D . Grâce, à l'image suivante, on peut affecter un signe à chaque croisement du diagramme.



Une arête de N_D (resp. B_D) est signée positivement (resp. négativement) si son croisement associé est positif. Une arête de N_D (resp. B_D) est signée négativement (resp. positivement) si son croisement associé est négatif. On obtient un graphe de *Tait*.

Remarque. Un diagramme de lien est entièrement déterminé par la donnée (N_D, S_E) ou $(B_D, -S_E)$.

Définition. D'après la remarque précédente, on peut retrouver un lien à partir d'un graphe aux arêtes signées (G, S_E) . Pour cela, on fait le choix de considérer G comme la composante noir du diagramme de *Tait*.

Pour cela, on plonge $med(G)$ sur la sphère \mathbb{S}^2 (elle même plongée dans \mathbb{R}^3). Autour de chaque sommet de $med(G)$, on considère une petite sphère \mathcal{S}_ϵ centrée sur le sommet et de rayon ϵ suffisamment petit.

Comme $med(G)$ est bicolore et signé sur les sommets, on peut déduire quel est la courbe du lien qui passe au-dessus et en-dessous du croisement. On trace celle de dessous sur $int(\mathbb{S}^2) \cap \mathcal{S}_\epsilon$ et celle de dessus sur $ext(\mathbb{S}^2) \cap \mathcal{S}_\epsilon$.

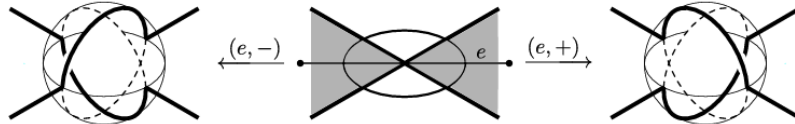


FIGURE 29 – Règle de Croisement des courbes

On vient de définir le plongement spécial $L(G, S_E)$

2.2 Achiralité et symétrie centrale :

Définition. • Deux liens L_1, L_2 sont dits équivalents, si il existe un homéomorphisme de \mathbb{R}^3 qui préserve l'orientation ϕ tel que $\phi(L_2) = L_1$.

- Pour un lien L , on considère $[L]$ sa classe d'équivalence pour la relation précédente.
- Soit \mathcal{P} un plan de \mathbb{R}^3 . Pour un lien L , on pose L^* son image par la réflexion par rapport \mathcal{P} .
- Un lien L est dit achiral si $L \in [L^*]$.

- Un lien L est dit centralement symétrique s'il vérifie $c(L) = L$ avec $c : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & -x \end{matrix}$.

On étend la définition à toute la classe d'équivalence d'un graphe centralement symétrique.

Remarque. On peut obtenir le diagramme de L^* à partir de celui de L simplement en changeant le signe des croisements.

Définition. Considérons G un graphe munit d'une bicoloration des faces et d'une signature des sommets. Un automorphisme $\sigma \in \text{Aut}(G)$ préserve (resp. inverse) les couleurs si toute paire $f, \sigma(f)$ de face ont la même couleur (resp. des couleurs différentes). De la même manière, σ peut préserver ou inverser la signature.

Proposition. Soit (G, S_E) un graphe de *Tait*. Supposons que $\text{med}(G)$ soit antipodalement symétrique, avec cette symétrie réalisée par α . Supposons de plus, que l'on soit dans un des cas suivants :

- α préserve les couleurs et inverse la signature
- α inverse les couleurs et préserve la signature

alors le lien obtenu par plongement spécial $L(G, S_E)$ est centralement symétrique.

Démonstration. Considérons le diagramme de lien induit par (G, S_E) , c'est-à-dire le plongement de $\text{med}(G)$ sur la sphère \mathbb{S}^2 munit d'une coloration des faces et d'une signature des sommets. Comme $\text{med}(G)$ est antipodalement symétrique, son plongement dans \mathbb{R}^3 est centralement symétrique. Considérons le plongement spécial du lien associé $L(G, S_E)$ et étudions ce qu'il se passe localement au voisinage d'un sommet v . Supposons par exemple que la symétrie centrale conserve les couleurs et inverse la signature. Par exemple, si la signature est positive en v , alors elle est négative en $-v$. Ainsi, le brin qui passe au-dessus au croisement v est centralement symétrique à celui qui passe au-dessus en $-v$. On a un raisonnement équivalent si la symétrie centrale inverse les couleurs et préserve la signature.

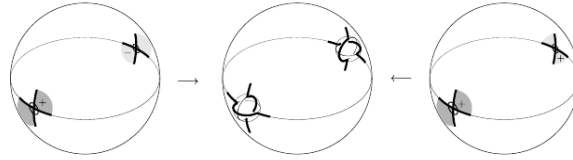


FIGURE 30 – Visualisation des différents cas

Dans tous les cas, les modifications apportées aux diagrammes par le plongement spécial sont centralement symétriques, d'où le résultat. \square

Exemple. La figure suivante montre un cas où aucune des conditions du théorème n'est pleinement remplie.

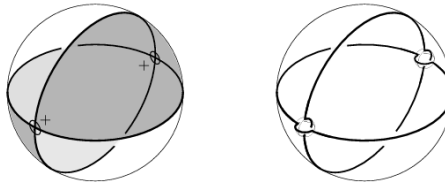


FIGURE 31 – Lien de Hopf

En fait, il est possible de montrer que le lien de Hopf n'admet aucun plongement centralement symétrique.

Théorème 8. Soit (G, S_E) un graphe de *Tait*. Supposons que $\text{med}(G)$ soit antipodalement symétrique, avec cette symétrie réalisée par α . Supposons de plus, que l'on soit dans un des cas suivants :

- α préserve les couleurs et inverse la signature
- α inverse les couleurs et préserve la signature

alors le lien obtenu par plongement spécial $L(G, S_E)$ est achiral.

Démonstration. D'après la proposition précédente, $L(G, S_E) = c(G, S_E)$, avec c la symétrie centrale. Comme $c = \mathcal{P}_x \circ \mathcal{P}_y \circ \mathcal{P}_z$ avec \mathcal{P}_t la réflexion par rapport au plan d'équation $t = 0$, on a que c est un homéomorphisme de \mathbb{R}^3 qui ne conserve pas l'orientation et donc $L(G, S_E)$ est bien achiral. \square

2.3 Familles de Liens Achiraux :

Proposition. Soit (G, S_E) un diagramme de *Tait* antipodalement auto-dual dont toutes les arêtes ont la même signature. Alors $L(G, S_E)$ est achiral.

Démonstration. On rappelle d'abord que si un graphe est antipodalement auto-dual, alors son graphe médial est antipodalement symétrique. De plus, si une face du graphe médial est associé à un sommet de G alors sa face antipodale est associée à un sommet de G^* , donc la symétrie antipodale inverse les couleurs. Comme toutes les arêtes ont la même signature, la symétrie antipodale conserve la signature. Ainsi les conditions du théorème précédent sont vérifiées et le lien associé est achiral \square

Proposition. On pour $n \geq 1$ un entier impair, on pose W_n la n -roue. On a alors (W_n, S_E) qui est un graphe de *Tait* antipodalement auto-dual. Si S_E est une signature qui vérifie $S_E(e) = S_E(-e)$ pour chaque arête, alors $L(W_n, S_E)$ est achiral.

Démonstration. On sait que pour n impair, W_n est antipodalement auto-dual. La condition sur la signature vérifie les conditions du théorème. \square

Exemple. Voici le cas obtenu d'après le plongement spécial de W_3 :

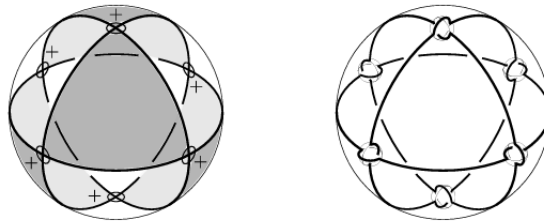


FIGURE 32 – Anneaux Borroméens

Exemple. On définit la tresse à m brins d'après le dessin suivant :

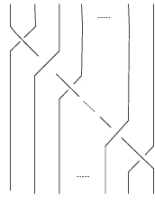


FIGURE 33 –
Si m est pair

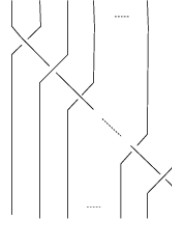
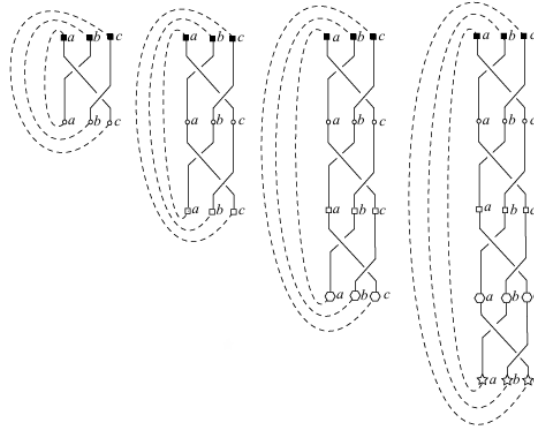


FIGURE 34 –
Si m est im-
pair

Pour n un entier, on referme le lien de la manière suivante pour former le lien (m, n) -TH :



Soit n un entier, alors $(3, n)$ -TH est un lien achiral. En effet, on peut vérifier que $(3, n)$ -TH = $L(W_n, S_E)$ avec S_E qui signe toutes les arêtes positivement.

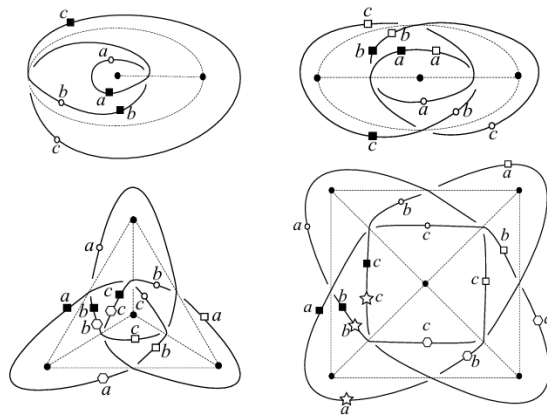


FIGURE 35 – Les graphes de *Tait* associés aux liens précédents

Proposition. Pour $n \geq 4$ pair, la n -oreille E_n est antipodale auto-duale. En considérant S_E une signature qui est invariante par symétrie centrale, on obtient que $L(E_n, S_E)$ est achiral. De même pour $L(P_m^n, S_E)$ où P_m^n est le (m, n) -pancake.

2.4 Construction de Liens Achiraux :

Définition. Soient K_1 et K_2 , deux nœuds. On définit $K_1 \# K_2$ comme la somme connexe de K_1 et K_2 . On supprime localement deux arcs sur chacune des courbes K_1 et K_2 et on relie via deux segments les extrémités de K_1 à celles de K_2 .

Proposition. Si K est un nœud, alors $K \# K^*$ est achiral.

Démonstration. Considérons K le nœud obtenu à partir du diagramme de *Tait* (G, S_E) . Alors K^* est obtenu à partir du diagramme $(G, -S_E) = (G^*, S_E)$. De plus, on remarque facilement que $K \# K^*$ est obtenu à partir du diagramme $(G \diamond G^*, S_E \cup S_E)$. Comme on sait que $G \diamond G^*$ est antipodalement auto-dual, on déduit que $med(G \diamond G^*)$ est symétriquement antipodal avec ses couleurs inversées par la symétrie. Comme la signature est conservée, le théorème s'applique et donne que $K \# K^*$ est achiral. \square

2.5 Symétrie antipodale sur \mathbb{S}^3 :

Remarque. On rappelle que \mathbb{S}^3 peut être vu comme la *compactification à un point* de \mathbb{R}^3 . Autrement dit, on considère \mathbb{R}^3 et on lui ajoute un point supplémentaire noté ∞ .

En utilisant la *projection stéréographique*

$$\pi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

on montre que \mathbb{R}^3 est équivalent à \mathbb{S}^3 . En effet :

- le pôle Sud $(0, 0, 0, -1) \in \mathbb{S}^3$ est envoyé sur l'origine $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$;
- l'Équateur de \mathbb{S}^3 est envoyé sur la 2-sphère unité de \mathbb{R}^3 ;
- l'hémisphère Sud est envoyé à l'intérieur de cette 2-sphère ;
- l'hémisphère Nord est envoyé à l'extérieur de cette 2-sphère.

La projection stéréographique n'est pas définie au point de projection $(0, 0, 0, 1)$ (le pôle Nord de \mathbb{S}^3). Plus un point de \mathbb{S}^3 est proche de ce pôle, plus son image est lointaine dans \mathbb{R}^3 . On dit donc que $(0, 0, 0, 1)$ correspond au “point à l'infini” de l'espace \mathbb{R}^3 . Ainsi, \mathbb{S}^3 peut être vu comme \mathbb{R}^3 complété par ce point à l'infini.

Définition. Pour un lien $L \subset \mathbb{R}^3$, on définit $\widehat{L} = \pi^{-1}(L)$.

Un lien $L \subset \mathbb{R}^3$ est dit antipodalement symétrique s'il vérifie $\alpha_3(\widehat{L}) = \widehat{L}$, où $\alpha_3 : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ désigne l'application antipodale $\alpha_3(x) = -x$.

Proposition. Soit (G, S_E) un graphe de *Tait*. Supposons que $med(G)$ soit antipodalement symétrique (au sens de la symétrie antipodale de \mathbb{S}^2), avec cette symétrie réalisée par α_2 . Supposons de plus, que l'on soit dans un des cas suivants :

- α_2 préserve les couleurs et la signature
- α_2 inverse les couleurs et la signature

alors le lien obtenu par plongement spécial $L(G, S_E)$ est antipodalement symétrique.

Démonstration. Comme $med(G)$ est antipodalement symétrique, il est aussi centralement symétrique. Considérons le plongement $L(GSE)$. On vérifie facilement que si la symétrie centrale conserve les couleurs et la signature (ou inverse les couleurs et la signature) alors le segment d'arc du diagramme passant par-dessus (respectivement par-dessous) au

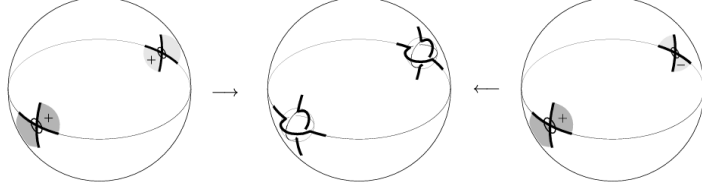


FIGURE 36 – Visualisation des règles de croisement

croisement v correspond au segment d'arc du diagramme passant par-dessous (respectivement par-dessus) au croisement $-v$ dans $L(GSE)$.

Soit H l'hyperplan dans \mathbb{R}^4 contenant l'Équateur de \mathbb{S}^3 . Soit π la projection stéréographique de \mathbb{S}^3 dans H . Nous supposons que l'Équateur est la sphère unité \mathbb{S}^2 . Remarquons que pour $x \in \mathbb{S}^3$:

$$\|\pi(x)\| \begin{cases} > 1 & \text{si } x \text{ est dans l'hémisphère nord de } \mathbb{S}^3 \\ = 1 & \text{si } x \text{ est sur l'Équateur} \\ < 1 & \text{si } x \text{ est dans l'hémisphère sud de } \mathbb{S}^3 \end{cases}$$

Nous allons relever $L(GSE)$ dans \mathbb{S}^3 en prenant l'inverse π^{-1} . Nous affirmons que $\pi^{-1}(L(GSE))$ fournit le plongement symétriquement antipodal désiré de $L(GSE)$.

Pour voir cela, définissons la fonction d'inversion (par rapport à \mathbb{S}^2) par :

$$i_n : \begin{aligned} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

Remarquons que pour $x \in \mathbb{S}^3$:

$$i(x) = \begin{cases} > 1 & \text{si } \|x\| < 1, \\ = 1 & \text{si } \|x\| = 1, \\ < 1 & \text{si } \|x\| > 1. \end{cases}$$

On a alors :

$$\pi \circ \alpha_3(x) = \pi(-x) = \alpha_2 \circ i \circ \pi(x),$$

de sorte que les segments perturbés autour de chaque paire de sommets antipodaux sont envoyés sur des segments diamétralement opposés dans \mathbb{S}^3 .

Par exemple, considérons un segment p à l'intérieur de S^2 autour du croisement v . Alors $i \circ \alpha_2(p)$ donne le segment p' à l'extérieur de S^2 autour du croisement $\alpha_2(v)$. Ainsi, π^{-1} envoie p et p' respectivement dans les hémisphères nord et sud de \mathbb{S}^3 de telle manière que :

$$\pi^{-1}(p) = \alpha_3 \circ \pi^{-1}(p')$$

Nous obtenons ainsi que $\pi^{-1}(L(GSE))$ antipodalement symétrique dans \mathbb{S}^3 . \square

Corollaire. Soit (G, S_E) un graphe de *Tait* dont toutes les arêtes sont signées positivement et supposons que $med(G)$ soit une carte antipodalement symétrique (réalisée par α_2). Si α_2 préserve les couleurs, alors $L(G, S_E)$ est antipodalement symétrique.

Une conséquence immédiate du corollaire précédent est que le *lien de Hopf* est antipodalement symétrique.

Corollaire. Soit $n \geq 1$ un entier impair et soit $L(W_n, S_E)$ un graphe de *Tait* tel que $S_E(v) = S_E(\alpha_2(v))$ pour chaque paire de sommets antipodaux de $med(W_n)$. Alors $L(W_n, S_E)$ est antipodalement symétrique.

Démonstration. On sait que $med(W_n)$ est un graphe antipodalement symétrique, réalisé par α_2 . Par hypothèse, chaque paire de sommets antipodaux de $med(W_n)$ possède des signes opposés, donc α_2 inverse la signature. De plus, α_2 inverse les couleurs pour $med(W_n)$. Le résultat découle alors du théorème précédent. \square

Corollaire. Soit $n \geq 2$ un entier impair. Alors le nœud de tore $TH(2, n)$ est antipodalement symétrique.

Démonstration. Soit S_E la signature des arêtes de W_n où les arêtes du cycle extérieur portent un signe $+$ et les arêtes incidentes avec le centre portent un signe $-$. On peut vérifier que le diagramme (W_n, S_E) est le même que celui du nœud de tore $T(2, n)$. Le résultat découle alors du corollaire précédent. \square

Corollaire. Soit K un nœud. Alors $K \# K$ est antipodalement symétrique.

Démonstration. Soit K le nœud associé à un diagramme de *Tait* (G, S_E) .

On a $L(G, S_E) = L(G^*, -S_E)$. Remarquons que le diagramme de *Tait* de $K \# K$ est $= (G \diamond G^*, S_E \cup -S_E)$.

Comme $G \diamond G^*$ est antipodalement auto-dual, $med(G)$ est centralement symétrique et la symétrie inverse les couleurs.

Chaque paire de sommets antipodaux de $med(G \diamond G^*)$ possède des signes opposés, donc α_2 inverse la signature. Le résultat découle du théorème précédent. \square

3 Polynôme de Tutte :

Cette partie s'appuie entièrement sur [9]

3.1 Premières définitions :

On considère ici un graphe $G = (V, E, F)$ indépendamment de tout plongement pour se consacrer aux propriétés algébriques des graphes. On rappelle que si e est une arête, on peut construire $G \setminus e$ et G/e les graphes respectifs où l'arête e est supprimée ou contractée.

Définition. Soit $A \subseteq E$ un ensemble d'arêtes du graphe G . On appelle *rang* de A et on note $rg(A)$ le nombre maximal d'arêtes de A qui induisent une sous-forêt du graphe G . On introduit de même la fonction suivante $\eta(A) = |A| - rg(A)$.

Définition. Le polynôme *rang* est défini par la formule suivante $S(G, x, y) = \sum_{A \subseteq E} x^{rg(E) - rg(A)} y^{\eta(A)}$

Proposition. On considère une arête e de G , on a la formule de récurrence suivante :

$$S(G; x, y) = \begin{cases} S(G \setminus e; x, y) + S(G/e; x, y) & \text{si } e \text{ n'est ni un isthme ni une boucle,} \\ (x + 1) S(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ est un isthme,} \\ (y + 1) S(G/e; x, y) & \text{si } e \text{ est une boucle.} \end{cases}$$

Démonstration. Supposons que G soit un graphe constitué d'un seul isthme $e = I$. Alors : $S(G; x, y) = x^{r(E) - r(\emptyset)} y^{\eta(\emptyset)} + x^{r(I) - r(I)} y^{\eta(I)} = x + 1$.

De la même manière, si G est une boucle B , $S(G; x, y) = y + 1$.

De manière générale, on a

$$S(G, x, y) = \sum_{A \subseteq E, e \in A} x^{rg(E) - rg(A)} y^{\eta(A)} + \sum_{A \subseteq E, e \notin A} x^{rg(E) - rg(A)} y^{\eta(A)}$$

En ce qui concerne le premier terme, on a l'égalité

$$\sum_{A \subseteq E, e \notin A} x^{rg(E) - rg(A)} y^{\eta(A)} = \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{rg(E) - rg(A)} y^{\eta(A)}$$

et de plus,

$$rg(E) = \begin{cases} rg(E \setminus e) + 1 & \text{si } e \text{ est un isthme} \\ rg(E \setminus e) & \text{sinon} \end{cases}$$

de cette manière,

$$\sum_{A \subseteq E, e \notin A} x^{rg(E) - rg(A)} y^{\eta(A)} = \begin{cases} x \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{rg(E) - rg(A)} y^{\eta(A)} = x S(G \setminus e, x, y) & \text{si } e \text{ est un isthme} \\ \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{rg(E) - rg(A)} y^{\eta(A)} = S(G \setminus e, x, y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour le second terme, on a

$$\sum_{A \subseteq E, e \in A} x^{rg(E) - rg(A)} y^{\eta(A)} = \sum_{B \subseteq E \setminus e} x^{rg((E \setminus e) \cup e) - rg(B \cup e)} y^{\eta(B \cup e)}$$

Soit $B \in E \setminus e$, on a alors

$$rg_{G/e}(B) = \begin{cases} rg(Y \cup e) & \text{si } e \text{ est une boucle} \\ rg(Y \cup e) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus,

$$\eta_{G/e}(B) = \begin{cases} \eta(B \cup e) - 1 & \text{si } e \text{ est une boucle} \\ \eta(B \cup e) & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\sum_{A \subseteq E, e \in A} x^{rg(E) - rg(A)} y^{\eta(A)} = \begin{cases} y \sum_{B \subseteq E \setminus e} x^{rg_{G/e}((E \setminus e)) - rg_{G/e}(B)} y^{\eta_{G/e}(B)} = yS(G/e, x, y) & \text{si } e \text{ est une boucle} \\ \sum_{B \subseteq E \setminus e} x^{rg_{G/e}((E \setminus e)) - rg_{G/e}(B)} y^{\eta_{G/e}(B)} = S(G/e, x, y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement, on a bien le résultat voulu en sommant les deux termes,

$$S(G; x, y) = \begin{cases} S(G \setminus e; x, y) + S(G/e; x, y) & \text{si } e \text{ n'est ni un isthme ni une boucle,} \\ (x + 1) S(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ est un isthme,} \\ (y + 1) S(G/e; x, y) & \text{si } e \text{ est une boucle.} \end{cases}$$

□

Théorème 9. Il existe une unique fonction $T : G \mapsto \mathbb{Z}[x, y]$ telle que

- i) $T(I, x, y) = x$ et $T(B, x, y) = y$ où I et B sont les graphes constitués respectivement d'un seul isthme et d'une seule boucle.
- ii) Si e est une arête qui n'est ni une boucle, ni un isthme, alors $T(G, x, y) = T(G \setminus e, x, y) + T(G/e, x, y)$.
- iii) Si e est un isthme ou une boucle, alors $T(G, x, y) = T(G/e, x, y)T(G \setminus e, x, y)$
- iv) Si K est un anneau commutatif et $f : G \mapsto K$ une fonction qui vérifie

$$f(G) = \begin{cases} f(G \setminus e) + f(G/e) & \text{si } e \text{ est une boucle ou un isthme} \\ f(G \setminus e)f(G/e) & \text{sinon} \end{cases}$$

quand $|E| \geq 2$, alors

$$f(G) = T(G, f(I), f(B))$$

Démonstration. Posons $T(G, x, y) = S(G, x - 1, y - 1)$, alors les propositions i), ii) et iii) sont évidentes. La preuve de iv) se fait par récurrence sur le nombre d'arêtes. □

Définition. On définit le polynôme de Tutte comme l'image d'un graphe par la fonction T dans le **théorème 8**.

3.2 Quelques propriétés :

Proposition. On a $T(G^*, x, y) = T(G, y, x)$

Démonstration. On a

$$T(G^*x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{rg(G^*)-rg_{G^*}(A)} (y-1)^{\eta_{G^*}(A)}$$

Or,

$$rg_{G^*}(A) = |A| - rg(G) + rg(G \setminus A) \text{ pour tout } A \in E$$

et donc

$$rg(G^*) - rg_{G^*}(A) = |E| - rg(G) - rg_{G^*}(A) = |E| - |A| - rg(E \setminus A)$$

On déduit de cela que

$$T(G^*, x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{|E \setminus A| - rg(E \setminus A)} (y-1)^{rg(E) - rg(E \setminus A)} = T(M, y, x)$$

□

Proposition. Si G_1 et G_2 sont les composantes connexes du graphe G , alors une récurrence immédiate nous donne $T(G, x, y) = T(G_1, x, y)T(G_2, x, y)$

Proposition. Les évaluations suivantes du polynôme de Tutte en des valeurs particulières nous donnent des propriétés qui permettent de caractériser les graphes :

- $T(G, 2, 2)$ compte le nombre de sous-graphes de G .
- $T(G, 1, 1)$ compte le nombre d'arbres couvrants du graphe.
- $T(G, 2, 1)$ compte le nombre de sous-arbres de G .
- $T(G, 1, 2)$ compte le nombre de sous-graphes couvrants de G .

Démonstration. • $T(G, 2, 2) = \sum_{A \subseteq E} 1$. Or chaque sous-ensemble d'arêtes induit un

sous-graphe et donc la somme compte exactement le nombre de sous-graphes de G .

- $T(G, 1, 1) = \sum_{A \subseteq E} 0^{rg(E)-rg(A)} 0^{\eta(A)}$. Or $0^{rg(E)-rg(A)} 0^{\eta(A)} = 1$ si et seulement si $rg(E) - rg(A) = 0$ et $\eta(A) = |A| - rg(A) = 0$. De plus, $\eta(A) = 0$ signifie exactement que A induit un sous-arbre et $rg(E) = rg(A)$ donne que cet arbre est couvrant. Au final tous les termes de la somme sont nuls sauf ceux associés à des arbres couvrants qui valent exactement 1, d'où le résultat.
- $T(G, 2, 1) = \sum_{A \subseteq E} 0^{\eta(A)}$. Le terme $0^{\eta(A)}$ vaut 1 si et seulement si A induit un sous-arbre de G , d'où le résultat.
- $T(G, 1, 2) = \sum_{A \subseteq E} 0^{rg(E)-rg(A)}$. Or $0^{rg(E)-rg(A)} = 1$ si et seulement si les arêtes de A couvrent tous les sommets du graphe, d'où le résultat.

□

3.3 Orientations :

Définition. Une orientation de G est une orientation de toutes les arêtes, c'est-à-dire que toutes les arêtes ont une extrémité positive ou négative. On dit qu'une orientation est acyclique (resp. totalement cyclique) si le graphe orienté n'a aucun cycle orienté dans le même sens (resp. toutes les arêtes sont contenues dans un cycle totalement orienté).

Proposition. Si on note $a(G)$ et $a^*(G)$ les nombres respectifs d'orientations acycliques et d'orientations totalement cycliques, alors on a $a(G) = T(G, 2, 0)$ et $a^*(G) = T(G, 0, 2)$.

Démonstration. Faisons la preuve pour montrer que $a(G) = T(G, 2, 0)$.

Posons $e = \{u, v\} \in E$ telle que cette arête ne soit ni une boucle ni un isthme. On partitionne l'ensemble X des orientations acycliques de $G \setminus e$ en deux sous ensembles :

- X_1 est l'ensemble des orientations acycliques où $G \setminus e$ admet un chemin de u à v ou un chemin de v à u .
- X_2 est l'ensemble des orientations acycliques où $G \setminus e$ n'admet ni un chemin de u à v , ni un chemin de v à u .

Aucun élément de X_1 ne peut avoir de chemin de u à v et de v à u en même temps sinon l'orientation ne serait pas acyclique. Donc pour chaque orientation de X_1 , il y a exactement une orientation de e qui peut être prolongée dans une orientation acyclique de G . Pour chaque orientation de X_2 , les deux orientations de e peuvent se prolonger en orientation acyclique de G . De plus chaque orientation acyclique de G peut être obtenue de façon unique à partir d'un élément de X en assignant une orientation à e . Ainsi,

$$a(G) = |X_1| + 2|X_2|$$

. Mais

$$a(G \setminus e) = |X_1| + |X_2| \text{ et } a(G/e) = |X_2|$$

On en déduit que si e n'est ni une boucle ni un isthme de G , alors

$$a(G) = a(G \setminus e) + a(G/e)$$

Si e est un isthme, alors $a(G) = 2a(G/e)$ sauf si G est constitué d'une seule arête et dans ce cas $a(G) = 2$.

Si e est une boucle, G n'admet pas d'orientation acycliques et $a(G) = 0$.

D'après le **théorème 8**, on obtient $a(G) = T(G, a(I), a(B)) = T(G, 2, 0)$.

On procède de la même manière pour prouver que $a^*(G) = T(G, 0, 2)$. □

4 Complexité des graphes antipodalement auto-duaux

Dans cette partie on va s'intéresser plus précisément à la complexité d'un graphe, c'est-à-dire à son nombre arbres couvrants $\kappa(G)$. En particulier on va montrer que dans le cas des graphes antipodalement auto-duaux cette complexité est un carré. **Le théorème de Kirchhoff** présenté en annexe nous donne déjà le résultat suivant : La complexité d'un graphe est donnée par n'importe quel mineur de sa matrice Laplacienne.

4.1 Arêtes conjuguées :

Définition. Si on fixe G un graphe auto-dual (avec son isomorphisme de dualité ϕ). Alors on rappelle que pour toute arête e , il existe une arête de G^* dite duale e^* qui coupe e . On appelle arête conjuguée de e , l'arête \tilde{e} de G qui vérifie $\tilde{e} = \phi^{-1}(e^*)$.

Proposition. On a les propriétés suivantes :

- Pour toute arête e , $\tilde{\tilde{e}} = e$
- Si G est antipodalement auto-dual, alors pour toute arête e , \tilde{e} et e sont différentes.

Démonstration. • $\tilde{\tilde{e}} = (\phi^{-1})^{-1}(\tilde{e}^*)$ or comme e croise e^* , on a $\phi(e)$ qui croise \tilde{e} et donc $\tilde{e}^* = \phi(e)$, d'où $(\phi^{-1})^{-1}(\tilde{e}^*) = \phi(\phi^{-1}(e)) = e$.

- Si e et \tilde{e} sont la même arête, alors e^* et $\phi(e)$ sont aussi la même arête. Si c'est le cas, alors e et $\phi(e)$ ont un point en commun. Mais comme ϕ est la réflexion antipodale, elles ont un autre point en commun, ce qui est impossible par le fait que l'une est sur G et l'autre sur G^* .

□

Définition. Si G est antipodalement auto-dual, on appelle arbre couvrant auto-dual de G , un arbre couvrant qui pour toute arête $e \in E(G)$ contient exactement un élément de la paire $\{e, \tilde{e}\}$. On appelle $\chi(G)$ le nombre d'arbres couvrants auto-duaux.

Théorème 10. Le résultat que nous allons montrer dans ce chapitre est le suivant : Pour tout graphe G antipodalement auto-dual, on a la formule :

$$\kappa(G) = \chi(G)^2$$

Commençons par montrer que si G est un graphe antipodalement auto-dual, alors $\kappa(G)$ est un carré. La preuve est tirée de [6]. Pour cela on s'appuiera librement sur la partie annexe qui traite du théorème de Kirchhoff, on supposera notamment connue les matrices d'adjacence M et Laplacienne L du graphe G . En particulier, on rappelle la formule $L = MM^T$ (1). De plus, on munit le graphe G d'une orientation quelconque ainsi que la sphère sur laquelle est plongé le graphe. Cela signifie que chaque face est associée un cycle d'arêtes et que ce cycle induit une suite de 1 et de -1 selon que l'arête est parcourue positivement ou négativement.

Définition. On définit M' la matrice où les lignes sont indexées par les arêtes de G et les colonnes sont indexées par les faces de G avec

$$M'_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } i \text{ est parcourue positivement par rapport à la face } j \\ -1 & \text{si l'arête } i \text{ est parcourue négativement par rapport à la face } j \\ 0 & \text{si l'arête } i \text{ n'est pas adjacente à la face } j \end{cases}$$

Proposition. On a $MM' = 0$ (2).

Démonstration. Considérons le coefficient i, j de la matrice MM' qui correspond au produit scalaire du vecteur ligne associé au sommet i de la matrice M avec le vecteur colonne associé à la face j de la matrice M' . Si le sommet i et la face j ne sont pas adjacents l'un à l'autre alors ils n'ont aucune arête en commun et le produit scalaire est nul. Dans le cas contraire, on a exactement deux arêtes qui sont à la fois adjacentes à i et j , donc le produit scalaire est réduit à la somme de deux termes non-nuls (qui sont indexés par les indices de ces deux arêtes). On a deux cas possibles :

- Si les deux arêtes ont la même orientation par rapport au sommet i , alors elles sont une orientation différente par rapport à la face j et le produit scalaire vaut $1 - 1 = 0$.
- Si les deux arêtes ont des orientations contraires par rapport au sommet, alors elles ont le même sens par rapport au cycle induit par la face et ici encore le produit scalaire vaut $1 - 1 = 0$.

□

Comme G est antipodalement auto-dual, une arête ne peut sa propre conjuguée, on peut donc regrouper dans M les arêtes selon leur conjugaison $M = (M_1|M_2)$, les colonnes de M_2 représentant les conjuguées des colonnes de M_1 . De plus, chaque face est l'image d'un sommet par l'isomorphisme ϕ , ce qui donne que la décomposition de M' suivante :

$$M' = (M_2|M_1)^T$$

D'après les équations (1) et (2), on obtient :

$$L = M_1M_1^T + M_2M_2^T$$

$$0 = M_1M_2^T + M_2M_1^T$$

En sommant les deux lignes précédentes, on obtient

$$L = [M_1 + M_2][M_1 + M_2]^T$$

D'après cette formule, le premier cofacteur de L est un carré, ce qui d'après le théorème de Kirchoff affirme que $\kappa(G)$ est bien un carré.

4.2 Première hypothèse :

Maintenant que nous avons déterminé que $\kappa(G)$ est un carré, essayons de montrer que $\kappa(G) = \chi(G)^2$.

Proposition. Pour e une arête de G , on a $\chi(G) = \chi(G \setminus e / \tilde{e}) + \chi(G \setminus \tilde{e} / e)$

Démonstration. Cette égalité est évidente si l'on partitionne l'ensemble des arbres auto-duaux de G en fonction de ceux qui contiennent e et ceux qui contiennent \tilde{e} . □

D'après la formule de récurrence sur le polynôme de Tutte, on a $T(G, x, y) = T(G/e, x, y) + T(\setminus e, x, y)$ et donc, en évaluant au point $(1, 1)$, on obtient, $\kappa(G) = \kappa(G/e) + \kappa(G \setminus e)$.

Ainsi, $\kappa(G) = \kappa(G/e/\tilde{e}) + \kappa(G/e \setminus \tilde{e}) + \kappa(G/\tilde{e} \setminus e) + \kappa(G \setminus e \setminus \tilde{e})$.

Comme $\chi(G)^2 = \chi(G \setminus e / \tilde{e})^2 + \chi(G \setminus \tilde{e} / e)^2 + 2\chi(G \setminus e / \tilde{e})\chi(G \setminus \tilde{e} / e)$

Quitte à procéder par récurrence, il suffit de démontrer la formule

$$2\chi(G \setminus e / \tilde{e})\chi(G \setminus \tilde{e} / e) = \kappa(G / e / \tilde{e}) + \kappa(G \setminus e \setminus \tilde{e})$$

Il s'agirait donc de construire une bijection entre certains ensembles bien choisis pour conclure la preuve. Cependant, après plusieurs tentatives, cette bijection semble difficile à trouver si on ne la connaît pas au préalable. Pour achever cette preuve nous allons dans la prochaine partie présenter des outils tout à fait différents de ceux déjà utilisés et développés dans [7] et [2].

4.3 Graphes de Courants :

Définition. On fixe un graphe G que l'on munit d'une orientation quelconque.

- On appelle graphe de courant, un application $k : V(G) \mapsto \mathbb{R}$ qui vérifie $\forall e \in V(G)$, $k(e) = -k(\bar{e})$ avec \bar{e} l'arête orientée en sens inverse de e .
- Pour un sommet x , on note I_x le flux rentrant en x , c'est-à-dire la somme des courants de chaque arête adjacente à x .
- Pour F une face, la circulation C_F est la somme des courants portés par les arêtes qui sont adjacentes à F (on présuppose une orientation du plan qui permette de fixer un sens de circulation).

Proposition. Si la circulation du chaque face est nulle, il est possible de déterminer (de manière non unique) pour chaque sommet x , un entier $v(x)$ appelé potentiel de x de sorte que pour chaque arête $e = (xy)$, la relation $k(e) = v(y) - v(x)$ soit vérifiée.

Remarque. On emprunte ici le langage de la théorie des circuits électriques pour considérer que toutes les arêtes ont une résistance égale à 1, ce qui permet de considérer la chute de potentiel entre deux sommets z et t comme la quantité donnée par $v(z) - v(t)$.

Définition. On considère deux sommets distincts x et y . On appelle (x, y) -flux, une distribution des courants qui vérifie les points suivants :

- La circulation sur chaque face est nulle
- Pour tout sommet w distinct de x et y , on a $I_w = 0$

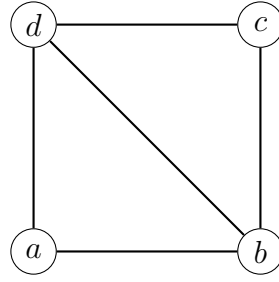
Remarque. Dans ces conditions, appelées conditions de Kirchhoff, on a nécessairement $I_y = -I_x$. De plus, il est montré dans l'article [8] que dans ces conditions, le (x, y) -flux est entièrement déterminé si l'on fixe $I_x = \kappa(G)$. De plus, les courants et chutes de potentiels deviennent des entiers. C'est le (x, y) -flux complet.

Définition. Pour z et t des sommets du graphe, on définit $[xy, zt]$ la chute de potentiel entre les sommets t et z , au sein du (x, y) -flux complet.

Remarque. Cette notation n'est pas anodine comme le montre le théorème suivant démontré dans l'article [8].

Théorème 11. En considérant la matrice laplacienne $L(G)$ du graphe, la quantité $[xy, zt]$ est donnée (au signe près) par le mineur de $L(G)$ obtenu en supprimant les lignes indexés par les sommets x et y et les colonnes indexés par les sommets z et t .

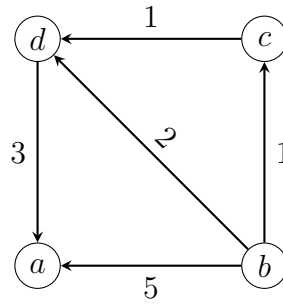
Exemple. On considère le graphe suivant :



dont la matrice laplacienne est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a alors le (a, b) -flux qui est donné par



On a par exemple $[ab, ad] = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$

De plus, on vérifie bien que le flux en a est bien égal à 8, qui est le nombre d'arbres couvrants du graphe.

Proposition. On a les propriétés suivantes :

- Si x, y, z, t et u sont des sommets, alors on a $[xy, zt] = [zt, xy] = -[xy, tz]$ et $[xy, zt] = [xy, zu] + [xy, ut]$
- Pour tout triplet de sommets x, y et z , on a $[xy, zz] = [xx, yz] = 0$
- Si $e = (xy)$ est un isthme, et z et t des sommets non séparés par e , alors $[xy, xy] = \kappa(G)$ et $[xy, zt] = 0$
- Si $e = (xy)$ est une arête, alors $\kappa(G/e) = [xy, xy]$

Remarque. Pour prouver ces égalités, on va s'appuyer sur les deux points de vue induits par le théorème **théorème 10**, c'est-à-dire l'interprétation en terme de différence de potentiel ou en terme de calcul de déterminant.

Démonstration. • L'égalité $[xy, zt] = [zt, xy]$ vient de la symétrie de la matrice laplacienne et $[xy, zt] = -[xy, tz]$ vient du fait que la différence de potentiel est anti-symétrique.

- La différence de potentiel entre un sommet et lui-même est nulle, d'où la formule $[xy, zz] = 0$
- Supposons que $e = (xy)$ est un isthme et G_x et G_y les composantes connexes associées à x et y (si l'on ne tient pas compte de e). Alors par exemple, $z, t \in G_x$. Quitte à ré-indexer les sommets, la matrice laplacienne est diagonale par bloc, avec les entrées $[x, y]$ et $[y, x]$ qui valent -1 . Lorsque l'on calcule le mineur associé à la quantité $[xy, zt]$, un ligne de 0 apparaît et annule le déterminant. Donc par conséquent tous les sommets de la composante G_x ont la même différence de potentiel et de même pour la composante G_y . Ainsi, le seul courant qui circule est dans l'arête e et l'égalité $I_x = \kappa(G)$ assure que $[xy, xy] = \kappa(G)$.
- Étudions l'effet de la contraction d'une arête $e = (xy)$ sur la matrice laplacienne. Cela entraîne la suppression de la colonne et de la ligne indexée par x et la modification de la ligne et de la colonne indexée par y . D'après le théorème de Kirchoff, le calcul de $\kappa(G/e)$ peut s'effectuer en calculant le déterminant obtenu en supprimant la ligne et la colonne indexée par y . Ce procédé revient à calculer la valeur $[xy, xy]$, d'où le résultat. □

Remarque. Le dernier résultat est vrai même si les sommets x et y ne sont pas reliés. Prolongeons-le par la propriété suivante :

Proposition. Soit $e_1 = (xy)$ et $e_2 = (zt)$ deux arêtes qui n'ont pas les mêmes extrémités. On a l'égalité

$$\kappa(G) \cdot \kappa(G/e_1/e_2) = [xy, xy][zt, zt] - [xy, zt]^2$$

Démonstration. Admettons ce résultat qui se trouve dans [5] et qui s'appuie sur la formule de Jacobi pour les déterminants. □

4.4 Application aux graphes antipodalement auto-duaux

On considère à partir de maintenant que le graphe G est auto-dual, dont ϕ est l'isomorphisme.

Remarque. Comme G et G^* sont isomorphes, on a $\kappa(G) = \kappa(G^*)$

Définition. On considère $e = (xy)$ une arête de G qui n'est ni un isthme, ni une boucle, et $e^* = (ab)$ son arête duale dans G^* . Si on note k le (x, y) -flux complet, alors on peut considérer k^* le flux dual, en posant pour chaque arête c , $k^*(c) = k(c^*)$.

Remarque. Une orientation est primordiale pour considérer le flot dual. Considérons par exemple que l'arête orientée (xy) a pour duale (ab) si l'on obtient (ab) à partir de (xy) en tournant dans le sens direct.

Remarque. Par dualité, la distribution de courant k^* impose à tous les sommets de G^* un influx nul et à toutes ses faces ont une circulation nulle (sauf x^* et y^* qui ont une circulation de $\pm\kappa(G)$).

Considérons G^* munit du flux dual k^* . En supprimant l'arête e^* on obtient un (b, a) -flux. D'après ce qui précède, l'influx en b vaut $k^*(e^*) = k(e) = [xy, xy] = \kappa(G/e)$, et l'influx en a vaut $-\kappa(G/e)$. Supposons maintenant que l'on restaure l'arête e^* mais avec un courant $k^*(e^*) = \kappa(G) - \kappa(G/e)$, alors l'influx en b vaut $\kappa(G)$ et celui en a vaut $-\kappa(G)$.

Si on considère ce nouveau flux dans G^* , il s'agit du (b, a) -flux complet.

En considérant une arête (zt) de G et (uv) sa duale dans G^* , on obtient le résultat suivant :

$$[xy, zt] = -[ab, uv]$$

En effet, d'après ce qui précède, la différence de potentiel entre u et v dans le (b, a) -flux complet de G^* est la même que la différence de potentiel entre z et t dans le (x, y) -flux complet de G , d'où $[xy, zt] = [ba, uv]$ et comme $[ab, uv] = -[ba, uv]$, on obtient $[xy, zt] = -[ab, uv]$.

Remarque. Le résultat reste vrai si l'une des arêtes considérées est une boucle ou un isthme.

Proposition. Supposons G un graphe antipodalement auto-dual, avec f la symétrie centrale de la sphère qui réalise l'isomorphisme de dualité. Si $e = (xy)$ est une arête et $\tilde{e} = (zt)$ son arête conjuguée, alors $[xy, zt] = 0$.

Démonstration. Pour faciliter la preuve, on étend l'écriture $[e, \tilde{e}] = [xy, zt]$

On a $[e, \tilde{e}] = -[e^*, \tilde{e}^*]$ d'après ce qui précède. Comme la réflexion antipodale inverse le sens des courants, on a $[e^*, \tilde{e}^*] = -[f(e^*), f(\tilde{e}^*)]$, d'où $[e^*, \tilde{e}^*] = -[\tilde{e}, e] = [e, \tilde{e}]$. Finalement, $[e, \tilde{e}] = -[e, \tilde{e}]$, d'où le résultat. \square

4.5 Fin de la preuve :

On considère que G est un graphe antipodalement auto-dual.

Proposition. Si e est une arête qui n'est pas un isthme, alors $\kappa(G \setminus e) = \kappa(G/\tilde{e})$

Démonstration. Il est évident que l'on a un isomorphisme entre $(G \setminus e)^*$ et G^*/e^* , d'où $\kappa(G \setminus e) = \kappa((G \setminus e)^*) = \kappa(G^*/e^*)$. De plus, la réflexion antipodale, transforme e^* en \tilde{e} et donc $f(G^*/e^*) = G/\tilde{e}$. Ainsi, on a bien $\kappa(G \setminus e) = \kappa(G/\tilde{e})$. \square

Proposition. Si e n'est ni une boucle, ni un isthme, alors $\kappa(G) \cdot \kappa(G/e \setminus \tilde{e}) = \kappa(G/e)^2$

Démonstration. Comme e n'est ni une boucle, ni un isthme, e et \tilde{e} n'ont pas les mêmes extrémités et la formule suivante s'applique :

$$\kappa(G) \cdot \kappa(G/e/\tilde{e}) = [e, e] \cdot [\tilde{e}, \tilde{e}] - [e, \tilde{e}]^2$$

De plus, comme $[e, \tilde{e}] = 0$ et $[c, c] = \kappa(G/c)$ on a :

$$\kappa(G) \cdot \kappa(G/e/\tilde{e}) = \kappa(G/e) \cdot \kappa(G/\tilde{e})$$

En retranchant l'équation précédente à $\kappa(G) \cdot \kappa(G/e)$ on obtient :

$$\kappa(G)[\kappa(G/e) - \kappa(G/e/\tilde{e})] = \kappa(G/e)[\kappa(G) - \kappa(G/\tilde{e})]$$

Et se rappelant de la formule héritée du polynôme de Tutte $\kappa(G) = \kappa(G/e) + \kappa(G \setminus e)$, on aboutit au résultat :

$$\kappa(G)\kappa(G/e \setminus \tilde{e}) = \kappa(G/e)\kappa(G \setminus \tilde{e})$$

Et d'après la proposition précédente appliquée à \tilde{e} , $\kappa(G \setminus \tilde{e}) = \kappa(G/e)$, d'où :

$$\kappa(G)\kappa(G/e \setminus \tilde{e}) = \kappa(G/e)^2$$

\square

Rappelons le **théorème 9** qui assure que si G est un graphe antipodalement aut-odual, alors $\chi(G)^2 = \kappa(G)$.

Démonstration. On sait déjà d'après la partie sur les arêtes conjuguées que $\kappa(G)$ est un carré. Supposons que G est un graphe antipodalement auto-dual avec le nombre minimal d'arêtes pour que le théorème ne soit pas vérifié de manière certaine. On sait que G admet au moins une arête e qui ne soit pas un isthme ou une boucle. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe un unique arbre couvrant qui est constitué de tous les isthmes et cet arbre est auto-dual donc G vérifie le théorème.

Le théorème fonctionne pour $G/e \setminus \tilde{e}$, donc $\kappa(G/e \setminus \tilde{e}) = \chi(G/e \setminus \tilde{e})^2$

En prenant la racine carré dans la formule de la proposition précédente, on obtient

$$\sqrt{\kappa(G)} \cdot \chi(G/e \setminus \tilde{e}) = \kappa(G/e)$$

On peut également appliquer cette formule à \tilde{e} :

$$\sqrt{\kappa(G)} \cdot \chi(G/\tilde{e} \setminus e) = \kappa(G/\tilde{e})$$

En sommant ces deux équations, on trouve

$$\sqrt{\kappa(G)} \cdot [\chi(G/e \setminus \tilde{e}) + \chi(G/\tilde{e} \setminus e)] = \kappa(G/e) + \kappa(G/\tilde{e})$$

D'une part, on a $\chi(G/e \setminus \tilde{e}) + \chi(G/\tilde{e} \setminus e) = \chi(G)$ et d'autre part, on a $\kappa(G/\tilde{e}) = \kappa(G \setminus e)$, d'où

$$\sqrt{\kappa(G)} \cdot \chi(G) = \kappa(G/e) + \kappa(G \setminus e) = \kappa(G)$$

Ainsi, on obtient

$$\chi(G) = \sqrt{\kappa(G)}$$

□

5 Annexe : Le Théorème de Kirchhoff

Le théorème de Kirchhoff, aussi appelé *matrix-tree theorem*, nommé d'après le physicien Gustav Kirchhoff, est un théorème donnant le nombre exact d'arbres couvrants pour un graphe non orienté quelconque. On appelle *arbre couvrant* d'un graphe G , un sous-graphe de G qui possède tous les sommets de G et qui est un arbre. C'est une généralisation de la formule de Cayley qui donne ce résultat pour les graphes complets non orientés.

5.1 Quelques rappels

5.1.1 Propriété

Soit G un graphe à n sommets, on a équivalence entre les affirmations suivantes :

- G est un arbre
- G est connexe et possède exactement $n - 1$ arêtes
- G ne contient aucun cycle et possède exactement $n - 1$ arêtes
- Pour toute paire de sommets de G , il existe un unique chemin entre ces deux sommets.

Dans les cas où elles sont vraies, alors G possède au moins deux feuilles (sommets de degré 1).

5.1.2 Définition

Pour $G = (V, E)$ un graphe à n sommets, on définit la matrice laplacienne L comme la matrice carrée de taille n telle que :

$$L_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5.2 Théorème

5.2.1 Théorème de Kirchhoff

Si on note $\kappa(G)$ le nombre d'arbres couvrants de G , alors :

$$\kappa(G) = (-1)^{i+j} \det(L^{\hat{i}, \hat{j}})$$

où $L^{\hat{i}, \hat{j}}$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de L .

5.2.2 Remarque

On remarque que la somme sur chaque ligne et chaque colonne de L est nulle, ce qui permet de ramener le calcul de $\det(L^{\hat{i}, \hat{j}})$ à celui de $\det(L^{\hat{n}, \hat{n}})$. Il suffit alors de prouver que $\kappa(G) = \det(L^{\hat{n}, \hat{n}})$.

On peut se restreindre au cas où le graphe est connexe car si ce n'est pas le cas, L est diagonale par blocs, en supprimant une ligne et une colonne, il reste au moins un bloc diagonal intact, dont la somme des colonnes est nulle. Les cofacteurs sont donc nuls et on retrouve le fait qu'un graphe non-connexe n'admet pas d'arbre couvrant.

5.3 Démonstration du théorème

On considère un graphe G connexe à n sommets et p arêtes. On oriente arbitrairement les arêtes.

5.3.1 Définition

On définit la matrice d'incidence M à n lignes et p colonnes par :

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } j \text{ entre dans le sommet } i \\ -1 & \text{si l'arête } j \text{ sort du sommet } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5.3.2 Lemme

On a :

$$L = M^T M$$

Cela vient du fait que l'entrée (i, j) de L est le produit scalaire des lignes i et j de M .

5.3.3 Formule de Cauchy-Binet

Soient A de taille (k, ℓ) et B de taille (ℓ, k) , avec $k \leq \ell$, alors :

$$\det(AB) = \sum_{S \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, \ell \rrbracket)} \det(A[S]) \det(B[S])$$

On applique cela à $L^{\hat{n}, \hat{n}} = M_0^T M_0$, où M_0 est M sans sa dernière ligne.

Alors :

$$\det(L^{\hat{n}, \hat{n}}) = \sum_{S \in \mathcal{P}_{n-1}(\llbracket 1, p \rrbracket)} \det(M_0[S])^2$$

Il faut donc étudier les sous-matrices de M_0 de taille $n - 1$.

5.3.4 Fin de la preuve

On a une bijection entre les sous-matrices de taille $n - 1$ de M_0 et les sous-graphes de G à n sommets et $n - 1$ arêtes.

On a deux cas possibles :

- Si le sous-graphe G_1 est un arbre, alors comme un arbre contient deux feuilles, il existe une ligne de la matrice dont toutes les entrées sont nulles sauf une qui est égale à ± 1 . En développant le déterminant par rapport à cette ligne, on obtient $\det(M_1) = \pm \det(M_2)$, avec M_2 qui est la matrice correspondante au sous-graphe de G_1 que l'on obtient après avoir retiré la feuille et son arête. Il s'agit donc encore d'un arbre. Une récurrence immédiate nous donne donc $\det(M_1) = \pm 1$.
- Si le graphe G_1 n'est pas un arbre, il n'est pas connexe et contient un cycle C . Si le sommet n ne fait pas partie du cycle, alors les colonnes associées aux arêtes de C forment une famille de vecteurs liés de la matrice M_1 , et donc $\det(M_1) = 0$. Si le sommet n fait partie du cycle, alors certaines lignes de M_1 sont tous les sommets d'une composante connexe et forment donc une famille de vecteurs liés. On a aussi $\det(M_0) = 0$.

Donc $\det(L^{\hat{n},\hat{n}})$ est une somme dans laquelle il y a exactement $\kappa(G)$ termes égaux à 1 et tous les autres sont nuls, ce qui permet de conclure la preuve.

5.4 Formule de Cayley

La formule de Kirchhoff permet de retrouver la formule de Cayley via le calcul d'un déterminant.

Pour le graphe complet K_n , la matrice laplacienne est :

$$L = \begin{pmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Et on obtient :

$$\kappa(K_n) = \det(L^{\hat{n},\hat{n}}) = n^{n-2}$$

5.5 Pour aller plus loin

La matrice Laplacienne L d'un graphe G est symétrique donc diagonalisable en base réelle. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres et, puisqu'elle n'est pas inversible, on peut prendre $\lambda_n = 0$. Le calcul du polynôme caractéristique de L nous donne d'une part :

$$\det(XI_n - L) = X^n + \cdots + (-1)^{n-1} \text{Tr}(\text{com}(L))X$$

avec

$$\text{Tr}(\text{com}(L)) = n \times \det(L^{\hat{n},\hat{n}}) = n \times \kappa(G)$$

et d'autre part :

$$\det(XI_n - L) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_{n-1})X$$

L'identification des coefficients pour le terme de degré 1 nous donne donc

$$n \times \kappa(G) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}$$

et finalement,

$$\kappa(G) = \frac{1}{n} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}.$$

5.5.1 Exemple

On définit C_n comme le graphe dont les sommets sont les éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, reliés s'ils ne diffèrent que d'une coordonnée.

On peut montrer que la matrice laplacienne de C_n a pour valeurs propres $\lambda_i = 2i$ de multiplicité $\binom{n}{i}$.

D'où :

$$\kappa(G) = \frac{\prod_{i=1}^n (2i) \binom{n}{i}}{2^n} = 2^{2^n - n - 1} \prod_{i=1}^n i \binom{n}{i}$$

Conclusion

Ce mémoire a exploré en profondeur les graphes auto-duaux et, plus particulièrement, les graphes antipodalement auto-duaux, objets qui se situent au carrefour de la combinatoire et de la topologie. L'étude menée a permis de mettre en évidence plusieurs résultats structurants, tant sur le plan théorique que sur leurs applications.

Dans un premier temps, l'analyse de la dualité et des involutions a conduit à une caractérisation partielle des graphes planaires admettant une auto-dualité antipodale. Grâce à l'introduction de graphes auxiliaires, il a été possible d'exprimer des propriétés topologiques par des conditions purement combinatoires. Ce cadre a permis de dégager des familles de graphes particulièrement remarquables — roues, oreilles, pancakes, polyèdres — dont les conditions d'auto-dualité antipodale ont pu être démontrées avec précision. La construction générale via l'opération $G \diamond G^*$ a en outre fourni un procédé efficace pour engendrer de nouveaux graphes antipodalement auto-duaux.

La deuxième partie a mis en lumière un aspect essentiel de ces structures : leur lien étroit avec la théorie des nœuds. En utilisant les graphes de Tait et leur plongement antipodal, il a été montré que l'auto-dualité se traduit naturellement en symétrie centrale dans les liens, donnant naissance à des familles de liens achiraux. Cette correspondance révèle la profondeur des interactions entre graphes et topologie, et illustre le rôle pivot de la symétrie antipodale dans la détection et la construction d'objets symétriques.

Le troisième volet du mémoire a rappelé l'importance du polynôme de Tutte, invariant combinatoire fondamental. Bien que plus bref, ce passage a souligné son intérêt, en tant qu'outil algébrique permettant de retrouver des invariants classiques (arbres couvrants, orientations, etc.) et d'éclairer certaines propriétés structurelles des graphes étudiés.

Enfin, la dernière partie a mis en évidence un résultat particulièrement marquant : pour tout graphe antipodalement auto-dual, la complexité (c'est-à-dire le nombre d'arbres couvrants) est toujours un carré parfait, plus précisément le carré du nombre d'arbres couvrants auto-duaux. Ce théorème, fruit d'un travail combinatoire fin, révèle une structure cachée et d'une grande élégance, reliant symétrie antipodale et invariants combinatoires.

En somme, ce mémoire montre que les graphes auto-duaux et antipodalement auto-duaux constituent un terrain fertile où se rencontrent combinatoire, topologie et algèbre. Les résultats obtenus — classification de familles, correspondances avec la théorie des nœuds, interprétations polynomiales et propriétés de complexité — ouvrent des perspectives riches, tant pour l'approfondissement théorique que pour de futures applications dans des domaines voisins.

Références

- [1] Javier Bracho, Luis Montejano, Eric Pauli, and Jorge L. Ramírez Alfonsín. Strongly involutive self-dual polyhedra. *Ars Mathematica Contemporanea*, 20 :143–149, 2021.
- [2] R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone, and W. T. Tutte. The dissection of rectangles into squares. *Duke Mathematical Journal*, 7(1) :312–340, 1940.
- [3] Luis Montejano, Jorge L. Ramírez Alfonsín, and Iván Rasskin. Self-dual maps ii : Links and symmetry. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 37(1) :191–220, 2023.
- [4] Luis Montejano, Jorge L. Ramírez Alfonsín, and Ivan Rasskin. Self-dual maps i : Antipodality. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 36(3) :1551–1566, 2022.
- [5] Anthony B. Morton. The admittance matrix and network solutions, 2025. Preprint disponible sur <https://arxiv.org/abs/2507.15331>.
- [6] C. A. B. Smith and W. T. Tutte. A class of self-dual maps. *Canadian Journal of Mathematics*, 2 :326–338, 1950.
- [7] W. T. Tutte. On the spanning tree of self-dual maps. *Department of Combinatorics and Optimization*. University of Waterloo, Ontario, Canada.
- [8] W. T. Tutte. Rotors in graph theory. In J. Srivastava, editor, *Combinatorial Mathematics, Optimal Designs and Their Applications*, volume 6 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 343–347. North-Holland, Amsterdam, 1980. Reprinted in *Annals of Discrete Mathematics*, Vol. 6 (1980).
- [9] Michel Las Vergnas and Jorge L. Ramírez Alfonsín. *Théorie des matroïdes : Nouvelles tendances et interactions*. Université de Montpellier & CNRS, Montpellier, France, 2025. Cours avancé, manuscrit non publié.