Le Mans Université, L2 - Année 2019/2020

TD 3 : Estimation et Intervalle de confiance

Exercice 1.

Une machine fabrique des pièces en grande série et chaque pièce a comme base une surface rectangulaire. A chaque pièce, on associe la mesure d'un de ses côtés exprimée en mm. On définit ainsi une variable aléatoire X.

1. On mesure la longueur de la pièce et l'on suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec $\mu = 150$ et $\sigma = 0.21$. On tire au hasard et avec remise un échantillon de 400 pièces et l'on note $\overline{x}_n$ la moyenne des longueurs des pièces de cet échantillon. Déterminer le réel h tel que $P(\left|\mu - \overline{X}_n\right| \leq h) = 0.95$.
2. On mesure la largeur de la pièce et l'on suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec $\mu = 28.2$ et $\sigma = 0.027$. Soit $\overline{X}_n$ la moyenne empirique d'un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Déterminer n pour que $P(28.195 \leq \overline{X}_n \leq 28.205) = 0.95$.

Exercice 2.

On admet que la durée de vie de lampes fluorescentes produites par un fabricant peut être représentée par une variable aléatoire normale X de moyenne μ et d'écart σ. La moyenne et l'écart-type sont inconnus et on se propose de les estimer à partir d'un échantillon de taille n de X.
Les durées de vie observées de 9 ampoules ont été (exprimées en heures) les suivantes :
8850 , 9330 , 10250 , 8940 , 9130 , 7720 , 8250 , 7380 , 9110.

1. Donner les estimateurs habituels de μ et σ^2. Indiquer leur propriétés.
2. Donner les estimations de μ et σ auxquelles les observations précédentes conduisent.
3. Donner un intervalle de confiance au niveau de 95% pour μ.
4. Le fabricant inscrit sur les boîtes de lampes :"durée de vie des ampoules : 9000 heures", cette affirmation semble-t-elle compatible avec les résultats précédents ?
5. On suppose maintenant que l'on teste 900 ampoules au lieu de 9 et que l'on obtient les mêmes estimations pour μ et σ que celles obtenues à la question 2, la durée de vie de 9000 heures semble-t-elle compatible avec le nouvel intervalle de confiance obtenu sur μ ?

Exercice 3.

Un sondage est effectué dans une circonscription comportant 85842 électeurs. Sur 1068 personnes intérrogées 550 déclarent vouloir voter pour le candidat A. On suppose que les personnes intérrogées ont été prises au hasard dans la circonscription.

Soit T la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille $n = 1068$ prélevé au hasard associe la proportion d'électeurs de cet échantillon voulant voter pour le candidat A.

1. Déterminer un intervalle de confiance de p (proportion des électeurs votant pour A) avec le niveau de confiance 0.95.
2. Au vu du résultat de ce sondage, le candidat a-t-il raison de penser que si les élections avaient eu lieu au moment où le sondage a été réalisé (en supposant que les réponses au sondage étaient sincères) il aurait été élu au 1^{er} tour ?

Exercice 4.

1. On effectue 10 mesures d'une quantité qui suit une loi gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2 inconnues. On obtient :
   4.81 ; 5.72 ; 4.41 ; 7.18 ; 4.86 ; 5.11 ; 6.07 ; 5.06 ; 4.90 ; 4.17.
   Déterminer un intervalle de confiance pour la moyenne et la variance à 90%.
2. On suppose qu'on a effectué 100 mesures. Les moyenne et variance empiriques sont $\bar{x}_{100} = 4.88$ et $s_{100} = 0.914$. Déterminer un intervalle de confiance pour la moyenne et la variance à 90%.

Exercice 5.

On souhaite effectuer un sondage d'opinion sur les intentions de vote d'un second tour des élections présidentielles (où il ne reste plus que deux candidats). On note p_A la proportion de votes pour le candidat A dans la population et n le nombre de personnes consultées.

1. La proportion de personnes interrogées déclarant vouloir voter pour A est représentée par la variable aléatoire X. Quelle est la loi de X?
2. Proposer une loi simplifiée qui approche la loi de X.
3. Quel nombre de personnes faut-il interroger pour avoir une fourchette sur les intentions de vote de $\pm 1\%$ avec le niveau de confiance 95% ?

Exercice 6.

Un relevé de vitesse pour un échantillon de véhicules pris au hasard sur une portion de route a donné les résulatats suivants :

vitesses (en km/h)	]75 ;80]	]80 ;85]	]85 ;90]	]90 ;95]	]95 ;100]	]100 ;105]	]105 ;110]
effectifs	5	10	20	36	15	8	6

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette distribution empirique.
2. Proposer une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart-type σ de la distribution des vitesses des véhicules empruntant cette voie.
3. On suppose que la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n associe la moyenne des vitesses de l'échantillon suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. déterminer un intervalle de confiance de μ au coefficient 0.99.
4. Pour quelles valeurs de n est-on sûr de connaître un intervalle de confiance de μ au coefficient 0.95, dont l'amplitude soit 0.5 ?

Exercice 7.

On effectue des pesées avec une balance. On sait, pour l'avoir testée, que cette balance donne, pour un objet donné, des résultats qui suivent une loi normale dont la moyenne est la masse de l'objet pesé et dont l'ecart-type est de 1g.

1. On a effectué 25 mesures d'un certain objet, et la somme des résultats est 30.25g. Donner un intervalle de confiance à 90% pour la masse de cet objet.
2. Reprendre ce qui précède pour 400 mesures dont la somme donne 484g.