Transformée de Fourier Quantique

Baptiste Daumen

29 juin 2022

1 Introduction

La transformée de Fourier quantique sur un qubit est l'équivalent de la transformée de Fourier classique sur un vecteur. Cette transformée de Fourier a des propriétés intéressantes qui la rende facilement implémentable sur un ordinateur quantique. Elle possède de nombreuses utilités, notamment dans l'algorithme de Shor (algorithme de décomposition de nombres en facteurs premiers).

2 Définition

Soit un vecteur $|x\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} x_i |i\rangle$ dans un espace de Hilbert de dimension N. $\{|0\rangle, |1\rangle, ..., |N-1\rangle\}$ est une base de cet espace.
La transformée de Fourier quantique du qubit $|x\rangle$ est $|y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} y_j |j\rangle$ avec
$y_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{\frac{2i\pi kj}{N}}$
Afin de déterminer la matrice liée à la transformée de Fourier quantique (application linéaire en dimension finie), on détermine l'image des vecteurs de la base.
Soit $|l\rangle$, le l-ème vecteur de la base. En reprenant la définition, on a $x_k = 0$ si $k \neq l$ donc $y_j = \frac{e^{\frac{2i\pi jl}{N}}}{\sqrt{N}}$.
Ainsi $|TFQ(l)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi kl}{N}} |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{kl} |k\rangle$ avec $w_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$.
On obtient une notation matricielle de la Transformée de Fourier Quantique :

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \dots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \dots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & \dots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

On démontre aisément que F_N est unitaire.
En effet, $(F_N^\dagger F_N)_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{ik} \overline{w_N}^{kj}$, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Donc $F_N^\dagger F_N = I_N$. On en déduit facilement la transformée de Fourier inverse, qui n'est autre que la transconjuguée de la matrice précédente.

3 Implémentation

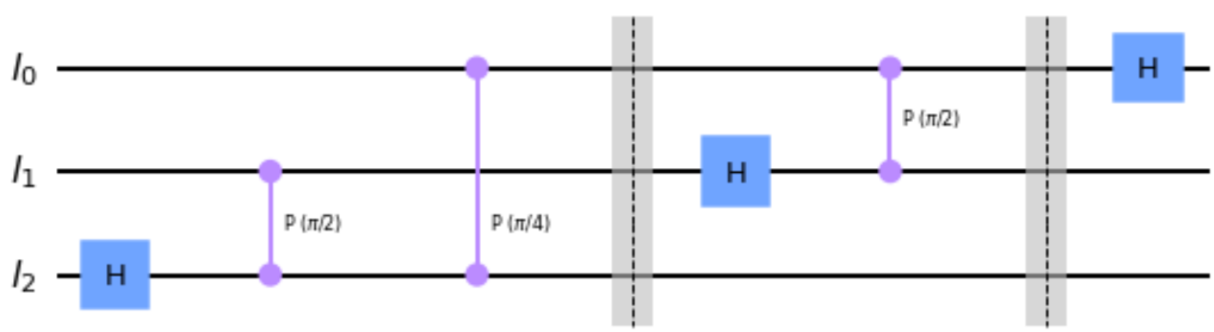
Pour implémenter la transformée de Fourier quantique sur un (vrai) ordinateur quantique, on utilise $N = 2^n$. On choisit l un entier strictement inférieur à N. On note $|l\rangle = |l_0 l_1 l_2 ... l_{n-1}\rangle$, la notation binaire de l, qui donne un état à plusieurs qubits.

$$
\begin{aligned}
TFQ\,|l\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi kl}{N}}\,|k\rangle && (1)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{(x_0x_1...x_{n-1})\in\{0,1\}^n} w_N^{xl}\,|x_0x_1x_2...x_{n-1}\rangle && (2)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{(x_0x_1...x_{n-1})\in\{0,1\}^n} \bigotimes_{j=0}^{n-1} w_N^{2^{n-1-j}x_jl}\,|x_j\rangle && (3)\\
&= \bigotimes_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + w_N^{2^{n-1-j}l}\,|1\rangle) && (4)\\
&= \bigotimes_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\pi 2^{k-j}l_k}\,|1\rangle) && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}
$$

Cette version de la TFQ va nous permettre d'implémenter naturellement la TFQ avec des portes quantiques. On étudie l'action de la TFQ sur le qubit l_{n-1}. On doit obtenir $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\pi 2^{k-n+1}l_k}\,|1\rangle)$. Pour $k = n-1$, la phase correspondante est $e^{i\pi l_{n-1}}$ donc 1 si $l_{n-1} = 0$ et sinon -1. La première porte à appliquer au qubit l_{n-1} est une porte de Hadamard. On a donc un qubit $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\pi l_{n-1}}\,|1\rangle)$. On pose,

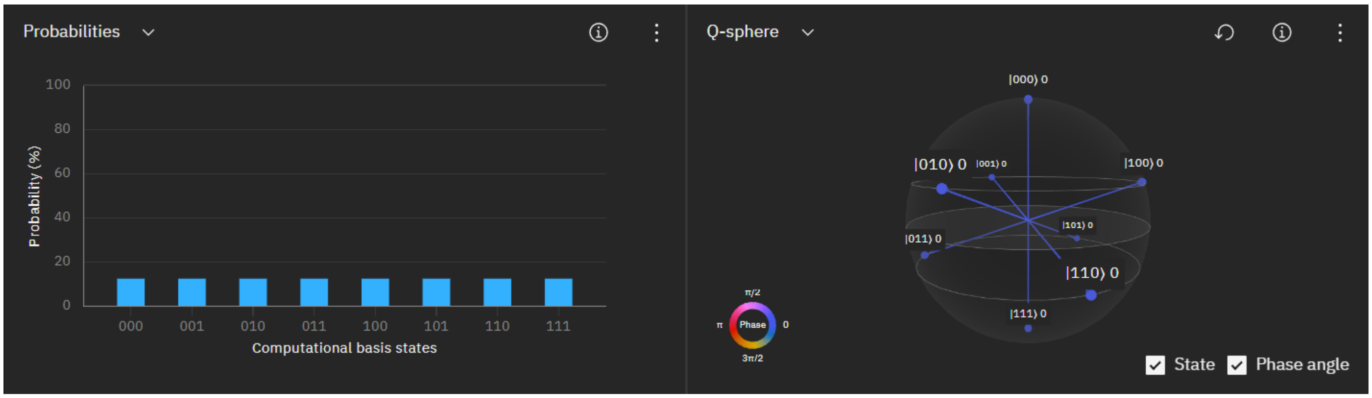
$$P_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & e^{\frac{i\pi}{2^m}} \end{pmatrix}$$

Ensuite on doit appliquer des portes de déphasage P_m si le qubit l_m vaut 1 et l'identité sinon. Donc on applique une porte C_{P_m}.
Dans la suite, $P(\pi/2^m) = P_m$. Le qubit de contrôle est le qubit du haut dans le schéma suivant. Pour donner un exemple de circuit fait avec Qiskit, on prend $n = 3$.

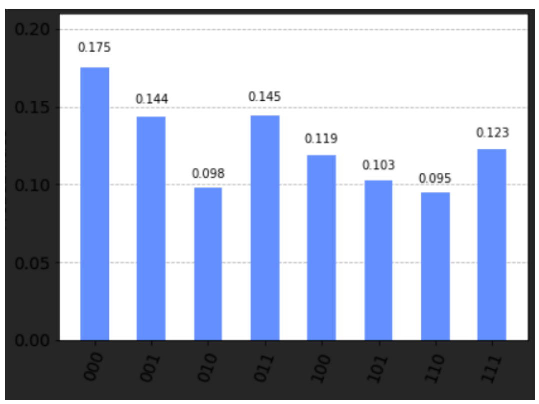


4 Expérimentations sur un (vrai) ordinateur quantique

J'ai utilisé l'ordinateur quantique de 5 bits 'lima' de IBM pour calculer la TFQ de $|000\rangle$. Théoriquement, on obtient une probabilité de 12.5% d'obtenir chacun des états de la base d'un état à 3 qubits.



On effectue les mesures sur le (vrai) ordinateur quantique. On se rend compte qu'il y a un taux d'erreur très important sur un test de 1024 essais. Certains états de la base ont 5% de chances de plus de ressortir par rapport à la théorie.



5 Efficacité de l'ordinateur quantique

Soit n le nombre de qubits/bits du système. Le transformée de Fourier discrète classique a besoin de $\mathcal{O}(n2^n)$ portes classiques pour être calculée. On se rend compte qu'avec le circuit proposé, on a besoin de $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ portes quantiques donc $\mathcal{O}(n^2)$. Le circuit le plus optimisé de nos jours proposent même un nombre de portes en $\mathcal{O}(n \log n)$.