

RAPPORT D'ANALYSE
-CyTech Pau-

Bureau d'étude:
Le dipôle
électrostatique

Projet réalisé par la "Team T.A.B"

Théo DE MORAIS,
Ayman EL KILI,
Baptiste PLAUT-AUBRY,
en Pré-Ing2 Groupe 1 à CyTech

Projet encadré par

Lucie DESPLAT
Romain DUJOL

-----Nous Contacter-----

plautaubry@cy-tech.fr
elkiliayma@cy-tech.fr
demoraisth@cy-tech.fr

Sommaire

I-Analyse Partie Physique

II-Analyse Partie Mathématiques

III-Références

I-Analyse Partie Physique

Le dipôle électrique est un système fondamental en physique qui joue un rôle essentiel dans de nombreux phénomènes électriques. Dans ce rapport d'analyse, seront établis les résultats liés au comportement du dipôle électrique dans des modèles mathématiques et des simulations numériques. L'objectif est de comprendre les propriétés physiques du dipôle électrique et d'évaluer les différences entre approximations utilisées dans les modèles théoriques et les résultats numériques.

Rappels des résultats obtenus en partie modélisation

Système étudié : Nous considérons un dipôle électrique composé de deux charges de signes opposés, séparées par une distance d . Les caractéristiques du système, telles que la magnitude des charges et la distance entre elles, sont précisées.

Approximation dipolaire : L'approximation dipolaire suppose que la distance entre les charges est petite par rapport à la distance à laquelle sont étudiés le champ électrique et le potentiel. Cela permet de simplifier les calculs en considérant le dipôle comme un point situé au milieu de la distance entre les charges.

Expressions du champ électrique et du potentiel : Les expressions du champ électrique (E) et du potentiel (V) pour un dipôle électrique, en tenant compte de l'approximation dipolaire sont :

$$V = \frac{qdcos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E_r = \frac{qdcos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad E_\theta = \frac{qdsin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Ces expressions ont été établies dans la partie modélisation précédente.

Tracés des équipotentiels et des lignes de champ : Les expressions du champ électrique (E) et du potentiel (V) pour un dipôle électrique, en tenant compte de l'approximation dipolaire établie précédemment sont :

$$r = ksin(\theta)^2 \quad (\text{Equation des LDC})$$

$$r = \sqrt{\frac{qd|cos\theta|}{4\pi\epsilon_0 V_0}} \quad (\text{Equation des équipotentiels})$$

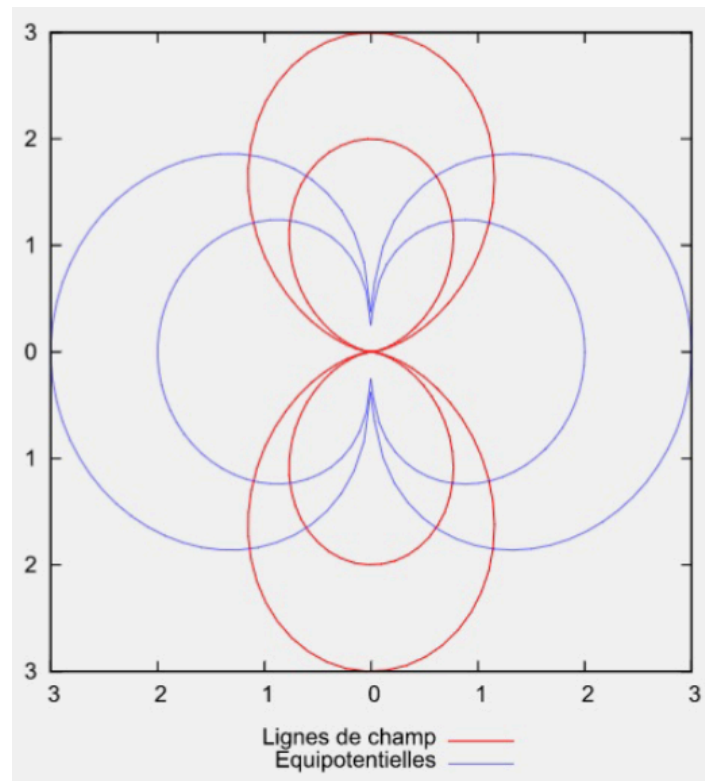


Figure 1 - Lignes de champ et équipotentiellles d'un dipôle électrique horizontal

Après avoir présenté les résultats obtenus dans la partie modélisation, nous nous tournons maintenant vers l'analyse des résultats des simulations numériques.

Alors que la modélisation nous a permis d'obtenir des expressions mathématiques et des approximations du comportement du dipôle électrique, les simulations numériques nous offrent une approche plus réaliste en prenant en compte la distribution réelle des charges sans utiliser l'approximation dipolaire.

En comparant ces deux approches, nous pourrions mieux comprendre les différences des 2 modèles dans la représentation du comportement physique du dipôle électrique.

Etude et comparaison des résultats avec les simulations numériques

Dans cette partie, nous examinerons les résultats des simulations numériques en comparaison avec les simulations physiques réalisées avec l'approximation dipolaire.

On étudiera le cas classique avec 2 charges ponctuelles opposées placées à égale distance du centre.

Cette comparaison nous permet de déterminer les différences entre les deux approches et de comprendre les effets négligés par l'approximation dipolaire.

Nous pouvons ainsi évaluer l'importance de ces effets dans la modélisation et interpréter leurs conséquences physiques.

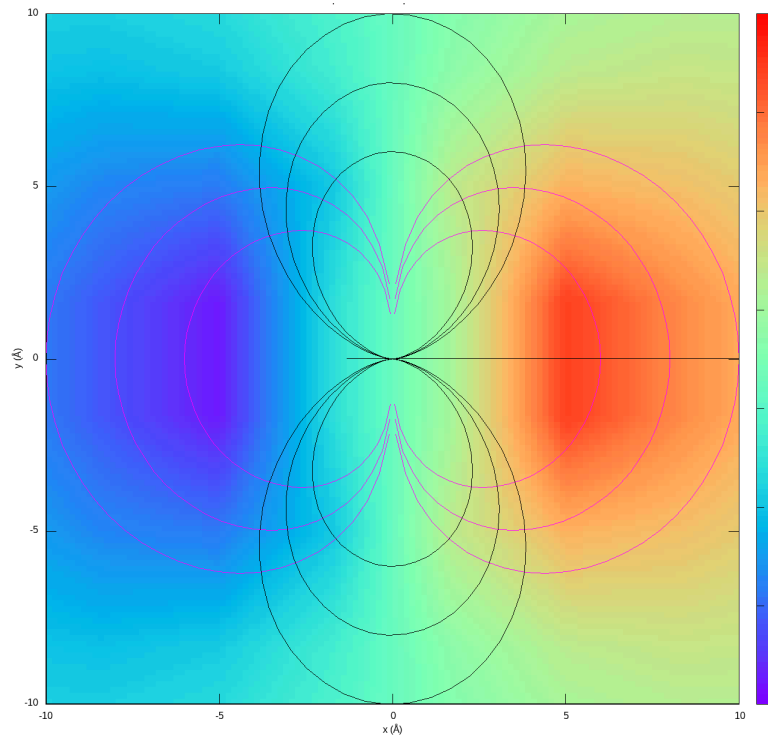


Figure 2 - Lignes de champ et équipotentiels d'un dipôle électrique avec carte de potentiel électrique (Numérique et Approximation dipolaire)

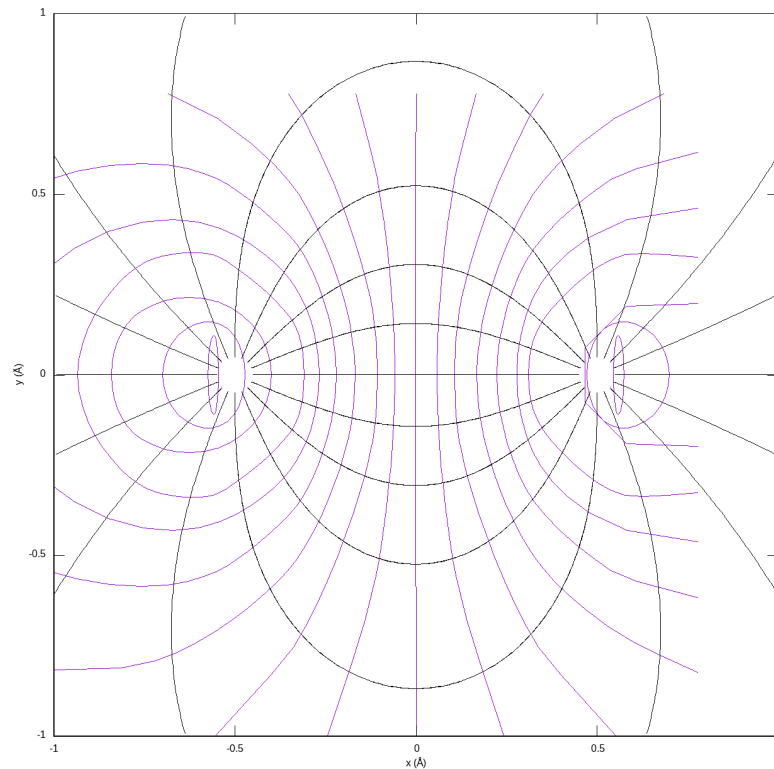


Figure 3 - Lignes de champ et équipotentiels d'un dipôle électrique (sans approximation dipolaire dans le cas général)

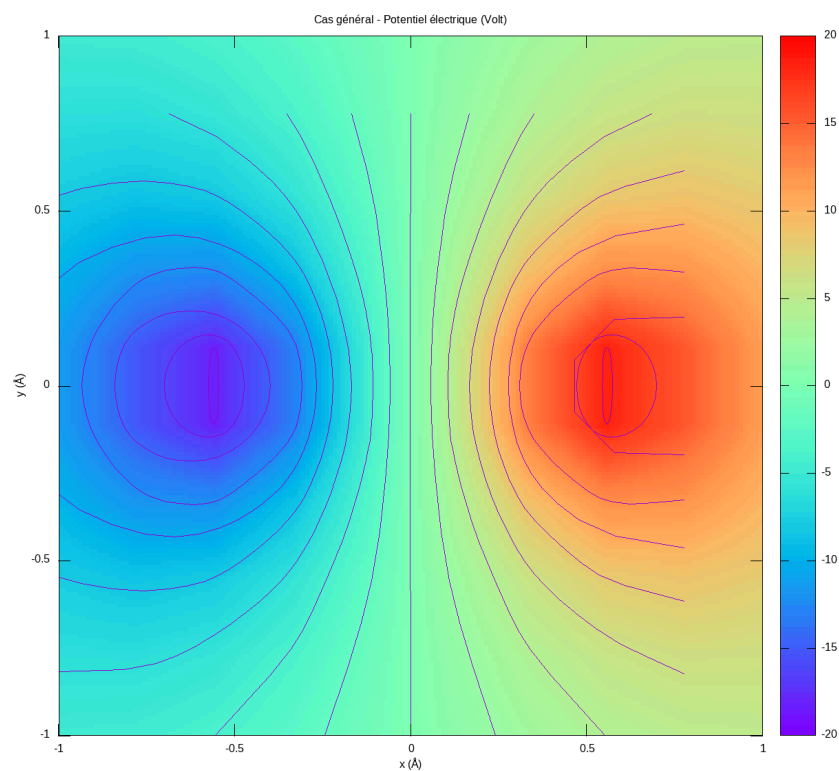


Figure 4 - Potentiel électrique d'un dipôle électrique avec carte de potentiel électrique (sans approximation dipolaire dans le cas général)

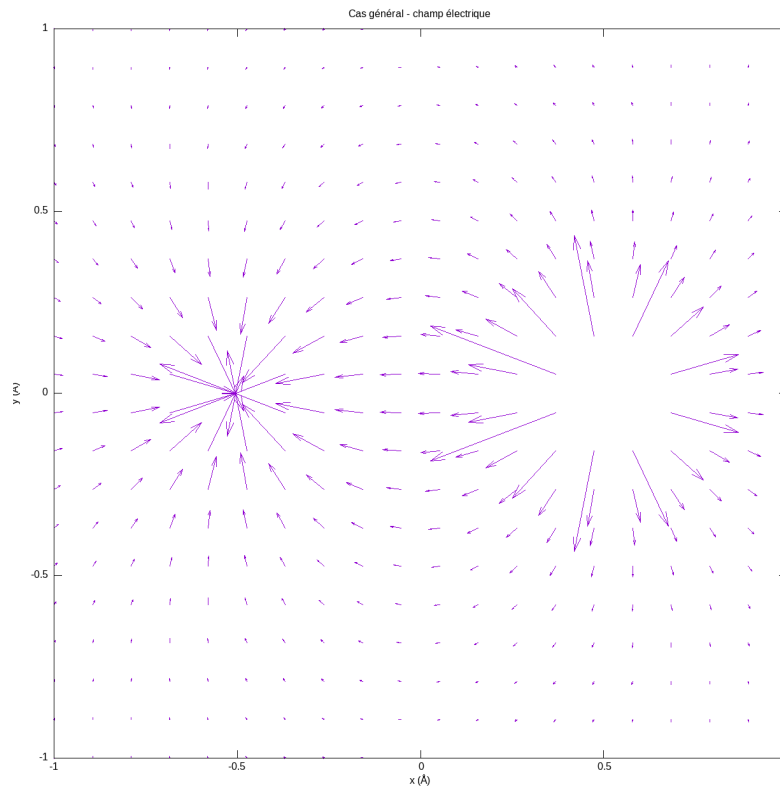


Figure 5 - Champ électrique d'un dipôle (sans approximation dipolaire dans le cas général)

Dans le cas de l'approximation dipolaire ([Figure 1 & 2](#)), les graphes des LDC et des équipotentiels sont simplifiés et symétriques par rapport à l'axe reliant les charges du dipôle. Les LDC et équipotentiels sont alors des courbes qui se propagent depuis le dipôle. Cette symétrie est le résultat de l'approximation qui considère le dipôle comme un point situé au milieu de la distance entre les charges.

En revanche, dans le cas général sans l'utilisation de l'approximation dipolaire ([Figure 3 & 4](#)), les graphiques des LDC et des équipotentiels deviennent plus complexes et dépendent de la distribution réelle des charges dans le dipôle. Intuitivement, on distingue sur ce graphique un effet tunnel plus difficile à analyser. L'effet tunnel semble se produire en raison des forces électriques attractives et répulsives entre les charges du dipôle, ce qui donne ces différentes courbures.

Lorsque l'on compare les cartes de potentiel électrique obtenues à partir de l'approximation dipolaire ([Figure 2](#)) et du cas général numérique ([Figure 4](#)), on observe des détails nous aidant à comprendre les différences entre les 2 modèles.

Dans le cas de l'approximation dipolaire, une distance plus grande a été choisie entre les charges pour simplifier les calculs, mais cela n'empêche pas la carte d'être plus étalée et moins concentrée sur les points des charges par rapport au cas général.

Dans le cas général numérique, la carte de chaleur se concentre davantage autour des charges elles-mêmes. (Graphiquement démontré par la [Figure 5](#)) Cela produit des zones de plus forte concentration autour des charges positives et négatives. On obtient donc une carte de chaleur plus intense et plus concentrée sur les points de charge.

En conclusion, l'approximation dipolaire, bien qu'utile pour simplifier les calculs et obtenir des résultats analytiques, ne fournit pas la meilleure précision. Les simulations numériques, quant à elles, fournissent une représentation plus réaliste et détaillée du comportement du dipôle électrique.

Remarque : On notera que l'unité de distance utilisée ici est l'Ångström : $1\text{\AA} = 0.1\text{ nanomètre}$.

Position d'équilibre d'un système de 4 charges formant un carré

```
* Charge en (-5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur +1.000000e+00
* Charge en (+5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur +1.000000e+00
* Charge en (+0.000000e+00, -5.000000e-01) de valeur -1.000000e+00
* Charge en (+0.000000e+00, +5.000000e-01) de valeur -1.000000e+00
4 charges détectées
Recherche d'un point d'équilibre... (sans jacobienne)
** OK. x = 0.0000000000000000e+00, y = 0.0000000000000000e+00
```

Figure 6 - Position d'équilibre d'un système de 4 charges formant un carré, distance a fixée à 1\AA :

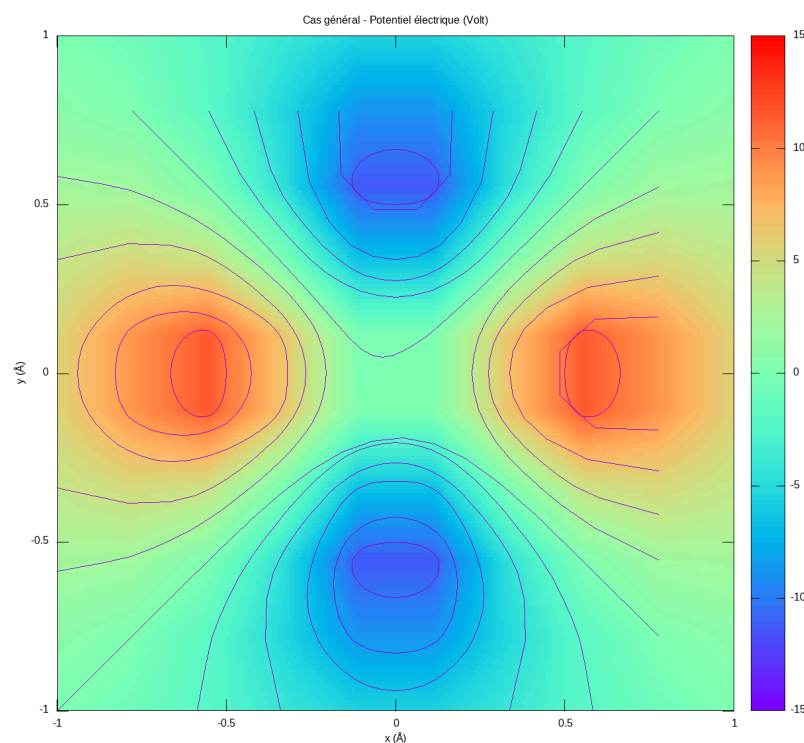


Figure 7 - Potentiel électrique d'un dipôle électrique avec carte de potentiel électrique pour 4 charges alternées (sans approximation dipolaire dans le cas général)

Lors de l'étude numérique de la position d'équilibre d'un système de 4 charges, on constate que la position d'équilibre se situe en $(x = 0, y = 0)$ (Figure 6). Ce résultat est instinctivement logique lorsqu'on le compare à celui obtenu pour un système de 2 charges opposées, où la position d'équilibre est également en $(0, 0)$.

En comparant avec le cas plus simple de 2 charges opposées, où la position d'équilibre se trouve également en $(0, 0)$, on peut remarquer plusieurs similitudes, notamment sur la carte de potentiel électrique (Figure 7).

Dans les deux cas, les forces électrostatiques s'annulent lorsque les charges sont placées de manière symétrique par rapport à ce point. Ainsi, le résultat obtenu pour le système de 4 charges formant un carré est cohérent avec nos attentes intuitives basées sur nos observations précédentes.

En conclusion, la comparaison entre l'approximation dipolaire et la solution générale numérique, a révélé des différences significatives dans la représentation des champs électriques et des potentiels. L'approximation dipolaire aura permis, dans un premier temps, de simplifier les calculs et de donner une idée d'ensemble de l'étude, mais ne capture pas toutes les nuances des interactions électrostatiques.

La solution générale numérique, en prenant en compte la distribution réelle des charges, produit des résultats probants, avec des graphiques plus précis et réalistes.

Les 2 approches nous auront permis de mieux comprendre et d'obtenir une vision complète du phénomène étudié.

II-Analyse Partie Mathématiques

Approximation dipolaire

- Etude du domaine de validité de l'approximation dipolaire

Comparaison de l'expression du champ/potentiel électrique obtenue par approximation dipolaire avec celle calculée de manière exacte

L'approximation dipolaire est une méthode utilisée pour estimer le champ/potentiel électrique créé par un dipôle électrique. Elle suppose que la distance entre le point d'observation et le dipôle est grande par rapport à la taille du dipôle lui-même.

Dans cette approximation l'expression du champ électrique(E) est : $E_r = \frac{qdcos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ $E_\theta = \frac{qdsin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$,

et celle du potentiel électrique(V) est : $V = \frac{qdcos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Le calcul exact du champ/potentiel électrique créé par un dipôle nous permet d'obtenir une solution plus précise et d'évaluer le champ/potentiel électrique à toutes les distances, sans les limitations de l'approximation dipolaire, tout cela en prenant compte la distribution de charges du dipôle, ainsi que les interactions avec les 'autres charges, ce qui permet de calculer le champ/potentiel électrique avec une plus grande précision, quelles que soient la distance et la position du point d'observation.

Dans le cas du calcul exact de l'expression du champ électrique (E) est :

$$\frac{(1.439E1 * q)}{(\sqrt{((x_x - q_x)^2 + (y_x - q_x)^2}))^3}$$

Et celle du potentiel électrique(V) est :

$$\frac{(1.439E1 * q)}{\sqrt{((x_x - q_x)^2 + (y_x - q_x)^2)}}$$

Cependant en comparant les résultats obtenus avec le calcul exact et ceux obtenus avec l'approximation dipolaire, on peut observer les effets négligés par l'approximation dipolaire, tels que la répartition de charges non uniforme ou les interactions avec d'autres charges, seront pris en compte dans le calcul exact.

Donc finalement le calcul exact du champ/potentiel électrique permet d'obtenir une solution plus précise et de prendre en compte tous les aspects électriques du dipôle. Sauf que par rapport à l'approximation dipolaire, il offre une meilleure approximation dans toutes les conditions, en particulier à des petites distances où l'approximation dipolaire peut sous-estimer l'intensité du champ/potentiel électrique.

Identification de la zone de validité

Pour savoir la zone où la première expression, dans le cas de l'approximation dipolaire, est une bonne approximation de la seconde, calculée de manière exacte, il est important de considérer la distance entre le point d'observation et le dipôle.

Dans le cas de l'approximation dipolaire, l'expression du champ/potentiel électrique est valable lorsque la distance entre le point d'observation et le dipôle est grande par rapport à la taille du dipôle lui-même. Cela signifie que la première expression sera une bonne approximation de la seconde lorsque r est suffisamment grande.

Normalement, la zone où l'approximation dipolaire est considérée comme une bonne approximation dépend de la nature spécifique du dipôle et de la précision nécessaire. Généralement, on peut dire que plus la distance entre le point d'observation et le dipôle est grande, plus l'approximation dipolaire sera plus précise.

Cependant, vu que la distance entre les charges diminue et se rapproche de la taille du dipôle, les effets négligés par l'approximation dipolaire deviennent plus importants. Dans le cas des distances courtes, l'approximation dipolaire devient moins précise et peut sous-estimer ou surestimer le champ/potentiel électrique.

Il est important d'évaluer les dimensions du dipôle, ainsi que la distance entre le point d'observation et le dipôle, afin de déterminer la zone où l'approximation dipolaire est une bonne approximation de l'expression exacte.

Finalement, l'approximation dipolaire est une bonne approximation de l'expression exacte lorsque la distance entre le point d'observation et le dipôle est grande par rapport au dipôle. La zone du plan où l'approximation dipolaire est précise dépend des dimensions et de la configuration du dipôle.

Recherche d'équilibre électrique

- Cas du dipôle standard

Configuration 1 - Attendu : pas de charge pour $-q$ $+q$

```
plautaubry@pcel10503:~/Téléchargements/electrostatique$ ./electrostatique -general 2_opposees.txt
>> Lecture du fichier 2_opposees.txt...
* Charge en (-5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur -1.000000e+00
* Charge en (+5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur +1.000000e+00
2 charges détectées
Recherche d'un point d'équilibre... (sans jacobienne)
** Échec. Erreur GSL : iteration is not making progress towards solution
```

=> Erreur : Il n'y a pas de position d'équilibre, ce qui est cohérent avec les résultats de la modélisation. En effet, pour deux charges opposées $+q$ et $-q$, nous n'avons pas trouvé de position d'équilibre puisque, dans ce cas, les forces ne se compensent pas mutuellement. De plus, les charges tendent soit à se rapprocher indéfiniment, soit à se repousser en fonction des autres forces présentes que celle électrostatique.

Quand l'on utilise la jacobienne, le programme trouve bien un point d'équilibre. Cependant ce point d'équilibre est tellement éloigné qu'il n'a aucun sens physique : il n'y a donc pas de point d'équilibre.

- Autre cas

Configuration 2 - Attendu : équilibre pour $+q +q$

```
plautaubry@pcel10503:~/Téléchargements/electrostatique$ ./electrostatique -general 2_egales.txt
>> Lecture du fichier 2_egales.txt...
* Charge en (-5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur +1.000000e+00
* Charge en (+5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur +1.000000e+00
2 charges détectées
Recherche d'un point d'équilibre... (sans jacobienne)
** OK. x = 0.0000000000000000e+00, y = 0.0000000000000000e+00
```

=> Il y a une position d'équilibre en coordonnée (0,0) => Raccord avec les résultats précédents. En effet, puisque les charges sont de même signe, en les plaçant à une certaine distance l'une de l'autre, il existe une position d'équilibre stable où les forces électrostatiques sont équilibrées par d'autres forces, comme, par exemple, la force gravitationnelle.

Configuration 3 - 4 charges en carré

```
demoraisth@pcel10502:~/prepa2/BE/electrostatiques$ ./electrostatique -general 4_alternees.txt
>> Lecture du fichier 4_alternees.txt...
* Charge en (-5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur +1.000000e+00
* Charge en (+5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur +1.000000e+00
* Charge en (+0.000000e+00, -5.000000e-01) de valeur -1.000000e+00
* Charge en (+0.000000e+00, +5.000000e-01) de valeur -1.000000e+00
4 charges détectées
Recherche d'un point d'équilibre... (sans jacobienne)
** OK. x = 0.0000000000000000e+00, y = 0.0000000000000000e+00
```

=> Le résultat donnant un point d'équilibre en (0,0) semble logique. En effet, chaque charge est soumise à une force électrique attractive ou répulsive due aux autres charges (les charges de même signe se repoussent tandis que les charges de signes opposés s'attirent). Lorsque les charges sont placées aux coordonnées (0,0), elles sont alignées de manière symétrique, avec des charges de signes opposés se faisant face les unes aux autres. Cette disposition symétrique crée une situation d'équilibre où les forces électriques exercées sur chaque charge se compensent mutuellement. Si l'on déplace une charge de cette configuration équilibrée, la symétrie est rompue, et les forces électriques ne se compensent plus de manière égale. Cela entraîne un déséquilibre et les charges vont être soumises à une force nette qui les ramènera vers la position d'équilibre initiale, et plus précisément les coordonnées (0,0).

Configuration 4 - 2 charges quelconques

1) Exemple 1 de 2 charges quelconques

```
theo@ThéoPC:~/electrostatique$ ./electrostatique -general 2_quelconques.txt
>> Lecture du fichier 2_quelconques.txt...
* Charge en (-5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur -3.000000e+00
* Charge en (+5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur +2.000000e+00
2 charges détectées
Recherche d'un point d'équilibre... (sans jacobienne)
** OK. x = 4.949489742783176993e+00, y = 0.0000000000000000e+00
```

La position d'équilibre en $(x, y) = (4.949489742783176993, 0)$ indique que les charges sont placées de manière à ce que les forces électriques exercées sur chaque charge se compensent mutuellement, créant ainsi un équilibre stable.

2) Exemple 2 de 2 charges quelconques

```
theo@ThéoPC:~/electrostatique$ ./electrostatique -general 2_quelconques.txt
>> Lecture du fichier 2_quelconques.txt...
* Charge en (-5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur +3.000000e+00
* Charge en (+5.000000e-01, +0.000000e+00) de valeur +2.000000e+00
2 charges détectées
Recherche d'un point d'équilibre... (sans jacobienne)
** OK. x = 5.051025721682193825e-02, y = 0.0000000000000000e+00
```

La position d'équilibre en $(x, y) = (5.051025721682193825e-02, 0)$ indique que les charges sont placées de manière à ce que les forces électriques exercées sur chaque charge se compensent mutuellement, créant ainsi un équilibre stable.

- Approximation dipolaire et autres

Comparaison des performances obtenues selon que la jacobienne est fournie ou non

La jacobienne est une matrice des dérivées partielles, elle est souvent utilisée dans les méthodes d'optimisation et de résolution de systèmes d'équations.

Lorsque cette dernière est fournie, cela permet généralement d'accélérer les calculs. En effet, la jacobienne fournit des informations de la fonction à résoudre, ce qui est utilisé pour rendre les calculs plus efficaces. Les méthodes qui utilisent la jacobienne peuvent réduire le temps de calcul.

D'un autre côté, si la jacobienne n'est pas fournie, cela peut entraîner une augmentation du temps de calcul. L'approximation de la jacobienne nécessite souvent des calculs supplémentaires de la fonction ou du système, ce qui peut augmenter le temps de calcul.

Finalement, si la jacobienne est fournie, elle peut améliorer les performances des algorithmes en fournissant des informations supplémentaires sur le système. En revanche, si cette dernière n'est pas fournie et doit être approximée numériquement, cela peut entraîner une augmentation du temps de calcul. Il est donc préférable de fournir la jacobienne si c'est possible, afin d'optimiser les performances de la résolution numérique.

Jacobienne fournie :

```
Temps d'execution du programme C : 0.000448 secondes
```

Jacobienne non fournie :

```
Temps d'execution du programme C : 0.000743 secondes
```

Nous remarquons qu'en utilisant la jacobienne, le résultat est obtenu plus rapidement. En effet, lorsque nous n'utilisons pas de jacobienne, le temps d'exécution du programme est de 0.000748 secondes. Ce qui est moindre lors de l'utilisation de cette dernière avec un temps d'exécution plus rapide de l'ordre de 0.000448 secondes.

Il est cependant important de ne pas prendre ces résultats complètement au sérieux. En effet, avec un écart de temps si faible, des facteurs à première vue anodins comme la charge du système ou juste un ralentissement du pc peuvent fortement influencer ces résultats et les faire varier.

Analyse de complexité (en temps et/ou nombre d'itérations) en fonction des paramètres de précision

La précision des paramètres peut influencer la complexité sous deux formes comme suit :

1) Complexité temporelle

Précision élevée : Une haute précision des paramètres peut augmenter le temps de calcul. Des calculs plus précis nécessitent davantage d'opérations mathématiques, ce qui entraîne une complexité temporelle élevée.

Algorithme utilisé : La complexité temporelle peut également dépendre de l'algorithme utilisé pour effectuer le calcul. Certains algorithmes peuvent avoir une dépendance de la complexité temporelle en fonction de la précision des paramètres.

2) Complexité en termes d'itérations

Précision élevée : Pour atteindre une précision plus élevée, il peut être nécessaire d'effectuer plus d'itérations dans les boucles de l'algorithme jusqu'à ce que la convergence souhaitée soit atteinte. Par conséquent, le nombre d'itérations peut augmenter avec une précision plus élevée.

Convergence lente : Plus la précision demandée devient plus élevée, la convergence des algorithmes peut ralentir, nécessitant ainsi plus d'itérations pour atteindre la précision souhaitée. Ce qui peut entraîner une complexité en termes d'itérations plus élevée.

Finalement, l'impact exact de la précision des paramètres sur la complexité dépendra du calcul spécifique et de l'algorithme utilisé.

En conclusion, l'approximation dipolaire est une méthode utile pour estimer le champ/potentiel électrique créé par un dipôle électrique lorsque la distance entre le point d'observation et le dipôle est grande par rapport à la taille du dipôle. Cependant, cette approximation néglige des aspects importants tels que la répartition de charges non uniforme et les interactions avec d'autres charges, ce qui peut conduire à une sous-estimation de l'intensité du champ/potentiel électrique, en particulier à de petites distances.

D'autre part, le calcul exact du champ/potentiel électrique offre une solution plus précise et prend en compte tous les aspects électriques du dipôle, tandis que l'approximation dipolaire est une bonne approximation lorsque la distance entre le point d'observation et le dipôle est grande par rapport à la taille du dipôle. De plus, l'utilisation de la jacobienne peut améliorer les performances, mais la précision des paramètres peut affecter la complexité en termes de temps et/ou en nombre d'itérations.

III-Références

Desplat Lucie *Electromagnétisme Pre-ING2 S1* - CY Tech 2022-2023 ;

Desplat Lucie, Dujol Romain *Bureau d'étude Pre-ING2 S2* - CY Tech 2022-2023 ;

Romain Dujol, *électrostatique, Correction de la partie Résolution* - CY Tech 2022-2023