



UNIVERSITÉ LYON 1 CLAUDE BERNARD
POLYTECH LYON
ANNÉE 2024/2025

TP Éléments finis unidimensionnels

Auteurs:

Baptiste RIDOLFI

Encadrant:

Séverine MILLET

Contents

1	Introduction	2
1.1	Données du problème	2
1.2	Mise en équations	3
2	Éléments finis unidimensionnels linéaires	5
2.1	Résidu et formulation faible	5
2.2	Résolution en P1 et formulation discrète du problème.	6
2.3	Forme matricielle du problème	8
3	Programmation Python et analyse des résultats	9
3.1	Cas de l'ailette en situation adiabatique	9
3.2	Cas de l'ailette en situation non-adiabatique	10
4	Éléments finis unidimensionnels quadratiques	12
4.1	Analyse des résultats	14
4.1.1	Cas adiabatique	14
4.1.2	Cas non-adiabatique	15
4.2	Erreur relative	16
5	Éléments finis bidimensionnels linéaires	17
5.1	Formulation faible et mise en équation	19
5.2	Implémentation dans Python	22
5.2.1	Cas adiabatique	22
5.2.2	Cas non-adiabatique	24
6	Maillage quadrangulaire, éléments finis Q^1	26
7	Conclusion	29

1 Introduction

Au cours de ce travail pratique, nous allons chercher à obtenir la répartition de la température dans un barreau métallique, un type d'ailette utilisé pour le refroidissement d'un processeur.

Pour ce faire, on se placera dans un régime stationnaire, où l'on refroidit l'ailette par convection avec le milieu ambiant. De plus, on utilisera la méthode des éléments finis linéaires dans deux cas, le premier est un cas avec une paroi isolante (adiabatique donc le flux thermique $\phi = 0$) puis un deuxième cas sans paroi isolante. On pourra déterminer l'exactitude de la MEF en la comparant à la la solution exacte puisqu'on pourra la calculer.

Ci-dessous, on peut retrouver la géométrie du problème sur laquelle on s'appuiera pour la suite du TP.

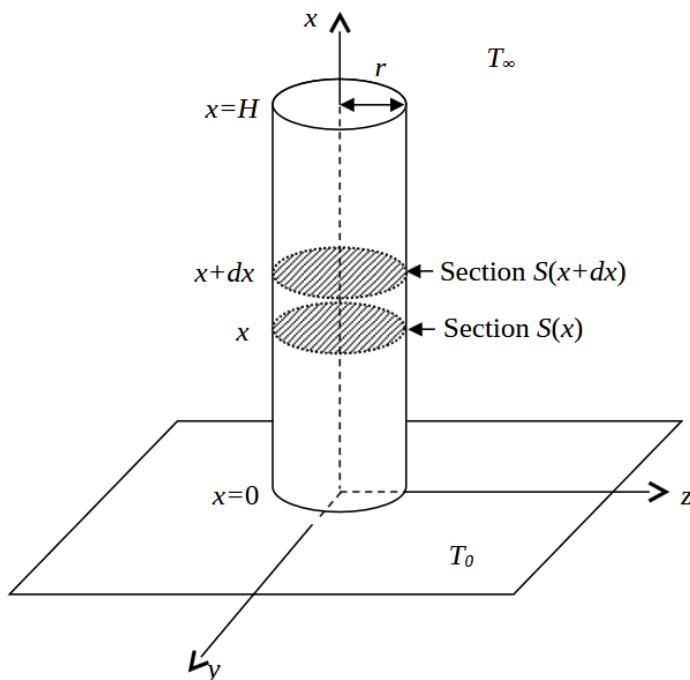


Figure 1: Schéma montrant les caractéristiques du barreau métallique étudié dans ce TP

1.1 Données du problème

Pour l'ensemble du problème, on mentionne les caractéristiques suivantes :

1. $H = 5 \text{ mm}$: il s'agit de la hauteur du barreau.
2. $r = 0.5 \text{ mm}$: il s'agit du rayon du barreau, visible sur la Figure 1.
3. $T_0 = 100^\circ$: la température du socle sur lequel repose le barreau (en $x = 0$). Il s'agit d'une condition aux limites de Dirichlet dans le cadre de ce TP (qui pourra donc être utilisée ou non selon la résolution souhaitée).

4. $h = 100 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$: le coefficient de convection entre l'ailette et le milieu qui l'entoure.
5. $T_\infty = 20^\circ$: la température du milieu extérieur.
6. $\lambda = 40 \text{ W/m} \cdot \text{K}$: le coefficient de conductivité thermique du barreau.
7. $A = \pi r^2$: la surface horizontale d'une section du barreau.
8. $P = 2\pi r H$: la surface latérale d'une section du barreau (entre x et $x + dx$).

1.2 Mise en équations

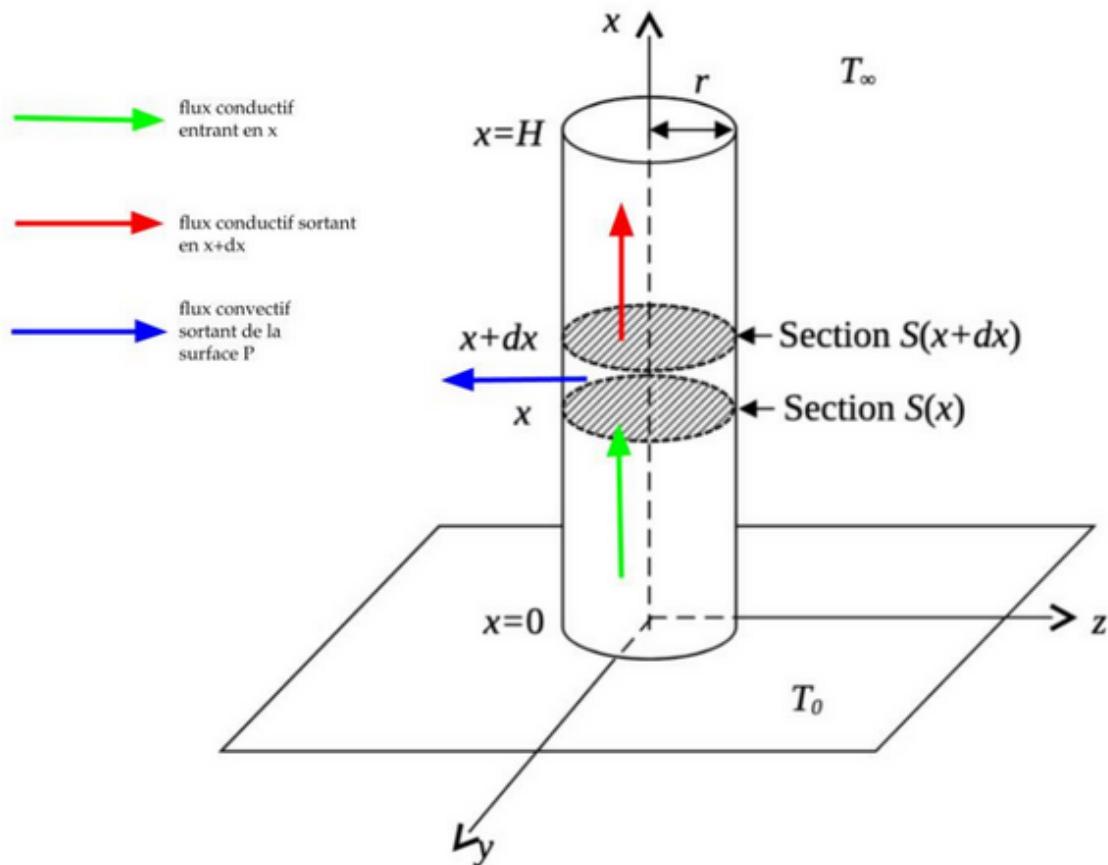


Figure 2: Illustration des différents flux de ce problème

Sur la Figure 2 juste au dessus on peut voir qu'il y a 3 flux convectifs et conductifs présent agissant sur l'ailette. On peut donc mettre en équation le problème :

$$\phi_{cond,x} + \phi_{cond,x+dx} + \phi_{conv} = 0 \quad (1)$$

On peut désormais à partir des lois de Newton et de Fourier, déterminer l'équation à résoudre :

- Loi de Fourier pour la conduction thermique :

$$q_{conduction} = h * S * (T - T_{inf}) \quad (2)$$

- Loi de Newton pour la convection thermique :

$$q_{convection} = -\lambda * S * \frac{dT}{dx} \quad (3)$$

- Pour $q_{cond,x+dx}$, on peut utiliser la dérivée :

$$\frac{dq_{cond,x}}{dx} = \frac{q_{cond,x+dx} - q_{cond,x}}{dx} \iff q_{cond,x+dx} = \frac{q_{cond,x}}{dx} * dx + q_{cond,x} \quad (4)$$

En remplaçant dans l'équation (1), les équations (2), (3) et (4), on obtient la relation d'équilibre thermique suivante :

$$-\lambda * \frac{\partial T(x)}{\partial x} * S - h * (T - T_{\infty}) * P + \lambda * \frac{\partial T(x+dx)}{\partial x} * S = 0 \quad (5)$$

Nous pouvons alors simplifier l'équation (5) :

$$\begin{aligned} & -\lambda * \frac{\partial T(x)}{\partial x} * \pi * r^2 - h * (T - T_{\infty}) * 2 * \pi * r * dx + \lambda * \frac{\partial T(x+dx)}{\partial x} * \pi * r^2 = 0 \\ \Rightarrow & \lambda * \pi * r^2 * \left(\frac{\partial T(x+dx)}{\partial x} - \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right) - h * (T - T_{\infty}) * 2 * \pi * r * dx = 0 \end{aligned}$$

On divise alors toute l'équation précédente par $\pi * r * dx$, ce qui nous permet d'obtenir :

$$\lambda * r * \left(\frac{\frac{\partial T(x+dx)}{\partial x} - \frac{\partial T(x)}{\partial x}}{dx} \right) - 2 * h * (T - T_{\infty}) = 0$$

Or, par définition de la dérivée, nous savons que :

$$\frac{\frac{\partial T(x+dx)}{\partial x} - \frac{\partial T(x)}{\partial x}}{dx} = \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2}$$

Ce qui permet d'écrire l'équation différentielle (6) traduisant le problème :

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - m^2 * (T - T_{\infty}) = 0 \quad \text{avec } m = \sqrt{\frac{2h}{\lambda r}} \quad (6)$$

On remarque que cette expression est une EDL du second ordre à coefficient constant. On peut déduire, de l'équation 6, les conditions limites du systèmes :

- Condition de Diriclet :

$$T(x = 0) = T_0 - T_{\infty}$$

- Condition de Newman

$$\frac{dT(L)}{dx} = 0$$

On peut de ce fait, faire une formulation faible, justifiant l'utilisation de la méthode des éléments finis pour obtenir une solution approchée du système.

2 Éléments finis unidimensionnels linéaires

2.1 Résidu et formulation faible

Dans un premier temps, on pourra calculer le résidu $R(U)$ en considérant le problème en une dimension. le résidu désigne l'erreur ou l'écart entre la solution approximée du problème (obtenue à l'aide des éléments finis) et la solution exacte du problème aux équations différentielles.

On sait, par définition, que le résidu est de la forme :

$$R(U) = LU(x) - f(x)$$

On part de l'équation (5), où l'on opère un changement de variable : $U(x) = (T - T_\infty)$. On a alors

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} - m^2 * U(x) = 0$$

On a alors :

$$R(U) = \frac{d^2U(x)}{dx^2} - m^2 * U(x) = 0 \quad (7)$$

Avec,

$$\begin{cases} L = \frac{d^2}{dx^2} \\ f(x) = m^2 * U(x) \end{cases}$$

On a désormais le résidu exact du problème. On introduit alors l'approximation de cette variable que l'on va chercher à en minimiser la norme pour la suite, on la note $\tilde{U}(x)$. Pour minimiser cette quantité, nous devons résoudre l'équation suivante :

$$\|R(\tilde{U})\| = 0 \quad (8)$$

On introduit dès à présent une fonction test $\omega(x)$. Cette fonction va nous permettre de formuler l'EDO en une intégrale afin de discréteriser le problème et le résoudre numériquement sur Python. On écrit :

$$\|R(\tilde{U})\| = \int_0^H R(\tilde{U}) * \omega(x) dx \quad (9)$$

On remplace $R(\tilde{U})$ dans (9), on sépare les termes et on obtient :

$$\int_0^H \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} * \omega(x) dx - m^2 \int_0^H \tilde{U}(x) * \omega(x) dx$$

On se retrouve avec deux intégrales, on effectue une IPP sur la première, on obtient :

$$\left[\frac{\partial \tilde{U}(x)}{\partial x} \cdot \omega(x) \right]_0^H - \int_0^H \frac{\partial \tilde{U}(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega(x)}{\partial x} dx - m^2 \int_0^H \tilde{U}(x) * \omega(x) dx = 0 \quad (10)$$

On s'intéresse dans un premier temps au premier terme de cette équation :

$$\left[\frac{\partial \tilde{U}(x)}{\partial x} \cdot \omega(x) \right]_0^H$$

En $x = H$, la condition de Neumann nous donne

$$\frac{\partial \tilde{U}(x)}{\partial x} = 0$$

en raison de la paroi adiabatique au bout de l'ailette. Donc

$$\left. \frac{\partial \tilde{U}(x)}{\partial x} \right|_{x=H} = 0.$$

De plus, on sait que la fonction test ω , par définition, nous donne en $x = 0$:

$$\omega(0) = 0.$$

Donc on peut écrire que :

$$\left[\frac{\partial \tilde{U}(x)}{\partial x} \cdot \omega(x) \right]_0^H = 0.$$

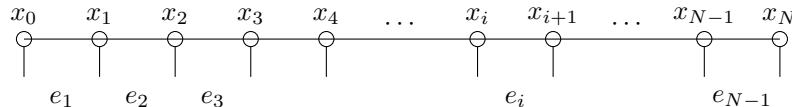
Cette simplification nous permet d'écrire la formulation faible finale :

$$\int_0^H \frac{\partial \tilde{U}(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega(x)}{\partial x} dx + m^2 \int_0^H \tilde{U}(x) \cdot \omega(x) dx = 0 \quad (11)$$

Pour la suite, on cherchera à discréteriser cette équation qui nous permettra d'obtenir une approximation de la solution exacte.

2.2 Résolution en P1 et formulation discrète du problème.

Dans cette partie, on s'intéresse à la discréétisation du problème. En éléments finis linéaires (P1). On peut proposer un maillage de l'intervalle d'étude.



Avec :

- N : Le nombre de noeuds.
- $N - 1$: Le nombre de sous intervalle, ce nombre est caractérisé notamment par une longueur $dx = \frac{H}{N-1}$.
- e_i : L'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ où l'on peut écrire $x_i = (i - 1) * dx$.

Ce maillage nous permet de décomposer l'intégrale (11) en une somme discrète :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + m^2 \cdot \tilde{U}(x) * \omega(x) \right) dx \quad (12)$$

Désormais, nous allons introduire les fonctions de bases $H_i(x)$, qui nous serviront dans la résolution du problème plus tard. Ces fonctions sont définies telles que :

x	x_i	x_{i+1}
$H_1(x)$	1	0
$H_2(x)$	0	1

Ces fonctions de bases sont des polynômes $H_1(x)$ et $H_2(x)$ sont de degré 1. On peut alors les définir comme

$$H_1(x) = A \cdot x + B$$

Où A et B sont deux coefficients que nous pouvons déterminer grâce à la définition de nos fonctions de bases. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} H_1(x_i) &= 1 = A * x_i + B \\ H_1(x_{i+1}) &= 0 = A * x_{i+1} + B \end{aligned}$$

Après résolution de ce système on A et B tel que :

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{\Delta x} \\ B = \frac{x_{i+1}}{\Delta x} \end{cases}$$

On peut désormais écrire l'expression des deux fonctions de bases H_1 et H_2 .

$$H_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x}$$

$$H_2(x) = \frac{x - x_i}{\Delta x}$$

Ces fonctions de bases nous permettent de poser les égalités suivantes sous forme matricielle :

$$\tilde{U}_i(x) = [H_1 \quad H_2] \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

et

$$\frac{d\tilde{U}_i(x)}{dx} = \left[\frac{dH_1}{dx} \quad \frac{dH_2}{dx} \right] \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

On peut alors réinjecter cette écriture matricielle dans notre équation (12). On obtient après avoir effectué le produit matriciel la relation suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\begin{bmatrix} \frac{dH_1}{dx} & \frac{dH_2}{dx} \\ \frac{dH_1}{dx} & \frac{dH_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} + m \cdot \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} \right) dx = 0 \\ \iff & \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\begin{bmatrix} \frac{dH_1^2}{dx^2} & \frac{dH_1 dH_2}{dx^2} \\ \frac{dH_2 dH_1}{dx^2} & \frac{dH_2^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} + m \cdot \begin{bmatrix} H_1^2 & H_1 H_2 \\ H_1 H_2 & H_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} \right) dx = 0 \end{aligned}$$

Cette équation fait apparaître les deux matrices K et M définies comme :

- La matrice de raideur K_i :

$$\begin{bmatrix} \frac{dH_1^2}{dx^2} & \frac{dH_1 dH_2}{dx^2} \\ \frac{dH_2 dH_1}{dx^2} & \frac{dH_2^2}{dx^2} \end{bmatrix}$$

- La matrice de masse M_i :

$$\begin{bmatrix} H_1^2 & H_1 H_2 \\ H_1 H_2 & H_2^2 \end{bmatrix}$$

On peut alors re-écrire, après identification, notre système :

$$\sum_{i=1}^{N-1} (K_i \cdot \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} + M_i \cdot \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix}) \quad (15)$$

En faisant l'intégrale de chaque termes sur $[x_i; x_{i+1}]$ de la matrice K et M, on a finalement :

- $K_i = \frac{H}{dx} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
- $M_i = \frac{m \cdot dx}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2.3 Forme matricielle du problème

On remarque à partir de l'équation (15) qu'en développant la somme on arrivait à une superposition de certains éléments et par la suite ne former qu'une seule matrice globale élémentaire pour un système à N élément. Soit,

$$(K_1 + M_1) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + (K_2 + M_2) \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \cdots + (K_i + M_i) \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} + \cdots + (K_{N-1} + M_{N-1}) \begin{bmatrix} a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix} = 0$$

On remarque que sur 2 termes successifs le terme matriciel a_{i+1} du premier terme ainsi que le a_i du deuxième se superpose. Ainsi, dans la matrice globale, nous allons alors avoir à partir de la 2^e ligne et colonne :

$$(K_i + M_i)_{i+1,i+1} + (K_{i+1} + M_{i+1})_{i,i}$$

Soit en posant Ne=5, on a le système suivant :

$$\left(\frac{1}{dx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{m \cdot dx}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 - T_\infty \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3 Programmation Python et analyse des résultats

Maintenant que la résolution de la solution analytique est faite, on peut alors utiliser la discréétisation et les matrices pour obtenir une solution approchée du système. Pour la suite, nous allons donc faire un programme dans le langage Python en utilisant l'IDE "Spyder". L'objectif étant dans un premier temps de comparer le résultat obtenu par la solution approchée avec la solution exacte (que nous donnerons un peu plus loin) puis dans un second temps nous déterminerons l'erreur en fonction du nombre de pas N_e , afin de déterminer l'impact du nombre d'échantillon sur l'erreur.

Pour l'ensemble des résolutions, on effectuera une décomposition en facteur LU de la matrice globale afin d'accélérer le processus de résolution des matrices.

On cherche à connaître les coefficients a_i . Nous allons donc multiplier les températures trouvées aux noeuds par les fonctions tests afin d'obtenir les solution pour l'ensemble du domaine.

3.1 Cas de l'ailette en situation adiabatique

Dans le cas adiabatique, on place une paroi isolante en $x = H$ avec $h = 100 \text{ W.m}^{-2}.C^{-1}$. La solution exacte du problème s'écrit, après résolution de l'équation différentielle :

$$T_{ex}(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\cosh(m(H-x))}{\cosh(mH)} \quad \text{avec } m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}}$$

On effectue alors le programme et on obtient la courbe suivante :

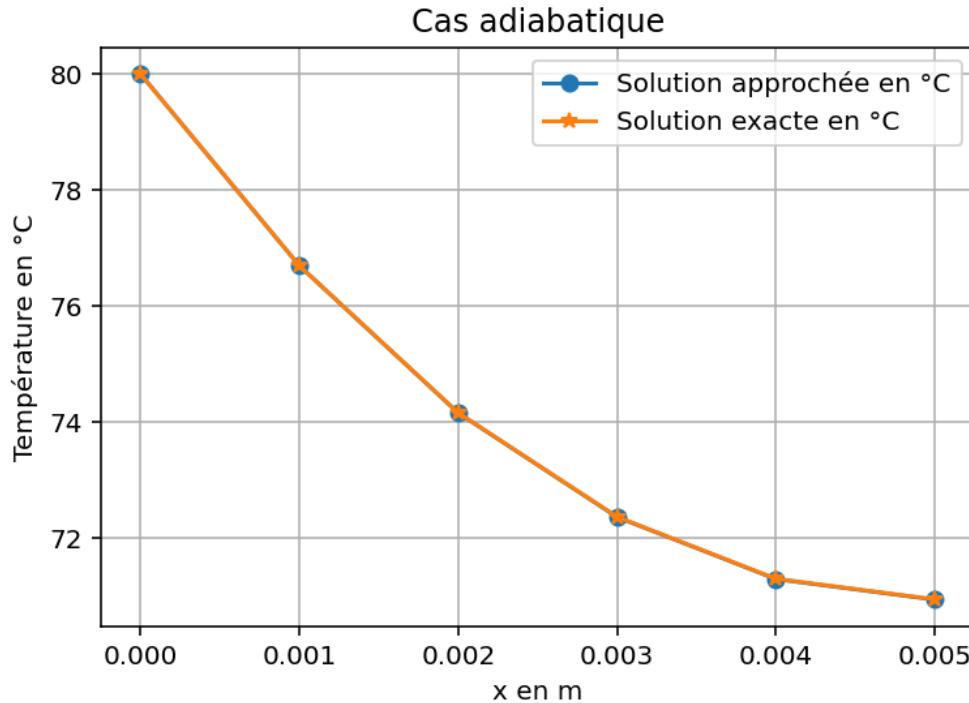


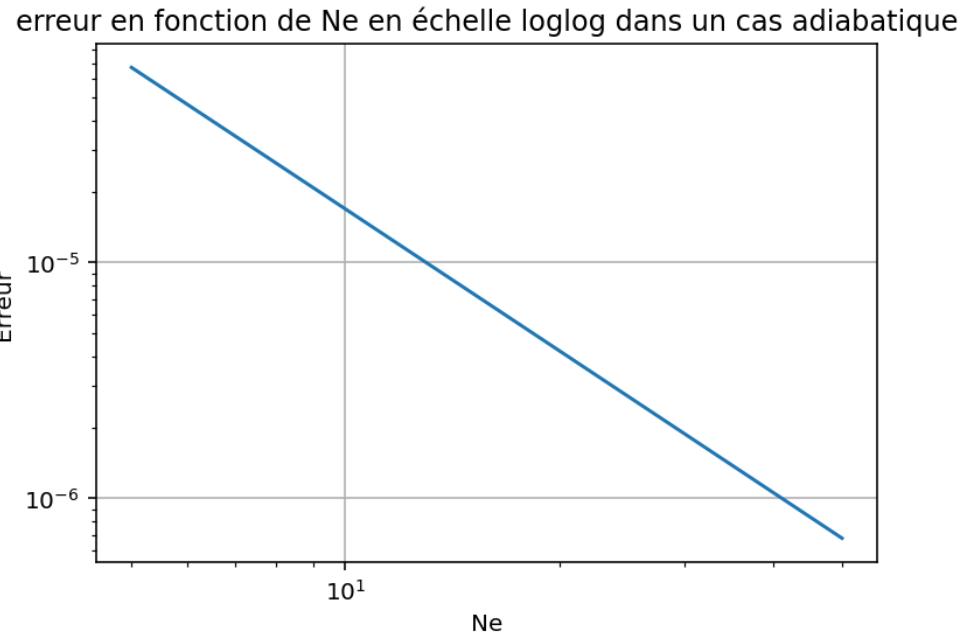
Figure 3: Différentes solutions du cas adiabatique

Tout d'abord, on remarque que les deux solutions exacte et approchée sont quasi-superposée, ce qui montre bien que la MEF est fiable pour résoudre ce genre de problème. Cependant, celle-ci n'est pas entièrement superposée car cela reste une solution approchée, elle comporte une erreur relative au nombre N_e ϵ que l'on tracera en échelle logarithmique.

Pour tracer cette erreur nous allons utiliser la relation suivante :

$$\epsilon = \frac{\|U_{\text{num}}(x) - U_{\text{ex}}(x)\|}{\|U_{\text{ex}}(x)\|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N_e} (U_{\text{num}}(x) - U_{\text{ex}}(x))^2}{\sum_{i=0}^{N_e} (U_{\text{ex}}(x))^2}}$$

On obtient ainsi, en faisant varier le nombre d'éléments Ne :



Tout d'abord, on peut constater que quelque soit le nombre d'éléments Ne, l'ordre de grandeur de l'erreur est inférieur à 10^{-4} ce qui montre l'exactitude de la solution approchée et de la méthode P1 des éléments finis. De plus, on peut constater que plus le nombre d'éléments augmentent, plus l'erreur diminue, augmentant de ce fait la précision de la solution approchée.

3.2 Cas de l'ailette en situation non-adiabatique

On s'intéresse désormais au cas où l'on enlève la paroi adiabatique qui était placé en $x = H$, ceci à pour effet de changer le coefficient d'échange thermique tq $h' = 80 \text{ W.m}^{-2}.C^{-1}$. Ce changement entraîne également une modification des conditions limites, en effet au point $x = H$, nous allons avoir une nouvelle condition de Newman : On part du principe de continuité des flux :

$$\phi_{\text{conv}}(x = H) = \phi_{\text{cond}}(x = H)$$

Ce qui est équivalent à écrire :

$$\lambda * S * \frac{\partial U(x = H)}{\partial x} = -h' * S * U(H)$$

Avec, on le rappelle :

$$U(x) = T(x) - T_\infty$$

Après simplification, on a donc :

$$\frac{\partial U(H)}{\partial x} = -\frac{h'}{\lambda} * U(H)$$

Se traduisant par un changement dans la matrice de masse :

$$\left(\frac{1}{dx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{m \cdot dx}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 + \frac{h'}{\lambda} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 - T_\infty \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, cette nouvelle condition change l'expression de la solution exacte, nous avons désormais :

$$T_{\text{exp}}(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\cosh(m(H-x)) + \frac{h'}{\lambda m} \sinh(m(H-x))}{\cosh(mH) + \frac{h'}{\lambda m} \sinh(mH)}$$

On obtient ainsi, en superposant les deux courbes :

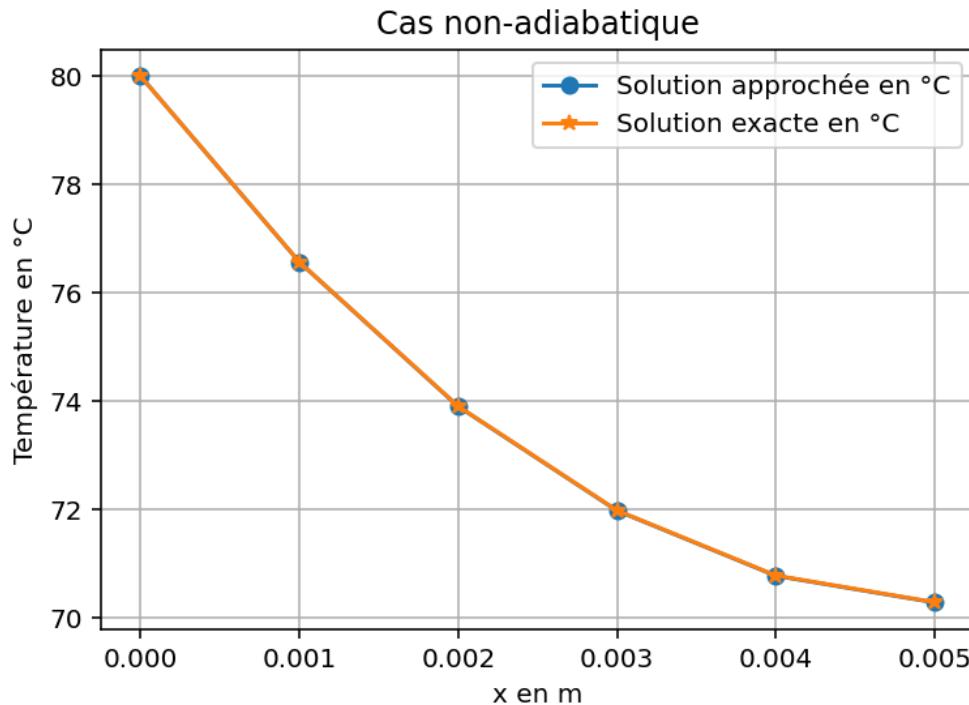
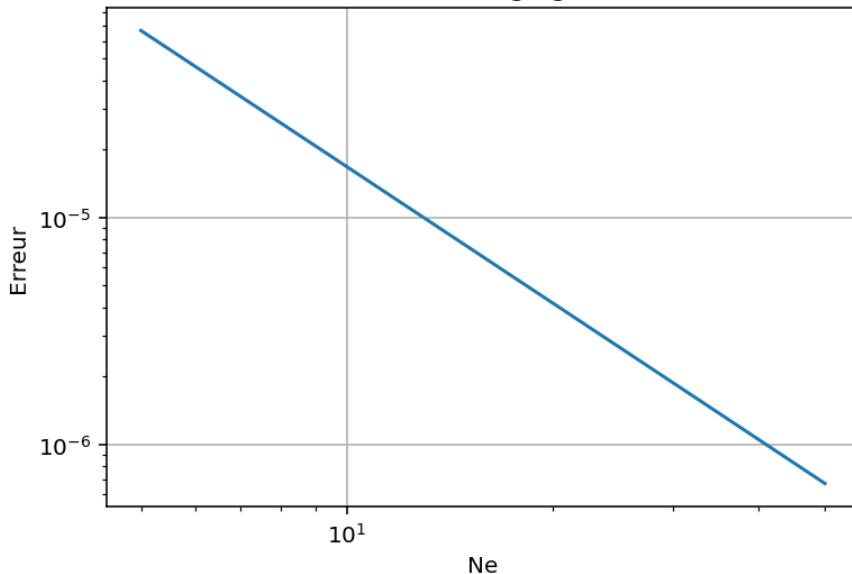


Figure 4: Différentes solutions du cas non-adiabatique

Nous remarquons que le retrait de la paroi isolante n'a aucune incidence sur l'exactitude de la solution approchée, en effet les deux courbes sont, de nouveau, quasi-superposées. D'un point de vu thermique, on peut observer que le retrait de la paroi adiabatique ne change pas l'évolution de la température dans la barre. Cependant, on remarque que le retrait de celle-ci, produit une différence de chaleur avec le cas adiabatique en $x = H$.

Finalement, on trace l'erreur relative.

erreur en fonction de Ne en échelle loglog dans un cas non-adiabatique



On peut déduire de nouveau que l'erreur relative reste inférieure à 10^{-4} et que plus le nombre d'éléments augmentent, plus l'erreur diminue.

4 Éléments finis unidimensionnels quadratiques

Après avoir utilisé la MEF unidimensionnels linéaires 1D, il serait pertinent d'utiliser la MEF quadratiques 1D afin d'obtenir des résultats plus précis. De plus, cette méthode nous permet d'obtenir des résultats plus rapidement du fait d'une convergence plus rapide par itérations.

Ainsi, on reprend les calculs utilisés précédemment. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2U(x)}{dx^2} - m \cdot U(x) = 0 \\ T(x=0) = \text{constant} = T_0 \quad (\text{Condition de Dirichlet}) \\ \frac{dT(L)}{dx} = 0 \quad (\text{Condition de Newman en } x=L) \end{cases}$$

L'expression du résidu et de la formulation faible du système ne vont pas changer. C'est à partir de la discrétisation que nous aurons des changements. Soit,

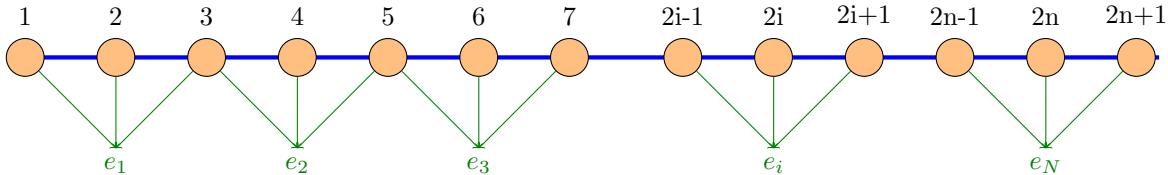
- Expression de la formulation faible :

$$\int_0^H \frac{d\bar{U}}{dx} \frac{dQ}{dx} dx + m \int_0^H \bar{U}(x)Q(x) dx = 0$$

- Expression du résidu :

$$R(U) = \frac{d^2U(x)}{dx^2} - m * U(x) = 0$$

Maintenant, on s'intéresse à discréteriser l'intervalle d'étude $[0; H]$. Soit,



De part ce maillage, on peut donc écrire notre intervalle d'étude comme une union de sous-intervalles :

$$[0; H] = \bigcup_{i=1}^N [x_{2i-1}; x_{2i+1}]$$

On peut donc écrire, l'expression finale notre formulation faible discrète comme :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} \left(\frac{d\bar{U}(x)}{dx} \frac{dQ}{dx} + m * \bar{U}(x) * Q(x) \right) dx = 0 \quad (14)$$

Cette équation étant déterminée, nous devons désormais calculer nos fonctions de base $H_1(x), H_2(x)$ et $H_3(x)$ valable uniquement en P^2

Pour se faire, on sait par définition que ces fonctions sont définies par :

x	x_{2i-1}	x_{2i}	x_{2i+1}
$N_1(x)$	1	0	0
$N_2(x)$	0	1	0
$N_3(x)$	0	0	1

Table 1: Tableau fonction de base en P^2

Puis, on peut aussi la relation suivante :

$$\bar{U}(x) = \sum_{i=1}^N \bar{U}_i(x)$$

Avec,

$$\bar{U}_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 \text{ sur } [x_{2i-1}; x_{2i+1}]$$

0 ailleurs

Afin de déterminer les fonctions de bases $N_1(x), N_2(x)$ et $N_3(x)$, on peut utiliser deux méthodes. Dans un premier temps, en utilisant celle de Lagrange qu'on utilisera pour $N_1(x)$. Puis, dans un second temps, en utilisant les racines respectives des fonctions de bases $N_2(x)$ et $N_3(x)$.

Le développement de ces méthodes est exactement le même que pour la partie précédente en P^1 . De ce fait, après avoir répété les différents calculs, nous obtenons finalement :

$$K_i = \frac{1}{3 \cdot dx} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$M_i = \frac{m \cdot dx}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

On peut procéder à l'assemblage de notre système global, on obtient :

$$(K_1 + M_1) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + (K_2 + M_2) \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} + \dots + (K_i + M_i) \begin{bmatrix} a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} + \dots + (K_N + M_N) \begin{bmatrix} a_{2N-1} \\ a_{2N} \\ a_{2N+1} \end{bmatrix} = 0$$

On remarque ici que, nous avons 1 terme commun : a_{i+1} du terme i se superposent avec a_{i-1} du terme $i+1$. Cela se résulte par une superposition de la matrice $(K_i + M_i)$ avec $(K_{i+1} + M_{i+1})$.

En tenant compte des conditions limites. On a alors le système sous la forme suivante :

$$\frac{1}{3 \cdot dx} \left(\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 16 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 16 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 16 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + \frac{m \cdot dx}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 16 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 16 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 16 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 - T_\infty \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On comprend en voyant la taille de ces matrices, l'intérêt d'utiliser un langage de programmation pour calculer θ .

On s'intéressera dans la prochaine partie à l'analyse des résultats.

4.1 Analyse des résultats

4.1.1 Cas adiabatique

Le cas adiabatique se traduit par la présence d'un isolant sur la paroi inférieure de notre barreau. Après implémentation dans Spyder, nous obtenons les résultats suivants :

θ	Température
θ_0	80
θ_1	78.2508
θ_2	76.6972
θ_3	75.3355
θ_4	74.1621
θ_5	73.1741
θ_6	72.3692
θ_7	71.7451
θ_8	71.3005
θ_9	71.0342
θ_{10}	70.9455

Ces résultats se traduisent par une décroissance de la température de quasiment 10°C comme l'on peut l'avoir ci-dessous.

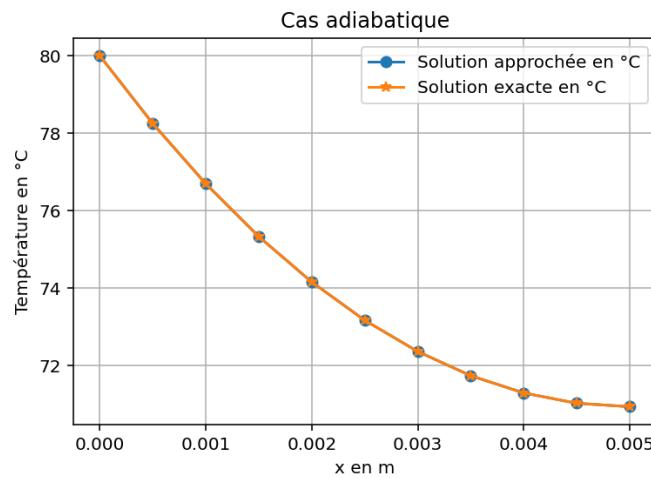


Figure 5: Graphe de l'évolution de la température θ dans le barreau en présence d'isolant

On remarque sur la figure 5 que les résultats sont cohérents avec le modèle théorique, dont nous verrons l'erreur un peu plus loin. De plus, on peut voir graphiquement que la précision de la MEF P^2 est quasiment autant précise que la P^1 .

4.1.2 Cas non-adiabatique

Pour cette partie, tout comme la MEF P^1 , nous retirons l'isolant de la partie inférieure, ce qui entraîne un changement dans les matrices globales, nous avons alors :

$$\frac{1}{3 \cdot dx} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 16 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 16 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 7 & 0 \end{bmatrix} + \frac{m \cdot dx}{30} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 16 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 16 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 16 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \right) + \frac{h'}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_0 - T_\infty \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Après implémentation dans Spyder, nous obtenons les résultats suivants :

θ	Température
θ_0	80
θ_1	78.1884
θ_2	76.5723
θ_3	75.1477
θ_4	73.9111
θ_5	72.8592
θ_6	71.9895
θ_7	71.2998
θ_8	70.7884
θ_9	70.454
θ_{10}	70.2958

Tout d'abord, on remarque une légère différence de température avec le cas comportant un isolant. Ensuite, on peut remarquer que le résultat est plutôt satisfaisant puisqu'il est quasiment égal au modèle théorique, avec une erreur relativement faible.

4.2 Erreur relative

L'erreur relative étant quasiment pareille pour les deux cas, nous analyserons uniquement celle du premier cas.

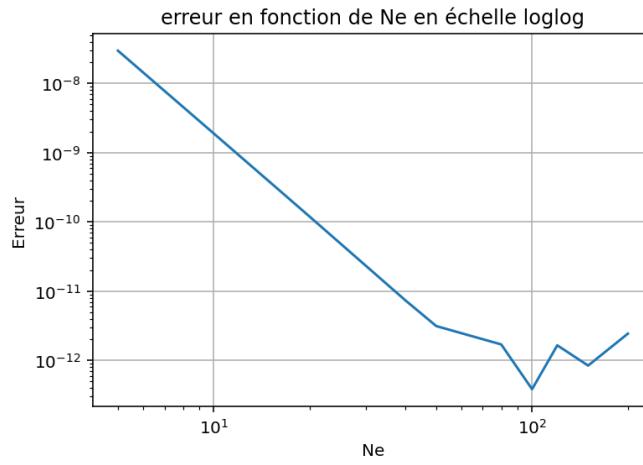


Figure 6: Erreur relative entre le modèle exact et approché

Tout d'abord on remarque que l'erreur relative entre les deux modèles est très faible, inférieure 10^{-8} . Cette erreur temps même à disparaître si nous augmentons le nombre de pas Ne , soit que l'écart entre chaque x_i diminue. Cependant, on remarque que le modèle à une limite pour tout $Ne > 80$, en effet au-delà de cette valeur, on remarque une confusion dans le tracé de l'erreur avec une courbe plus constante. Cette imprécision nous vient

d'une erreur beaucoup trop faible et proche de 0, la machine à donc du mal à déterminer la valeur de l'erreur pour des valeurs proches de 0. Cette dernière n'est pas un problème puisqu'on remarque qu'on atteint un écart relatif suffisamment faible avant 80, ce qui nous permet d'obtenir des résultats très satisfaisant pour des maillages assez faibles.

5 Éléments finis bidimensionnels linéaires

On s'intéresse désormais au profil de température en deux dimensions à l'intérieur de l'ailette de hauteur H , longueur L ainsi que de largeur $2r$. Du fait de la symétrie sur le plan parallèle à la longueur, on restreint alors le domaine à $[0; r] \times [0, H]$ tel que représenté sur la figure ci-dessous.

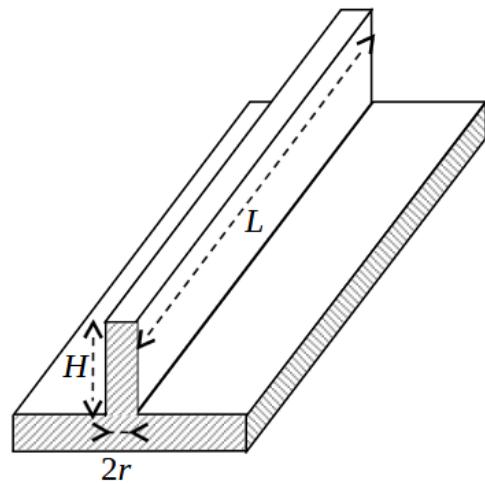


Figure 7: Représentation du projet

Pour résoudre ce problème, nous réaliserons un maillage différent que dans la partie précédente, effectivement nous utiliserons la géométrie suivante :

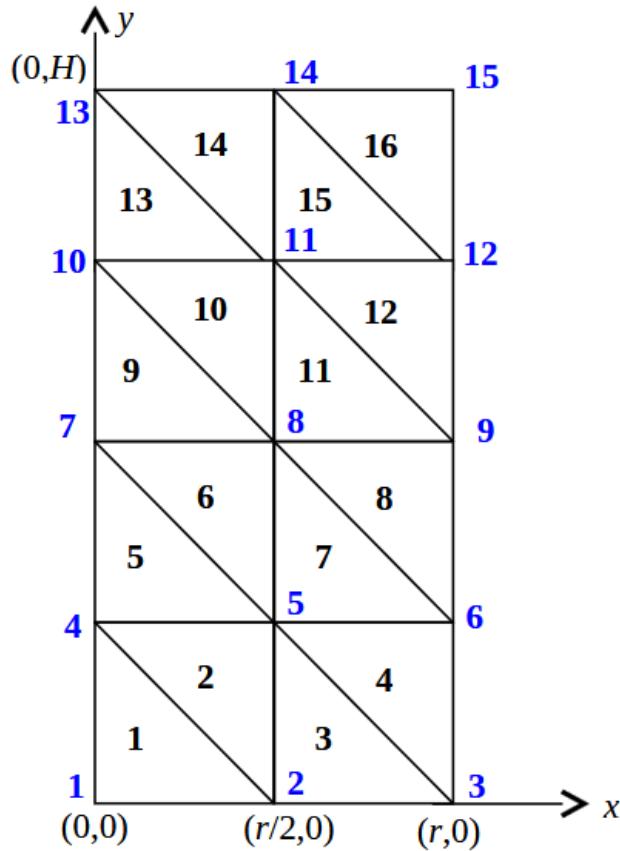


Figure 8: Géométrie considérée dans le cadre de la MEF 2D pour ce problème

De plus, on considère les mêmes paramètres utilisés précédemment :

1. $H = 5 \text{ mm}$: il s'agit de la hauteur du barreau.
2. $r = 0.5 \text{ mm}$: il s'agit du rayon du barreau, visible sur la Figure 1.
3. $T_0 = 100^\circ$: la température du socle sur lequel repose le barreau (en $x = 0$). Il s'agit d'une condition aux limites de Dirichlet dans le cadre de ce TP (qui pourra donc être utilisée ou non selon la résolution souhaitée).
4. $h = 100 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$: le coefficient de convection entre l'ailette et le milieu qui l'entoure.
5. $T_\infty = 20^\circ$: la température du milieu extérieur.
6. $\lambda = 40 \text{ W/m} \cdot \text{K}$: le coefficient de conductivité thermique du barreau.
7. $A = \pi r^2$: la surface horizontale d'une section du barreau.
8. $P = 2\pi rH$: la surface latérale d'une section du barreau (entre x et $x + dx$).

Ces conditions initiales se traduisent mathématiquement par ces équations suivantes, qui nous permettront de rédiger la formulation faible :

$$\begin{cases} \Delta T(x, y) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h \cdot (T - T_\infty) & \text{sur la paroi droite}, \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h' \cdot (T - T_\infty) & \text{sur la paroi supérieure}, \\ T = T_0 & \text{sur la paroi inférieure}, \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 & \text{sur la paroi gauche (par symétrie)}. \end{cases}$$

5.1 Formulation faible et mise en équation

Comme pour le problème précédent, nous écrivons le résidu du problème :

$$R(T) = \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

On introduit, comme dans la partie précédente, la température approchée $\tilde{T}(x, y)$ qui minimise la norme du résidu. En d'autres termes, on cherche ici :

$$\|R(\tilde{T})\| = 0$$

En introduisant les fonctions de pondération ω et en réécrivant cette dernière équation sous une forme intégrale, on obtient :

$$\int_0^r \int_0^H \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}(x, y)}{\partial y^2} \right) \omega \, dx \, dy = 0$$

On linéarise la forme ci-dessus et on fait une intégration par partie pour ramener l'ordre de la dérivée seconde à un ordre 1:

$$\int_0^H \left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \omega \right]_0^r - \int_0^r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \, dx \, dy + \int_0^r \left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \omega \right]_0^H - \int_0^H \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \, dy \, dx = 0$$

On utilise alors les conditions aux limites en $x = 0$ et $y = 0$ pour simplifier des termes dans l'équation ci-dessus et on peut alors écrire qu'elle est équivalente à :

$$\int_0^H \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \omega \Big|_{x=r} \, dy + \int_0^r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \omega \Big|_{y=H} \, dx - \int_0^r \int_0^H \nabla \tilde{T} \cdot \nabla \omega \, dx \, dy = 0$$

En injectant les conditions aux limites sur la paroi droite et supérieure dans la formulation ci-dessus, on peut alors finalement écrire la formulation faible du problème en effectuant les dernières simplifications :

$$\int_0^H \frac{h}{\lambda} (\tilde{T} - T_\infty) \omega \, dy + \int_0^r \frac{h'}{\lambda} (\tilde{T} - T_\infty) \omega \, dx - \int_0^r \int_0^H \nabla \tilde{T} \cdot \nabla \omega \, dx \, dy = 0$$

On peut nommer chaque intégrale qui nous faciliterons l'écriture plus tard, on note :

- $I = \int_0^r \int_0^H \nabla \tilde{T} \cdot \nabla \omega \, dx \, dy$
- $J = \int_0^H \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \omega \Big|_{x=r} \, dy$
- $N = \int_0^r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \omega \Big|_{y=H} \, dx$

Comme pour la partie précédente, on sait que notre solution approchée doit s'écrire sous la forme :

$$\tilde{T}(x, y) = \sum_{k=1}^{N_e} \tilde{T}_k(x, y)$$

Avec,

$$\tilde{T}_k(x, y) = a_{n1} \cdot H_1(x, y) + a_{n2} \cdot H_2(x, y) + a_{n3} \cdot H_3(x, y) \text{ sur } e_k$$

Tout comme précédemment, on introduit les fonctions de base. En 2D, ces fonctions sont de la forme :

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y \\ H_2(x, y) &= a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot y \\ H_3(x, y) &= a_3 + b_3 \cdot x + c_3 \cdot y \end{aligned}$$

x	(x_{n1}, y_{n1})	(x_{n2}, y_{n2})	(x_{n3}, y_{n3})
$H_1(x, y)$	1	0	0
$H_2(x, y)$	0	1	0
$H_3(x, y)$	0	0	1

Table 2: Tableau fonction de base en P^2

Avec les propriétés suivantes :

En élément triangulaire, on considère trois nœuds, écrit sur la figure 8. Par exemple, l'élément 1 est composé des nœuds (1, 2, 4), le n°2 : 2, 3, 5 etc. En considérant à chaque fois 3 nœuds, on peut écrire les fonctions de base comme :

En conclusion, la résolution de ce problème nous a permis d'obtenir des résultats cohérents et ainsi, renforcer notre compréhension pour des problèmes du même ordre.

$$H_1(x, y) = \frac{1}{\det(A)} ((x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (y_2 - y_3) \cdot x + (x_3 - x_2) \cdot y)$$

$$H_2(x, y) = \frac{1}{\det(A)} ((x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + (y_3 - y_1) \cdot x + (x_1 - x_3) \cdot y)$$

$$H_3(x, y) = \frac{1}{\det(A)} ((x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (y_1 - y_2) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y)$$

Avec,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Ainsi, de ces relations, on en déduit une nouvelle expression discrétisée de \tilde{T} =. On a

- La solution approchée :

$$\tilde{T}_k(x, y) = [H_1 \quad H_2 \quad H_3] * \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}$$

- Sa dérivée :

$$\frac{\partial \tilde{T}_k(x, y)}{\partial x} = \left[\frac{\partial H_1}{\partial x} \quad \frac{\partial H_2}{\partial x} \quad \frac{\partial H_3}{\partial x} \right] * \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}_k(x, y)}{\partial y} = \left[\frac{\partial H_1}{\partial y} \quad \frac{\partial H_2}{\partial y} \quad \frac{\partial H_3}{\partial y} \right] * \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}$$

- La fonction de pondération, d'après Galerkin :

$$\omega(x, y) = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_k}{\partial a_{n1}} \\ \frac{\partial T_k}{\partial a_{n2}} \\ \frac{\partial T_k}{\partial a_{n3}} \end{bmatrix}$$

On en déduit alors les expressions de I, J et N.

Pour I, on obtient :

$$I = \sum_{k=1}^{N_e} \iint_{e_k} \left[\frac{\partial T_k(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial T_k(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial T_k(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial x} \right] * \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix} dx dy$$

$$\Leftrightarrow I = \sum_{k=1}^{N_e} \left((K_x)_k \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}_k + (K_y)_k \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}_k \right)$$

Avec,

$$(K_x)_k = \frac{1}{2 \det(A)} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \\ (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) & (y_3 - y_1)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \\ (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) & (y_1 - y_2)^2 \end{bmatrix}$$

$$(K_y)_k = \frac{1}{2 \det(A)} \begin{bmatrix} (x_2 - x_3)^2 & (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) & (x_2 - x_3)(x_1 - x_2) \\ (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) & (x_3 - x_1)^2 & (x_3 - x_1)(x_1 - x_2) \\ (x_2 - x_3)(x_1 - x_2) & (x_3 - x_1)(x_1 - x_2) & (x_1 - x_2)^2 \end{bmatrix}$$

Ensuite, on s'intéresse à la matrice J. Cette matrice correspond à la température sur la paroi droite on peut alors poser son expression :

$$J = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{y_n}^{y_{n+1}} \frac{h}{\lambda} (\bar{T}_n - T_\infty) \omega dy$$

Ici, N désigne le nombre de noeud sur la paroi droite. Cette discréétisation est de la même forme que celle en P1, on peut se référer donc à la première partie pour le développement de cette dernière. On obtient après développement :

$$J = \sum_{n=1}^{N-1} -\frac{h}{\lambda} * T_\infty * \frac{y_{n+1} - y_n}{2} * \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{h}{\lambda} * \frac{y_{n+1} - y_n}{6} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right] * \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$J = \sum_{n=1}^{N-1} -\frac{h}{\lambda} * T_\infty * B_n + \frac{h}{\lambda} * M_n * \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$$

avec :

- $B_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $M_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Pour N :

$$N = \int_0^r \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \omega|_{y=H} dx$$

N correspond au phénomène produit sur la zone \bar{T}_q , c'est à dire sur la paroi supérieure de l'ailette, d'où, on pose son expression de cette manière :

$$N = \sum_{q=1}^{Q-1} \int_{x_q}^{x_{q+1}} \frac{h'}{\lambda} (\bar{T}_q - T_\infty) \omega dx$$

En appliquant la même méthode que pour J, on trouve :

$$N = \sum_{q=1}^{Q-1} \frac{h'}{\lambda} \left(T_\infty B_q + M_q \begin{bmatrix} a_q \\ a_{q+1} \end{bmatrix} \right)$$

Avec :

$$B_q = \frac{x_{q+1} - x_q}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$M_q = \frac{x_{q+1} - x_q}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Expression finale de la formulation faible

Notre formulation faible s'écrit alors :

$$\sum_{k=1}^{N_e} ((K_x)_k + (K_y)_k) \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}_k + \sum_{q=1}^{Q-1} \frac{h'}{\lambda} * M_n * \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} + \sum_{p=1}^{N-1} \frac{h}{\lambda} * M_p * \begin{bmatrix} a_p \\ a_{p+1} \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^{N-1} \frac{h}{\lambda} * T_\infty * B_p + \sum_{q=1}^{Q-1} \frac{h'}{\lambda} * T_\infty * B_q \quad (5)$$

5.2 Implémentation dans Python

5.2.1 Cas adiabatique

Dans le cas adiabatique, la présence d'une paroi signifie qu'il n'y a pas d'échange avec l'air ambiant. Mathématiquement, la matrice J est alors nulle.

Notre formulation faible s'écrit alors :

$$\sum_{k=1}^{N_e} ((K_x)_k + (K_y)_k) \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}_k + \sum_{p=1}^{N-1} \frac{h}{\lambda} * M_p * \begin{bmatrix} a_p \\ a_{p+1} \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^{N-1} \frac{h}{\lambda} * T_\infty * B_p \quad (6)$$

Après avoir obtenu ces différentes matrices, on se propose de l'implémenter dans un programme avec Python.

Ci-dessous, la table de connexion et de coordonnées utilisées pour notre résolution :

0	1	3
1	4	3
1	2	4
2	5	4
3	4	6
4	7	6
4	5	7
5	8	7
6	7	9
7	10	9
7	8	10
8	11	10
9	10	12
10	13	12
10	11	13
11	14	13

0	0
0.00025	0
0.0005	0
0	0.00125
0.00025	0.00125
0.0005	0.00125
0	0.0025
0.00025	0.0025
0.0005	0.0025
0	0.00375
0.00025	0.00375
0.0005	0.00375
0	0.005
0.00025	0.005
0.0005	0.005

On procède désormais à l'assemblage de notre système, de forme $AX = B$. Cette matrice est un assemblage bloc par bloc des matrices K_x , K_y et M_p dans une matrice globale comme on peut le voir ci-dessous :

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0625
0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	-0.0994792	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0	0	0	0	0	0	0	0.0625
0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	-0.0994792	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	-0.0994792	0	0	0.0625	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.1	0	0	2.6	-2.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.2	0	-2.5	5.2	-2.5	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-2.5	2.60104	0	0	0.03125	

Tout d'abord, on remarque bien l'assemblage bloc par bloc des matrices dans cette matrice globale à partir du rang $n = 4$. Les trois premiers rangs de la diagonale valent 1 afin d'imposer la température de la paroi du bas à $T_\infty = 100C$. Cette condition, qui est une condition de Dirichlet se voit également dans la matrice B.

On applique désormais le programme et on trace l'évolution de notre température dans l'ailette. On obtient alors les températures :

Indice de chaque élément	Température des éléments
1	100
2	100
3	100
4	97.9261
5	97.9143
6	97.8783
7	96.4436
8	96.4317
9	96.3958
10	95.5585
11	95.5467
12	95.5113
13	95.2643
14	95.2525
15	95.2172

Que l'on peut tracer afin de mieux visualiser son évolution dans l'ailette :

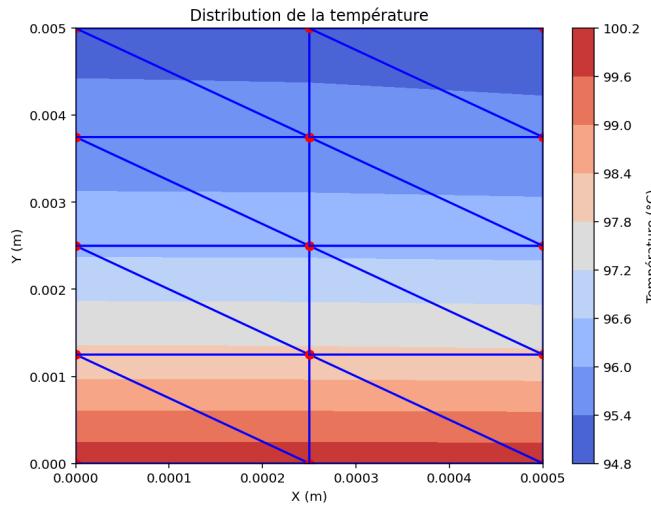


Figure 9: Température de chaque élément

On constate que la température varie verticalement, comme le prévoyait la géométrie et les conditions initiales de notre ailettes. Effectivement, la température étant fixée sur la partie inférieure à 100°C, il est donc normal que la température diminue verticalement s'il est exposé à une convection avec un air plus frais.

Cependant, on remarque une température qui diminue légèrement latéralement. Cela se remarque par les discontinuités sur la figure 9 ci-dessus. Cette discontinuité justifie bien l'utilisation de la MEF bidimensionnelle étant donné qu'il y a un gradient de température.

Cela est dû au fait qu'il y ait une face qui n'est pas exposée à la convection. Ce gradient de température, bien que faible, peut s'avérer plus important si on prenait des ailettes de taille plus importante. C'est pourquoi la taille de l'ailette doit être ajustée afin de trouver un juste milieu entre sa fonction à remplir ainsi qu'une meilleure diffusion de la chaleur.

5.2.2 Cas non-adiabatique

Pour le cas non-adiabatique, on retire le matériau isolant sur la partie supérieure. Cela signifie qu'une convection avec l'air a lieu sur la partie supérieure de l'ailette et ainsi entraîne une diminution de la température.

De plus, ce retrait rajoute un terme dans les matrices M et B sur la paroi supérieure. La matrice N, jusqu'ici nulle, devient alors, comme vu précédemment :

$$N = \sum_{q=1}^{Q-1} \frac{h'}{\lambda} \left(T_\infty B_q + M_q \begin{bmatrix} a_q \\ a_{q+1} \end{bmatrix} \right)$$

Avec :

$$B_q = \frac{x_{q+1} - x_q}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$M_q = \frac{x_{q+1} - x_q}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette fois-ci, on applique alors l'équation n5 vu dans la formulation faible.

On considérera ici pour ce changement les noeuds 13, 14, 15 qui sont les noeuds présent sur la paroi supérieure comme le montre la figure 8.

Nous avons alors un changement dans la matrice globale A ainsi que dans la matrice B

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0625
0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	-0.0994792	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0.0625
0	0	0	0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	-0.0994792	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0	0	0	0.0625
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	0	0	0	0.005
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.1	0	0	2.60017	-2.49992	0	0	0	0.01
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.2	0	-2.49992	5.20033	-2.49992	0	0	0.03625
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-2.49992	2.60121	0	0	0	0

On peut tout de suite constater les changements sur les noeuds 13, 14, 15, à savoir les noeuds sur la paroi supérieure. Ce changement se remarque également dans la matrice B, rajoutant ainsi des termes.

Tout comme pour le cas adiabatique, on implémente et affiche les résultats obtenus. La température diminue sur la paroi supérieure d'environ 1 °C comme le montre le tableau ci-dessous :

Indice de chaque élément	Température des éléments
1	100
2	100
3	100
4	97.7506
5	97.7388
6	97.7029
7	96.0912
8	96.0793
9	96.0436
10	95.0264
11	95.0147
12	94.9795
13	94.5484
14	94.5367
15	94.5017

L'affichage de ces températures dans l'ailette est plus concluant pour l'analyse des résultats :

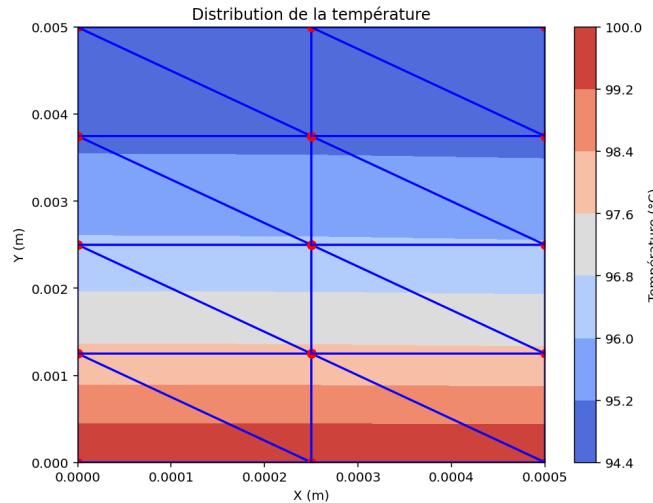


Figure 10: Température dans chaque élément

On peut tirer de ce graphique les mêmes conclusions que pour la partie précédente. Le profil de température évolue verticalement et légèrement horizontalement. Cependant, nous avons une température plus faible et une répartition de la température beaucoup plus faible et légère. En effet, la température sur la paroi du haut est plus répandue que pour le cas adiabatique.

Pour conclure sur cette partie, on observe effectivement les pertes de chaleur par conduction et convection au sein de l'ailette.

On se propose pour la suite, d'étudier un tout nouveau maillage dit quadrangulaire afin de déterminer l'influence du choix du maillage pour modéliser la température.

6 Maillage quadrangulaire, éléments finis Q^1

Pour cette partie, on change uniquement le maillage en prenant un maillage en forme de rectangle comme le montre la figure 11 ci-dessous :

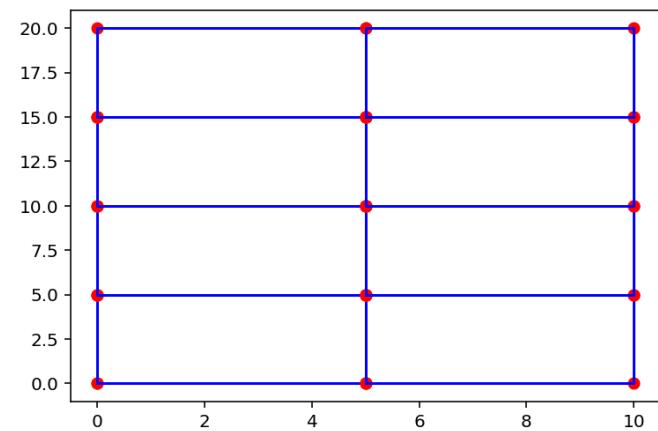


Figure 11: Maillage quadrangulaire

Le changement de maillage entraîne également un changement dans la solution approchée, on rajoute une fonction de base H_4 . Ce rajout change ainsi la taille des matrices K qui deviennent du 4×4 d'après le calcul de la fonction de pondération de Galerkin. La température approchée désormais :

$$\tilde{T}_k(x, y) = a_{n1} \cdot H_1(x, y) + a_{n2} \cdot H_2(x, y) + a_{n3} \cdot H_3(x, y) + a_{n4} \cdot H_4(x, y) \text{ sur } e_k$$

$$\text{Avec } H_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy$$

Soumises aux conditions suivantes :

	H_1	H_2	H_3	H_4
(x_1, y_1)	1	0	0	0
(x_2, y_2)	0	1	0	0
(x_3, y_3)	0	0	1	0
(x_4, y_4)	0	0	0	1

Après développement, de la même manière dans la partie triangulaire, on obtient :

$$K^X = \frac{h_2}{6h_1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K^Y = \frac{h_1}{6h_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

avec h_1, h_2 la largeur et la hauteur, respectivement, des rectangles.

Après résolution de l'équation matricielle $AX = B$, on obtient les matrices A et B suivantes :

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0.766667	-0.866667	0	3.46667	-3.26667	0	0.766667	-0.866667	0	0	0	0	0	0	0	
-0.866667	1.53333	-0.866667	-3.26667	6.93333	-3.26667	-0.866667	1.53333	-0.866667	0	0	0	0	0	0	
0	-0.866667	0.767188	0	-3.26667	3.46875	0	-0.866667	0.767188	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0.766667	-0.866667	0	3.46667	-3.26667	0	0.766667	-0.866667	0	0	0	0	
0	0	0	-0.866667	1.53333	-0.866667	-3.26667	6.93333	-3.26667	-0.866667	1.53333	-0.866667	0	0	0	
0	0	0	0	-0.866667	0.767188	0	-3.26667	3.46875	0	-0.866667	0.767188	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0.766667	-0.866667	0	3.46667	-3.26667	0	0.766667	-0.866667	0	
0	0	0	0	0	0	0	-0.866667	1.53333	-0.866667	-3.26667	6.93333	-3.26667	-0.866667	1.53333	-0.866667
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.866667	0.767188	0	-3.26667	3.46875	0	-0.866667	0.767188
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.766667	-0.866667	0	1.73333	-1.63333	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.866667	1.53333	-0.866667	-1.63333	3.46667	-1.63333	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.866667	0.767188	0	0	-1.63333	1.73438	0.03125

À l'instar du maillage précédent, la matrice A présente des termes répétitifs ainsi que des singularités liées aux conditions limites appliquées sur certaines frontières. De plus, les trois premières lignes des deux matrices reflètent ces conditions limites.

Nous allons maintenant utiliser des algorithmes de résolution numérique afin de calculer le vecteur des températures à chaque noeud et d'en visualiser l'évolution en fonction de la position dans la section de l'ailette.
On a alors comme température :

Indice de chaque élément	Température des éléments
1	100
2	100
3	100
4	97.9307
5	97.9160
6	97.8704
7	96.4427
8	96.4313
9	96.3977
10	95.5588
11	95.5469
12	95.5109
13	95.2642
14	95.2525
15	95.2175

On peut alors tracer la température dans l'ailette :

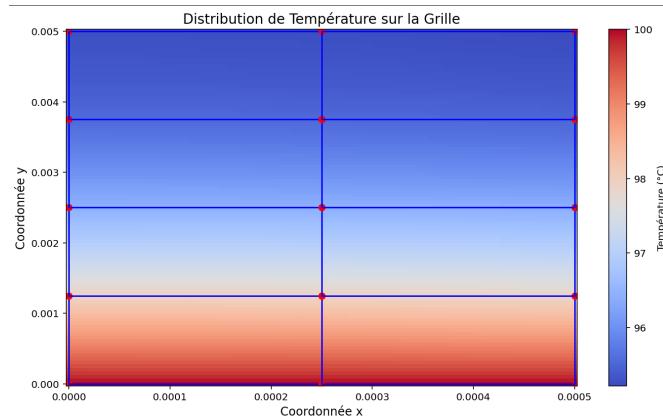


Figure 12: Température dans l'ailette

On observe dans un premier temps un infime changement de température avec la méthode triangulaire. Au vu de la quasi-exactitude des deux méthodes, on traitera ici uniquement la partie avec isolant.

En conclusion, les maillages quadrangulaire et triangulaire fournissent des solutions équivalentes, sans qu'un maillage ne présente un avantage significatif sur l'autre. La principale différence réside dans le nombre d'éléments : le maillage quadrangulaire en nécessite moins, tout en conservant la même précision. Cela en fait une option potentiellement plus avantageuse, permettant d'obtenir les mêmes résultats avec un effort de calcul réduit.

7 Conclusion

Premièrement, la résolution du problème thermique dans cette ailette par les différentes méthodes des éléments finis P1, P2, triangulaire et quadrangulaire, dans un premier temps, résout analytiquement, puis implémentée dans Python. Cela nous a permis d'obtenir des solutions analytiques et numériques de ce problème. Cette solution est satisfaisante, comme le montrent les différents graphiques représentant une erreur assez faible.

L'application de la méthode P1 à un problème bidimensionnel a révélé l'augmentation de la complexité des matrices de raideur et d'assemblage, mettant en avant la nécessité d'utiliser des outils informatiques pour une gestion efficace. Les résultats obtenus démontrent la pertinence de cette approche, notamment en l'absence de solution analytique directe pour ce genre de problématique.

Enfin, cette approche nous a permis de démontrer la viabilité de l'approche numérique . Cette approche, dans des cas similaires, peut alors être utilisée dans d'autres problèmes pour lesquels des solutions exactes sont difficiles à développer, voire même impossibles.