Corrigé du baccalauréat S Métropole 22 juin 2015

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Partie 1

1. **a.** Soient c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
Par définition, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_c^d$
$= -\mathrm{e}^{-\lambda d} - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda c}\right) = \boxed{\mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}}$.

b. $P(X > 20) = 0,05 \iff P(0 \leqslant X \leqslant 20) = 0,95 \iff \mathrm{e}^{-\lambda\times 0} - \mathrm{e}^{-\lambda\times 20} = 0,95 \iff 1-\mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,95 \iff \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,05 \iff -20\lambda = \ln 0,05 \iff \lambda = \dfrac{\ln 0,05}{-20} \approx \boxed{0,150}$.

c. On sait que l'espérance d'une loi exponentielle est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \approx \boxed{6,676}$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\boldsymbol{\lambda = 0,15}$.

d. $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = \mathrm{e}^{-10\lambda} - \mathrm{e}^{-20\lambda} = \mathrm{e}^{-1,5} - \mathrm{e}^{-3} \approx \boxed{0,173}$.

e. $P(X > 18) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 18) = \mathrm{e}^{-18\lambda} = \mathrm{e}^{-27} \approx \boxed{0,067}$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.

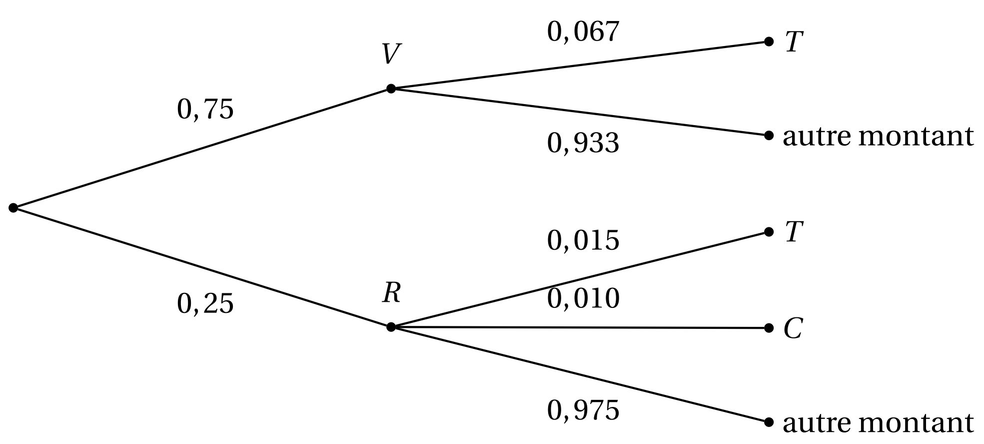
a. $P(20 \leqslant Y \leqslant 21) \approx \boxed{0,015}$.

b. $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leqslant Y \leqslant 21) \approx \boxed{0,010}$.

Partie 2

1. Notons :
- R l'évènement « le bon d'achat est rouge ».
- V l'évènement « le bon d'achat est vert »
- T : l'évènement « avoir un un bon d'achat de trente € ».
- C : l'évènement « avoir un un bon d'achat de cent € ».
- A : l'évènement « avoir un un bon d'achat d'une autre valeur ».
- S : l'évènement « avoir un un bon d'achat d'un montant supérieur ou égal à 30 € ».

,L'arbre correspondant est alors :



On a : $P_R(S) = P_R(T \cup C) = p_R(T) + P_R(C) = 0,015 + 0,010 = \boxed{0,025}$.

2. $P(S) = P(R \cap S) + P(V \cap S) = 0,75 \times 0,067 + 0,25 \times 0,025 = 0,0566 \approx \boxed{0,057}$.
   Pour la question suivante, on utilise cette valeur.
3. La probabilité d'avoir un bon d'un montant supérieur ou égal à 30 €est $p = 0,057$.
   La fréquence observée est $f = \dfrac{6}{200} = \dfrac{3}{100} = 0,03$.
   La taille de léchantillon est $n = 200$.
   On a $n = 200 \geqslant 30$; $np = 11,4 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 188,6 \geqslant 5$.
   On peut donc utiliser la formule donnant l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
   $I_{200} = \left[p - 1,96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \approx \boxed{[0,024\ ;\ 0,090]}$.
   $f = 0,03 \in I$. Les doutes du directeur du magasin ne sont donc pas justifiés au seuil de confiance de 95 %.

EXERCICE 2 — 3 POINTS

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5),
B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

1. **a.** Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\overrightarrow{OI}$.
   La droite (AB) est donc parallèle à l'axe (OI).
   b. On a $x_C = x_D = 11$ donc la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$ d'équation $\boxed{x = 11}$.
   c. (AB) est parallèle à (OI) et (OI) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ donc (AB) est orthogonale à $\mathscr{P}$.
   Le point d'intersection E a des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ et la représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.
   On doit avoir : $\left\{\begin{array}{l} x = 11\\ x = t\\ y = -1\\ z = 5\end{array}\right.$ donc $\boxed{\text{E}(11\ ;\ -1\ ;\ 5)}$.
   d. Une représentation paramétrique de (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x = t\\ y = -1\\ z = 5\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et une représentation paramétrique de (CD) est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 11\\ y & = & 0,8t'\\ z & = & 1 + 0,6t'\end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.
   On résout le système $\left\{\begin{array}{lcl} t & = & 11\\ -1 & = & 0,8t'\\ 5z & = & 1 + 0,6t'\end{array}\right.$ qui n'a pas de solutions, car on trouve t' négatif, donc $1 + 0,6t' < 5$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. **a.** $\overrightarrow{M_tN_t}\begin{pmatrix}11-t\\0,8t+1\\0,6t-4\end{pmatrix}$ donc $M_tN_t^2=(11-t)^2+(0,8t+1)^2+(0,6t-4)^2$

$=121-22t+t^2+0,64t^2+1,6t+1+0,36t^2-4,8t+16=$

$\boxed{M_tN_t^2=2t^2-25,2t+138}$.

b. M_tN_t est positif, donc est minimale quand son carré est minimal.
On considère la fonction $f : t\longmapsto 2t^2-25,2t+138$; f est une fonction du second degré ; le coefficient de t^2 est 2. Le minimum est atteint pour $t=\dfrac{25,2}{4}=6,3$.

La distance est **minimale** pour $\boxed{t=6,3\text{ s}}$

EXERCICE 3 — 5 POINTS

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit l'équation $z^2-8z+64=0$.
$\Delta=64-4\times64=-3\times64<0$.
L'équation a deux solutions complexes conjuguées :
$z_1=\dfrac{8+\text{i}\sqrt{3\times64}}{2}=\boxed{4+4\sqrt{3}}$ et $z_2=\overline{z_1}=\boxed{4-4\text{i}\sqrt{3}}$.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=4+4\text{i}\sqrt{3}$, $b=4-4\text{i}\sqrt{3}$ et $c=8\text{i}$. (figure à la fin de l'exercice)

a. $|a|=|4+4\text{i}\sqrt{3}|=4|1+\text{i}\sqrt{3}|=4\times2=\boxed{8}$.

On en déduit $a=8\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$. Un argument de a est donc $\dfrac{\pi}{3}$.

b. On a trouvé $a=8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $b=\overline{a}=8\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

c. $|a|=8$; $|b|=\left|\overline{a}\right|=|a|=8$ et $|c|=|8\text{i}|=8$. Les points A, B et C sont donc sur le cercle de centre 0 et de rayon 8.

d. Voir figure en fin d'exercice.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a'=a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, $b'=b\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c'=c\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. $b'=b\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}=8\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}\times\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}=\boxed{8}$.

b. $|a'|=\left|a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right|=|a|\times\left|\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right|=|a|=\boxed{8}$ car $\left|\text{e}^{\text{i}\theta}\right|=1$ pour tout θ réel.

$\arg(a')=\arg\left(a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right)=\arg(a)+\arg\left(\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$

Pour la suite on admet que $a'=-4+4\text{i}\sqrt{3}$ et $c'=-4\sqrt{3}+4\text{i}$.

4. **a.** On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].

On a : $r=\dfrac{a'+b}{2}=\dfrac{-4+4\text{i}\sqrt{3}+4-4\text{i}\sqrt{3}}{2}=\boxed{0}$.

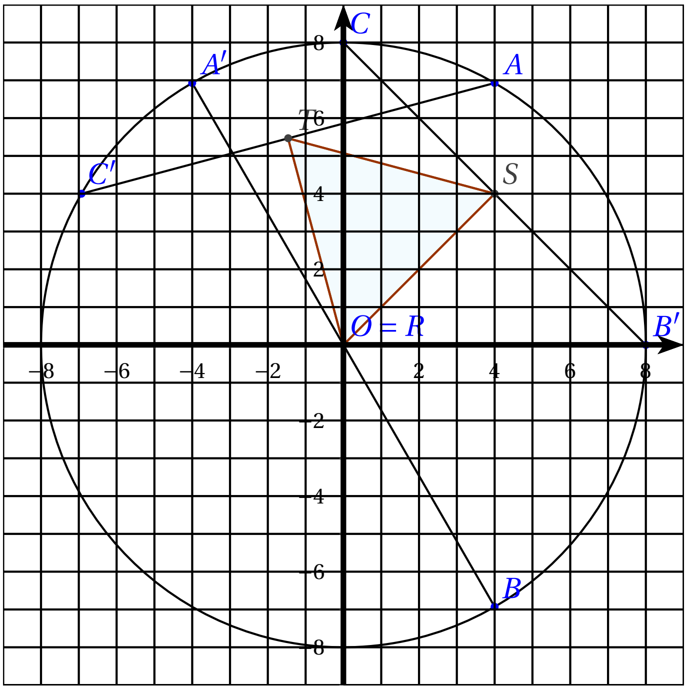
$s=\dfrac{b'+c}{2}=\dfrac{8+8\text{i}}{2}=4+4\text{i}$.

On a admis que $t=2-2\sqrt{3}+\text{i}\left(2+2\sqrt{3}\right)$.

b. Il semble que la figure que RST soit un triangle équilatéral.

- $RS = |s - r| = |4 + 4\mathrm{i}| = 4|1 + \mathrm{i}| = \boxed{4\sqrt{2}}$.
- $ST = |t - s| = |-2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(-2 + 2\sqrt{3}\right)| = 2|-1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(-1 + \sqrt{3}\right)|$
  $= 2\sqrt{\left(-1 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(-1 + \sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{\left(1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3\right)} = 2\sqrt{8}$
  $= \boxed{4\sqrt{2}}$.
- $RT = |t - r| = \left|2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}(2 + 2\sqrt{3})\right|$
  $= 2\left|1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}(1 + \sqrt{3})\right| = 2\sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3} = 2\sqrt{8}$
  $= \boxed{4\sqrt{2}}$.

$RS = ST = RT = 4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est **équilatéral**.



Exercice 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$: $7x - 5y = 1$.

a. $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$ donc $(3\,;\,4)$ est solution de (E).

b.
- Le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (E) donc : $7 \times x - 5 \times y = 1$
  Le couple $(3\,;\,4)$ est solution de (E) donc : $7 \times 3 - 5 \times 4 = 1$
  Par soustraction membre à membre : $7(x-3) - 5(y-4) = 0$
  donc $7(x-3) = 5(y-4)$.
- Réciproquement, si le couple $(x\,;\,y)$ est tel que $7(x-3) = 5(y-4)$, on peut dire que $7(x-3) - 5(y-4) = 0 \iff 7x - 21 - 5y + 20 = 0 \iff 7x - 5y = 1$, et donc que le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (E).

- Donc le couple d'entiers $(x\,;\,y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3) = 5(y-4)$.

c.

- Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers solution de (E), ce qui équivaut à $7(x-3) = 5(y-4)$.

  $7(x-3) = 5(y-4)$ entraîne que 7 divise $5(y-4)$; or 7 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y-4$. Donc il existe un entier relatif k tel que $y-4 = 7k$ ce qui équivaut à $y = 7k+4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

  Comme $7(x-3) = 5(y-4)$ et $y-4 = 7k$, cela implique que $7(x-3) = 5 \times 7k$ ce qui équivaut à $x-3 = 5k$ ou encore $x = 5k+3$.

  Donc si $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 5k+3\\ y &=& 7k+4\end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$

- Réciproquement, si le couple d'entiers $(x\,;\,y)$ est tel que $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 5k+3\\ y &=& 7k+4\end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $7x-5y = 7(5k+3)-5(7k+4) = 35k+21-35k-20 = 1$ donc $(x\,;\,y)$ est solution de (E).

- Donc les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 5k+3\\ y &=& 7k+4\end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. On sait que $7x-5y = 1$.

D'après la question **1**, on peut dire que $x = 5k+3$ et $y = 7k+4$ avec k entier relatif. Le nombre de jetons est un nombre positif, et ne doit pas dépasser 25 qui est le nombre total de jetons dans la boîte.

Pour $k = 0$, $x = 3$ et $y = 4$; il peut donc y avoir 3 jetons rouges, 4 jetons verts et $25-3-4 = 18$ jetons blancs.

Pour $k = 1$, $x = 8$ et $y = 11$; il peut donc y avoir 8 jetons rouges, 11 jetons verts et $25-8-11 = 6$ jetons blancs.

Les autres valeurs de k ne donnent pas de résultats répondant au problème.

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. Comme au départ c'est-à-dire pour $n = 0$, le pion est en A, on peut dire que $X_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

D'après le texte, on tire au hasard un pion dans la boîte, donc il y a équiprobabilité. Il y a 3 pions rouges sur 25 donc la probabilité de tirer un pion rouge est $\dfrac{3}{25} = 0,12$. On calcule de même la probabilité de tirer un pion vert : $\dfrac{4}{25} = 016$ et la probabilité de tirer un pion blanc : $\dfrac{18}{25} = 0,72$.

On cherche la probabilité a_{n+1} qu'à l'étape $n+1$ le pion soit en A.

S'il était en A à l'étape n, il faut tirer une boule blanche pour qu'il y reste, ce qui se fait avec une probabilité de 0,72. Comme il avait une probabilité égale à a_n d'être en A à l'étape n, on retient $0,72a_n$.

S'il était en B à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à b_n d'être en B à l'étape n, on retient $0,12b_n$.

S'il était en C à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à c_n d'être en C à l'étape n, on retient $0,12c_n$.

On peut donc dire que : $a_{n+1} = 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n$.

On justifie de la même façon b_{n+1} et c_{n+1} et l'on a :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} a_{n+1} &=& 0,72a_n &+& 0,12b_n &+& 0,12c_n \\ b_{n+1} &=& 0,12a_n &+& 0,72b_n &+& 0,16c_n \\ c_{n+1} &=& 0,16a_n &+& 0,16b_n &+& 0,72c_n \end{array}\right.$$

ce qui donne sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$$

soit $X_{n+1} = X_nT$ où $T = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{10} & \dfrac{37}{110} & \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{1}{10} & -\dfrac{1}{10} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{11} & -\dfrac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$

a. On sait que $P = \left(P^{-1}\right)^{-1}$; on cherche donc à la calculatrice l'inverse de la matrice P^{-1} et on trouve : $P = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

b. On va démontrer par récurrence sur n ($n \geqslant 1$) la propriété $\mathscr{P}_n$: $T^n = PD^nP^{-1}$.

- On sait que $T = PDP^{-1}$ donc $T = PD^1P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- On suppose la propriété vraie à un rang p ($p \geqslant 1$), c'est-à-dire $T^p = PD^pP^{-1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On veut démontrer que la propriété est vraie au rang $p+1$.
  $T^{p+1} = T^p \times T$; d'après l'hypothèse de récurrence, $T^p = PD^nP^{-1}$ et on sait que $T = PDP^{-1}$. Donc $T^{p+1} = PD^pP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^pP^{-1}PDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = PD^nP^{-1}$.

c. La matrice D est une matrice diagonale ; $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$

On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ; ainsi $T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

On admet que $\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 T^n$.

a. $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$X_n = X_0 T^n \iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix}$$

Donc $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$. Or comme à chaque étape, le pion est soit en A, soit en B, soit en C, $a_n + b_n + c_n = 1$ et donc $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$.

b. $a_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$; or $-1 < 0,6 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$ d'où l'on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{3}{10}$.

$b_n == \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$; or $-1 < 0,56 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,56^n = 0$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$, on peut en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$.

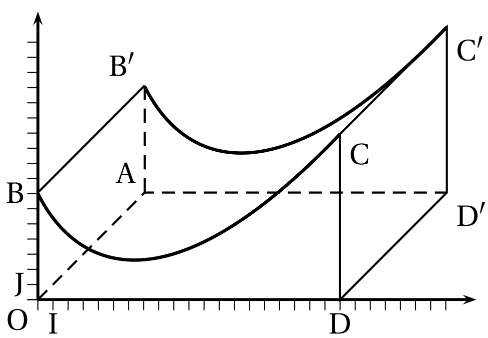
$c_n = 1 - a_n - b_n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 1 - \dfrac{3}{10} - \dfrac{37}{110} = \dfrac{4}{11}$.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{3}{10} = \dfrac{33}{110}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \dfrac{4}{11} = \dfrac{40}{110}$

Le sommet sur lequel on a le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations est le sommet qui a la plus grande probabilité au rang n ; c'est donc le sommet C.

EXERCICE 4 — 6 POINTS

Commun à tous les candidats



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.

Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.

Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20] par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).

Partie 1

1. $f = u\ln(u) + v$ avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = -2x+7$.
f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
$f' = u'\ln(u) + u \times \dfrac{u'}{u} + v'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -3$ d'où $f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1)\dfrac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3$ donc $\boxed{f'(x) = \ln(x+1) - 2}$.

2. $f'(x) = 0 \iff \ln(x+1) = 2 \iff x+1-\text{e}^2 \iff x = \text{e}^2 - 1$.
$f'(x) > 0 \iff \ln(x+1) > 2 \iff x+1 > \text{e}^2$ (croissance de la fonction exp) d'où $x > \text{e}^2$-1.
On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		e^2-1		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7		$f\left(\text{e}^2-1\right) \approx 2,6$		$f(20) \approx 10,93$

3. $f'(0) = 1\ln(1) - 2 = \boxed{-2}$.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.
4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par
$g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
g est donc une primitive de $x \longmapsto (x+1)\ln(x+1)$.
Une primitive de $x \longmapsto 3x-7$ est $x \longmapsto \dfrac{3x^2}{2} + 7x$.
une primitive de f est donc définie par :
$F(x) = g(x) - \dfrac{3x^2}{2} + 7x = \dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3x^2}{2} + 7x =$
$\boxed{\dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \dfrac{7x^2}{4} + \dfrac{13}{2}x}$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P_1 : La différence entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est $f(20) - f\left(\text{e}^2-1\right) \approx 10,93 - 2,6 \approx 8,3 > 8$ donc P_1 est **vraie** ;

P_2 : L'inclinaison en B est 2. L'inclinaison en 20 est $f'(20) = \ln(21) - 2$ $\approx 1,04$, donc P_2 est **vraie**.

2. f est continue, donc la face avant, en unités d'aire, vaut
$\mathscr{A}_1 = \int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = F(20) - F(0)$.
$F(21) = \dfrac{21^2 \ln 21}{2} - 700 + 130 = \dfrac{441 \ln 21}{2} - 570$.
$F(0) = 0$.
On en déduit $\boxed{\mathscr{A}_1 = \dfrac{441 \ln 21}{2} - 570 \approx 101,3}$.

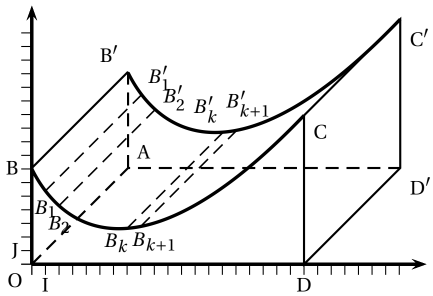
L'aire latérale gauche vaut $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}(OAB'B) = \boxed{10f(0) = 70}$.

L'aire latérale droite vaut $\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}(DD'C'C) = \boxed{10f(20) =\approx 109,3}$.

L'aire à peindre en rouge est donc $\mathscr{A} = 2\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 \approx \boxed{381,9\ \text{m}^2}$.

Le nombre de litres de peinture à prévoir est $\dfrac{381,9}{5} \approx \boxed{77}$

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k\ ;\ f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = \text{B}$.



a. $B_kB_{k+1} = \sqrt{1^2 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2} = \boxed{\sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}}$.

b. La partie de l'algorithme à compléter est :
S prend la valeur 0.
Pour K allant de 0 à 19
S prend la valeur $S + 10\sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}$
Afficher S