Second Degré.

1 Fonctions polynômes de degré 2.

Définition 1

- Une **fonction polynôme de degré** 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut être mise sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois nombres réels avec a non nul.
- L'expression $ax^2 + bx + c$ est la **forme développée** de $f(x)$.
- Une fonction polynôme de degré 2 est aussi appelée **trinôme** (du second degré).
- On appelle **parabole** la représentation graphique d'un trinôme.

Exemple 1
Les fonctions suivantes sont-elles des trinômes ?

1. $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$.
2. $h(x) = 3(x-1)^2 + 1$.
3. $i(x) = 4(x-1)(x+2)$.
4. $i(x) = 5x + 3$.
5. $j(x) = x^3 + 4x^2 + 1$.

Théorème 1 (Variations d'un trinôme du second degré)
Un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet pour variations :

- Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

- Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

On peut calculer les coordonnées (α, β) du sommet S de la parabole grâce aux formules

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = f(\alpha)$$

De plus, f s'écrit $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Cette écriture est la **forme canonique** du trinôme.

Exemple 2
Pour chacun des trinômes $P(x) = 2x^2 + 4x - 3$ et $Q(x) = -(x-2)^2$:

1. Identifier les coefficients a, b, c.
2. Dresser le tableau de variation.

2 Racines et factorisation.

Définition 2
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique.
On appelle **racines** de f les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ce sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et l'axe des abscisses.

Exemple 3
Les fonctions suivantes admettent-elles des racines ? Si oui, combien ? Et quelles sont-elles ?

1. $f(x) = 3(x+1)(x-2)$.
2. $g(x) = 2(x-3)^2$.

Proposition 1
Soit $f(x)$ un trinôme du second degré et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique. Trois cas peuvent se produire :

— f admet 2 racines, c'est-à-dire $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en 2 points.
— f admet une racine, c'est-à-dire $\mathcal{P}$ est tangente à l'axe des abscisses (1 point d'intersection). Dans ce cas, on dit que la racine est une racine double.
— f n'admet pas de racine, c'est-à-dire $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

Définition 3 (Discriminant)
Soit $f(x)$ un trinôme du second degré dont la forme développée réduite est $f(x) = ax^2 + bx + c$. On appelle **discriminant** de ce trinôme le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple 4
Calculer les discriminants des trinômes suivants :

1. Soit $h(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. Soit $i(x) = 2x^2 - 4x + 2$.
3. Soit $j(x) = -3x^2 + 12x - 15$

Théorème 2 (Central)
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme.

— si le discriminant Δ de $f(x)$ est strictement positif alors $f(x)$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et on peut factoriser $f(x)$ en $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

— si le discriminant de $f(x)$ est nul alors $f(x)$ admet une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a} (= \alpha)$$

et on peut factoriser $f(x)$ en $f(x) = a(x - x_0)^2$.

— si le discriminant de $f(x)$ est strictement négatif alors $f(x)$ ne possède pas de racine.
et on ne peut pas factoriser $f(x)$ en un produit de termes de degré 1.

Exemple 5
Calculer les racines (éventuelles) des trinômes de l'exemple 4, puis factoriser ces trinômes (si possible).