

# Second Degré.

## 1 Fonctions polynômes de degré 2.

### Définition 1

- Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  qui peut être mise sous la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b, c$  sont trois nombres réels avec  $a$  non nul.
- L'expression  $ax^2 + bx + c$  est la **forme développée** de  $f(x)$ .
- Une fonction polynôme de degré 2 est aussi appelée **trinôme** (du second degré).
- On appelle **parabole** la représentation graphique d'un trinôme.

### Exemple 1

Les fonctions suivantes sont-elles des trinômes ?

1.  $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ .
2.  $h(x) = 3(x - 1)^2 + 1$ .
3.  $i(x) = 4(x - 1)(x + 2)$ .
4.  $j(x) = 5x + 3$ .
5.  $j(x) = x^3 + 4x^2 + 1$ .

### Théorème 1 (Variations d'un trinôme du second degré)

Un trinôme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  admet pour variations :

- Si  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\beta$	$+\infty$

- Si  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\beta$	$-\infty$

On peut calculer les coordonnées  $(\alpha, \beta)$  du sommet  $S$  de la parabole grâce aux formules

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = f(\alpha)$$

De plus,  $f$  s'écrit  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ . Cette écriture est la **forme canonique** du trinôme.

### Exemple 2

Pour chacun des trinômes  $P(x) = 2x^2 + 4x - 3$  et  $Q(x) = -(x - 2)^2$  :

1. Identifier les coefficients  $a, b, c$ .
2. Dresser le tableau de variation.

## 2 Racines et factorisation.

### Définition 2

Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  un trinôme du second degré et  $\mathcal{P}$  sa représentation graphique.

On appelle **racines** de  $f$  les solutions de l'équation  $f(x) = 0$ . Ce sont les abscisses des points d'intersection entre  $\mathcal{P}$  et l'axe des abscisses.

### Exemple 3

Les fonctions suivantes admettent-elles des racines ? Si oui, combien ? Et quelles sont-elles ?

1.  $f(x) = 3(x + 1)(x - 2)$ .
2.  $g(x) = 2(x - 3)^2$ .

### Proposition 1

Soit  $f(x)$  un trinôme du second degré et  $\mathcal{P}$  sa représentation graphique. Trois cas peuvent se produire :

- $f$  admet 2 racines, c'est-à-dire  $\mathcal{P}$  coupe l'axe des abscisses en 2 points.
- $f$  admet une racine, c'est-à-dire  $\mathcal{P}$  est tangente à l'axe des abscisses (1 point d'intersection).  
Dans ce cas, on dit que la racine est une racine double.
- $f$  n'admet pas de racine, c'est-à-dire  $\mathcal{P}$  ne coupe pas l'axe des abscisses.

**Définition 3 (Discriminant)**

Soit  $f(x)$  un trinôme du second degré dont la forme développée réduite est  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . On appelle **discriminant** de ce trinôme le nombre  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Exemple 4**

Calculer les discriminants des trinômes suivants :

1. Soit  $h(x) = x^2 - 4x + 3$ .
2. Soit  $i(x) = 2x^2 - 4x + 2$ .
3. Soit  $j(x) = -3x^2 + 12x - 15$

**Théorème 2 (Central)**

Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  un trinôme.

— si le discriminant  $\Delta$  de  $f(x)$  est strictement positif alors  $f(x)$  admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et on peut factoriser  $f(x)$  en  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

— si le discriminant de  $f(x)$  est nul alors  $f(x)$  admet une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a} (= \alpha)$$

et on peut factoriser  $f(x)$  en  $f(x) = a(x - x_0)^2$ .

— si le discriminant de  $f(x)$  est strictement négatif alors  $f(x)$  ne possède pas de racine.  
et on ne peut pas factoriser  $f(x)$  en un produit de termes de degré 1.

**Exemple 5**

Calculer les racines (éventuelles) des trinômes de l'exemple 4, puis factoriser ces trinômes (si possible).