1 Rappels de la classe de seconde.

1.1 Variations de fonctions.

Définition 1
Une fonction est **croissante** (respectivement **décroissante**) sur un intervalle si les images de nombres dans cet intervalle sont rangées dans le même ordre (respectivement l'ordre inverse) que ces nombres.

Exemple 1
La fonction carré $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$. Par exemple, $(-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2$. Pour exhiber les variations d'une fonction, on construit souvent un tableau.

x	$-\infty$	0
x^2	$+\infty$ ↘	0

Définition 2
Le **minimum** (respectivement le **maximum**) d'une fonction est la plus petite (respectivement la plus grande) valeur atteinte par cette fonction.
On appelle **extremum**, un minimum ou un maximum.

Exemple 2
D'après le tableau de variations précédent, 0 est le minimum de la fonction $f :]-\infty; 0] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Il est atteint pour $x = 0$ et $f(x)$ ne possède pas de maximum.

1.2 Trinôme du second degré.

Définition 3
On dit qu'une fonction $f(x)$ est un trinôme du second degré si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a doit être non nul.

Exemple 3
- La fonction $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ est un trinôme du second degré.
- La fonction $h(x) = 3(x-1)^2 + 1 = 3(x^2 - 2x + 1) + 1 = 3x^2 - 6x + 4$ est un trinôme du second degré.
- La fonction $i(x) = 4(x-1)(x+2) = 4(x^2 - x + 2x - 2) = 4x^2 + 4x - 8$ est un trinôme du second degré.
- La fonction affine $i(x) = 5x + 3$ n'est pas un trinôme du second degré.
- Le polynôme $j(x) = x^3 + 4x^2 + 1$ n'est pas un trinôme du second degré.

1.3 Variations d'un trinôme du second degré

Théorème 1
Un polynôme de degré 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet pour variations :

— Si $a > 0$

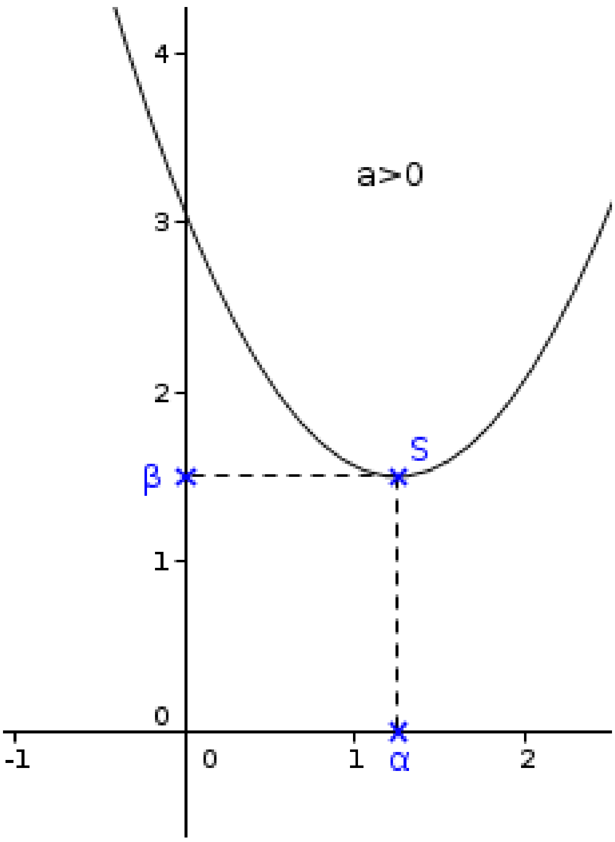
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

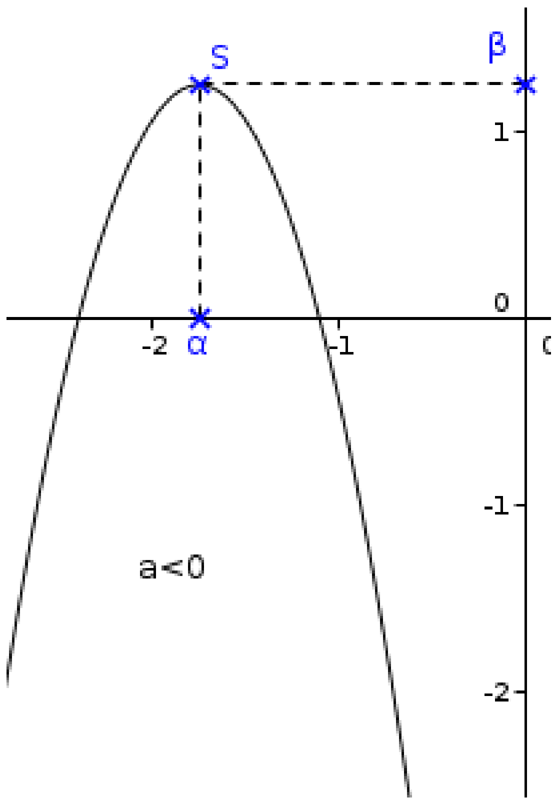
— Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

On peut calculer les coordonnées (α, β) du sommet S de la parabole grâce aux formules

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = f(\alpha)$$





2 Intersection d'une parabole avec l'axe des abscisses.

Proposition 1 (Positions de paraboles)
Il n'y a que deux possibilités pour une parabole $\mathcal{P} : y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ de couper l'axe des abscisses en deux points :

- Soit elle admet un minimum strictement négatif (cas $a > 0, \beta < 0$).
- Soit elle admet un maximum strictement positif.(cas $a < 0$ *et* $\beta > 0$)

La parabole est tangente à l'axe des abscisses si et seulement si son extremum est nul ($\beta = 0$).

2.1 Racines d'un trinôme.

Définition 4
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré et son graphe $\mathcal{P} : y = f(x)$.

- Si $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points $A_1(x_1, 0)$ et $A_2(x_2, 0)$, on dit que x_1 et x_2 sont les deux **racines** du trinôme du second degré $f(x)$.
- Si une parabole $\mathcal{P} : y = ax^2+bx+c$ coupe l'axe des abscisses en un seul point $A_0(x_0, 0)$, on dit que x_0 est la **racine double** du trinôme du second degré $f(x)$.

Autrement dit, x est une racine de $f(x)$ si et seulement si $f(x) = 0$.

Exemple 4
Soit $f(x) = 3(x+1)(x-2) = 3x^2 - 3x - 6$. -1 et 2 sont les deux racines de $f(x)$.
En effet, $f(-1) = 3(-1+1)(-1-2) = 3 \times 0 \times -3 = 0$ et $f(2) = 3(2+1)(2-2) = 3 \times 3 \times 0 = 0$.
Soit $g(x) = 2(x-3)^2 = 2(x^3 - 6x + 9) = 2x^2 - 12x + 18$. 3 est racine double. En effet, $g(3) = 2 \times 0^2 = 0$ et pour tout $x \neq 3$,$x - 3 \neq 0$ par suite $(x-3)^2 \neq 0$ et en définitive $g(x) = 2(x-3)^2 \neq 0$.

Proposition 2 (Reformulation de la proposition de la position d'une parabole)

- Un trinôme du second degré admet deux racines si et seulement si a et β sont de signes contraires ou encore si et seulement si $a\beta < 0$.
- Un trinôme du second degré admet une racine double si et seulement si $\beta = 0$.

2.2 Calcul des racines et factorisation.

Définition 5 (Discriminant)
Soit $f(x)$ un trinôme du second degré dont la forme développée réduite est $f(x) = ax^2 + bx + c$. On appelle **discriminant** de ce trinôme le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.
On admet que $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Exemple 5

- Soit $h(x) = x^2 - 4x + 3$, $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 = 4 = 2^2 > 0$.
- Soit $i(x) = 2x^2 - 4x + 2$, $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$.
- Soit $j(x) = -3x^2 + 12x - 15$, $\Delta = 12^2 - 4(-3)(-15) = 144 - 180 < 0$

Théorème 2 (Central)
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré sous forme développée réduite.

- $f(x)$ admet deux racines x_1, x_2 si et seulement si son discriminant est strictement positif.
  Dans ce cas, on a :
  $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
  Et le trinôme peut se factoriser en $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
- $f(x)$ admet une racine double x_0 si et seulement si son discriminant est nul.
  Dans ce cas, on a :
  $$x_0 = -\frac{b}{2a}(=\alpha)$$
  Et le trinôme peut se factoriser en $f(x) = a(x-x_0)^2$.
- $f(x)$ ne possède pas de racine si et seulement si son discriminant est strictement négatif.
  Dans ce cas $f(x)$ ne peut pas se factoriser en un produit de termes de degré 1.

Exemple 6
On reprend les exemples précédents :

- Pour $h(x)$, $x_1 = \dfrac{4+2}{2\times 1} = 3$ et $x_2 = \dfrac{4-2}{2\times 1} = 1$. On vérifie bien $(x-1)(x-3) = x^2 - x - 3x + 3 = h(x)$
- Pour $i(x)$, $x_0 = -\dfrac{-4}{2\times 2} = 1$. On vérifie bien $2(x-1)^2 = 2(x^2-2x+1) = 2x^2 - 4x + 2 = i(x)$.
- Pour $j(x)$. Pour tout réel x, $-3(x-2)^2 - 3 = -3x^2 + 12x - 12 - 3 = j(x) < 0$