

1 Rappels de la classe de seconde.

1.1 Variations de fonctions.

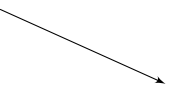
Définition 1

Une fonction est **croissante** (respectivement **décroissante**) sur un intervalle si les images de nombres dans cet intervalle sont rangées dans le même ordre (respectivement l'ordre inverse) que ces nombres.

Exemple 1

La fonction carré $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est décroissante sur $] -\infty; 0]$. Par exemple, $(-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2$. Pour exhiber les variations d'une fonction, on construit souvent un tableau.

x	$-\infty$	0
x^2	$+\infty$	0



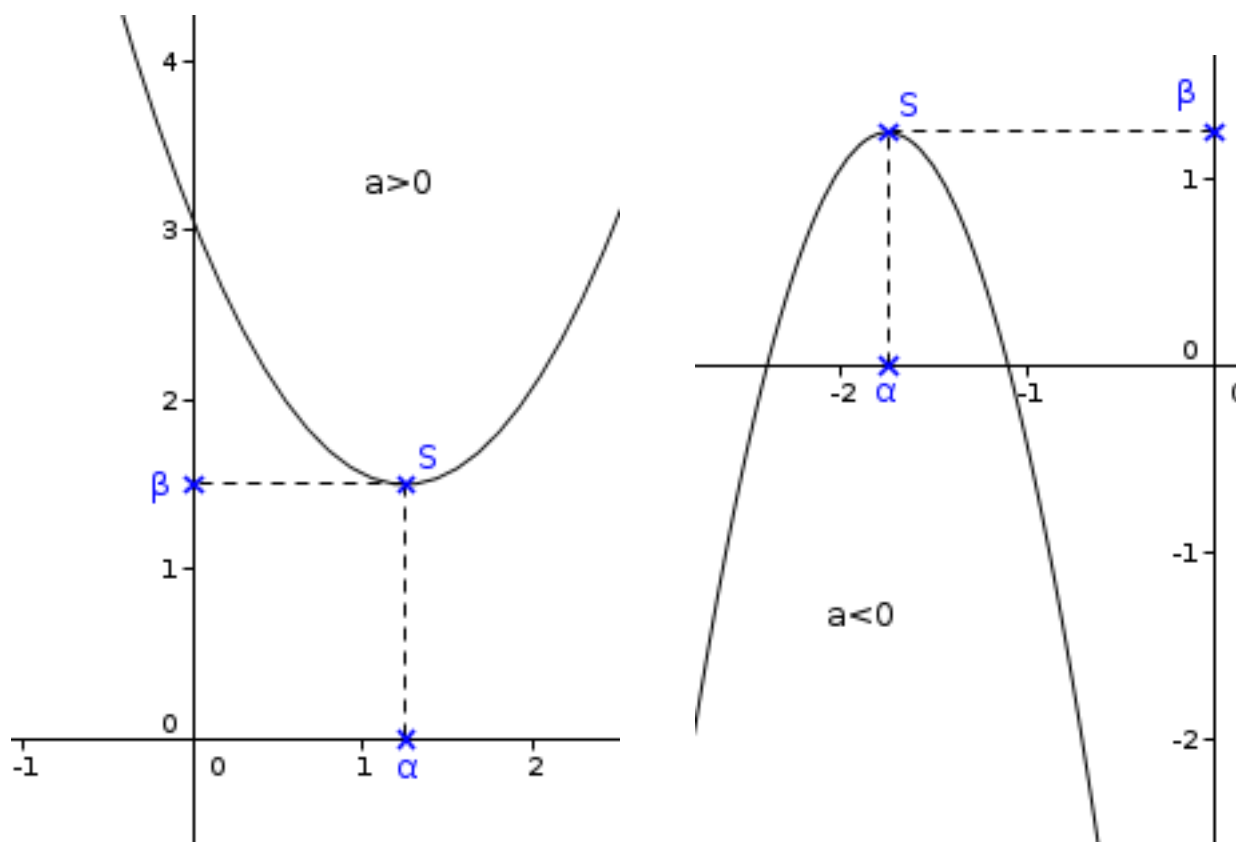
Définition 2

Le **minimum** (respectivement le **maximum**) d'une fonction sur un intervalle est la plus petite (respectivement la plus grande) valeur atteinte par cette fonction sur cet intervalle.

On appelle **extremum**, un minimum ou un maximum.

Exemple 2

D'après le tableau de variations précédent, 0 est le minimum de la fonction $f :] -\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Il est atteint pour $x = 0$ et $f(x)$ ne possède pas de maximum.



2 Intersection d'une parabole avec l'axe des abscisses.

Proposition 1 (Positions de paraboles)

Il n'y a que deux possibilités pour une parabole $\mathcal{P} : y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ de couper l'axe des abscisses en deux points :

- Soit elle admet un minimum strictement négatif (cas $a > 0$ et $\beta < 0$).
- Soit elle admet un maximum strictement positif (cas $a < 0$ et $\beta > 0$)

La parabole est tangente à l'axe des abscisses si et seulement si son extremum est nul ($\beta = 0$).

2.1 Racines d'un trinôme.

Définition 3

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré et son graphe $\mathcal{P} : y = f(x)$.

- Si \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses en deux points $A_1(x_1, 0)$ et $A_2(x_2, 0)$, on dit que x_1 et x_2 sont les deux **racines** du trinôme du second degré $f(x)$.
- Si une parabole $\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des abscisses en un seul point $A_0(x_0, 0)$, on dit que x_0 est la **racine double** du trinôme du second degré $f(x)$.

Autrement dit, x est une racine de $f(x)$ si et seulement si $f(x) = 0$.

Exemple 3

Soit $f(x) = 3(x + 1)(x - 2) = 3x^2 - 3x - 6$. -1 et 2 sont les deux racines de $f(x)$.

En effet, $f(-1) = 3(-1 + 1)(-1 - 2) = 3 \times 0 \times -3 = 0$ et $f(2) = 3(2 + 1)(2 - 2) = 3 \times 3 \times 0 = 0$.

Soit $g(x) = 2(x - 3)^2 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2 - 12x + 18$. 3 est racine double. En effet, $g(3) = 2 \times 0^2 = 0$ et pour tout $x \neq 3, x - 3 \neq 0$ par suite $(x - 3)^2 \neq 0$ et en définitive $g(x) = 2(x - 3)^2 \neq 0$.

Proposition 2 (Reformulation de la proposition de la position d'une parabole)

- Un trinôme du second degré admet deux racines si et seulement si a et β sont de signes contraires ou encore si et seulement si $a\beta < 0$.
- Un trinôme du second degré admet une racine double si et seulement si $\beta = 0$.

2.2 Calcul des racines et factorisation.

Définition 4 (Discriminant)

Soit $f(x)$ un trinôme du second degré dont la forme développée réduite est $f(x) = ax^2 + bx + c$. On appelle **discriminant** de ce trinôme le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

On admet que $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$.

Exemple 4

- Soit $h(x) = x^2 - 4x + 3$, $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 = 4 = 2^2 > 0$.
- Soit $i(x) = 2x^2 - 4x + 2$, $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$.
- Soit $j(x) = -3x^2 + 12x - 15$, $\Delta = 12^2 - 4(-3)(-15) = 144 - 180 < 0$

Théorème 1 (Central)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré sous forme développée réduite.

- $f(x)$ admet deux racines x_1, x_2 si et seulement si son discriminant est strictement positif.
Dans ce cas, on a :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Et le trinôme peut se factoriser en $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- $f(x)$ admet une racine double x_0 si et seulement si son discriminant est nul.
Dans ce cas, on a :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} (= \alpha)$$

Et le trinôme peut se factoriser en $f(x) = a(x - x_0)^2$.

- $f(x)$ ne possède pas de racine si et seulement si son discriminant est strictement négatif.
Dans ce cas $f(x)$ ne peut pas se factoriser en un produit de termes de degré 1.

Exemple 5

On reprend les exemples précédents :

- Pour $h(x)$, $x_1 = \frac{4+2}{2 \times 1} = 3$ et $x_2 = \frac{4-2}{2 \times 1} = 1$. On vérifie bien $(x-1)(x-3) = x^2 - x - 3x + 3 = h(x)$
- Pour $i(x)$, $x_0 = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1$. On vérifie bien $2(x-1)^2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2x^2 - 4x + 2 = i(x)$.
- Pour $j(x)$. Pour tout réel x , $-3(x-2)^2 - 3 = -3x^2 + 12x - 12 - 3 = j(x) < 0$