Master 2 Economie & Ingénierie Financière - 272

Université Paris Dauphine - PSL

# Modélisation de produits structurés

Documentation technique

*Auteurs :*

Naïm Lehbiben

Baptiste Zloch

Hugo Soleau

Mathieu Monnot

17 avril 2024

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

## 1.1 Présentation du sujet

Ce document constitue une documentation technique détaillée élaborée dans le cadre du cours de Modélisation et Pricing de produits structurés. L'objectif de ce projet est de fournir une base solide pour la création d'une API de pricing capable de gérer une large variété de produits financiers. Pour ce faire, une compréhension approfondie des formules de pricing et des mécanismes sous-jacents est indispensable.

Le domaine des produits structurés est vaste et complexe, incluant mais ne se limitant pas aux obligations, aux options (vanilles et exotiques), ainsi qu'à divers instruments dérivés. Chaque catégorie de produit possède ses propres spécificités en termes de modélisation et de détermination des prix. Cette documentation a pour vocation de rassembler et d'expliciter l'ensemble des formules utilisées dans le cadre de notre projet, offrant ainsi une référence complète pour le développement de l'API de pricing.

En se concentrant sur des détails techniques précis, ce livret sert de pierre angulaire pour le développement d'outils de pricing avancés. L'accent est mis sur la rigueur mathématique, la précision des modèles utilisés, et l'adaptabilité des méthodes de pricing aux différentes classes d'actifs.

# Chapitre 2

# Obligation à taux fixe

## 2.1 Calcul des Taux d'Intérêt et du Facteur d'Actualisation

La classe `Rate` dans notre modèle Python joue un rôle crucial dans le pricing des obligations. Elle permet de définir les taux d'intérêt, qui peuvent être continus ou composés, et d'appliquer différentes méthodes d'interpolation pour les courbes de taux.

### 2.1.1 Facteur d'Actualisation

Le facteur d'actualisation, calculé à partir du taux d'intérêt, est utilisé pour actualiser les paiements futurs de l'obligation au présent. La formule pour le facteur d'actualisation peut être l'une des suivantes, en fonction de la nature du taux d'intérêt :

$$\text{Facteur d'actualisation} = \begin{cases} e^{-r\cdot t} & \text{pour un taux continu,} \\ \frac{1}{(1+r)^t} & \text{pour un taux composé,} \end{cases}$$

où $r$ représente le taux d'intérêt et $t$ la période de temps jusqu'à l'échéance.

## 2.2 Pricing des Obligations

Le prix d'une obligation, qu'elle soit zéro-coupon ou couponnée, peut être calculé en utilisant le facteur d'actualisation approprié.

### 2.2.1 Prix d'une Obligation Zéro-Coupon

$$\text{Prix} = \text{Nominal} \times \text{Facteur d'actualisation.}$$

### 2.2.2 Prix d'une Obligation Couponnée

Pour une obligation couponnée, le prix est la somme actualisée de tous les paiements futurs (coupons) et du remboursement du nominal à la maturité :

$$\text{Prix} = \left( \sum_{i=1}^{n} C_i \times \text{Facteur d'actualisation pour } t_i \right) + \text{Nominal} \times \text{Facteur d'actualisation pour } t_n,$$

où $C_i$ est le montant du coupon payable à l'instant $t_i$, et $t_n$ est le moment du remboursement du nominal.

## 2.3 Sensibilités

### 2.3.1 Yield to maturity

L'analyse de sensibilité, notamment le calcul du rendement à l'échéance (YTM), utilise le facteur d'actualisation pour ajuster le taux $y$ afin que le prix calculé corresponde au prix du marché :

$$\text{Prix cible} = \left( \sum_{i=1}^{n} C_i \times \text{Facteur d'actualisation pour } y \text{ et } t_i \right) + \text{Nominal} \times \text{Facteur d'actualisation pour } y \text{ et } t_n.$$

### 2.3.2 Duration d'une Obligation

La duration d'une obligation mesure la sensibilité de son prix aux changements de taux d'intérêt. Elle est définie comme le temps moyen pondéré jusqu'à la réception des flux de paiements de l'obligation.

#### Duration d'une Obligation Zéro-Coupon

Pour une obligation zéro-coupon, qui ne paie pas de coupons et rembourse le nominal à l'échéance, la duration est équivalente à la période de temps jusqu'à l'échéance :

$$\text{Duration}_{\text{zéro-coupon}} = T,$$

où $T$ est la maturité de l'obligation. Cela signifie que la sensibilité du prix d'une obligation zéro-coupon aux changements des taux d'intérêt est directement proportionnelle à sa maturité.

#### Duration d'une Obligation Couponnée

La duration d'une obligation couponnée est calculée comme la somme pondérée des temps jusqu'aux paiements des coupons et du remboursement du nominal, pondérée par la valeur actuelle de ces paiements. Elle est par définition inférieur à la maturité de l'obligation car des coupons sont versés pendant la durée de vie de l'obligation.

$$\text{Duration}_{\text{couponnée}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \times PV(C_i) + t_n \times PV(\text{Nominal})}{\text{Prix de l'obligation}},$$

où $PV(C_i)$ est la valeur actuelle du $i$-ème coupon, $t_i$ est le temps jusqu'au paiement du $i$-ème coupon, et $t_n$ est le temps jusqu'au remboursement du nominal.

# Chapitre 3

# Options

## 3.1 Option Vanilles

### 3.1.1 Notations et formules de base

Nous utilisons les notations suivantes pour les options vanilles :

— $S_0$ : Prix actuel du sous-jacent.
— $K$ : Prix d'exercice de l'option.
— $T$ : Temps jusqu'à l'échéance, en années.
— $r$ : Taux d'intérêt sans risque pour les options sur actions.
— $N(\cdot)$ : Fonction de distribution cumulative de la loi normale.
— $\sigma$ : Volatilité du sous-jacent.
— $q$ : Le taux de dividende continu.

### 3.1.2 Payoff & formules

#### Payoff à maturité

$$\text{Payoff}_{\text{Call}} = \max(S_T - K, 0)$$

$$\text{Payoff}_{\text{Put}} = \max(K - S_T, 0)$$

#### Formules

Le pricing pour une option d'achat (Call) et une option de vente (Put) sur actions est donné par :

$$C = S_0 \cdot e^{-q \cdot T} \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2)$$
$$P = K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(-d_2) - S_0 \cdot e^{-q \cdot T} \cdot N(-d_1)$$

### 3.1.3 Greeks Options Vanilles

#### Delta ($\Delta$)

$$\Delta_{\text{call}} = N(d_1),$$
$$\Delta_{\text{put}} = N(d_1) - 1.$$

**Gamma ($\Gamma$)**

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}.$$

**Theta ($\Theta$)**

$$\Theta_{\text{call}} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2),$$
$$\Theta_{\text{put}} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2).$$

**Vega ($\nu$)**

$$\nu = S_0\sqrt{T}N'(d_1).$$

**Rho ($\rho$)**

$$\rho_{\text{call}} = TKe^{-rT}N(d_2),$$
$$\rho_{\text{put}} = -TKe^{-rT}N(-d_2).$$

## 3.2 Options Binaires

Les options binaires, aussi connues sous le nom d'options "cash or nothing", fournissent un paiement fixe si elles finissent "in-the-money" à l'expiration. Autrement, elles expirent sans valeur.

### 3.2.1 Pricing des Options Binaires

Pour une option d'achat binaire "cash-or-nothing", le pricing est donné par la formule suivante :

$$\text{Prix}_{\text{call}} = e^{-rT}N(d_2),$$

et pour une option de vente :

$$\text{Prix}_{\text{put}} = e^{-rT}N(-d_2),$$

où $N$ est la fonction de distribution cumulative de la loi normale, $r$ est le taux d'intérêt sans risque, et $T$ est le temps jusqu'à l'échéance. La variable $d_2$ est calculée à partir des paramètres de l'option et du sous-jacent.

### 3.2.2 Greeks des Options Binaires

**Delta**

Le Delta mesure la sensibilité du prix de l'option aux changements dans le prix du sous-jacent. Il est défini comme suit :

Pour une option call :

$$\Delta_{\text{call}} = e^{-rT}\frac{N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

Pour une option put :

$$\Delta_{\text{put}} = -e^{-rT}\frac{N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

**Gamma**

Le Gamma mesure la sensibilité du delta à un changement dans le prix du sous-jacent. Pour les options binaires, le gamma est exprimé par :

$$\Gamma = -\frac{e^{-rT} N'(d_2) d_1}{S^2 \sigma^2 T}$$

**Vega**

Le Vega mesure la sensibilité du prix de l'option aux changements de la volatilité du sous-jacent. Il est calculé comme suit :

$$\text{Vega} = S e^{-rT} N'(d_1) \sqrt{T}$$

**Rho**

Le Rho mesure la sensibilité du prix de l'option aux changements dans le taux d'intérêt sans risque. Pour les options binaires, le rho est donné par :

Pour une option call :

$$\rho_{\text{call}} = T e^{-rT} N(d_2)$$

Pour une option put :

$$\rho_{\text{put}} = -T e^{-rT} N(-d_2)$$

**Theta**

Le Theta mesure la sensibilité du prix de l'option au passage du temps. Pour les options binaires, le theta peut être exprimé comme :

$$\Theta = \frac{-e^{-rT} N'(d_2) \sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT} N(d_2) - rSe^{-qT} N(d_1)$$

Notez que $N'(d)$ représente la densité de probabilité de la loi normale standard, $d_1$ et $d_2$ sont calculés à partir des paramètres standard des modèles de pricing d'options, $S$ est le prix actuel du sous-jacent, $K$ est le prix d'exercice de l'option, $\sigma$ est la volatilité, $r$ est le taux d'intérêt sans risque, et $T$ est le temps jusqu'à l'échéance.

## 3.3 Options Barrières

Les options barrières sont des options dont l'activation ou la désactivation dépend du prix du sous-jacent atteignant une barrière spécifique avant l'expiration.

### 3.3.1 Classification des Options Barrières

Les options barrières se classent en plusieurs catégories :

— **Knock-In** : L'option prend effet seulement si le sous-jacent atteint la barrière.
— **Knock-Out** : L'option est annulée si le sous-jacent atteint la barrière.

Ces options peuvent être plus spécifiquement catégorisées en *up-and-in*, *up-and-out*, *down-and-in*, et *down-and-out*, selon la direction de la barrière par rapport au prix initial du sous-jacent.

### 3.3.2 Modélisation de la Trajectoire du Sous-jacent

Le modèle Black-Scholes est un cadre fondamental pour évaluer les options, basé sur certaines hypothèses simplificatrices concernant les marchés financiers. Il utilise l'équation différentielle stochastique (EDS) pour modéliser la dynamique du prix du sous-jacent, ainsi que sa solution explicite pour simuler les trajectoires de prix.

#### Équation Différentielle Stochastique

L'équation différentielle stochastique qui décrit la variation du prix $S(t)$ du sous-jacent dans le temps selon le modèle Black-Scholes est donnée par :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

où :

— $S(t)$ est le prix du sous-jacent à l'instant $t$,

— $\mu$ représente le taux de rendement attendu de l'actif,

— $\sigma$ est la volatilité du sous-jacent,

— $dW(t)$ est l'incrément du processus de Wiener (ou mouvement brownien) qui représente la composante aléatoire de la variation du prix.

#### Solution Explicite

La solution de l'EDS, qui permet de simuler les trajectoires du prix du sous-jacent, est donnée par l'expression suivante :

$$S(t) = S_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)\right),$$

où $S_0$ est le prix initial du sous-jacent à $t = 0$. Cette formule reflète l'évolution du prix du sous-jacent en tenant compte à la fois de la tendance moyenne du marché, ajustée par le taux de rendement $\mu$, et de l'incertitude ou le risque, modélisé par la volatilité $\sigma$ et le mouvement brownien $W(t)$.

La simulation de Monte Carlo peut ensuite être employée pour générer de multiples trajectoires possibles de $S(t)$, permettant d'estimer la valeur de l'option en fonction des différents scénarios de prix du sous-jacent à l'échéance.

### 3.3.3 Pricing des Options Barrières

Le pricing des options barrières est souvent réalisé à travers des simulations de Monte Carlo, qui génèrent de multiples trajectoires possibles pour le prix du sous-jacent et déterminent si la barrière a été atteinte pour chaque trajectoire.

$$\text{Prix} = \text{Valeur moyenne des paiements conditionnels à la barrière},$$

où la valeur moyenne est calculée sur l'ensemble des trajectoires simulées.

### 3.3.4 Greeks des Options Barrières

Les greeks des options barrières peuvent être estimés à partir de la pente du prix par rapport au paramètre souhaité, calculée sur l'ensemble des trajectoires simulées.

**Delta**

Le Delta mesure la sensibilité du prix de l'option au changement dans le prix du sous-jacent. Il est estimé comme suit :

$$\Delta = \frac{\text{Prix}_{S+\varepsilon} - \text{Prix}_{S-\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

où $\text{Prix}_{S+\varepsilon}$ et $\text{Prix}_{S-\varepsilon}$ représentent le prix de l'option avec une petite variation $\varepsilon$ dans le prix du sous-jacent $S$.

**Gamma**

Le Gamma mesure la sensibilité du Delta aux changements dans le prix du sous-jacent. Il est calculé comme :

$$\Gamma = \frac{\text{Prix}_{S+\varepsilon} - 2\text{Prix}_{S} + \text{Prix}_{S-\varepsilon}}{\varepsilon^2}$$

où $\text{Prix}_S$ est le prix de l'option sans variation.

**Vega**

Le Vega évalue la sensibilité du prix de l'option à la variation de la volatilité du sous-jacent. Il est estimé par :

$$\text{Vega} = \frac{\text{Prix}_{\sigma+\varepsilon} - \text{Prix}_{\sigma-\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

où $\text{Prix}_{\sigma+\varepsilon}$ et $\text{Prix}_{\sigma-\varepsilon}$ sont les prix de l'option avec une petite variation $\varepsilon$ de la volatilité $\sigma$.

**Rho**

Le Rho mesure la sensibilité du prix de l'option à un changement dans le taux d'intérêt. Il est donné par :

$$\text{Rho} = \frac{\text{Prix}_{r+\varepsilon} - \text{Prix}_{r-\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

en supposant une petite variation $\varepsilon$ dans le taux d'intérêt $r$.

**Theta**

Le Theta indique la sensibilité du prix de l'option au passage du temps, ou la dépréciation temporelle. Il est calculé comme :

$$\text{Theta} = \frac{\text{Prix}_{T+\text{un jour}} - \text{Prix}_{T}}{\text{un jour en années}}$$

où $\text{Prix}_{T+\text{un jour}}$ est le prix de l'option un jour plus tard, et $\text{Prix}_T$ est le prix actuel de l'option.

# Chapitre 4

# Stratégies d'options

La mise en œuvre de stratégies d'options permet de positionner sur le marché en fonction des anticipations de mouvement du prix du sous-jacent et de la volatilité. Nous présentons ci-dessous quelques stratégies de base et leur application pour les options sur actions.

## 4.1 Straddle

Le Straddle est une stratégie qui consiste à acheter simultanément une option d'achat et une option de vente avec le même prix d'exercice et la même échéance, dans l'anticipation d'une forte volatilité du sous-jacent.

$$\text{Prix}_{\text{Straddle}} = C + P$$

où $C$ est le prix de l'option d'achat et $P$ est le prix de l'option de vente.

## 4.2 Strangle

Le Strangle est une stratégie similaire au Straddle, mais les options achetées ont des prix d'exercice différents, généralement l'option de vente a un prix d'exercice inférieur à celui de l'option d'achat.

$$\text{Prix}_{\text{Strangle}} = C(K_1) + P(K_2)$$

où $K_1$ est le prix d'exercice de l'option d'achat, et $K_2$ celui de l'option de vente.

## 4.3 Butterfly

Cette stratégie combine la vente de deux options (Call ou Put) à un prix d'exercice moyen et l'achat d'une option à un prix d'exercice plus élevé et une autre à un prix d'exercice plus bas.

$$\text{Prix}_{\text{Butterfly}} = C(K_1) - 2C(K_2) + C(K_3)$$

## 4.4 Bull Spread

Ces stratégies impliquent l'achat et la vente d'options Call (Call Spread) ou d'options Put (Put Spread) avec des prix d'exercice différents.

### 4.4.1 Bull Call Spread

$$\text{Prix}_{\text{Call Spread}} = C(K_1) - C(K_2)$$

### 4.4.2 Bull Put Spread

$$\text{Prix}_{\text{Put Spread}} = P(K_1) - P(K_2)$$

## 4.5 Strips et Straps

Les strips et les straps sont des stratégies qui impliquent l'achat combiné d'options d'achat (calls) et de vente (puts) avec les mêmes prix d'exercice et dates d'expiration. La différence réside dans le nombre d'options achetées. Un strip consiste en l'achat d'une option d'achat et de deux options de vente, tandis qu'un strap implique l'achat de deux options d'achat et d'une option de vente.

### 4.5.1 Strips

$$\text{Prix}_{\text{Strip}} = C + 2P$$

où $C$ représente le prix de l'option d'achat et $P$ celui de l'option de vente.

### 4.5.2 Straps

$$\text{Prix}_{\text{Strap}} = 2C + P$$

avec $2C$ indiquant l'achat de deux options d'achat et $P$ l'achat d'une option de vente.

# Chapitre 5

# Produits Structurés

## 5.1 Reverse Convertibles

Les Reverse Convertibles sont des produits structurés combinant une obligation zéro-coupon et une option de vente. Ces produits offrent un coupon élevé en échange du risque de baisse sur le sous-jacent.

### 5.1.1 Formules de Pricing

Le prix d'un Reverse Convertible est donné par la somme du prix de l'obligation zéro-coupon et du coupon actualisé, moins la prime de l'option de vente. En supposant que le coupon est payé de manière unique à maturité La formule est :

$$\text{Prix} = \text{Prix de l'obligation} - \text{Prix de l'option} + \text{Coupon actualisé}.$$

### 5.1.2 Greeks

Les sensibilités d'un reverse convertible sont celle d'un zero coupon et c'est d'une option de vente standard.

## 5.2 Outperformer Certificates

Les Outperformer Certificates sont des produits qui permettent à l'investisseur de bénéficier d'une participation supérieure à 100% aux hausses du sous-jacent, tout en portant le risque de baisse.

### 5.2.1 Formules de Pricing

Le prix d'un Outperformer Certificate est calculé comme suit :

$$\text{Prix} = e^{-qT} S_0 + (\text{Participation} - 1) \times \text{Prix de l'option d'achat ATM},$$

où $q$ est le taux de dividende, $T$ est la maturité, $S_0$ est le prix spot du sous-jacent, et ATM indique que le prix d'exercice de l'option est au niveau du prix actuel du sous-jacent.

### 5.2.2 Greeks

Les greeks pour les Outperformer Certificates comprennent :

- Delta : $1 + (\text{Participation} - 1) \times \Delta_{\text{option}}$.
- Les autres greeks (Gamma, Theta, Vega, Rho) sont ajustés par Participation $- 1$.