L3 Physique
Modélisation Physique
19 février et 19 mars 2021
G. Roullet

Attention: 20% de la note sera donnée sur les réponses aux questions que vous devrez avoir remises sur Moodle ***avant*** *la date de votre TP.*

TP Propagation des ondes

Ce projet propose d'illustrer quelques propriétés linéaires de la propagation 1D des ondes longues de gravité de surface dans le domaine fermé $x \in [0,\ L]$. Elles obéissent au système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g\frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{\partial (Hu)}{\partial x} \end{aligned} \tag{1}$$

où $u(x,t)$ est la vitesse du fluide, $h(x,t)$ l'anomalie de hauteur d'eau et $H(x)$ la hauteur d'eau au repos. Le fluide étant confiné impose les conditions aux limites

$$u(0) = 0\,, \quad u(L) = 0\,. \tag{2}$$

Dans le cas d'un fond plat $H(x) = H_0$, ces ondes sont non dispersives car leur relation de dispersion est $\omega^2 = c^2k^2$ avec $c = \sqrt{gH}$. On propose d'étudier en particulier

1. la réponse à une perturbation initiale et la génération de deux ondes,
2. la réflection-transmission sur une discontinuité de $H(x)$,
3. la réfraction dans le cas d'une variation lente de $H(x)$,
4. le flux d'énergie d'une onde.

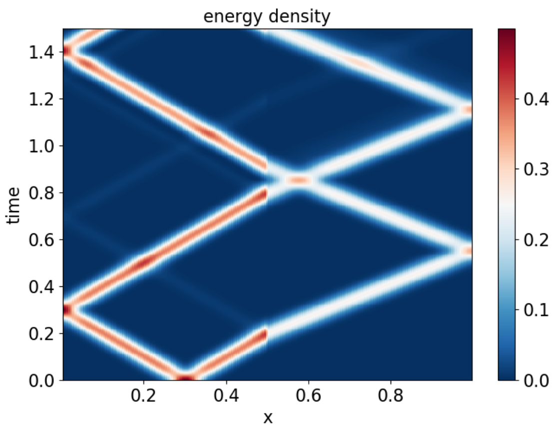

Figure 1: Diagrame espace-temps pour la densité d'énergie dans le cas d'un milieu présentant une discontinuité des propriétés en $x = 0.5$.

1 Questions préliminaires

Veuillez répondre à ces questions avant le TP. **Vous soumettrez vos réponses sous forme d'un script python** ou d'un Jupyter notebook. On discrétise le domaine $[0, 1]$ en $n = 100$ intervales réguliers (chaque intervale s'appelle une "maille"). On repère par x_i le centre de chaque maille. Soit $y_i = f(x_i)$, avec $f(x) = \cos(\pi x)$. On fait le choix de stocker les (x_i) et les (y_i) sous forme de `numpy array`: `x` et `y`.

1. Définir les vecteurs `x` et `y`.

2. A partir de ces vecteurs, faire la courbe associée à $f(x)$.

3. Calculer en python `zexact`, le `numpy array` associé à $z_i = f'(x_i)$ ainsi que `zapproche`, la dérivée estimée par différences finies (cf. la suite du TP).

4. Afficher les courbes associées. A quel point sont elles identiques ?

5. On prend maintenant $f(x) = e^{-100\,(x-0.2)^2}$. Itérer la boucle suivante: $\mathtt{y} \leftarrow f(\mathtt{x} - \alpha\, k)$, avec $k = 0, 1, \ldots 10$ et $\alpha = 0.1$, puis superposer toutes les courbes associées. Vous venez de décrire la propagation d'une onde vers la droite!

6. Améliorer la figure précédente en décalant chaque courbe verticalement d'une hauteur k, vous devez produire la figure 2. Maintenant que vous êtes là, lisez le reste du TP, vous en profiterez plus le jour J.

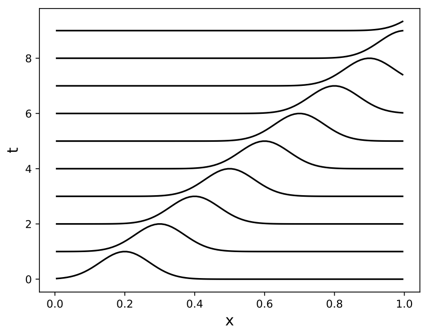

Figure 2: Propagation d'une onde vers la droite

2 Mise en place de l'intégration

L'intégration numérique de (1) se fait à l'aide d'un schéma en différences finies: l'intervale $[0,\, L]$ est divisé en n_x mailles de tailles identiques Δx. La hauteur $h(x, t)$ est discrétisée au centre des mailles, la vitesse $u(x, t)$ à l'interface entre deux mailles. Il s'agit d'une grille dite décalée. L'idée est que la différence $(h_{i+1} - h_i)/\Delta x$ donne directement le gradient de h au point u_i. La hauteur moyenne $H(x)$ est discrétisée à l'interface des mailles, comme u car (1) fait apparaître le produit Hu. A gauche et à droite du domaine on ajoute deux mailles supplémentaires (dit points fantômes), se trouvant donc à l'extérieur du domaine.

Pour la discrétisation en temps on note $(h^n,\, u^n)$ l'état à l'instant $t_n = n\Delta t$ où Δt est le pas de temps. Il existe de nombreuses discrétisations possibles. Certaines comme la méthode d'**Euler avant**:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - g\frac{\Delta t}{\Delta x}(h_{i+1}^n - h_i^n) \\ h_i^{n+1} &= h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(H_i u_i^n - H_{i-1}u_{i-1}^n) \end{aligned} \tag{3}$$

sont instables quelque soit le pas de temps Δt. Pour ce TP on utilisera une méthode **avant-arrière**:

$$\begin{aligned} (i)\ u_i^{n+1} &= u_i^n - g\frac{\Delta t}{\Delta x}(h_{i+1}^n - h_i^n) \\ (ii)\ h_i^{n+1} &= h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(H_i u_i^{n+1} - H_{i-1}u_{i-1}^{n+1})\,. \end{aligned} \tag{4}$$

La seule différence porte sur le calcul de h_i^{n+1} où l'on utilise u^{n+1} sitôt qu'elle est disponible plutôt que u^n. L'intégration se fait séquentiellement: d'abord u à l'étape (i) puis h à l'étape (ii). Ce schéma est stable si

$$\epsilon \leq 1\,, \tag{5}$$

où $\epsilon = \Delta t\sqrt{gH_{\max}}/\Delta x$ est le nombre de Courant. Le calcul ci-dessus peut être fait sur tous les points sauf les deux points fantômes, c'est à dire h_0^{n+1} et h_{nx+1}^{n+1}. Leurs valeurs sont calculées à chaque instant en utilisant les conditions aux limites (2). La condition d'imperméabilité donne $h_0^{n+1} = h_1^{n+1}$ et $h_{nx+1}^{n+1} = h_{nx}^{n+1}$.

Cette méthode peut être rendue précise en coupant l'étape (i) en deux (cf. annexe).

1. En partant du script à trous `wave1d.py` disponible sur moodle, implémenter la méthode *avant-arrière* et les conditions aux limites.

2. Vérifier que la méthode est instable lorsque (5) n'est pas satisfaite. Décrire ce qu'il se passe lorsque l'intégration est instable.

3. (*facultatif*) Implémenter des conditions aux limites périodiques.

4. (*facultatif*) Implémenter la méthode d'ordre 2 donnée en annexe.

A partir de maintenant, pour chaque question faire une figure, qui servira de support pour votre réponse.

3 Cas du milieu homogène

Commençons par analyser la phénoménologie par fond plat.

1. Représenter la propagation de l'onde dans un diagramme espace-temps. Décrire la figure en termes de propagation d'ondes.

2. Vérifier que si les conditions initiales sont discontinues, l'intégration numérique produit des oscillations qui n'ont pas lieu d'être. A partir de maintenant on utilisera des conditions initiales suffisamment lisses.

3. Etudier expérimentalement la relation liant $u(x)$ et $h(x)$ pour l'onde allant à gauche et l'onde allant à droite. Retrouver empiriquement la relation théorique liant $h(x) = \pm Z(x)\,u(x)$, où $Z = \sqrt{H(x)/g}$ est l'impédance du milieu.

4. En utilisant la relation théorique précédente, changer les conditions initiales sur $u(x)$ afin que seule l'onde se déplaçant vers la droite soit excitée.

4 Cas du milieu variable

1. Implémenter un milieu présentant une discontinuité $H(x < L_x/2) = 1$ et $H(x > L_x/2) = 2$. Décrire la phénoménologie de la propagation au niveau de la discontinuité à l'aide d'un diagramme espace-temps.

2. Vérifier la relation sur les coefficients de transmission et réflexion

$$T = \frac{2\,Z_t}{Z_i + Z_t}\,, \quad R = \frac{Z_t - Z_i}{Z_i + Z_t}$$

   où les indices i et t désigent les impédances du côté incident et transmis.

3. Implémenter un milieu présentant une double discontinuité $H(|x - L_x/2| > \sigma) = 1$ et $H(|x - L_x/2| < \sigma) = 2$, avec $\sigma = L_x/10$. Décrire la phénoménologie.

4. Implémenter un milieu lentement variable et observer la différence avec le cas de la discontinuité. Que se passe-t-il pour l'onde réfléchie?

5 Energie, flux d'énergie et quantité de mouvement

La densité d'énergie

$$e = \overbrace{\frac{1}{2}Hu^2}^{EC} + \overbrace{\frac{1}{2}gh^2}^{EP}\,, \tag{6}$$

somme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle, obéit à la loi de conservation

$$\partial_t e + \partial_x(gHuh) = 0\,, \tag{7}$$

où $gHuh$ le flux d'énergie. L'énergie totale E, intégrée sur le domaine, est donc constante au cours du temps.

1. Discuter la conservation de l'énergie totale E par la solution numérique.

2. Vérifier qu'on peut l'améliorer en prenant ϵ plus petit. Faire une étude de convergence à l'aide d'une courbe présentant $\Delta E/E$ en fonction de ϵ pour $\epsilon = 0,8/2^p$ avec $p = 0, 1, 2, 3, 4$.

3. Noter que pour une onde telle que $h = \pm Zu$ alors $e = u^2 H$ et $\partial_t e \pm \partial_x(ce) = 0$. L'énergie se propage donc à la vitesse $\pm c$. Faire un diagramme espace-temps représentant e et un autre représentant $gHuh$.

4. L'onde transporte aussi de la quantité de mouvement, dont la densité locale est $\pi = hu$. Pour une onde on a $\pi = \pm Ze$ et donc π se propage à la même vitesse que l'énergie. La quantité de mouvement intégrée sur le domaine est conservée . . . sauf lorsque l'onde se réfléchit aux bords. Illustrer cela. Qu'en déduire en terme de force ?

6 Annexe: méthode d'ordre 2 en temps

Il y a trois étapes

$$
\begin{aligned}
(i)\ u_i^* &= u_i^n - g\frac{\Delta t}{2\Delta x}(h_{i+1}^n - h_i^n)\\
(ii)\ h_i^{n+1} &= h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(H_i u_i^* - H_{i-1}u_{i-1}^*)\\
(iii)\ u_i^{n+1} &= u_i^* - g\frac{\Delta t}{2\Delta x}(h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1})\,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Le calcul de u^{n+1} est fait en deux temps: d'abord u^* correspondant $n+1/2$ en utilisant h^n puis u^{n+1} en utilisant h^{n+1}.

Pour comprendre pourquoi cette méthode est plus précise vous pouvez lire cet article https://www.av8n.com/physics/symplectic-integrator.htm de cet excellent site de ressources de physique. Et si vous voulez implémenter une méthode d'ordre 3 alors lisez cet article https://en.wikipedia.org/wiki/Symplectic_integrator