Ondes

1 Paquets d'ondes, vitesse de phase et vitesse de groupe, dispersion du paquets d'ondes ; animation des figures.

1) Préparez un paquet gaussien d'ondes harmoniques :

$$u(x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\delta_k} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{k_n - k_0}{\delta_k}\right)^2\right] \cos k_n x,\ \ k_n = 2\pi n\,.$$

Pour la représentation numérique prenez, par exemple, $k_0/2\pi = 30$, $\delta k/2\pi = 4$ et au lieu de l'infini – k_0/π (k_0 – vecteur d'onde central, δk – largeur du paquet en espace k).

Vérifiez comment la largeur du paquet change en fonction de sa "largeur" en espace k ($\delta k/2\pi = 2$ ou 8).

2) Affinez votre observation : ajoutez à votre graphique un enveloppe du paquet d'ondes (rappelez-vous la transformation de Fourier) :

$$U(x) = \pm \exp\left[-\left(\frac{x}{\delta_x}\right)^2\right],\ \ \delta_x = \frac{2}{\delta_k}\,.$$

3) La dynamique du paquet d'ondes est déterminée par la dynamique de ses composantes harmoniques : $\cos\left[kx - \omega(k)t\right]$, où $\omega(k)$ est la dispersion d'onde (changement de la fréquence circulaire ω en fonction du vecteur d'onde k). Animez la dynamique du paquet d'ondes :

$$u(x,t) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\delta_k} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{k_n - k_0}{\delta_k}\right)^2\right] \cos(k_n x - \omega(k_n)t)\,.$$

Pour cela utilisez la fonction, donnée partiellement dans l'espace du Moodle de cet activité, contrôlée par un menu `tkinter`, aussi mis à votre disposition dans Moodle (téléchargez l'archive zip contenant les fichiers nécessaires).

4) Nous utilisons l'expression approximative pour $\omega(k)$:

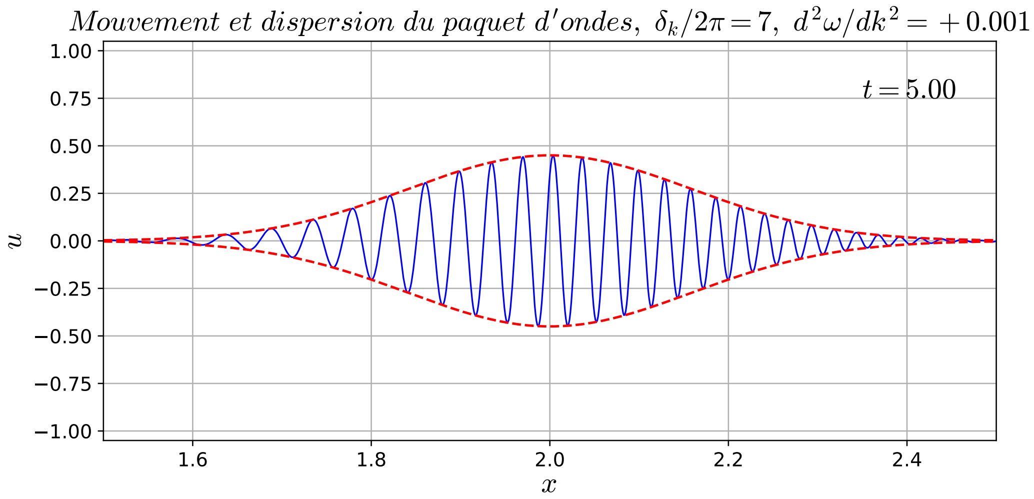
$$\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k - k_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}(k - k_0)^2\,.$$

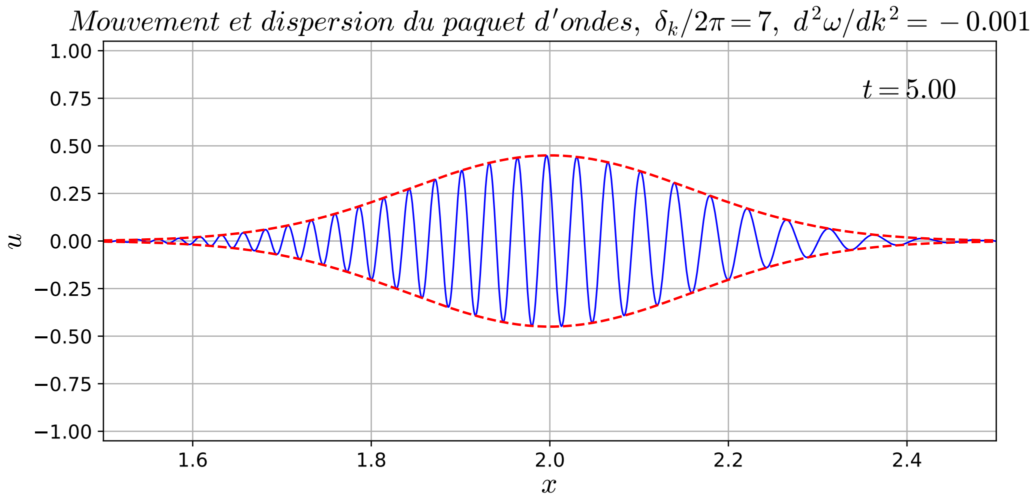
Si la dispersion d'ondes donnée par la fonction est linéaire ($\mathrm{d}^2\omega/\mathrm{d}k^2 = 0$) la forme du paquet est conservée. Par contre en cas de $\omega(k)$ non-linéaire il se disperse. Notez que la vitesse d'une onde harmonique est ω/k (vitesse de phase), la vitesse d'un paquet d'ondes – $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ (vitesse de groupe). On voit cela mieux si on ajoute la dispersion d'enveloppe (la diminution de son amplitude et l'augmentation de sa largeur) à notre animation :

$$U(x,t) = \sqrt{A(t)} \exp\left[-\left((x - \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}t)/\delta_x(t)\right)^2\right],$$

$$\delta_x(t) = \frac{2}{A(t)\delta_k},\ \ A(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (t/\tau_{\mathrm{disp}})^2}},\ \ \tau_{\mathrm{disp}} = \frac{2}{\left|\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right| \delta_k^2}$$

5) Illustrez la différence de la dispersion des paquets d'ondes pour $\mathrm{d}^2\omega/\mathrm{d}k^2$ positive et négative.





2 Ondes 2D en 3D, interférence.

1) Avant de commencer importez le module `axes3d` :
   `from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d`
   et étudiez la fonction `plot_surface()` :
   `fig = plt.figure(1); plt.clf()`
   `ax = axes3d.Axes3D(fig)`
   `print(help(ax.plot_surface))`.

2) Notez la façon de construire les matrices (X, Y) pour les distributions 2D :
   `X, Y = np.  meshgrid(x, y)`

3) Programmez la fonction donnant l'onde d'une source ponctuelle :
   `Z1 = np.cos(2*np.pi*R)/R`, ou `R = np.sqrt((X-x1)**2 + (Y-y1)**2)` et `x1,y1` est la position de la source.

4) Ajoutez ondes de deux sources `Z = Z1+Z2` et visualisez l'interférence (de Young) par `wframe = ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, shade = False, linewidth = 0, antialiased = 0, cmap = 'ocean')`

5) Illustrez le changement de l'interférence en fonction de la distance entre les sources.

6) Simulez la focalisation par une lentille en prenant plusieurs sources avec la phase qui change en fonction de la distance du centre de la lentille x : $\varphi = \alpha x^2$.