Lois de Kepler

Nous allons utiliser Python et la dynamique de Newton pour vérifier numériquement les trois lois empiriques de Kepler :

- **Première loi – Loi des orbites** : Les planètes (P) soumises à la force centripète (la force gravitationnelle) du Soleil (S), qui varie comme l'inverse du carré de la distance SP, décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.
- **Seconde loi – Loi des aires** : Le segment SP entre le soleil et la planète balaye pendant un intervalle de temps donné la même aire quelle que soit sa position sur la trajectoire.
- **Troisième loi – Loi des périodes** : Le carré de la période sidérale T de la planète (temps entre deux passages successifs par le même point par rapport au Soleil) est directement proportionnel au cube du grand axe a de sa trajectoire elliptique.

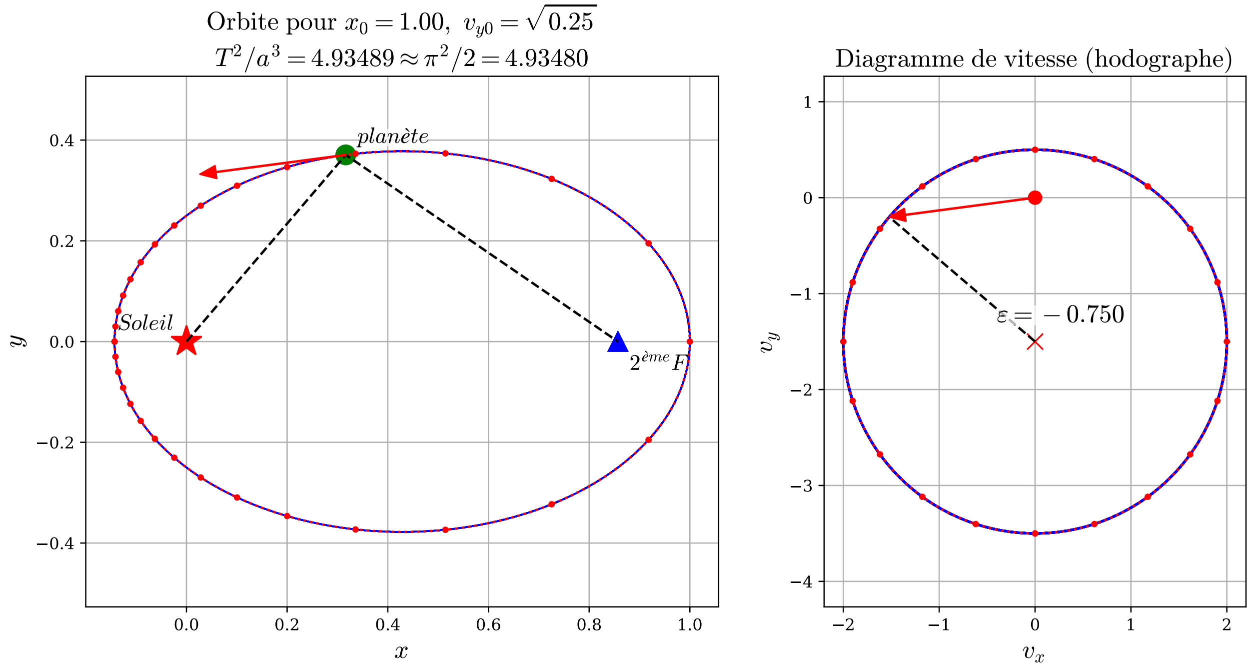

Figure 1: Orbite et hodographe de vitesse.

1. Utilisez la fonction `scipy.integrate.odeint()` pour résoudre le système de 4 équations différentielles de premier ordre décrivant le mouvement d'une planète autour du soleil :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x, \ \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y, \ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

où (x, y) – la position de la planète (P), $v_x(t) = \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$ et $v_y(t) = \mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$. Pour la simplicité prenez les conditions initiales : $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = v_{y0}$ (au début $x_0 = 1$ et $v_{y0} = \sqrt{1/4}$ – figure 1).

Présentez la trajectoire (x, y) et l'hodographe des vitesses (v_x, v_y) dans la même figure avec la taille inégale des subplots en utilisant

`fig,ax = plt.subplots(1,2, gridspec_kw = {'width_ratios':(3,2)}, num = 'Orbit', clear = True)` et `ax[0].plot(x,y)`, `ax[1].plot(vx,vy)`.

Pour avoir les formes correctes des courbes appliquez `ax[n].set_aspect('equal')`, où `n = 0, 1`.

2. Prouvez que la trajectoire de la planète calculée numériquement (essayez $v_{y0} = 1/2$, $\sqrt{1/2}$, 1, $\sqrt{1.6}$, $\sqrt{1.8}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2.25}$) est une figure conique (ellipse, parabole ou hyperbole) décrite en cordonnées polaires r, φ par l'équation

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \ .$$

   Utilisez pour cela la fonction `scipy.optimize.curve_fit()` d'ajustement par la méthode des moindres carrés (fonction très utile pour l'ajustement des courbes théoriques aux mesures expérimentales) pour trouver les paramètres p et ε (l'excentricité). Présentez l'écart entre les points numériques et théoriques $r_{num} - r(\varphi_{num})$ en fonction du temps dans une figure de comparaison.

3. Prouvez que pour toutes les trajectoires possibles l'hodographe des vitesses est un cercle de rayon $v_R = v_{y0}/(1+\varepsilon)$ et centre $(0, \varepsilon v_R)$. Cette propriété est due à la troisième constante du mouvement, le vecteur de Laplace-Runge-Lenz (en plus de la conservation de l'énergie et de la conservation du moment cinétique $\vec{L}$) :

$$\vec{v} \wedge \vec{L} + U(r)\vec{r} = \overrightarrow{const}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}, \ U(r) = -G\frac{mM}{r} \ .$$

4. Trouvez numériquement le grand axe a et la période orbitale T et vérifiez que T^2/a^3 est une constante pour toutes les trajectoires elliptiques (loi des périodes).

5. Calculez la position du deuxième foyer F de la trajectoire elliptique et vérifiez que $SP + PF = a$ pour tous les points de la trajectoire – la $2^{ème}$ preuve que la trajectoire est vraiment elliptique et n'est pas simplement une courbe qui ressemble à l'ellipse (première loi de Kepler). Présentez le résultat obtenu pour $SP + PF - a$ en fonction du temps dans la figure de comparaison.

6. Prouvez que votre trajectoire est une ellipse par la vérification de sa propriété de focalisation : dans toutes les points de la trajectoire l'angle d'incidence des rayons provenant du soleil doit être égal à l'angle de réflexion vers le second foyer – $3^{ème}$ ligne dans la figure de comparaison. Rappelez-vous que la tangente de la trajectoire est donnée par le vecteur de la vitesse.

7. Pour vérifier la loi des aires observer le changement du produit vectoriel $(\vec{r} \wedge \vec{v})_z = x \cdot v_y - y \cdot v_x$ en fonction du temps. Ajouter la différence des valeurs numériques et la valeur théorique $x_0 \cdot v_{y0}$ à la figure de comparaison. Noter que la loi des aires est équivalente à la conservation du moment cinétique de la planète $\vec{L}$.

8. Étudiez le changement de la trajectoire si la loi de la force centripète ne correspond pas exactement à $1/R^2$: prenez, par exemple, $1/R^2 + \alpha/R^4$ ($\alpha \ll 1$).

   N'oubliez pas pour la suite de revenir à la loi idéale.

9. Ajoutez à votre figure le Soleil – S (étoile rouge – `'*r'`), le deuxième foyer F (triangle bleu – `'^b'`) et la planète – P (cercle vert – `'og'`) et animez le mouvement de cette dernière avec SP et PF. Animez aussi l'hodographe des vitesses.