- Votre compte-rendu devra être déposé sur Moodle (cours "Physique numérique") au plus tard le 29 mars 2021 pour le groupe A (séance du 12 mars) et le 12 avril 2021 pour le groupe B (séance du 26 mars).
`https://moodlesciences.univ-brest.fr/moodle/course/view.php?id=367`
- N'oubliez pas de répondre aux questions où le signe ✎ apparaît dans la marge.
- Regrouper l'ensemble de vos documents (compte-rendu, graphes, scripts python (fichiers `.py`) dans une archive (format `.zip` par exemple) pour ne déposer **qu'un seul** fichier.
Votre compte rendu devra être un fichier au format `.pdf` (les formats `doc` ou `docx` ne sont pas autorisés) dans lequel vous répondrez aux différentes questions en y incluant vos résultats (données numériques, graphes, ...) et commentaires. N'oubliez pas de commenter largement vos programmes en précisant aussi les noms et nº complets des exercices auxquels ils se rapportent.
- Avant de quitter la salle, n'oubliez pas de sauvegarder votre travail sur une clé USB ou sur l'espace de stockage de votre ENT.

1 Quelques compléments d'électrostatique - Potentiel complexe

1.1 Potentiel complexe

Cette partie théorique est basée sur le livre de L. Landau et E. Lifchitz. "Physique théorique, tome 8, Électrodynamique des milieux continus. §3.3"

Dans le vide, en dehors des charges, le champ électrostatique $\vec{E}$ satisfait aux équations :

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \qquad (1) \qquad\qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \qquad (2)$$

On déduit de (2) que $\vec{E}$ peut s'écrire comme :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi \qquad (3) \qquad\qquad \text{et de (1) que : } \vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \qquad (4)$$

Dans le cas bidimensionnel où $\vec{E}$ est dans le plan (xOy) et ne dépend que des 2 coordonnées x et y, on peut choisir $\vec{A}$ selon la direction perpendiculaire à ce plan, (Oz) ; soit tel que : $\vec{A} = A\,\vec{u_z}$.

On a alors avec (3) :

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad (5)$$

et avec (4) :

$$E_x = \frac{\partial A}{\partial y}\,, \quad E_y = -\frac{\partial A}{\partial x}\,. \qquad (6)$$

Soit donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial A}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial A}{\partial x} \end{cases} \qquad (7)$$

Ces relations (7) entre les dérivées partielles de A et de φ sont les conditions de Cauchy-Riemann qui expriment le fait que la fonction $w(z) = \varphi - iA$ est une fonction analytique de $z = x + iy$.
La fonction $w(z)$ est appelée « potentiel complexe ».
On va voir dans ce qui suit que ce potentiel complexe permet de trouver simplement les équipotentielles et les lignes de champ.

1.1.1 Lignes de champ

Le long d'une ligne de champ on a : $\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{E} = \vec{0}$, soit dans le cas bi-dimensionnel :

$$\mathrm{d}x E_y - \mathrm{d}y E_x = 0 \qquad (8)$$

Cette relation s'écrit aussi avec (6) :

$$\mathrm{d}x\frac{\partial A}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial A}{\partial y} = \mathrm{d}A = 0 \qquad (9)$$

Les lignes de champ sont donc les lignes "équi-A" ou "iso-A", autrement dit : **les lignes où la partie imaginaire de $w(z)$ est constante sont les lignes de champ** .

1.1.2 Équipotentielles

Dans le cas tridimensionnel, les équipotentielles sont des surfaces, ici ce sont des lignes où $\varphi = cte$.
Autrement dit : **les lignes où la partie réelle de $w(z)$ est constante sont les équipotentielles**.

1.2 Droite infinie chargée

1. Montrez que le champ créé par un fil rectiligne infini placé à l'origine et chargé avec une densité linéaire q_ℓ est :
$$\vec{E}(r,\theta,z) = \frac{q_\ell}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{u}_r \tag{10}$$
où $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire radial des coordonnées cylindriques.

2. Déterminer φ et A.
3. En déduire que :
$$w(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-2q_\ell\ \ln(z)\right] \tag{11}$$
et que si le fil est placé en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors :
$$w(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-2q_\ell \ln(z - z_0)\right] \tag{12}$$

1.3 Principe de superposition

On rappelle que le potentiel (le champ) électrique créé par un ensemble de charges $\{q_i\}_{i=1,2,\cdots,N}$ placées en P_1, P_2,$\cdots$, P_N, est la somme des potentiels (des champs) créés par chacune des charges (principe de superposition) :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i(M) \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(M) \tag{13}$$

Il en va de même pour le potentiel complexe d'une distribution de fils rectilignes placés aux points P_i d'affixes z_i, chargés avec les densités linéaires $q_{\ell i}$:
$$w(z) = \sum_{i=1}^{N} w_i(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\left[-2q_{\ell i}\ln(z - z_i)\right] \tag{14}$$

2 Tracé des équipotentielles et des lignes de champs

Dans ce TP, pour des facilité de notation, on prendra $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ égale à 1, ce qui revient à prendre comme unité de charge $1,1 \times 10^{-10}$ C. Dans toute la suite, les charges sont donc normalisées à cette valeur.
Par ailleurs, les charges linéaires q_ℓ seront notées q dans la suite.

2.1 Objectifs du TP

— Vous devrez créer la fonction `PYTHON` correspondante à $w(z) = -2q_0 \ln(z - z_0)$ qui donne le potentiel complexe d'un fil unique, placé en z_0, chargé avec la densité linéaire q_0.
— Utilisez cette fonction pour calculer le potentiel complexe des différentes distributions de charges (fils chargés avec les densités q_i) proposées ci-après.
— Vous tracerez ensuite les équipotentielles et les lignes de champ de ces diverses distributions.
— Pour cela vous utiliserez les fonctions `contour` et `contourf` de `matplotlib`.
— Ces fonctions ont besoins de « grilles », créées avec `np.mesgrid(....)` sur lesquelles sera calculé le potentiel complexe.
— Pour bien préparer ce TP, regardez attentivement les aides de ces deux fonctions et en particulier ce qui concerne `levels`
— Vous devrez ajuster le choix et le nombre des équipotentielles et des lignes de champ, les couleurs utilisées, les zones (parties du plan (xOy) affichées pour que vos graphiques soient les plus explicites et informatifs possible.
— Pour le tracé des lignes de champ, en ajustant la valeurs de l'entier n, en choisissant la valeur `True` ou `False` pour `half`, vous pourrez utiliser dans `contour` : `levels=isoA`, avec `isoA` défini comme suit :

```
n=32
half = False
eps=np.spacing(1)
```

```
shift0_5 = 0.5/n if half else 0
nAmin = (int(np.min(A)/(2*np.pi))*2 - 1 - shift0_5)*4*np.pi
nAmax = (int(np.max(A)/(2*np.pi))*2 + 1 + shift0_5)*4*np.pi
isoA = np.arange(nAmin, nAmax+eps, 1./n*4*np.pi)
```

— Pour le tracé des équipotentielles, en choisissant les coefficients k_m, k_M et r (compris entre 0 et 1), vous pourrez utiliser, dans `contour` et `contourf`, `levels=isoPhi` , avec `isoPhi` défini comme suit :

```
km,kM,r=0.8,0.8,0.4
isoPhi=np.arange(int(km*np.min(phi))-1, int(kM*np.max(phi))+1, r)
```

— Pour que le rapport longueur/largeur soit indépendant de la taille de la fenêtre graphique, utilisez `plt.axis('equal')` ou `set_aspect('equal', 'box')`
voir : https://matplotlib.org/3.1.0/gallery/subplots_axes_and_figures/axis_equal_demo.html
— Mettez en évidence et expliquez les propriétés de symétrie.
— Vérifiez quelques lois bien connues (théorème de Gauss, propriété de la densité des lignes de champ, ...)
— Les différents graphiques que vous obtiendrez devraient être du style de celui de la figure 1. N'oubliez pas le titre général de la figure, les légendes.

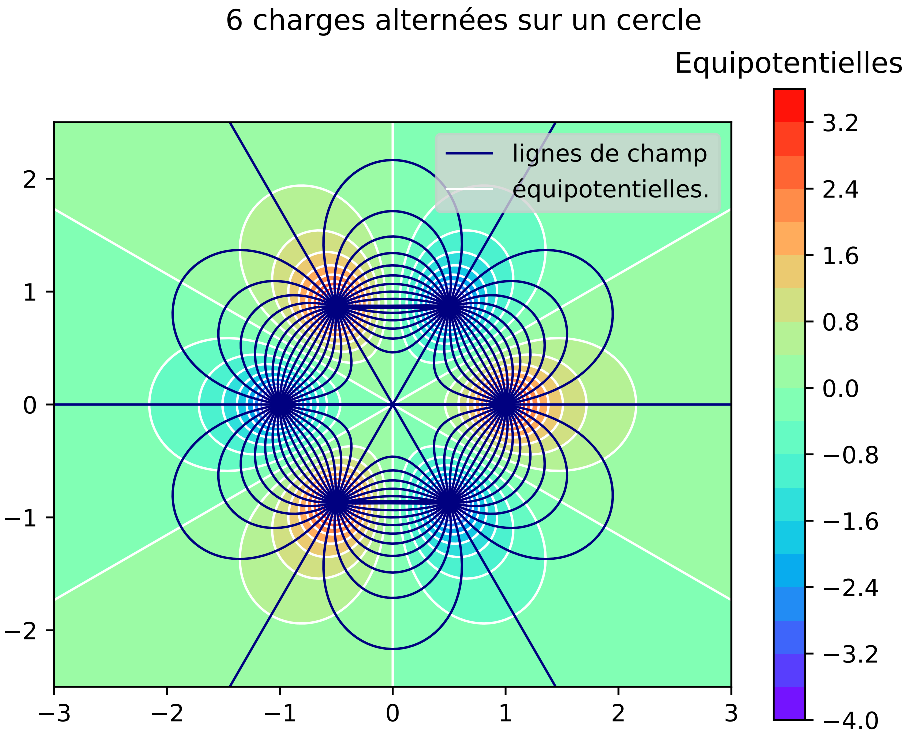

FIGURE 1 – Cas de 6 charges alternées disposées sur un cercle

2.2 Distributions de charges à traiter

2.2.1 Charge unique

Tracez les équipotentielles et les lignes de champ d'une charge unique $q = 1$ placée au point $(0, 0)$. Vérifiez que vous obtenez ce qui était attendu.

2.2.2 Deux charges identiques

Les deux charges identiques ($q = 1$) sont placées en $P_1(-1, 0)$ et $P_2(1, 0)$.
— Commentez l'allure des équipotentielles à proximité immédiate des charges.
— Qu'y a-t-il de particulier au point $O(0, 0)$ (centre des charges) ? Mettez en évidence graphiquement ce qu'il s'y passe. Commentaires.
— Que remarquez-vous à grande distance de la distribution ?
— Quel est le lien entre le potentiel et l'énergie potentielle d'une charge « test » Q placée dans ce potentiel ?
— Existe-t-il des positions d'équilibre pour cette charge Q ? Sont-elles stables ?

2.2.3 Dipôle

La distribution est constituée de deux charges : $q_1 = -1$ en $P_1(-1, 0)$ et $q_2 = +1$ en $P_2(1, 0)$.

- Tracez les mêmes graphiques que pour la distribution précédente.
- Existe-t-il des points où le champ est nul ?
- Existe-t-il une droite équipotentielle ?
  Quelle propriété de symétrie vérifie-t-elle ? Vérifiez que la direction du champ y est conforme à cette symétrie.
- Commentez et comparez l'allure des équipotentielles à grande distance avec le cas de 2 charges identiques.

2.2.4 Deux charges : q et $-2q$

La distribution est $q_1 = 1$ en $P_1(-1, 0)$ et $q_2 = -2$ en $P_2(1, 0)$. Tracez les équipotentielles et les directions du champ à proximité puis à grande distance de la distribution. Commentaires.

2.2.5 Quadrupôle

La distribution est constituée de quatre charges de signes alternés :
$q_1 = 1$ en $P_1(1, 1)$, $q_2 = -1$ en $P_2(1, -1)$, $q_3 = 1$ en $P_3(-1, -1)$ et $q_4 = -1$ en $P_4(-1, 1)$.

- Quelles sont les particularités électriques de cette distribution ?
- Existe-t-il des plans (vus en coupe, des droites) équipotentiels ? Quelle propriété de symétrie vérifient-ils ? Quelle y est la direction du champ ? Quelle propriété pouvez-vous vérifier ? (voir la question similaire pour le dipôle)

2.2.6 Charge ponctuelle dans un champ uniforme

On veut visualiser la perturbation apportée par une charge ponctuelle dans un champ uniforme. Ce champ uniforme $\vec{E}_u = E_0\,\vec{u}_x$ est appliqué dans la direction horizontale Ox.
Prendre $\vec{E}_u = 4\,\vec{u}_x$

- Quel est le potentiel complexe $w_u(z)$ associé à ce champ ?
- Rajoutez ce potentiel complexe à celui créé par une charge ponctuelle $q = 1$ placée en $(0, 0)$.
- Tracez les équipotentielles et les lignes de champ.
- Examinez et expliquez la forme des équipotentielles et des lignes de champ à proximité de la charge ponctuelle puis à grande distance de celle-ci.
- Existe-il un (des) point(s) où le champ est nul ? Si oui, le(s) repérer.

2.2.7 « Condensateur » diélectrique

- Construisez un « condensateur » en plaçant deux « plaques » (distributions) de charges de signes opposés. La première « plaques » s'étend de $x = -1$ à $x = 1$, elle est située en $y = 0.5$, y répartir *uniformément* la charge $q = +1$ distribuée sur 401 points. Faites la même chose avec la 2eme plaque chargée placée en $y = -0.5$, chargée négativement avec $q = -1$ répartie uniformément sur 401 points.
- En examinant les équipotentielles et les lignes de champ, trouvez les anomalies qui montrent que cette distribution ne correspond pas au condensateur métallique habituel.
- Quelles formes d'équipotentielles et de lignes de champ déjà tracées retrouve-t-on à grande distance ?

2.2.8 Condensateur métallique

- Sur Moodle, téléchargez le fichier `q_dist_cond_metal.txt`. Ce fichier contient la « bonne » distribution calculée d'une charge totale $q = 1$ sur une « plaques » métallique de même dimension que celle utilisée dans la partie précédente.
- Utilisez la fonction `loadtxt.py` du module `numpy` pour importer ce fichier.
- Tracez la distribution de charge en fonction de la position, x, dans la plaque. Comparez au cas de la plaque utilisée pour le condensateur « diélectrique »
- Construisez le condensateur constitué des 2 « plaques » métalliques en vis à vis.
- Comparez les tracés des équipotentielles et des lignes de champ avec ceux obtenus dans le cas précédent du « condensateur » diélectrique. Expliquez pourquoi la distribution de charge utilisée est cette fois-ci correcte pour un condensateur métallique.

Remerciements à Mikhaïl Indenbom pour les nombreuses discussions avant la rédaction de ce TP !