Тема 1. Розкриття невизначеності

По даній темі необхідно:

1. Вивчити теоретичний матеріал по розкриттю невизначеностей цілей, ситуацій, взаємодії та протидії суб’єктів.
2. Для конкретного варіанта:
   - побудувати множину Парето; звузити множину Парето;
   - розв’язати задачу по розкриттю невизначеностей взаємодії або протидії суб’єктів.

Теоретичні відомості

Задачі розкриття невизначеності цілей відносяться до класу **формалізовних задач**, тобто до такого класу задач, для яких можна побудувати математичні моделі або обчислювальні алгоритми, що дозволяють за вихідною інформацією знайти дані, одержання яких є метою завдання.

Варто звернути увагу на дві особливості даного типу задач.

По-перше, для формалізовної задачі не є обов’язковим існування математичної моделі, що зв’язує вихідну інформацію, вихідні дані із шуканими результатами. Досить існування певного алгоритму, послідовне виконання операцій якого дозволяє одержати шуканий результат за вихідною інформацією.

Як приклад подібного класу задач можна вказати деякі задачі імітаційного моделювання. Наприклад, визначення часу напрацювання певного виду відмови об’єкта.

По-друге, поняття «формалізовна задача» не є синонімом до поняття «розв’язна задача». Задача може бути формалізовною, але не розв’язною. Приклад — транспортна задача знаходження оптимального маршруту для послідовного відвідування n пунктів. Завдача не тільки формалізовна, але й має точний алгоритм рішення — послідовний перебір варіантів маршрутів. І разом з тим задача не розв'язна: має трансобчислювальну складність вже при $n \geq 20$.

У розглянутому визначенні виражена головна властивість різних класів формалізовних задач — можливість встановлення математичного або алгоритмічного взаємозв'язку і взаємозалежності вихідних даних і кінцевого шуканого результату задачі. Звідси слідує, що встановлення факту формалізовності практичної задачі є самостійним питанням. Надалі ми при аналізі даного типу задач будемо вважати, що вихідна задача представлена як формалізовна. Очевидно, що поняття формалізовна і формалізована не є синонімами і виражають різні сторони вивчаємої задачі.

Формалізовна задача — це задача, представлена для дослідження у вигляді математичної моделі або алгоритму.

Формалізована задача — це задача, що потенційно може бути формалізовною, тобто задача, для якої тільки доведена можливість формалізації.

Постановка задачі

Перейдемо до вивчення задач розкриття невизначеностей цілей. Насамперед помітимо, що невизначеність є типовою властивістю практичних задач СА, що обумовлено різноманіттям цілей, властивостей та особливостей об'єктів СА.

При розгляді цілісного об'єкту, з погляду формулювання функцій цілей, задачу можна розглядати в загальному вигляді

$$f_1(\bar{x}) \to \max_{\bar{x} \in D},\ f_2(\bar{x}) \to \max_{\bar{x} \in D}, \ldots,\ f_m(\bar{x}) \to \max_{\bar{x} \in D} \qquad (1)$$

Оскільки функції $f_k(\bar{x})$, $k = 1, 2, \ldots, m$ різні за природою, то максимального значення кожна функція досягає для свого значення x, і неможливо знайти (окрім випадку, коли глобальні максимуми функцій співпадають) таке значення x^0, за якого умови (1) виконуються одночасно для всіх функцій. Звідси випливає задача знаходження такого значення x^0, за якого забезпечуватиметься *раціональний компроміс заданих цілей*.

Для знаходження раціонального компромісу розроблено два основні підходи:

1. Суть першого підходу — виключити з аналізу заздалегідь неприйнятні варіанти;

2. Суть другого — знайти способи зведення багатоцільової задачі до типової задачі з одним критерієм.

В підґрунті першого підходу лежить ідея, запропонована Парето*: спробувати скоротити множину вихідних варіантів виключенням з неформального аналізу заздалегідь непридатних варіант*ів. Цю ідею можна реалізувати так.

Припустимо, що вибрано вектор x, позначимо його як x^*. Робимо тепер інший вибір $\hat{x}$, такий, що для всіх цільових функцій

$$f_i(\hat{x}) \geq f_i(x^*),\ i = \overline{1,m}, \qquad (2)$$

причому хоча б одна з нерівностей є строгою. Очевидно, що вибір $\hat{x}$ кращий від x^* в сенсі величини значень цільових функцій. Тому всі вектори x зі значенням x^*, для яких виконується умова (2), слід вилучити з цього аналізу. Піддавати неформальному аналізу, зіставляти між собою треба ті вектори x^*, для яких не існує такого значення $\hat{x}$, що нерівність (2) не виконується хоча б по одній цільовій функції.

Множину всіх таких значень x^*, для яких неможливо підібрати $\hat{x}$ з умови (2), називають *множиною Парето,* а вектор x^* — *не поліпшуваним вектором результатів (вектором Парето).*

Розглянемо докладніше підхід до знаходження множини Парето.

Множина Парето

Відомий вектор f цільових функцій $f_i(x)$, заданих на множині D у вигляді

$$\bar{f} = \{ f_i(x) \big| i = \overline{1,m};\ x \in D \};$$

$$D = \{ x \big| x^- \le x \le x^+ \}.$$

Існує така множина Γ граничних значень $\tilde{x} \in D$, що поділяє вихідну множину D на дві множини: Π і $\overline{D}$. Ця множина повинна задовольняти умови

$$\Pi \bigcup \overline{D} = D; \Pi \bigcap \overline{D} = 0. \qquad (3)$$

Множина Π складається з таких значень $x_{k_1} \in D$, для яких для всіх $i = \overline{1,m}$ виконується умова $f_i(x_{k_1}) \ge f_i(x^*)$. Множину Π визначає співвідношення

$$\Pi = \{ x \big| x = x_{k_1};\ x_{k_1} \in D;\ f_i(x_{k_1}) \ge f_i(x^*);\ i = \overline{1,m} \}. \qquad (4)$$

Множина $\overline{D}$ складається з таких $x_{k_2} \in D$, для яких хоча б для однієї функції $f_i(x_{k_2})$ виконується умова $f_i(x_{k_2}) < f_i(x^*)$. Множину $\overline{D}$ описує таке співвідношення:

$$\overline{D} = \{ x \big| x = x_{k_2};\ x_{k_2} \in D;\ f_i(x_{k_2}) < f_i(x^*);\ i \in [1,m] \}.$$

Отже, вектор $x^* \in \Pi$ — *неполіпшуваний вектор результатів,* а множина Π, що задовольняє умову (4) — *множина Парето.*

Завдяки умові (4) множина Γ — межа, що виділяє множину Парето з множини D. Відповідно до формули (3) множина $\overline{D}$ є підмножиною вихідної множини D, із якої виділено множину Парето Π: $\overline{D} = D \setminus \Pi$ (рис.1). Тому всі варіанти розв'язків, що належать $\overline{D}$, виключають із розгляду.

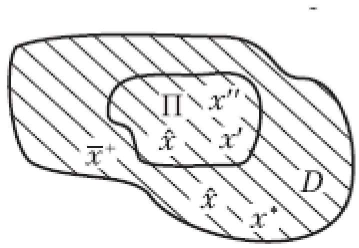

Рис. 1. Ілюстрація підходу до знаходження множини Парето

<u>Приклад</u>. Нехай потрібно виділити множину Парето в області $D \in [x^-, x^+]$.

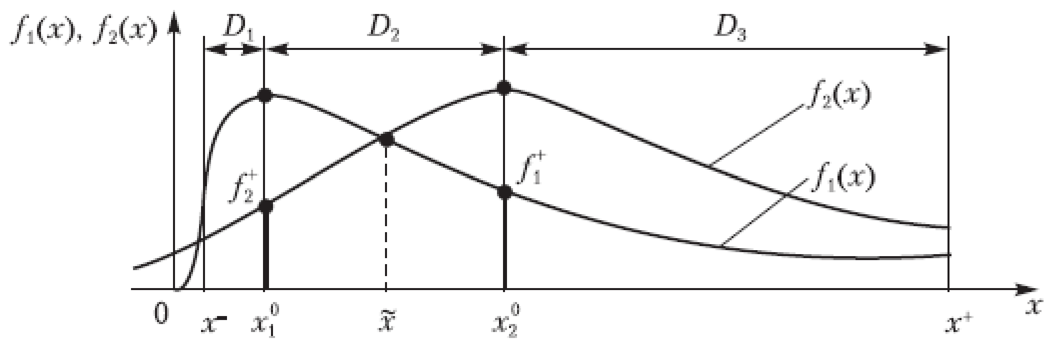

Рис. 2. Виділення множини Парето

Поділимо задану множину D на три області $D = D_1 \bigcup D_2 \bigcup D_3$.

$D_1 \in [x^-, x_1^0)$, де x_1^0 точка значення x, за якого $f_1(x)$ досягає максимуму

$$f_1(x_1^0) = \max_{x \in D} f(x).$$

$D_2 \in [x_1^0, x_2^0]$, де x_2^0 —таке значення x, за якого $f_2(x)$ досягає максимуму

$$f_2(x_2^0) = \max_{x \in D} f_2(x)$$

$D_3 \in (x_2^0, x^+]$ - область x від x_2^0 до x^+.

Порівнюючи значення функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$ в областях D_1 і D_2, маємо $f_2(x)|_{x \in D_1} < f_2(x)|_{x \in D_2}$, тобто значення функції $f_2(x)$ для будь-якого $x \in D_1$ менше, ніж значення $f_2(x)$ для будь-якого $x \in D_2$. Для $f_1(x)$ маємо $f_1(x)|_{x \in D_1} \leq f_1(x)|_{x \in D_2}$

(порівнянні), тобто область D_1 заздалегідь поступається області D_2 за цільовою функцією $f_2(x)$. Аналогічно для області D_3 значення функції $f_1(x)$ для будь-якого $x \in D_3$ менше, ніж значення $f_1(x)$ для будь-якого $x \in D_2$, тобто $f_1(x)|_{x \in D_3} < f_1(x)|_{x \in D_2}$. Однак для $f_2(x)$ маємо $f_2(x)|_{x \in D_3} \leq f_2(x)|_{x \in D_2}$, (порівнянні), тобто область D_3 заздалегідь поступається області D_2 в значенні цільової функції $f_1(x)$. Отже, з області D виключається область D_1 і область D_3. Область D_2 є множиною Парето. Для неї виконуються критерії:

$$f_1(x)|_{x \in D_2} \geq f_1^+;$$

$$f_2(x)|_{x \in D_2} \geq f_2^+.$$

Відповідно до принципу Парето раціональний розв'язок багатокритерійної задачі (раціональний компроміс у багатоцільовій задачі) необхідно шукати серед x, що належать множині Парето. Принцип Парето не виділяє єдиного розв'язку, але він дозволяє звузити множину можливих альтернативних розв'язків. У розглянутому прикладі раціональний розв'язок потрібно шукати в області D_2. Але питання про те, який розв'язок (або яке значення $x \in D_2$) є оптимальним — залишається відкритим.

В усіх розглянутих випадках побудова множини Парето дозволяє одержати додаткову інформацію, що дає якісну оцінку під час зіставлення різних варіантів. Із розглянутого прикладу випливає, що для точки $\tilde{x}$ справедлива рівність

$$f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x}).$$

Який із цих варіантів кращий, визначає ОПР. Якщо ОПР вважає, що критерії рівнозначні, то раціональним буде варіант $\tilde{x}$, коли $f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x})$. Якщо важливіша ціль $f_1(x)$, то, очевидно, раціональний розв'язок лежить в інтервалі $[x_1^0, \tilde{x})$. Якщо важливіша ціль $f_2(x)$, то раціональний розв'язок лежить в інтервалі $(\tilde{x}, x_2^0]$.

Однак у двох останніх випадках певна міра переваги однієї цілі над іншою залишається суб'єктивною мірою ОПР.

Звуження множини Парето

Звуження множини Парето здійснюється за допомогою принципів мінімакса або максиміна, або при їхньому одночасному використанні (при звуженні інтервалу з обох сторін).

Варіант 1

Введемо для кожного значення $x \in D$ функцію

$$F_1(x) = \min_{i \in [1,m]} \frac{f_i(x)}{f_i^*} \qquad (5)$$

і будемо шукати такі значення x^0, що відповідають умові $F_1(x^0) = \max_{x \in D} F_1(x)$, де D – допустима багатовимірна область зміни вектора x, задана, наприклад, конструктивними обмеженнями. За такого формулювання задачі її розв'язок гарантує, що у найгіршому випадку, тобто для $\min$ можливого відношення $\frac{f_i(x)}{f_i^*}$, буде забезпечено максимальне значення $F(x)$. Тут розглядається максимальна задача забезпечення.

Варіант 2

Введемо для кожного значення $x \in D$ функцію

$$F_2(x) = \max_{i \in [1,m]} \frac{f_i(x)}{f_i^*} \qquad (6)$$

і будемо шукати таке значення x^0, за якого функція $F(x)$ матиме мінімальне значення, тобто $F(x^0)=\min\limits_{x\in D}F(x)$. За такого формулювання задачі її розв’язок гарантує, що у найгіршому випадку, тобто для $\max$ можливого відношення $\dfrac{f_i(x)}{f_i^*}$, буде гарантовано мінімальне відхилення, тобто тут розглядається мінімаксна задача.

Відмінність варіантів 1 і 2 полягає в тому, що вони фізично визначають різні умови оптимальності. Варіант 1 забезпечує максимально можливе відхилення серед усіх $f_i(x)$ від їх заданих значень f_i^*, оскільки дане відхилення забезпечується для найгіршого випадку, тобто забезпечується

$$F_1(x^0)=\max_{x\in D}\min_{i\in[1,m]}\frac{f_i(x)}{f_i^*}. \tag{7}$$

Варіант 2 розв’язує обернену задачу - забезпечує мінімально можливе відхилення всіх $f_i(x)$ від заданих значень f_i^*, оскільки дане відхилення забезпечується для найгіршого випадку (у розглянутій постановці), тобто забезпечується

$$F_2(x^0)=\min_{x\in D}\max_{i\in[1,m]}\frac{f_i(x)}{f_i^*}. \tag{8}$$

Розкриття невизначеності дії партнера або супротивника

1. Задача взаємодії двох партнерів.

Нехай ми розглядаємо деякий абстрактний ринок, на якому взаємодіють два суб’єкти, причому їхні відносини не є протидіючими. Кожний із суб’єктів має свою цільову функцію

$f_1(x_1,x_2)$ — цільова функція першого суб’єкта, а x_1 — параметри, якими керує перший суб’єкт;

$f_2(x_1, x_2)$ — цільова функція другого суб’єкта, а x_2 — параметри, якими керує другий суб’єкт.

При цьому передбачається, що між суб’єктами відбувається обмін інформацією тільки про обсяги виробництва й інші показники, які характеризуються векторами x_1 і x_2, але при цьому не повідомляються функції цілей.

Принцип гарантованого результату полягає в тому, що буде знайдене найкраще рішення для найгіршого випадку.

Суб'єкт I вибирає свої параметри x_1 та передає їх суб’єкту II, той, маючи інформацію про значення параметрів x_1, вибирає для себе таку стратегію, що буде максимізувати його цільову функцію і передає обрані їм значення параметрів x_2 I-му суб’єкту, той, у свою чергу, корегує свої параметри, максимізуючи свою функцію корисності. При такому підході з’являється гарантія того, що навіть при виборі другим суб’єктом таких параметрів, які приводять до мінімізації цільової функції першого суб’єкта, перший має шанс підібрати свої параметри таким чином, щоб одержати найкращий результат для найгіршого випадку.

2. Задача протидії

В задачі протидії можна виділити кілька принципових особливостей:

1. Сторони не тільки не повідомляють один одному які-небудь свої дії, але свідомо вносять дезінформацію, як про свої цілі, так і про ситуації.
2. Ситуації залежать не тільки від природних умов, але й від дій сторін.
3. Дії сторін приводять до змін параметрів і цілей.
4. Мети сторін є протилежними. Кожен учасник має свою функцію цілі.

Рішення проводиться у двох напрямках.

1. Орієнтуються на гарантований результат у найгіршому випадку.
2. Орієнтуються на найімовірніший варіант поведінки протидіючої сторони

та забезпечують найкращий для себе результат за цих умов.

У даній роботі ми будемо розглядати протидію двох учасників $i == 1,2$, кожний з яких відповідно має свою функцію цілі $f_{12}(x_1, x_2)$ і $f_{21}(x_2, x_1)$, а також діапазони зміни параметрів x_1 і x_2 .

Розв’язок задачі виконується за наступними етапами.

1. Знаходження гарантованого результату

$$f_{12}^* = \max_{x_1} \min_{x_2} \quad f_{12}(x_1, x_2),$$

$$f_{21}^* = \max_{x_2} \min_{x_1} \quad f_{21}(x_2, x_1).$$

2. Знаходження області Парето.

Наступним етапом розв’язання задачі є знаходження області Парето за заданими обмеженнями типу нерівностей. Шукаємо область Парето як множину, що задовольняє системі нерівностей:

$$f_{12} - f_{12}^* = 0, \quad f_{21} - f_{21}^* = 0.$$

Знаходимо область, у якій виконуються, наприклад, нерівності $f_{12} \geq f_{12}^*$, $f_{21} \geq f_{21}^*$. Значення параметрів x_1 і x_2 , що задовольняють даним нерівностям, і визначають область Парето.

3. Знаходження Чебишевського радіусу

Далі визначаємо ті значення x_1^* і x_2^* шуканого рішення, при яких $\Delta = \min_{x_1, x_2} \max_i \Delta_i$, де Δ_i — це відхилення цільових функцій від значень при гарантованому результаті (чебишевський радіус або чебишевське відхилення)

$$\Delta_1 = \left| f_{12}(x_1, x_2) - f_{12}^* \right|,$$

$$\Delta_2 = \left| f_{21}(x_1, x_2) - f_{21}^* \right|.$$