

Problema 1 Dorim să calculăm integralele

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} dx$$

pentru $n = 0, 1, 2, \dots, 30$ și $a > 0$.

1. Arătați că are loc relația de recurență:

$$y_n = \frac{1}{n} - a y_{n-1}, \quad y_0 = \ln \frac{1+a}{a}. \quad (1)$$

2. Calculați margini superioare și inferioare pentru valorile lui y_n alegând $x = 0$ și respectiv $x = 1$, în numitorul integrandului.

3. Calculați termenii șirului $\{y_n\}$ pentru $a = 10$ și $n = 1, \dots, 30$ utilizând (1) repetat. Obțineți o tabelă cu valorile și marginile lor.

4. Rezolvați (1) în raport cu y_{n-1} și calculați din nou șirul pentru $a = 10$, de această dată n mergând în jos și începând cu $n = 30$. Luați ca valoare de pornire marginea inferioară pentru y_{30} .

5. La final, verificați rezultatele dumneavoastră calculând integralele cu funcția MATLAB **quad**.

Problema 2 Știm de la Analiză matematică că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Care este “limita în aritmetica mașinii”? Explicați.