

תרגיל 1 - תכנון וניתוח אלגוריתמים

שאלה 1

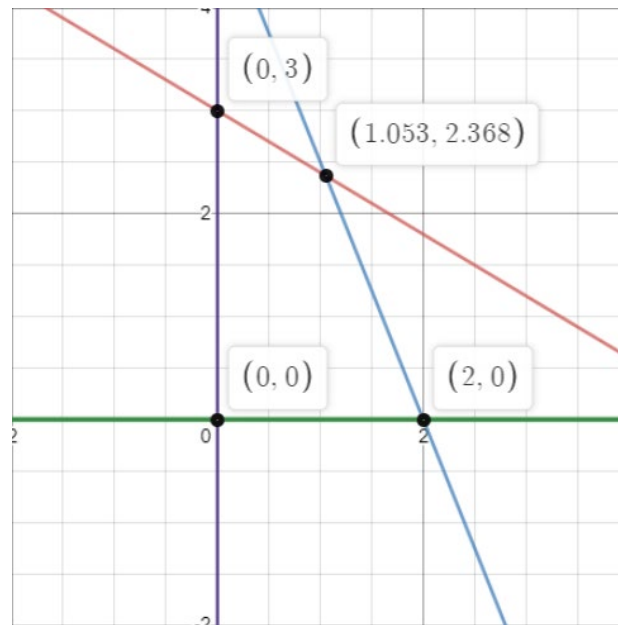
$$\text{Maximize } Z = 2.5X_1 + X_2$$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15$$

$$5X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

1. א - פתרון בשיטה גרפית



X_1	X_2	Z
2	0	5
0	3	3
0	0	0
1.053	2.368	2.6325

1. ב - פתרון בשיטת הסימפלקס

$$\text{Maximize } Z = 2.5X_1 + X_2 \rightarrow Z - 2.5X_1 - X_2 = 0$$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15 \rightarrow 3X_1 + 5X_2 + X_3 \leq 15$$

$$5X_1 + 2X_2 \leq 10 \rightarrow 5X_1 + 2X_2 + X_4 \leq 10$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

	Z	X1	X2	X3	X4	RHS	opt
Z	1	-2.5	-1	0	0	0	
X3	0	3	5	1	0	15	$\frac{15}{3} = 5$
X4	0	5	2	0	1	10	$\frac{10}{5} = 2$

$$(0, 0)$$

$$R_2 \rightarrow \frac{R_2}{5}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2$$

$$R_0 \rightarrow R_0 + 2.5R_2$$

	Z	X1	X2	X3	X4	RHS	opt
Z	1	0	0	0	0.5	5	
X3	0	0	3.8	1	-0.6	9	
X1	0	1	0.4	0	0.2	2	

$$(2, 0)$$

$$\text{Solution: } X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 9, X_4 = 0, Z = 5$$

- 1.1

$$B^{-1} = (1 \ -0.6 \ 0 \ 0.2), B = (1 \ 3 \ 0 \ 5)$$

$$X_b = B^{-1} * b = (1 \ -0.6 \ 0 \ 0.2) \cdot (15 \ 10) = (9 \ 2)$$

- 7.1

$$\text{Maximize } Z = 2.5X_1 + X_2 \rightarrow \text{Min } Z = 15Y_1 + 10Y_2$$

$$Y_1: 3X_1 + 5X_2 \leq 15 \rightarrow 3Y_1 + 5Y_2 \geq 2.5$$

$$Y_2: 5X_1 + 2X_2 \leq 10 \rightarrow 5Y_1 + 2Y_2 \geq 1$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \rightarrow Y_1, Y_2 \geq 0$$

1. ה-

$$C_B = (0, 2.5)$$

$$B^{-1} = (1 \quad -0.6 \quad 0 \quad 0.2)$$

$$\text{Dual Solution: } Y^T = C_B * B^{-1} = (0 \quad 0.5)$$

שאלה 2

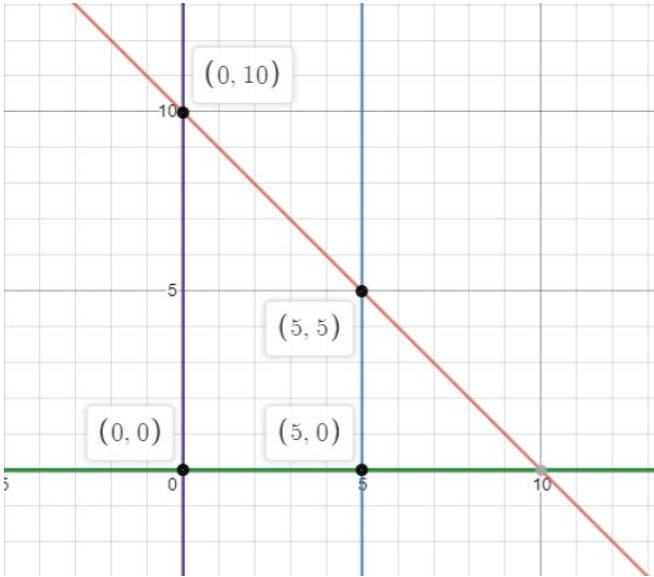
$$\text{Maximize } Z = 5X_1 + 2X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1 = 5$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

2. א-



X_1	X_2	Z
0	0	0
0	10	20
5	5	35
5	0	25

2. ב-

$$\text{Maximize } Z = 5X_1 + 2X_2 \rightarrow Z - 5X_1 - 2X_2 + 0X_3 + MA_1 = 0$$

$$X_1 + X_2 \leq 10 \rightarrow X_1 + X_2 + X_3 = 10$$

$$X_1 = 5 \rightarrow X_1 + A_1 = 5$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

	Z	X1	X2	X3	A1	RHS	סך'
Z	1	-5	-2	0	M	0	
X3	0	1	1	1	0	10	$\frac{10}{1} = 10$
A1	0	1	0	0	1	5	$\frac{5}{1} = 5$

$$(0, 0)$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2$$

$$R_0 \rightarrow R_0 + 5R_2$$

	Z	X1	X2	X3	A1	RHS	סך'
Z	1	0	-2	0	M+5	25	
X1	0	0	1	1	-1	5	$\frac{5}{1} = 5$
A1	0	1	0	0	1	5	$\frac{5}{0} = \infty$

$$(5, 0)$$

$$R_0 \rightarrow R_0 + 2R_2$$

	Z	X1	X2	S1	A1	RHS	סך'
Z	1	0	0	2	M+3	35	
X1	0	0	1	1	-1	5	
X2	0	1	0	0	1	5	

$$(5, 5)$$

$$\text{Solution: } X_1 = 5, X_2 = 5, X_3 = 0, A_1 = 0, Z = 35$$

- 1.2

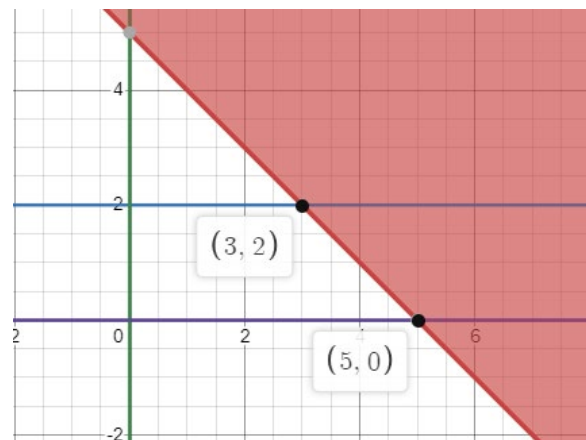
$$\text{Maximize } Z = 5X_1 + 2X_2 \rightarrow \text{Min } Z = 10Y_1 + 5Y_2$$

$$Y_1: X_1 + X_2 \leq 10 \rightarrow Y_1 + Y_2 \geq 5$$

$$Y_2: X_1 = 5 \rightarrow Y_2 = 2$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \rightarrow Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0$$

- 17.2



Y_1	Y_2	Z
3	2	40
5	0	50

- 27.2

$$\text{Min } Z = 10Y_1 + 5Y_2 \rightarrow Z - 10Y_1 + 5Y_2 + 0Y_3 + MA_1 + MA_2 = 0$$

$$Y_1 + Y_2 \geq 5 \rightarrow Y_1 + Y_2 - Y_3 + A_1 = 5$$

$$Y_2 = 2 \rightarrow Y_2 + A_2 = 2$$

$$Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0$$

	Z	Y1	Y2	Y3	A1	A2	RHS	σ _h
Z	1	M-10	2M-5	-M	0	0	7M	

A1	0	1	1	-1	1	0	5	5
A2	0	0	1	0	0	1	2	2

(0, 0)

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2$$

$$R_0 \rightarrow R_0 - (2M - 5)R_2$$

	Z	Y1	Y2	Y3	A1	A2	RHS	יחס
Z	1	M-10	0	-M	0	-2M+5	3M+10	
A1	0	1	0	-1	1	-1	3	3
Y2	0	0	1	0	0	1	2	∞

(0, 2)

$$R_0 \rightarrow R_0 - (M - 10)R_1$$

	Z	Y1	Y2	Y3	A1	A2	RHS	יחס
Z	1	0	0	-10	-M+10	-M+5	40	
Y1	0	1	0	-1	1	-1	3	
Y2	0	0	1	0	0	1	2	

(3, 2)

$$\text{Solution: } Y_1 = 3, Y_2 = 2, Y_3 = 0, Y_4 = 0, A_1 = 0, A_2 = 0, Z = 40$$

שאלה 3

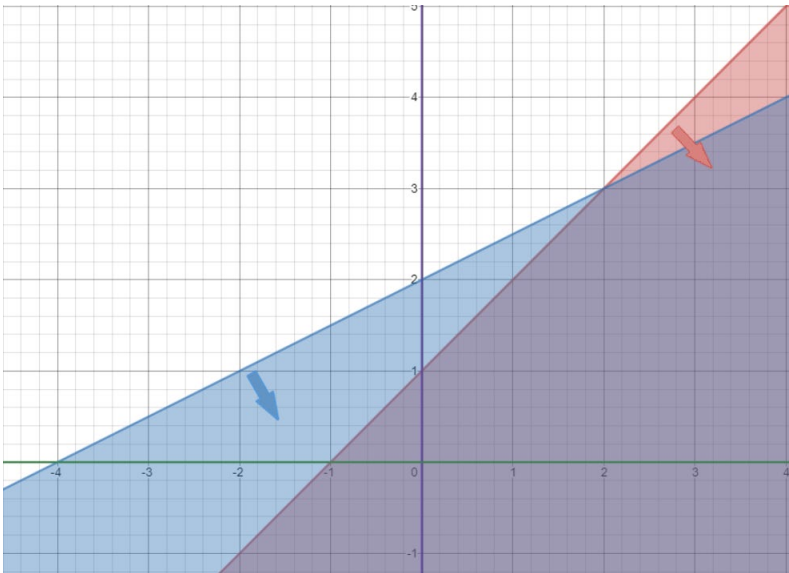
$$\text{Maximize } Z = 2X_1 + 2X_2$$

$$-X_1 + X_2 \leq 1$$

$$-X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

3. א - פתרון בשיטה גרפית



אין פתרון אופטימלי

3. ב - פתרון בשיטת הסימפלקס

$$\text{Maximize } Z = 2X_1 + 2X_2 \rightarrow Z - 2X_1 - 2X_2 = 0$$

$$-X_1 + X_2 \leq 1 \rightarrow -X_1 + X_2 + S_1 = 1$$

$$-X_1 + 2X_2 \leq 4 \rightarrow -X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

	Z	X1	X2	S1	S2	RHS	יחס
Z	0	-2	-2	0	0	0	
S1	0	-1	1	1	0	1	—
S2	0	-1	2	0	1	4	—

עבור X1 לא מתקיים מבחן המנה ולכן לא קיים פתרון אופטימלי

3. ג -

$$\text{Min } Z = y_1 + 4y_2$$

$$-y_1 - y_2 \geq 2$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 2$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

3. ד - אין פתרון אופטימלי

שאלה 4

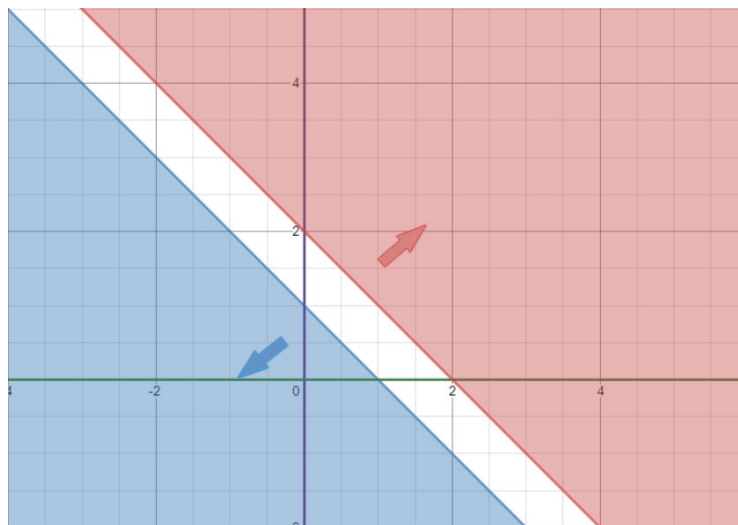
$$\text{Maximize } Z = 3X_1 - 2X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 1$$

$$X_1 + X_2 \geq 2$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

4. א - פתרון בשיטה גרפית



אין פתרון אופטימלי

4. ב - פתרון בשיטת הסימפלקס ובעזרת שיטת M הגדול

$$\text{Maximize } Z = 3X_1 - 2X_2 \rightarrow Z - 3X_1 + 2X_2 - MS_3 = 0$$

$$X_1 + X_2 \leq 1 \rightarrow X_1 + X_2 + S_1 = 1$$

$$X_1 + X_2 \geq 2 \rightarrow X_1 + X_2 - S_2 + S_3 = 2$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

	Z	x1	x2	s1	s2	s3	RHS	יחס
Z	1	-M-3	-M+2	0	M	0	-2M	

S1	0	1	1	1	0	0	1	$\frac{1}{1} = 1$
S3	0	1	1	0	-1	1	2	$\frac{2}{1} = 2$

(0, 0)

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$$

$$R_0 \rightarrow R_0 + (M + 3)R_1$$

	Z	X1	X2	S1	S2	S3	RHS	יחס
Z	1	0	5	M+3	M	0	-M+3	
X1	0	1	1	1	0	0	1	
S3	0	0	0	-1	-1	1	1	

(1, 0)

המקדמים של בשורה R_0 של הנעלמים ושל משתני חוסר הם אי שליליים לפני ה-M אך המקדם של M בסכום (RHS) הוא שלילי ולכן אין פתרון אופטימלי

- ג.4

$$\text{Min } Z = y_1 + 2y_2$$

$$y_1 + y_2 \geq 3$$

$$y_1 + y_2 \geq -2$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

- ט.4

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	RHS	יחס
Z	1	M-1	M-2	-M	0	0	3M	
X5	0	1	1	-1	0	1	3	$\frac{3}{1} = 1$
X4	0	-1	-1	0	1	0	-2	$\frac{-2}{-1} = 2$

$$R_2 \rightarrow R_2 + R_1$$

$$R_0 \rightarrow R_0 - (M - 1)R_1$$

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	RHS	יחס
Z	1	0	-1	-1	0	-M+1	3	
X1	0	1	1	-1	0	1	3	
X4	0	0	0	-1	1	1	5	

$$(3, 0, 0, 5, 0) Z=3$$

4. ה - אם לאחת הבעיות (הפירמלית או הדואלית) פתרון לא חסום, לבעיה המשימה אין פתרון אפשרי.

שאלה 5

א. התשובה היא: $2 - \alpha < \frac{2}{3}$

ב. התשובה היא: $\alpha > 2$

שאלה 6

6. 1

$$(15, 7, 0, 0, 4, 0), Z = 13$$

6. 2

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13
0	0	2	1	0	1	13	5	2	2	0	0	1

שאלה 7

א. 7

$$(0, 4, 5, 0, 0, 0, 11), Z = 11$$

7. ב לא פתרון יחיד.

7. ג

$$\text{Min} \{ V = 7y_1 + 12y_2 + 10y_3 \}$$

$$-y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

$$-3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 1$$

$$-y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 3$$

$$-2y_1 \quad -8y_3 \leq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$C_B = (-1, 3, 0)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dual Solution: } Y^T = C_B * B^{-1} = (0.2, 0.8, 0)$$

שאלה 8

$$\text{Max } \{Z = 24X_1 + 23X_2 + 32X_3 + 20X_4\}$$

$$2X_1 + 7X_2 + 4X_3 + 7X_4 \leq 90$$

$$2X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 8X_4 \leq 65$$

$$4X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 3X_4 \leq 85$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

4	3	2	1	
	X			א
	X			ב
		X		ג
		X		ד
		X		ה
X				ו

שאלה 9

9. א

$$\text{Max } \{Z = X_1 + 2X_2 + X_3\} \quad \rightarrow \quad \text{Min}\{Z = 2Y_1 + Y_2 - 2Y_3\}$$

$$Y_1: X_1 + X_2 - X_3 \leq 2 \quad \rightarrow \quad Y_1 + Y_2 - 2Y_3 \geq 1$$

$$Y_2: X_1 - X_2 + X_3 = 1 \quad \rightarrow \quad -Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq -2$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 + X_3 \geq 2 \quad \rightarrow \quad -Y_1 + Y_2 - Y_3 = 1$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \leq 0, -\infty \leq X_3 \leq \infty \rightarrow Y_1 \geq 0, -\infty \leq Y_2 \leq \infty, Y_3 \geq 0$$

9. ב

נציב את (0,1,0) לבעיה הדואלית ונקבל:

$$0 + 1 - 2 * 0 = 1 \geq^{True} 1$$

$$0 + 1 + 0 = 1 \geq^{True} -2$$

$$0 + 1 - 0 = 1 =^{True} 1$$

$$Y_1 = 0 \geq^{True} 0$$

$$-\infty \leq^{True} Y_2 = 1 \leq^{True} \infty$$

$$Y_3 = 0 \geq^{True} 0$$

$$Z = 2Y_1 + Y_2 - 2Y_3 = 0 + 1 + 0 = 1$$

לפיכך (0,1,0) פתרון אפשרי לבעיה הדואלית

9. ג

$$* \text{Max} \{Z = X_1 + 2X_2 + X_3\}$$

$$1) X_1 + X_2 - X_3 \leq 2$$

$$2) X_1 - X_2 + X_3 = 1 \rightarrow 7) X_1 = 1 + X_2 - X_3$$

$$3) 2X_1 + X_2 + X_3 \geq 2$$

$$4) X_1 \geq 0$$

$$5) X_2 \leq 0$$

$$6) X_3 \text{ is free}$$

נציב את 7 במשוואות 1, 3, 4 ונקבל:

$$6) X_3 \text{ is free}$$

$$8) \text{Max} \{Z = 1 + 3X_2\}$$

$$9) 1 + X_2 - X_3 \geq 0 \rightarrow X_2 \geq X_3 - 1$$

$$10) 2 + 2X_2 - 2X_3 + X_2 + X_3 \geq 2 \rightarrow 3X_2 - X_3 \geq 0 \rightarrow X_3 \leq 3X_2$$

$$11) 1 + X_2 - X_3 + X_2 - X_3 \leq 2 \rightarrow 2X_2 - 2X_3 \leq 1 \rightarrow X_2 - X_3 \leq \frac{1}{2} \rightarrow X_3 \geq X_2 - \frac{1}{2}$$

$$10 + 11 \rightarrow 12) X_2 - \frac{1}{2} \leq X_3 \rightarrow X_2 - \frac{1}{2} \leq 3X_2 \rightarrow X_2 \geq -\frac{1}{4}$$

$$5 + 12 \rightarrow 13) 0 \geq X_2 > -\frac{1}{4}$$

מ 13 נובע כי הערך הגי גבוה עבור X_2 הוא 0, נציב זאת ב 8 ונקבל

$$\text{Max} \{ Z = 1 + 3 * 0 = 1 \}$$

ועבור כל ערך קטן מ 0 בעבור X_2 נקבל $Z < 1$

$$\Rightarrow Z' \leq 1$$

מ.ש.ל.

ד.9

ניעזר בסעיף הקודם, נסמן $\vec{V} = (1, 0, 0)$

מסעיף ג' $V_{X_2} = 0$ וזהו הערך המקסימלי 13

$$V_{X_3} = 0 \quad \text{והוא חופשי 6}$$

נציב ב 2 את מה שקיבלנו מעלה ונקבל: $X_1 = 1$ (14) ואכן $V_{X_1} = 1$

$$V_{X_1} = 1 \geq 0 \quad \text{אכן מקיים את 4, נציב ב * ונקבל } Z = 1 \text{ (15)}$$

שזהו הערך המקסימלי לפי הנחת סעיף ג, לכן $\vec{V} = (1, 0, 0)$ פתרון אופטימלי

מ.ש.ל.

שאלה 10

10. א

טבלת ראשונית

- שיטת הפינה הצפון מערבי
- חישוב ערכים להפחתה משורות ועמודות
- חישוב ערכים חדשים

\	A		B		C		היצע	
1	40	(-)	30	(+)	24	2	140	0
	105		35					
2	28	22-	40	(-)	32	(+)	100	10
			100		0			
3	20	26-	24	12-	28	(-)	80	6
	(+)				80			
ביקוש	105		135		80			
	40		30		22			

איטרציה ראשונה

- מצב חדש
- חישוב ערכים להפחתה משורות ועמודות
- חישוב ערכים חדשים

\	A		B		C		היצע	
1	40	(-)	30	(+)	24	2	140	0
	25		115					
2	28	22-	40	(-)	32		100	10
	(+)		20		80			
3	20		24	14	28	26	80	20-
	80							
ביקוש	105		135		80			
	40		30		22			

איטרציה שניה

\	A		B		C		היצע	
1	40	(-)	30		24	20-	140	0
	5		135		(+)			

2	28	(+)	40	22	32	(-)	100	12-
	20				80			
3	20		24	14	28	4	80	20-
	80							
ביקוש	105		135		80			
	40		30		44			

איטרציה שלישית

\	A		B		C		היצע	
1	40	20	30	(-)	24	(+)	140	0
			135		5			
2	28	(+)	40	2	32	(-)	100	8
	25				75			
3	20	(-)	24	6-	28	4	80	8
	80		(+)					
ביקוש	105		135		80			
	20		30		24			

טבלה סופית

\	A		B		C		היצע	
1	40		30		24		140	
			60		80			

2	28		40		32		100	
	100							
3	20		24		28		80	
	5		75					
ביקוש	105		135		80			

10. ב

$$30 * 60 + 24 * 80 + 28 * 100 + 20 * 5 + 24 * 75 = 8420$$

10. ג

\	A		B		C		היצע	
1	20		15		12		140	
	105		35					
2	14		20		16		100	
			100		0			
3	10		12		14		80	
					80			
ביקוש	105		135		80			

הפתרון האופטימלי לא ישתנה. אך המחיר המינימלי ישתנה, יתחלק בשניים מהמחיר שבסעיף הקודם.

שאלה 11

נשתמש באלגוריתם ההונגרי (מקסימום) לפתרון בעיית השמה.

בשאלה קיים אילוץ שכל עובד יכול לעבוד רק על שני מכונות צמודות, כלומר יש שני אפשרויות לחלוקת מכונות :
 $\{(1, 6), (4, 5), (3, 2)\}$ ו $\{(6, 5), (4, 3), (2, 1)\}$, לכן נפתור בעזרת האלגוריתם פעמיים.

מכונות עובדים	(1, 2)	(3, 4)	(5, 6)
1	$3 + 4 = 7$	$2 + 5 = 7$	$6 + 8 = 14$
2	$5 + 4 = 9$	$8 + 5 = 13$	$2 + 7 = 9$
3	$6 + 3 = 9$	$2 + 8 = 10$	$6 + 8 = 14$

נמיר את הטבלה לבעיית מינימום על ידי חיסור כל הערכים מהערך הגבוה ביותר

$$C_{ij} = 14 - C_{ij}$$

מכונות עובדים	(1, 2)	(3, 4)	(5, 6)
1	7	7	0
2	5	1	5
3	5	4	0

נחסר מכל שורה את העלות הנמוכה ביותר

$$R_i \rightarrow R_i - \text{Min}(R_i)$$

מכונות עובדים	(1, 2)	(3, 4)	(5, 6)	
1	7	7	0	-0
2	4	0	4	-1
3	5	4	0	-0

נחסר מכל שורה את העלות הנמוכה ביותר

$$C_i \rightarrow C_i - \text{Min}(C_i)$$

מכונות עובדים	(1, 2)	(3, 4)	(5, 6)
------------------	--------	--------	--------

1	3	7	0
2	0	0	4
3	1	4	0
	-4	-0	-0

נבחן את השורות והעמודות

מכונות עובדים	(1, 2)	(3, 4)	(5, 6)
1	3	7	0
2	0	0	4
3	1	4	0

נחסר את הערך המינימלי 1 לכל תא שלא מכוסה

נוסיף את הערך המינימלי 1 לכל תא שמכוסה

מכונות עובדים	(1, 2)	(3, 4)	(5, 6)
1	2	6	[0]
2	0	[0]	5
3	[0]	3	0

קיבלנו השמה מלאה, נציב אותה בטבלה המקורית ונקבל

עובד	מכונות	רווח
1	(5, 6)	14
2	(3, 4)	13
3	(1, 2)	9
	סה"כ	36

כעת נבדוק עבור האפשרויות השנייה

מכונות עובדים	(2, 3)	(4, 5)	(6, 1)
1	$4 + 2 = 6$	$5 + 6 = 11$	$8 + 3 = 11$
2	$4 + 8 = 12$	$5 + 2 = 7$	$7 + 5 = 12$
3	$3 + 2 = 5$	$8 + 6 = 14$	$8 + 6 = 14$

נמיר את הטבלה לבעיית מינימום על ידי חיסור כל הערכים מהערך הגבוה ביותר

$$C_{ij} = 14 - C_{ij}$$

מכונות עובדים	(2, 3)	(4, 5)	(6, 1)
1	8	3	3
2	2	7	2
3	9	0	0

נחסר מכל עמודה את המחיר הנמוך ביותר

$$R_i \rightarrow R_i - \text{Min}(R_i)$$

מכונות עובדים	(2, 3)	(4, 5)	(6, 1)	
1	5	0	0	-3
2	0	5	0	-2
3	9	0	0	-0

נבחן את השורות והעמודות

מכונות עובדים	(2, 3)	(4, 5)	(6, 1)
1	5	[0]	0
2	[0]	5	0
3	9	0	[0]

קיבלנו השמה מלאה, נציב אותה בטבלה המקורית ונקבל

רווח	מכונות	עובד
11	(4, 5)	1
12	(2, 3)	2
14	(6, 1)	3
37	סה"כ	

נבצע השוואה בין הסכומים שקיבלנו משני ההשמות, וניתן לראות כי ההשמה השנייה בעלת רווח גדול. כלומר הפתרון הוא:

מכונות	עובד
(4, 5)	1
(2, 3)	2
(6, 1)	3

והרווח לשעה יהיה 370 שקל