АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ НА ГРАФЕ

Задача о нахождении кратчайших путей довольно популярна и находит свое применение в реальной жизни, например нахождение кратчайшего пути доставки, который будет гарантировано экономить время, деньги и т.д. в зависимости от стоящих целей.

Данную задачу удобно реализовывать с помощью нагруженного графа с положительным весом ребер, на котором организуется поиск между двумя заданными вершинами, отвечающих ряду условий. Результатом алгоритма является путь, т.е. последовательность вершин и ребер, и его длина.

Рассмотрим наиболее эффективные алгоритмы нахождения кратчайших путей.

Алгоритм Дейкстры

Данный алгоритм разработан для нахождения кратчайшего пути между заданной конкретной вершиной и всеми остальными вершинами графа. Каждой вершине приписывается вес-метка, кратчайшее расстояние от начальной вершины до данной. Метка вершины, в свою очередь, может носить временный характер или постоянный. Временная метка может быть изменена на более короткий путь, если такой будет найден, в противном случае метка становится постоянной, и данный вес показывает длину кратчайшего пути от начальной, заданной вершины до данной.

Схема алгоритма:

1. Исходной вершине *i* присваивается постоянная метка «[0,–]».

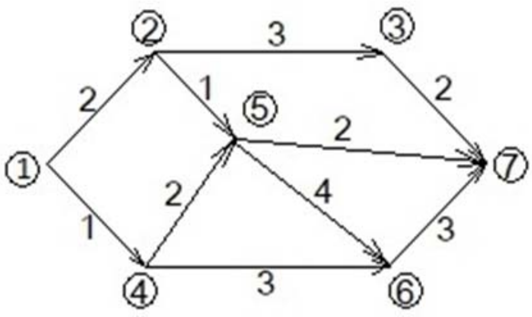
2. Основной шаг:

1) вычисляются временные метки узлов *j*, в которые можно попасть непосредственно из узла *i* и которые не имеют постоянные метки. Если узел *j* не имел ранее метку, то положить «[a_{ij}, *i*]» где a_{ij} – вес ребра $i \rightarrow j$. Если узел *j* имел уже метку [a_j, *k*], полученную от узла *k*, то заменить a_j на $a_i + a_{ij}$ в случаи, если $a_i + a_{ij} < a_j$, а *k* положить равное *i*. Из всех полученных временных меток выбираем наименьшую и делаем ее постоянной;

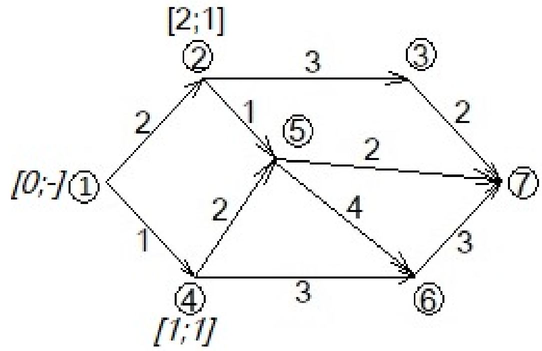
2) если временных меток больше нет, то процесс вычисления пути заканчивается, иначе выбираем последнею метку, которая стала постоянной [a_j, *k*], кладем *i* = *k* и повторяем *основной шаг*.

Пример.

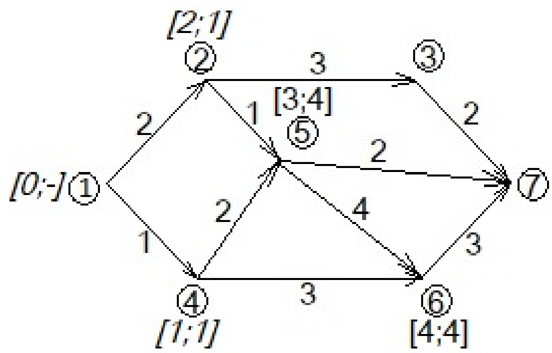
На рисунке ниже дана сеть дорог между семью городами, представленная графом. Протяженность дорог указана над каждым ребром графа в условных единицах. Найти кратчайшие расстояния от города 1 до всех остальных городов.



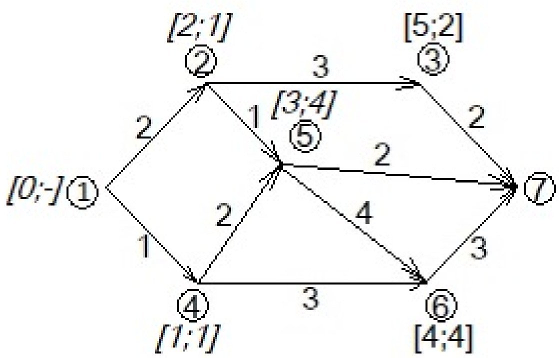
Пометим город 1 постоянной меткой [0;–]. Из города 1 можно попасть непосредственно в город 2 и город 4, получим соответствующие метки: [2;1] и [1;1]. Из данных временных меток наименьшей является [1;1], делаем ее постоянной.



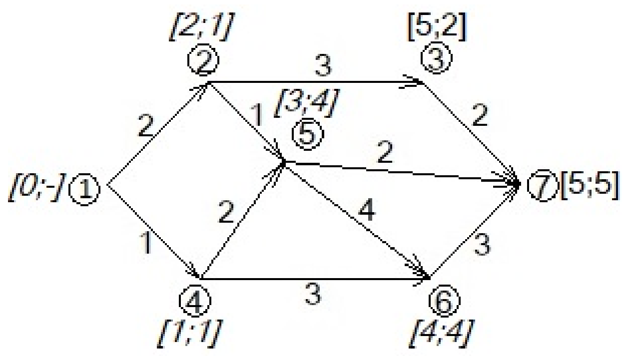
Из города 4 (последняя постоянная метка) можно попасть в город 5 и город 6, проставляем временные метки: [3;4] и [4;4]. Из всего массива временных меток наименьшей является метка [2;1], она переходит в статус постоянной.



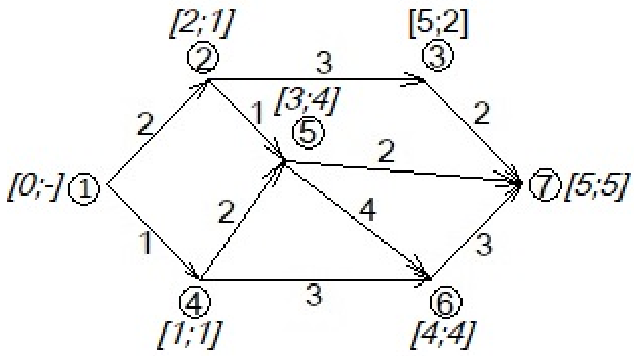
Рассмотрим город 2, из него непосредственно можно попасть в город 5 и в город 3, но временную метку [3;4] нет смысла менять на метку [3;2], так что проставим только метку [5;2] у города 3. Наименьшая временная метка [3;4] становится постоянной.



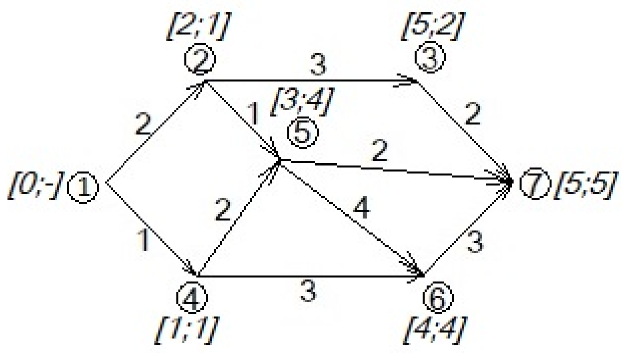
Из города 5 можно попасть в города 6 и 7. Но временная метка города 6 – [4;4] является наименьшей, чем возможная метки [7;5], так что метку [4;4] оставляем и проставляем только метку [5;5] у города 7. Наименьшую временную метку [4;4] делаем постоянной.



Выбираем наименьшую временную метку [5;5], дальнейшего пути из данного города нет, так что делаем ее постоянной.



Меняем статус временной метки, последней оставшейся, [5;2] на постоянную. На данном шаге алгоритм закончен.



Например, для нахождения кратчайшего расстояния из города 1 до города 7, достаточно рассмотреть результирующий граф. Первое число метки города 7 соответствует длине пути, т.е. 5 усл. ед., а для получения маршрута надо последовательно рассмотреть вторые числовые значения меток. Для города 7 получим: 7→5→4→1, а теперь представим данный маршрут из начального города 1: 1→4→5→7.

Алгоритм Флойда

Алгоритм Флойда позволяет найти кратчайшие пути между всеми парами вершин графа. В данном алгоритме граф с n вершинами представляется в виде квадратной матрицы размера $n \times n$, где каждый элемент матрицы d_{ij} равен расстоянию от узла i к узлу j, если данная дуга графа существует, и бесконечности в противном случае.

Идея данного алгоритма заключается в принципе: если есть три узла i, j и k и заданы расстояния между ними, то при выполнении неравенства $d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$, следует заменить путь $i \to j$ на путь $i \to k \to j$. Данная замена называется *треугольным оператором* и выполняется систематически в процессе реализации алгоритма Флойда.

Схема алгоритма:

1. Задаем матрицу начальных расстояний D_0 и матрицу последовательности узлов S_0, причем диагональные элементы обозначаем «–», так как данные элементы не участвуют в алгоритме.

D_0:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & - & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & - \end{pmatrix} \end{array}$$

S_0:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & - & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Полагаем $k = 1$.

2. Основной шаг k:

Задаем строку k и столбец k, как разрешающие, и рассматриваем возможность применения *треугольного оператора* ко всем элементам матрицы D_{k-1}, согласно следующему принципу: если $d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$, то в матрице D_k следует заменить элемент d_{ij} суммой

$d_{ik} + d_{kj}$, а в матрице S_k элемент s_{ij} на k. Если $k = n$, то конец алгоритма, иначе кладем $k = k + 1$ и повторяем основной шаг.

По результирующим матрицам D_n и S_n определяем кратчайшие расстояния между любыми двумя вершинами графа следующим образом:

1. Расстояние между вершинами i и j равно элементу d_{ij} в матрице D_n.

2. Кратчайший путь $i \to j$ определяется по матрице S_n: если $s_{ij} = j$, то путь $i \to j$, иначе, *если* $s_{ij} = k$, при этом элемент $s_{ik} = k$ и элемент $s_{kj} = j$, то имеем путь $i \to k \to j$. Иначе повторяем процедуру проверки пути для элементов s_{ik} и s_{kj}.

Пример.

Задан взвешенный граф матрицей весов. С помощью алгоритма Флойда найти маршруты наименьшего веса между всеми вершинами графа.

$$\begin{pmatrix} - & 3 & 4 & - & 5 & 1 \\ 3 & - & 8 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & - & 5 & 5 & - \\ - & 1 & 5 & - & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 1 & - & 4 \\ 1 & 10 & 2 & 2 & 4 & - \end{pmatrix}$$

Решение:

Составим матрицу начальных весов $D0$, в которой заменим символом «∞» элементы матрицы, соответствующие отсутствующим дугам, и матрицу последовательности узлов $S0$.

$$D0 = \begin{pmatrix} - & 3 & 4 & \infty & 5 & 1 \\ 3 & - & 8 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & - & 5 & 5 & \infty \\ \infty & 1 & 5 & - & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 1 & - & 4 \\ 1 & 10 & 2 & 2 & 4 & - \end{pmatrix} \qquad S0 = \begin{pmatrix} - & 2 & 3 & - & 5 & 6 \\ 1 & - & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & - & 4 & 5 & - \\ 1 & 2 & 3 & - & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & - & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & - \end{pmatrix}$$

Шаг 1. Первая строка разрешающая, первый столбец разрешающий. Проверяем возможность применения треугольный оператор, выделяя те элементы матрицы $D0$, которые больше, чем сумма соответствующих элементов разрешающей строки и столбца. Те же элементы выделяем и в матрице $S0$.

$$D0 = \begin{pmatrix} - & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \infty & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & - & 8 & 1 & 5 & 3 \\ \mathbf{2} & 8 & - & 5 & 5 & \infty \\ \infty & 1 & 5 & - & 1 & 2 \\ \mathbf{5} & 5 & 5 & 1 & - & 4 \\ \mathbf{1} & 10 & 2 & 2 & 4 & - \end{pmatrix} \qquad S0 = \begin{pmatrix} - & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & - & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & - & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & - & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & - & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & - \end{pmatrix}$$

Переходим к матрице $D1$, заменяя выделенные элементы матрицы $D0$ на сумму соответствующих элементов разрешающей строки и столбца:

$$d_{23} = d_{21} + d_{13} = 3 + 4 = 7,$$
$$d_{32} = d_{31} + d_{12} = 2 + 3 = 5,$$
$$d_{36} = d_{31} + d_{16} = 2 + 1 = 3,$$
$$d_{62} = d_{61} + d_{12} = 1 + 3 = 4.$$

Выделенные элементы матрицы $S0$ заменим на «1».

$$s_{23} = 1,\ s_{32} = 1,\ s_{36} = 1,\ s_{62} = 1.$$

Шаг 2. Вторая строка разрешающая, второй столбец разрешающий.

$$D1 = \begin{pmatrix} - & \mathbf{3} & 4 & \infty & 5 & 1 \\ \mathbf{3} & - & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ 2 & \mathbf{5} & - & 5 & 5 & 3 \\ \infty & \mathbf{1} & 5 & - & 1 & 2 \\ 5 & \mathbf{5} & 5 & 1 & - & 4 \\ 1 & \mathbf{4} & 2 & 2 & 4 & - \end{pmatrix} \qquad S1 = \begin{pmatrix} - & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & - & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & - & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & - & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & - \end{pmatrix}$$

$$d_{14} = d_{24} + d_{12} = 1 + 3 = 4,$$
$$d_{41} = d_{21} + d_{42} = 3 + 1 = 4,$$
$$s_{14} = 2,\ s_{41} = 2.$$

Шаг 3. Третья строка разрешающая, третий столбец разрешающий.

$$D2 = \begin{pmatrix} - & 3 & \mathbf{4} & 4 & 5 & 1 \\ 3 & - & \mathbf{7} & 1 & 5 & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & - & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ 4 & 1 & \mathbf{5} & - & 1 & 2 \\ 5 & 5 & \mathbf{5} & 1 & - & 4 \\ 1 & 4 & \mathbf{2} & 2 & 4 & - \end{pmatrix} \qquad S2 = \begin{pmatrix} - & 2 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & - & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & - & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & - & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & - \end{pmatrix}$$

Элементы, к которым можно применить треугольный оператор, отсутствуют, следовательно, матрица $D3 = D2$ и матрица $S3 = S2$.

Шаг 4. Четвертая строка разрешающая, четвертый столбец разрешающий.

$$D3 = \begin{pmatrix} - & 3 & 4 & \mathbf{4} & 5 & 1 \\ 3 & - & 7 & \mathbf{1} & 5 & 3 \\ 2 & 5 & - & \mathbf{5} & 5 & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & - & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 5 & 5 & 5 & \mathbf{1} & - & 4 \\ 1 & 4 & 2 & \mathbf{2} & 4 & - \end{pmatrix} \qquad S3 = \begin{pmatrix} - & 2 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & - & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & - & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & - & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & - \end{pmatrix}$$

$$d_{25} = d_{24} + d_{45} = 1 + 1 = 2,$$
$$d_{52} = d_{42} + d_{54} = 1 + 1 = 2,$$
$$d_{56} = d_{54} + d_{46} = 1 + 2 = 3,$$
$$d_{62} = d_{42} + d_{64} = 1 + 2 = 3,$$
$$d_{65} = d_{45} + d_{64} = 1 + 2 = 3,$$
$$s_{25} = 4,\ s_{52} = 4,\ s_{56} = 4,\ s_{62} = 4,\ s_{65} = 4.$$

Шаг 5. Пятая строка разрешающая, пятый столбец разрешающий.

$$D4 = \begin{pmatrix} - & 3 & 4 & 4 & \mathbf{5} & 1 \\ 3 & - & 7 & 1 & \mathbf{2} & 3 \\ 2 & 5 & - & 5 & \mathbf{5} & 3 \\ 4 & 1 & 5 & - & \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & - & \mathbf{3} \\ 1 & 3 & 2 & 2 & \mathbf{3} & - \end{pmatrix} \qquad S4 = \begin{pmatrix} - & 2 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & - & 1 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & - & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & - & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 4 & - \end{pmatrix}$$

Матрица $D5 = D4$, матрица $S5 = S4$.

Шаг 6. Шестая строка разрешающая, шестой столбец разрешающий.

$$D5 = \begin{pmatrix} - & 3 & 4 & 4 & 5 & \mathbf{1} \\ 3 & - & 7 & 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 2 & 5 & - & 5 & 5 & \mathbf{3} \\ 4 & 1 & 5 & - & 1 & \mathbf{2} \\ 5 & 2 & 5 & 1 & - & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & - \end{pmatrix} \qquad S5 = \begin{pmatrix} - & 2 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & - & 1 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & - & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & - & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 4 & - \end{pmatrix}$$

$$d_{13} = d_{16} + d_{63} = 1 + 2 = 3,$$
$$d_{14} = d_{16} + d_{64} = 1 + 2 = 3,$$
$$d_{15} = d_{16} + d_{65} = 1 + 3 = 4,$$
$$d_{23} = d_{26} + d_{63} = 3 + 2 = 5,$$
$$d_{41} = d_{46} + d_{61} = 2 + 1 = 3,$$
$$d_{43} = d_{46} + d_{63} = 2 + 2 = 4,$$
$$d_{51} = d_{56} + d_{61} = 3 + 1 = 4.$$

$$s_{13} = 6,\ s_{14} = 6,\ s_{15} = 6,\ s_{23} = 6,\ s_{41} = 6,\ s_{43} = 6,\ s_{51} = 6.$$

Результирующие матрицы $D6$ и $S6$:

$$D6 = \begin{pmatrix} - & 3 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & - & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & - & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & - & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & - & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & - \end{pmatrix} \qquad S6 = \begin{pmatrix} - & 2 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & - & 6 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 6 & - & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 4 & - & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 4 & - \end{pmatrix}$$

Найдем маршрут наименьшего веса между вершиной графа 2 и 5. Вес данного маршрута равен элементу d_{25} матрицы $D6$, т.е. 2. Сам маршрут восстанавливаем по матрице $S6$: $s_{25} = 4$, следовательно, маршрут проходит через четвертую вершину $2 \to 4 \to 5$. Требуется также проверить маршруты $2 \to 4$ и $4 \to 5$, но $s_{24} = 4$, $s_{45} = 5$, так что окончательный путь $2 \to 4 \to 5$.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

*Постановка задачи: к*оммивояжер должен посетить *n* городов и возвратиться в исходный пункт, при этом маршрут коммивояжера должен быть минимальной протяженности.

Данную задачу можно представить как задачу на графе, в которой n вершин (города), а дуги – имеющиеся коммуникации между этими городами (дороги).

Контур – ориентированный цикл в орграфе.

Контур, включающий в себя каждую вершину графа хотя бы один раз, называется *маршрутом коммивояжера*. Контур, проходящий через каждую вершину графа *ровно один раз,* называется *гамильтоновым контуром*. *Общая задача коммивояжера* – задача поиска маршрута наименьшей длины. *Задача коммивояжера* – задача поиска гамильтонова контура наименьшей длины. Контур наименьшей длины, называется *оптимальным маршрутом коммивояжера*. *Оптимальный маршрут коммивояжера* не всегда бывает *гамильтоновым контуром.*

Алгоритм Литтла. Алгоритм поиска решения задачи коммивояжера в виде гамильтонова контура, применяется для графов, где каждая из n вершин соединена с остальными вершинами графа двунаправленными ребрами. Каждому ребру приписан вес c_{ij}, причем $c_{ij} \geq 0$. Составим матрицу весов для данного графа, в которой диагональные элементы равны бесконечности $c_{ii} = \infty$. В случае если вершина i и вершина j не связаны между собой, то соответствующему элементу матрицы приписываем вес равный длине минимального пути между данными вершинами. Матрицу минимальных расстояний и соответствующие маршруты между всеми вершинами графа можно получить, применив алгоритм Флойда. Если дуга (i,j) войдет в результирующий контур, то маршрут $i \to j$ следует заменить кратчайшим путем между данными вершинами.

Алгоритм Литтла:

1. В каждой строке матрицы стоимости найдем минимальный элемент c^* и вычтем его из всех элементов данной строки.

2. В каждом столбце матрице стоимости также найдем минимальный элемент c^* и вычтем его из всех элементов данного столбца.

3. В полученной матрице для каждого элемента $c_{ij} = 0$ вычислим его степень r_{ij} равную сумме наименьшего элемента i-й строки и j-го столбца (исключая сам элемент c_{ij}). Из всех степеней r_{ij} выберем наибольшую степень $r_{nm} = \max(r_{ij})$. Дуга $(n;m)$ входит в результирующий контур.

4. Удаляем из матрицы строку n и столбец m, а элемент c_{mn} приравниваем к ∞, так как в пункт n из пункта m возвратиться нельзя. Если элемента c_{mn} уже нет в матрице стоимости, то найдется строка k и столбец l, в которых отсутствует знак ∞. Элемент c_{kl} приравниваем к ∞.

5. Повторяем алгоритм с шага 1, пока не достигнем матрицы размера 2×2.

6. По матрице 2×2 включаем в результирующий контур последние две дуги. Гамильтонов контур получен.

В ходе реализации алгоритма ведем постоянный учет *нижней границы Н*, которая равна сумме всех вычтенных элементов по строчкам и столбцам. Итоговое значение *нижней границы* равно длине результирующего контура.

Пример.

Найти оптимальный маршрут коммивояжера на графе, представленном матрицей расстояний между шестью объектами следования.

$$\begin{pmatrix} – & 10 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & – & 5 & 10 & 15 & 3 \\ 4 & 5 & – & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 10 & 6 & – & 7 & 15 \\ – & 15 & 5 & 3 & – & 2 \\ 7 & 3 & – & 15 & 2 & – \end{pmatrix}$$

Решение:

С помощью алгоритма Флойда составим матрицу кратчайших расстояний между всеми вершинами графа.

$$D0 = \begin{pmatrix} – & \mathbf{10} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{10} & – & 5 & 10 & 15 & 3 \\ \mathbf{4} & 5 & – & 6 & 5 & 2 \\ \mathbf{3} & 10 & 6 & – & 7 & 15 \\ \infty & 15 & 5 & 3 & – & 2 \\ \mathbf{7} & 3 & \infty & 15 & 2 & – \end{pmatrix} \qquad S0 = \begin{pmatrix} – & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & – & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & – & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & – & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & – & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & – \end{pmatrix}$$

$$D1 = \begin{pmatrix} – & \mathbf{10} & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \mathbf{10} & – & \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{15} & \mathbf{3} \\ 4 & \mathbf{5} & – & 6 & 5 & 2 \\ 3 & \mathbf{10} & 5 & – & 7 & 10 \\ \infty & \mathbf{15} & 5 & 3 & – & 2 \\ 7 & \mathbf{3} & 9 & 10 & 2 & – \end{pmatrix} \qquad S1 = \begin{pmatrix} – & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & – & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & – & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & – & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & – & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 5 & – \end{pmatrix}$$

$$D2 = \begin{pmatrix} – & 10 & \mathbf{2} & 3 & 5 & 7 \\ 10 & – & \mathbf{5} & 10 & 15 & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & – & \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ 3 & 10 & \mathbf{5} & – & 7 & 13 \\ 25 & 15 & \mathbf{5} & 3 & – & 2 \\ 7 & 3 & \mathbf{8} & 10 & 2 & – \end{pmatrix} \qquad S2 = \begin{pmatrix} – & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & – & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & – & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & – & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & – & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & – \end{pmatrix}$$

$$D3 = \begin{pmatrix} - & 7 & 2 & \mathbf{3} & 5 & 4 \\ 9 & - & 5 & \mathbf{10} & 10 & 3 \\ 4 & 5 & - & \mathbf{6} & 5 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & - & \mathbf{7} & \mathbf{7} \\ 9 & 10 & 5 & \mathbf{3} & - & 2 \\ 7 & 3 & 8 & \mathbf{10} & 2 & - \end{pmatrix} \qquad S3 = \begin{pmatrix} - & 3 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & - & 3 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & - & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & - & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & - & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & - \end{pmatrix}$$

$$D4 = \begin{pmatrix} - & 7 & 2 & 3 & \mathbf{5} & 4 \\ 9 & - & 5 & 10 & \mathbf{10} & 3 \\ 4 & 5 & - & 6 & \mathbf{5} & 2 \\ 3 & 10 & 5 & - & \mathbf{7} & 7 \\ \mathbf{6} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & - & \mathbf{2} \\ 7 & 3 & 8 & 10 & \mathbf{2} & - \end{pmatrix} \qquad S4 = \begin{pmatrix} - & 3 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & - & 3 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & - & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & - & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & - & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & - \end{pmatrix}$$

$$D5 = \begin{pmatrix} - & 7 & 2 & 3 & 5 & \mathbf{4} \\ 9 & - & 5 & 10 & 10 & \mathbf{3} \\ 4 & 5 & - & 6 & 5 & \mathbf{2} \\ 3 & 10 & 5 & - & 7 & \mathbf{7} \\ 6 & 10 & 5 & 3 & - & \mathbf{2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & - \end{pmatrix} \qquad S5 = \begin{pmatrix} - & 3 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & - & 3 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & - & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & - & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & - & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 5 & - \end{pmatrix}$$

$$D6 = \begin{pmatrix} - & 7 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & - & 5 & 8 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & - & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 5 & - & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 5 & 3 & - & 2 \\ 7 & 3 & 7 & 5 & 2 & - \end{pmatrix} \qquad S6 = \begin{pmatrix} - & 3 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & - & 3 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & - & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & - & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 4 & - & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 5 & - \end{pmatrix}$$

Для полученного графа найдем оптимальный гамильтонов контур с помощью алгоритма Литтла, предварительно заменив все диагональные элементы знаком «∞».

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & \infty & 5 & 8 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & \infty & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 5 & \infty & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 5 & 3 & \infty & 2 \\ 7 & 3 & 7 & 5 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

Найдем минимальные элементы в каждой строке матрицы.

$$\begin{array}{ccc}
\text{№} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix} & \min \\
\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} & \begin{pmatrix}\infty & 7 & 2 & 3 & 5 & 4\\ 9 & \infty & 5 & 8 & 5 & 3\\ 4 & 5 & \infty & 6 & 4 & 2\\ 3 & 10 & 5 & \infty & 7 & 7\\ 6 & 5 & 5 & 3 & \infty & 2\\ 7 & 3 & 7 & 5 & 2 & \infty\end{pmatrix} & \begin{matrix}2\\3\\2\\3\\2\\2\end{matrix}
\end{array}$$

Вычтем из всех элементов строки ее минимальный элемент.

$$\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix} \\
\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} & \begin{pmatrix}\infty & 5 & 0 & 1 & 3 & 2\\ 6 & \infty & 2 & 5 & 2 & 0\\ 2 & 3 & \infty & 4 & 2 & 0\\ 0 & 7 & 2 & \infty & 4 & 4\\ 4 & 3 & 3 & 1 & \infty & 0\\ 5 & 1 & 5 & 3 & 0 & \infty\end{pmatrix}
\end{array}$$

Тоже самое проделаем и с элементами столбцов матрицы.

$$\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix} \\
\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} & \begin{pmatrix}\infty & 5 & 0 & 1 & 3 & 2\\ 6 & \infty & 2 & 5 & 2 & 0\\ 2 & 3 & \infty & 4 & 2 & 0\\ 0 & 7 & 2 & \infty & 4 & 4\\ 4 & 3 & 3 & 1 & \infty & 0\\ 5 & 1 & 5 & 3 & 0 & \infty\end{pmatrix} \\
\min & \begin{matrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{matrix}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix} \\
\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} & \begin{pmatrix}\infty & 4 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 6 & \infty & 2 & 4 & 2 & 0\\ 2 & 2 & \infty & 3 & 2 & 0\\ 0 & 6 & 2 & \infty & 4 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 0 & \infty & 0\\ 5 & 0 & 5 & 2 & 0 & \infty\end{pmatrix}
\end{array}$$

Получим матрицу, у которой в каждой строчке и в каждом столбце есть «0». Нижняя граница на данном этапе равна $H = 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16$. Для каждого нулевого элемента рассчитаем его степень r_{ij}, складывая для этого минимальный элемент его строчки и его столбца, исключая сам элемент.

$$\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix} \\
\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} & \begin{pmatrix}\infty & 4 & 0^2 & 0^0 & 3 & 2\\ 6 & \infty & 2 & 4 & 2 & 0^2\\ 2 & 2 & \infty & 3 & 2 & 0^2\\ 0^4 & 6 & 2 & \infty & 4 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 0^0 & \infty & 0^0\\ 5 & 0^2 & 5 & 2 & 0^0 & \infty\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\max r_{ij} = r_{41} = 4.$$

Дуга **(4;1)** входит в результирующий контур. Удаляем из матрицы четвертую строчку и первый столбец. Элемент a_{14} кладем равным ∞, чтобы контур не замкнулся преждевременно, и повторяем алгоритм.

$$\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \text{min} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 4 & 0 & \infty & 3 & 2 \\ \infty & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & \infty & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & \infty \end{array}\right)\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\
\text{min} & \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}
\end{array}
\to
\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0^4 & \infty & 3 & 2 \\ \infty & 2 & 4 & 2 & 0^2 \\ 2 & \infty & 3 & 2 & 0^2 \\ 2 & 3 & 0^2 & \infty & 0^0 \\ 0^2 & 5 & 2 & 0^2 & \infty \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\max r_{ij} = r_{13} = 4.$$

Дуга **(1;3)** входит в результирующий контур. Удаляем из матрицы первую строчку и третий столбец. Элемента a_{31} в матрице уже нет, но в третей строке и четвертом столбце отсутствует знак ∞, следовательно, $a_{34} = \infty$.

$$\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 5 & 6 & \text{min} \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} \infty & 4 & 2 & 0 \\ 2 & \infty & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \infty \end{array}\right)\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\
\text{min} & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}
\end{array}
\to
\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 4 & 2 & 0^2 \\ 2 & \infty & 2 & 0^2 \\ 2 & 0^2 & \infty & 0^0 \\ 0^2 & 2 & 0^2 & \infty \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\max r_{ij} = r_{26} = r_{36} = r_{54} = r_{62} = 2.$$

Алгоритм разветвляется:

1) $r_{26} = 2$

Дуга **(2;6)** входит в результирующий контур. Удаляем из матрицы вторую строчку и шестой столбец. Элемент a_{62} кладем равным ∞.

$$\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 5 & \text{min} \end{array} \\
\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} 2 & \infty & 2 \\ 2 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}
\end{array}
\to
\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \infty & 0 \\ 2 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{min} & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}
\end{array}
\to
\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0^2 & \infty & 0^0 \\ 2 & 0^4 & \infty \\ \infty & 2 & 0^2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\max r_{ij} = r_{54} = 4.$$

Дуга **(5;4)** входит в результирующий контур. Удаляем из матрицы пятую строчку и четвертый столбец. Нижняя граница на данном этапе равна H_1 = 16 + 2 = 18. Элемента a_{45} в матрице уже нет, но в третьей строке и пятом столбце отсутствует знак ∞, следовательно, $a_{35} = \infty$.

$$\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{array}{cc} 2 & 5 \end{array} & \text{min} \\
\begin{array}{c} 3 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
\text{min} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} &
\end{array}$$

Две последние дуги результирующего контура соответствуют нулям итоговой матрицы размера 2×2: дуга **(3;2)** и дуга **(6;5)**.

$$H_1 = 18.$$

Маршрут коммивояжера включает дуги (1;3), (3;2), (2;6), (6;5), (5;4), (4;1).

2) $r_{36} = 2$

Дуга **(3;6)** входит в результирующий контур. Удаляем из матрицы третью строку и шестой столбец. Элемента a_{63} в матрице уже нет, но в шестой строке и четвертом столбце отсутствует знак ∞, следовательно, $a_{64} = \infty$.

$$\begin{array}{ccc}
\text{№} & \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \end{array} & \text{min} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 4 & 2 \\ 2 & 0 & \infty \\ 0 & \infty & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \infty \\ 0 & \infty & 0 \end{pmatrix} \\
\text{min} & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cc}
\text{№} & \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 2 & 0^2 \\ 2 & 0^4 & \infty \\ 0^2 & \infty & 0^0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\max r_{ij} = r_{54} = 4.$$

Дуга **(5;4)** входит в результирующий контур. Удаляем из матрицы пятую строчку и четвертый столбец. Нижняя граница на данном этапе равна H_2 = 16 + 2 = 18. Элемента a_{45} в матрице уже нет, но в шестой строке и пятом столбце отсутствует знак ∞, следовательно, $a_{65} = \infty$.

$$\begin{array}{ccc}
\text{№} & \begin{array}{cc} 2 & 5 \end{array} & \text{min} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \infty \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
\text{min} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} &
\end{array}$$

Две последние дуги результирующего контура соответствуют нулям итоговой матрицы размера 2×2: дуга **(6;2)** и дуга **(2;5)**.

$$H_2 = 18.$$

Маршрут коммивояжера включает дуги (1;3), (3;6), (6;2), (2;5), (5;4), (4;1).

Приводить рассмотрение остальных ветвлений не будем, так как они дадут раннее уже полученные контуры. $H_1 = H_2 = 18$ минимальная длина маршрута коммивояжера. Рассмотрим полученные контуры.

Так как в процессе решения задачи с помощью алгоритма Фогеля мы заменили некоторые дуги графа длиной кратчайшего пути, то надо проверить дуги результирующего контура по матрице S6 метода Фогеля. Вс е полученные дуги результирующего контура являются прямыми дугами графа, следовательно, решение данной задачи коммивояжера – есть два гамильтонова контура:

1) (1;3), (3;2), (2;6), (6;5), (5;4), (4;1);

2) (1;3), (3;6), (6;2), (2;5), (5;4), (4;1).

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ №2

Найти оптимальный маршрут коммивояжера на графе, представленном матрицей расстояний между шестью объектами следования.

1. $$\begin{pmatrix} - & 2 & 10 & 3 & 15 & 8 \\ 2 & - & 5 & 4 & \infty & 6 \\ 10 & 5 & - & 15 & 12 & 3 \\ 5 & \infty & 15 & - & 5 & 10 \\ 15 & 2 & 12 & 5 & - & \infty \\ 8 & 6 & 3 & 10 & 4 & - \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} - & 5 & 5 & 7 & 10 & 15 \\ 5 & - & 4 & 12 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & - & 2 & 4 & 3 \\ 7 & 12 & 2 & - & \infty & 14 \\ 10 & \infty & 4 & 2 & - & 3 \\ 15 & 6 & 3 & 14 & 3 & - \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} - & \infty & 3 & 4 & 10 & 12 \\ 3 & - & 8 & 5 & 12 & 2 \\ 3 & 8 & - & 12 & 4 & 5 \\ 4 & \infty & 12 & - & 3 & 10 \\ \infty & 12 & 4 & 3 & - & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 10 & 4 & - \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} - & 10 & 2 & 6 & 15 & 8 \\ 10 & - & \infty & 6 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & - & \infty & 6 & 2 \\ 6 & 6 & \infty & - & 5 & 10 \\ 15 & 9 & 6 & 5 & - & 2 \\ 8 & 10 & 2 & 10 & \infty & - \end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} - & \infty & 3 & 4 & 2 & 8 \\ \infty & - & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 10 & - & 12 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 12 & - & 8 & 3 \\ 2 & 8 & 6 & 8 & - & 10 \\ 8 & \infty & 4 & 3 & 10 & - \end{pmatrix}$$

6. $$\begin{pmatrix} - & 15 & 2 & 3 & 10 & 2 \\ 15 & - & \infty & 2 & 8 & 5 \\ 2 & \infty & - & \infty & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & - & 15 & 8 \\ 10 & 8 & 6 & 15 & - & \infty \\ 2 & 5 & 4 & 8 & 2 & - \end{pmatrix}$$

7. $\begin{pmatrix} - & 3 & 10 & \infty & 10 & 2 \\ 3 & - & 5 & 4 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & - & \infty & 2 & 6 \\ 3 & 4 & \infty & - & 11 & 8 \\ 10 & 10 & 2 & 11 & - & 3 \\ 2 & 15 & 6 & 8 & 3 & - \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} - & 10 & 5 & 2 & 2 & 10 \\ 10 & - & 5 & \infty & 7 & 3 \\ 5 & 5 & - & 4 & 2 & 12 \\ 2 & 6 & 4 & - & \infty & 5 \\ 2 & 7 & 2 & 2 & - & 3 \\ 10 & 3 & 12 & 5 & 3 & - \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} - & 12 & 4 & 5 & 10 & 8 \\ 12 & - & 5 & 4 & 10 & 2 \\ 4 & 5 & - & 10 & 15 & 3 \\ 5 & 4 & 10 & - & 5 & 6 \\ 10 & \infty & \infty & 5 & - & 8 \\ 8 & 2 & 3 & 6 & 8 & - \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} - & 4 & 6 & 12 & 5 & 15 \\ 4 & - & 4 & 3 & 13 & 8 \\ 6 & 4 & - & 5 & 10 & 2 \\ 12 & \infty & 5 & - & \infty & 4 \\ 5 & 13 & 10 & \infty & - & 2 \\ 15 & 8 & 2 & 4 & 2 & - \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} - & 3 & 5 & 10 & \infty & 8 \\ 12 & - & 2 & 4 & 15 & 10 \\ 5 & 2 & - & \infty & 5 & 6 \\ 10 & 4 & \infty & - & 12 & 8 \\ 5 & 15 & 5 & 12 & - & 3 \\ 8 & 10 & 6 & 8 & 3 & - \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} - & 10 & 2 & 10 & 9 & 7 \\ 10 & - & 6 & 5 & 9 & 10 \\ 2 & 6 & - & 10 & \infty & 15 \\ 10 & 5 & 10 & - & \infty & 3 \\ 9 & 9 & \infty & 5 & - & 12 \\ 7 & 10 & 15 & 3 & 8 & - \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} - & 3 & 4 & 10 & 2 & 12 \\ 3 & - & 3 & 8 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & - & 7 & 12 & 4 \\ 10 & 8 & 7 & - & \infty & 3 \\ 2 & 9 & 12 & \infty & - & 10 \\ 12 & 2 & \infty & 3 & 10 & - \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} - & 10 & 12 & 5 & 7 & 2 \\ 10 & - & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 12 & 3 & - & 4 & 8 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & - & 10 & 5 \\ 7 & 5 & \infty & 10 & - & \infty \\ 2 & 12 & 10 & 5 & \infty & - \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} - & 11 & 5 & 7 & 2 & 9 \\ \infty & - & 12 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & 12 & - & \infty & 7 & 10 \\ 7 & 5 & 3 & - & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 4 & - & 10 \\ 9 & 2 & 10 & 3 & 10 & - \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} - & 2 & 6 & 12 & 3 & 16 \\ 2 & - & 5 & 9 & 12 & 3 \\ 6 & 5 & - & 4 & 2 & 11 \\ 12 & 9 & 4 & - & \infty & 4 \\ 3 & 12 & 2 & \infty & - & 10 \\ 16 & \infty & 11 & 4 & 10 & - \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} - & 4 & 5 & 10 & 12 & 3 \\ 4 & - & 5 & 10 & \infty & 5 \\ 5 & 5 & - & 3 & 9 & 7 \\ 10 & 10 & 3 & - & 4 & 10 \\ 12 & \infty & 9 & \infty & - & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 5 & - \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} - & 10 & 3 & 15 & 9 & 6 \\ 10 & - & 4 & \infty & 6 & 12 \\ 3 & 4 & - & \infty & 6 & 3 \\ 15 & 7 & \infty & - & 5 & 10 \\ 9 & 6 & 6 & 5 & - & 7 \\ 6 & 12 & 3 & 10 & 7 & - \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} - & 3 & 6 & 12 & 2 & 6 \\ 3 & - & 4 & 10 & 8 & 12 \\ 6 & 7 & - & \infty & 6 & \infty \\ 12 & 10 & 7 & - & 9 & 12 \\ 2 & 8 & 6 & 9 & - & 6 \\ 6 & 12 & \infty & 12 & 6 & - \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} - & 7 & 3 & 2 & 15 & 11 \\ 7 & - & 5 & 8 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & - & 6 & 12 & 5 \\ 2 & 8 & 6 & - & 5 & \infty \\ 15 & 2 & \infty & 5 & - & 10 \\ 11 & 10 & 5 & \infty & 10 & - \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} - & 5 & 9 & 10 & 3 & 12 \\ 5 & - & 7 & 6 & 12 & 6 \\ 9 & 7 & - & 5 & 10 & 3 \\ 10 & 6 & 5 & - & 6 & 12 \\ 3 & 12 & 10 & 6 & - & \infty \\ 12 & \infty & 3 & 12 & \infty & - \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} - & 3 & 12 & 5 & 10 & 3 \\ 3 & - & \infty & 12 & 4 & 2 \\ 12 & 5 & - & 5 & 3 & 9 \\ 5 & 12 & 5 & - & 9 & 12 \\ 10 & 4 & 3 & 9 & - & \infty \\ 3 & 2 & 9 & 12 & \infty & - \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} - & 5 & 8 & 12 & 3 & 8 \\ 5 & - & 5 & 11 & 7 & 10 \\ 8 & 5 & - & \infty & 5 & 9 \\ 12 & 11 & \infty & - & 5 & 13 \\ 3 & 7 & 5 & 5 & - & 6 \\ 8 & 10 & 2 & 9 & \infty & - \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} - & 5 & 8 & 2 & 10 & 5 \\ 5 & - & 5 & \infty & 9 & 12 \\ 8 & 5 & - & 4 & 10 & 2 \\ 3 & \infty & 4 & - & 3 & 8 \\ 10 & 9 & 10 & 3 & - & \infty \\ 5 & 12 & 2 & 8 & 6 & - \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} - & 4 & 3 & 10 & 12 & 5 \\ 4 & - & \infty & 4 & 3 & 6 \\ 3 & \infty & - & 5 & 11 & 2 \\ 10 & 4 & 5 & - & 3 & \infty \\ 12 & 3 & 11 & 3 & - & 4 \\ 5 & 6 & 2 & 8 & 4 & - \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} - & 3 & 15 & 9 & 5 & 2 \\ 3 & - & 4 & 9 & 2 & 5 \\ 15 & 4 & - & 6 & 12 & 5 \\ 9 & 9 & 6 & - & \infty & 4 \\ 5 & 2 & 12 & \infty & - & 10 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & \infty & - \end{pmatrix}$

27. $$\begin{pmatrix} - & 2 & 7 & 4 & 9 & 11 \\ 2 & - & 5 & 10 & 4 & 7 \\ \infty & 5 & - & 3 & 9 & 6 \\ 4 & 10 & 3 & - & 6 & 4 \\ 9 & 4 & \infty & 6 & - & \infty \\ 11 & 7 & 6 & 4 & 10 & - \end{pmatrix}$$

28. $$\begin{pmatrix} - & 4 & 2 & 7 & 5 & 12 \\ 4 & - & 5 & 2 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & - & 11 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & 11 & - & \infty & 3 \\ 5 & 10 & \infty & \infty & - & 5 \\ 12 & 5 & 4 & 3 & 5 & - \end{pmatrix}$$

29. $$\begin{pmatrix} - & 3 & 2 & 6 & 10 & 12 \\ 3 & - & 5 & 3 & 12 & 1 \\ 2 & 5 & - & \infty & 3 & 10 \\ 6 & 3 & \infty & - & 5 & 9 \\ 10 & 8 & 3 & 5 & - & 4 \\ 12 & 1 & 10 & 9 & \infty & - \end{pmatrix}$$

30. $$\begin{pmatrix} - & 8 & 2 & 4 & 5 & 12 \\ 8 & - & 4 & \infty & 5 & 2 \\ 2 & 4 & - & 5 & 2 & 11 \\ 4 & \infty & 5 & - & 3 & 7 \\ 5 & 5 & \infty & 3 & - & 6 \\ 12 & 2 & 11 & 7 & 6 & - \end{pmatrix}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. – М.: ТЕХНОСФЕРА, 2016. – 400 с.

2. Новиков, Ф.А. Дискретная математика: учебник для вузов / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2017. – 496 с.

3. Лекции по теории графов: учеб. пособие / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 390 с.

4. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М.: ЕДИТОРИАЛ УРСС, ЛЕНАНД, 2015. – 304 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Алгоритмы нахождения кратчайших путей на графе 1
Алгоритм Дейкстры 2
Алгоритм Флойда 5
Задача коммивояжера 9
Контрольные задания №.......... 17
Список литературы 19