סיכום בדידה

מבוא ללוגיקה

- פסוק (משפט המביע טענה), אמת, שקר
- לוח אמת, שלילה, וגם, או
  - יצירת לוח אמת הכולל גם שלבי ביניים כדי להקל על החישוב.
- קשר לוגי, אם-אז, אם ורק אם
- הצרנה, פסוק פורמאלי, הצבה (ניתן להציב במקום כל משתנה ביטוי)
- טאוטולוגיה - פסוק שהוא תמיד אמת, סתירה - פסוק שהוא תמיד שקר.
  - שקילות טאוטולוגית - פסוקים שיש להם אותו לוח אמת (הערה - לבדוק עבור כל המשתנים שמופיעים לפחות באחד משני הפסוקים).
  - הצבה בטאוטולוגיה נותנת טאוטולוגיה, הצבה בסתירה נותנת סתירה.
  - טאוטולוגיות שימושיות: $p \to t, f \to p, p \vee (\neg p), p \leftrightarrow p, p \to p$
  - שקילויות שימושיות:
    - פילוג: $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (וכנ"ל ההפך)
    - כללי דה מורגן
      - $\neg (p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$
      - $\neg (p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$
    - עקרון הcontrapositive: $p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p)$
    - שקילות לאם: $p \to q \equiv \neg (p \wedge (\neg q)) \equiv (\neg p) \vee q$
    - שקילויות לאמ"מ: $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p \equiv (p \to q) \wedge (p \to q) \equiv (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$
    - $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$
  - פסוקים p, q שקולים זה לזה אם $p \leftrightarrow q$ הוא טאוטולוגיה
- גרירה / נביעה - כאשר הפסוק q הוא אמת אז p הוא אמת אז q גורר p.
  - שני פסוקים שקולים זה לזה אם ורק אם הם גוררים זה את זה
  - p גורר q אם $p \to q$ הוא טאוטולוגיה.
  - נביעות וגרירות שימושיות
    - מתוך $p \wedge q$ נובע p, q
    - מתוך p (או q) נובע $p \vee q$
    - מתוך $(p \vee q) \wedge (\neg p)$ נובע q
    - מתוך $p \wedge (p \to q)$ נובע q

* מתוך $(p \to q) \wedge (\neg q)$ נובע $\neg p$
* מתוך $(p \to q) \wedge (q \to r)$ נובע $p \to r$

– טענות על סתירות וטאוטולוגיות

* טאוטולוגיה נובעת מכל פסוק.
* פסוק הנובע מטאוטולוגיה הוא טאוטולוגיה.
* כל פסוק נובע מסתירה.
* פסוק שנובעת ממנו סתירה הוא סתירה.
* פסוק שנובעת ממנו סתירה - כל פסוק נובע ממנו.
* אם מ-$p \wedge (\neg q)$ נובעת סתירה, אז מ-p נובע q. (הוכחה בשלילה).

– משתנים וכמתים

* לכל, קיים - לא מביעות תכונה של מספר ספציפי, אלא תכונה של הקבוצה שבה מדובר.
  - דוגמאות: $\forall x \left(x > 2 \to x^2 > 4\right)$, $\exists x \left(2x = 6\right)$
* תלוי בהקשר שבו מדובר! (מה הקבוצה ממנה לוקחים)
* כללי דה מורגן לכמתים:
  - $\neg \exists x \left(p\right) \equiv \forall x \left(\neg p\right)$
  - $\neg \forall x \left(p\right) \equiv \exists x \left(\neg p\right)$

תורת הקבוצות

פרק 2 - יחסים

- שאלה 11 -
  - $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$
  - $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
  - $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- שאלה 20 - R^2, R^{-1}, $R \cup S$, $R \cap S$ רפלקסיביים
- שאלה 23 - יחס סימטרי אם ורק אם $R = R^{-1}$.
- שאלה 26,24 - $R^2, R \cup S, R \cap S$ סימטריים
- אנטי סימטרי במובן הרחב - אם aRb וגם bRa אז $a = b$. לשון אחר: $R \cap R^{-1} = I$.
- שאלה 30 - R^{-1} אנטי סימטרי ואנטי סימטרי במובן הרחב
- שאלה 32 - $R \cup S$ לא אנטי סימטרי (או במובן הרחב), $R \cap S$ אנטי סימטרי וגם במובן הרחב
- שאלה 41 - איבר שמשותף לשתי מחלקות שקילות אם ורק אם הן אותה מחלקה.
- שאלה 43 - $S \cup R$ לא בהכרח יחס שקילות, $S \cap R$ בהכרח יחס שקילות.
- שאלה 53 - R^{-1} יחס סדר מלא
- סדר חלקי - אנטי סימטרי, מתקיים לכל היותר $a < b$, $b < a$ או $a = b$

טענות עזר

(*)

אם R יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי אז $R^2 = R$. (ממ"ח 2)

(*)

אם ליחס שקילות R יש פחות מ-n מחלקות אז $|R| \geq n+2$. (ממ"ח 2) הוכחה - יש ב-R את כל הקבוצות מהצורה (a,a) וגם יש שניים שמקיימים $(a,b)\,,(b,a)$.

(*)

מספר יחסים שניתן להגדיר על קבוצה - 2^{n^2}. נימוק - יש n^2 זוגות, קבוצת כל היחסים היא קבוצת החזקה.

מספר יחסים אנטי-רפקסיביים - 2^{n^2-n} n^2 זוגות סהכ, מורידים n כי אסור שיהיו רפלקסיביים, ואז קבוצת חזקה.

פרק 3 - פונקציות

- שאלה 6
  - אם $C_1 \subseteq C_2$ אז $f[C_1] \subseteq f[C_2]$
  - אם $D_1 \subseteq D_2$ אז $f^{-1}[D_1] \subseteq f^{-1}[D_2]$
  - $f[C_1 \cup C_2] = f[C_1] \cup f[C_2]$
  - $f[C_1 \cap C_2] \subseteq f[C_1] \cap f[C_2]$
  - $f^{-1}[D_1 \cup D_2] = f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2]$
  - $f^{-1}[D_1 \cap D_2] = f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2]$
- שאלה 7 -
  - $f[C^c] \neq (f[C])^c$
  - $f^{-1}[D^c] = \left(f^{-1}[D]\right)^c$
  - $f[C_1 \backslash C_2] \neq f[C_1] \backslash f[C_2]$
  - $f^{-1}[D_1 \backslash D_2] = f[D_1] \backslash f[D_2]$
- שאלה 14 - פונקציה היא חד-חד ערכית אם ורק אם לכל C, D מתקיים $f[C \cap D] = f[C] \cap f[D]$.
- שאלה 15 - f חד חד ערכית אם ורק אם לכל C, D מתקיים $f[C \backslash D] = f[C] \backslash f[D]$.
- שאלה 16 -
  - $C \subseteq f^{-1}[f[C]]$
  - $f\left[f^{-1}[D]\right] \subseteq D$
  - אם f חד חד ערכית אז $C = f^{-1}[f[C]]$
  - אם f על אז $f\left[f^{-1}[D]\right] = D$
- שאלה 17 -
  - אם A סופית ולא ריקה ו-B אינסופית או שהיא סופית ויש לא לא פחות איברים אז יש פונקציה חד חד ערכית $A \to B$ ופונקציה על $B \to A$.
  - אם A ו-B סופיות בעלות אותו מספר איברים אזי קיימת פונקציה חד חד ערכית מ-A על B.
- שאלה 37 -
  - f מצטמצמת משמאל אם ורק אם היא חד ערכית.
  - f מצטמצמת מימין אם ורק אם היא על.
- שאלה 38 -
  - אם $fg = I$ אז f על ו-g חד חד ערכית
  - אם $fg = I$ ו-f חד חד ערכית אז שתיהן הפיכות, ואם g על אז שתיהן הפיכות.

טענות עזר

(*)

f היא פונקציה חד-חד ערכית אם ורק אם לכל שתי קבוצות אינסופיות שונות $A,B\subseteq\mathbb{N}$ מתקיים $f[A]\neq f[B]$.
כיוון ראשון: נניח שלכל שתי קבוצות אינסופיות שונות $A,B\subseteq\mathbb{N}$ מתקיים $f[A]\neq f[B]$ ונוכיח בשלילה ש-f חד-חד ערכית. נניח ש-f לא חד-חד ערכית ונגיע לסתירה. אם כך, קיימים שני ערכים $a,b\in\mathbb{N},a\neq b$ עבורם $f(a)=f(b)$. נסתכל על הקבוצה $A=\mathbb{N}\backslash\{a\}$. קבוצה זו מכילה את כל המספרים הטבעיים חוץ מ-a. התמונה שלה $f[A]$, מכילה את התמונות של כל המספרים הטבעיים חוץ מ-$f(a)$, כולל $f(b)$. מכיוון ש-$f(a)=f(b)$, היא מכילה גם את $f(a)$ כלומר את התמונה של כל המספרים הטבעיים. קיבלנו ש$f[A]=f[\mathbb{N}]$ למרות ש-$A\neq\mathbb{N}$, סתירה. לכן f חד-חד ערכית.
כיוון שני: נניח ש-f חד-חד ערכית ונוכיח בשלילה שלכל שתי קבוצות אינסופיות שונות $A,B\subseteq\mathbb{N}$ מתקיים $f[A]\neq f[B]$. נניח שקיימות שתי קבוצות אינסופיות שונות $A,B\subseteq\mathbb{N}$ שעבורן $f[A]=f[B]$. מכיוון ש-$A\neq B$ אז קיים איבר שנמצא באחת מהן ולא נמצא בשניה. בלי הגבלת הכלליות, נניח שקיים $a\in A,a\notin B$. מפני ש-f חד-חד ערכית, אין ערך $x\in\mathbb{N},x\neq a$ עבורו $f(x)=f(a)$. נסיק ש-$f(a)\in f[A],f(a)\notin f[B]$.
אבל, לפי ההנחה שלנו מתקיים $f[A]=f[B]$, כלומר יש בשתיהן את אותן האיברים, סתירה. לכן לכל שתי קבוצות אינסופיות שונות $A,B\subseteq\mathbb{N}$ מתקיים $f[A]\neq f[B]$.

(*)

f היא פונקציה על אם ורק אם לכל שתי קבוצות אינסופיות שונות $A,B\subseteq\mathbb{N}$ מתקיים $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$.
כיוון ראשון: נניח ש-f היא פונקציה על ונוכיח שלכל שתי קבוצות אינסופיות שונות $A,B\subseteq\mathbb{N}$ מתקיים $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$. נוכיח בשלילה - נניח שקיימות שתי קבוצות אינסופיות שונות $A,B\subseteq\mathbb{N}$ שעבורן $f^{-1}[A]=f^{-1}[B]$. אם כך, קיים $a'\in A,a'\notin B$. מכיוון ש-f היא פונקציית על אז קיים $a\in\mathbb{N}$ כך ש-$f(a)=a'$. לפי הנחת השלילה נקבל ש- $a\in f^{-1}[B]$, כלומר $f(a)=a'\in B$, סתירה. לכן ההנחה הייתה שגויה והוכחנו את הכיוון הראשון.
כיוון שני: נניח שלכל שתי קבוצות אינסופיות שונות $A,B\subseteq\mathbb{N}$ מתקיים $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$ ונוכיח ש-f היא פונקציה על. נוכיח בשלילה - נניח ש-f היא לא פונקציית על ונגיע לסתירה. לפי ההנחה, קיים $a'\in\mathbb{N}$ כך שלא קיים $a\in\mathbb{N}$ עבורו $f(a)=a'$, כלומר $f^{-1}[\{a'\}]=\phi$. נשים לב שמתקיים:

$$f^{-1}[\mathbb{N}]\overbrace{=}^{\text{איחוד קבוצות}}f^{-1}[\{a'\}\cup\{\mathbb{N}\backslash\{a'\}\}]\overbrace{=}^{\text{שאלה 6ה בפרק 3}}f^{-1}[\{a'\}]\cup f^{-1}[\mathbb{N}\backslash\{a'\}]=\phi\cup f^{-1}[\mathbb{N}\backslash\{a'\}]=f^{-1}[\mathbb{N}\backslash\{a'\}]$$

קיבלנו שתי קבוצות אינסופיות שונות שעבורן קבוצות המקורות שווה, סתירה. נסיק ש-f היא על.

(*)

$X_A^{-1}[\{1\}]\backslash X_B^{-1}[\{0\}]=A\backslash B$ (X פונקציה אופיינית)

(*)

פרק 4 - עוצמות של קבוצות

שאלה 1 - $|A \times B| = |B \times A|$, $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$

שאלה 12 - הקבוצה $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ שקולה ל-$\mathbb{R}$.

שאלה 13- אם A היא קבוצה בת מניה ו-B היא קבוצה כלשהי אז $A\backslash B$ בת-מניה.

שאלה 14 - אם A לא בת מניה וB בת מניה, $A\backslash B$ אינה בת מניה.

שאלה 15 - אם A_i בת מניה, האיחוד שלהן בן מניה

שאלה 17 - אם A בתי מניה, קבוצת הסדרות הסופיות מתוכה היא בת מניה

שאלה 19 - אם $|A| =$ א ו-B בת מניה אז $|A\backslash B| =$ א

(*)

איך מראים שקבוצה היא אינסופית?

- א. להראות שכמות האברים ב- A גדולה מכל n טבעי (כי מכאן יוצא שכמות האברים ב- A אינה מספר טבעי כלומר A אינה סופית)
- להראות שלכל n טבעי יש ל- A תת-קבוצה בגודל n (כי זה אומר שאומר שכמות האברים ב- A גדולה/שווה לכל מספר טבעי. זה אומר שהעוצמה של A אינה מספר טבעי, כי אין מספר טבעי שגדול/שווה לכל המספרים הטבעיים).

ג. להראות ש- A מכילה קבוצה שעוצמתה אלף אפס

ד. להראות פונקציה חד-חד-ערכית של קבוצה שעוצמתה אלף אפס לתוך A

בדרכים א, ב אנו מראים ש- A אינה סופית ומכאן שהיא אינסופית.

בדרכים ג, ד אנו מראים שעוצמת A היא לפחות אלף-0, ולכן היא אינסופית.

(*)

האם א0 הוא האינסוף הקטן ביותר? אם כן, איך מראים זאת?

תהי k עוצמה אינסופית כלשהי, נראה שהיא גדולה/שווה אלף-0. תהי A קבוצה שעוצמתה k (מדוע יש כזו ראו בחוברת "פרק 5" בהערה שלפני משפט 5.2). בעמ' 121 בספר הלימוד, בתחילת ההוכחה של משפט 4.4 מוכיחים את טענת-העזר הבאה: לכל קבוצה אינסופית יש קבוצה חלקית בת-מניה. לפיכך ל- A יש קבוצה חלקית בת-מניה. מכאן לפי שאלה 5.1ב בחוברת "פרק 5".

קומבינטוריקה

פרק 1 - עקרון החיבור ועקרון הכפל

- שאלה 1.1 - כמה מספרים יש בין a ל-b?
  - רציף - $b-a+1$
  - לפי כפולות - למצוא את הכפולה הראשונה ביניהם a_1, $a_1+d(n-1)\leq b$
  - חלוקה בשני מספרים - אפשר להכפיל ביניהם (לדוגמה חלוקה ב-3 ו-5 => חלוקה ב15).
- עקרון החיבור - אם צריך לבחור משהו מבין קבוצה 1 או 2, יש לכך n_1+n_2 אופנים.
- עקרון החיבור - צריך לבחור משהו אחד ב-n_1 אופנים וגם משהו אחר ב-n_2 אופנים יש לכך n_1n_2 אופנים.
- כאשר יש אילוץ - להסתכל כמה צריך כדי לקבוע את השאר (לדוגמה - אם מספר תלת ספרתי מתחיל ב-1 אז צריך לקבוע 2 ספרות).
- להרכיב מספר שני מספרים כאשר יש 0 - 0 לא תמיד יכול להיות ראשון כי אז הוא לא בטווח
  - צריך לשים לב אם יש אפשרויות זהות. לדוגמה אם מחלקים בין 2 תאים זהים. אם כן צריך לחלק במספר הצירופים שלהם (סידורים).
- כדי למצוא מספר אפשרויות - למצוא שיטה להרכיב את כל האפשרויות ותוך כדי לספור

פרק 2 - חליפות, תמורות וצירופים

2.1 - חליפות ותמורות

- חליפה - k-ה סדורה שבה כל האיברים שונים. כמות כוללת $P(n,k)=(n)(n-1)...(n-k+1)$!
- שאלה 2.5 - $P(n,n)=P(n,n-1)\,,P(n,1)+P(m,1)=P(n+m,1)$
- הוכחה - אפשר אלגברית ואפשר קומבינטורית.
- שאלה 2.10 - $P(n,k)=P(n-1,k)+kP(n-1,k-1)$ (הוכחה קומבינטורית - חלוקה אם כוללים איבר a או אם לא).
- תמורות - חליפה של n מתוך n, סידור בשורה. נוסחה - $P(n,n)=n!$
  - בחירת אנשים בטור - $n!$ במעגל - $(n-1)!$ (בוחרים את הראשון ואז השאר "בטור").
  - שאלה 2.73 - אם מסדרים 2 קבוצות סביב שולחן אז האפשרויות הן $n_1!n_2!$ (אין אפשרויות שנספרות פעמיים)
- שאלה 2.14
  - הפרת סדר - מספר קטן מופיע אחרי מספר גדול
  - כל החלפה של שני איברים הופכת את הזוגיות של הפרות סדר
  - מספר התמורות הזוגיות שווה למספר התמורות האי זוגיות, שניהם שווים -$\frac{1}{2}n!$

2.2 צירופים

- צירוף - תת קבוצה בעלת k איברים, בלי חשיבות לסדר.
  - גודל - $C(n,k) = \frac{P(n,k)}{P(k)} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$
  - $C(n,0) = 1$,$C(n,1) = C(n,n) = n$
  - $C(n,k) = C(n,n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- כאשר בוחרים צירופים בלי החזרה - $C(n,k_1) \cdot C(n-k_1,k_2) ...$
- $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$,$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- לשים לב אם יש אפשרויות זהות כשמרכיבים צירוף (לדוגמה אם מחלקים לתאים זהים)
- שאלה 2.29 - אפשר לחלק $2n$ איברים ל-n זוגות ב-$\frac{(2n)!}{2^n n!}$ אופנים.

2.3 חליפות ותמורות עם חזרות

- חליפה עם חזרות - n^k.
- תמורה עם חזרות כאשר יש $k_1...k_l$ סוגים זהים - $\frac{n!}{k_1!...k_l!}$. (הסדר של האיברים מאותו סוג זהים ולכן מחלקים).
  - זה בפועל זהה ללבחור $\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}...\binom{k_l}{k_l}$ כאשר מבדילים בין בחירה לבחירה לדוגמה תאים שונים). אם התאים זהים צריך לחלק את התוצאה ב$l!$ (דוגמה - שאלה 2.62).

2.4 צירופים עם חזרות

- ייצוג הבעיה
  - בוחרים k עצמים שונים מתוך n סוגי עצמים ללא חשיבות לסדר
  - $x_1 + ... + x_l = k$.
    - שני צירופים נחשבים שונים אם k_i שונה ביניהם.
  - פיזור k עצמים זהים לתוך n תאים שונים.
- $D(n,k)$
  - $D(1,k) = 1, D(2,k) = k$
  - $D(n,k) = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$
- שאלה 2.69 - מציאת כמות אפשרויות להצגה של מספר כמכפלה היא חלוקה של k גורמים ראשוניים ל-n תאים זהים (משתנים). (שאלה טובה לחזרה)
- שאלה 2.70 - מציאת מספר מילים באורך 4 בהן יש שתי אותיות זהות - אפשר לחסר כמות מילים עם אותיות שונות ($P(22,4)$) או לחשב את המספר בצורה מפורשת (ספירת כל האפשרויות).

טענות עזר

(*)

יהיו $p_1...p_n$ מספרים ראשוניים שונים ו-$k_1...k_n$ מספרים טבעיים. נמצא את מספר המספרים הטבעיים המחלקים את $x = p_1^{k_1}...p_n^{k_n}$.
לפי המשפט היסודי של האריתמטיקה, ההצגה של כל מספר כמכפלה של גורמים ראשוניים היא יחידה. כל המחלקים של המספר x הם מהצורה $p_1^{a_1}...p_2^{a_2}$ כאשר $a_1...a_n \in \mathbb{N}$, $0 \le a_1 \le k_1$, $0 \le a_2 \le k_2$,..., המחלקים שונים זה מזה אך ורק במעריכים $a_1...a_n$. לבחירת המעריך הראשון יש לבחור מספר בין 0 ל-k_1 ($k_1 + 1$ אפשרויות), לשני יש לבחור מספר בין 0 ל-k_2 ($k_2 + 1$ אפשרויות), וכך הלאה, ולכן לפי עיקרון הכפל יש $(k_1 + 1) ... (k_n + 1)$ מחלקים טבעיים ל-x.

(*)

ממן 14 שאלה 4ב - מציאת כמות מספרים טבעיים המחלקת לפחות אחד מ-3 מספרים - פירוק כל מספר לגורמים, מציאת כמות משותפת קבוצת מחלקים (עבור חיתוך קבוצה אחת, שתיים, שלוש) ושימוש במשפט ההכלה וההפרדה כדי לחשב את הכמות הסופית בלי לספר אפשרות פעמיים.

פרק 3 - הבינום של ניוטון

- נוסחת הבינום $(x+a)^n = \sum \binom{n}{n-i} x^{n-i} a^i$.
- משולש פסקל
  - אפשר להשתמש בו כדי להוכיח משוואות - לחפש את המחוברים במשולש.
- סכום המקדמים הבינומיים הוא 2^n (הוכחה על ידי הצבה $a = 1, x = 1$).
- סכום המקדמים הבינומיים במקומות הזוגיים שווה לסכום במקומות האי זוגיים (הוכחה על ידי הצגה $x = 1, a = -1$)
- שאלה 3.8
  - $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (הוכחה - החלפה בהגדרה אלגברית)
  - $\sum k\binom{n}{k} = 2^{n-1} \cdot n$ (הוכחה - שימוש בנוסחה הקודמת ובסכום המקדמים)
- שאלה 3.9 - $\binom{n}{k}\binom{k}{h} = \binom{n}{h}\binom{n-h}{k-h}$. (הוכחה קומבי'-לבחור k ואז h זה כמו לבחור h, להשלים ל-k באמצעות בחירת $k-h$)
- שאלה 3.11 - $\sum \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$ (הוכחה קומבי' – כל האפשרויות לבחור מכל קבוצה בנפרד שקול ללאחד ולבחור ביחד).
- שאלה 3.12 - $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$
- שאלה 3.14 - $\binom{n}{k} + ... + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ (הוכחה אלגברית באינדוקציה)
- שאלה 3.15 -
  - $\sum \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$ (הוכחה: השוואת המקדם של x^n או שימוש ב3.11)
  - $\sum \binom{m}{i}\binom{n}{k+i} = \binom{m+n}{m+k}$ (הוכחה: השוואת המקדם של a^{m+k} או שימוש ב3.11)
- שאלה 3.18 - $\binom{n}{k} + ... + \binom{n+m}{k} = \binom{n+m+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$ (הוכחה: אינדוקציה או פסקל)
- שאלה 3.23 - $\sum (i+1)\binom{n}{i} = \sum i\binom{n}{i} + \sum \binom{n}{i} \overbrace{=}^{3.8} n2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1}(n+2)$.
- פיתוח מולטינומי
  - איבר כללי – $(x_1 + ... + x_k)^n = \frac{n!}{i_1!...i_k!} x_1^{i_1}...x_k^{i_k}$ (הוכחה: כמות האיברים $x_1^{i_1}...x_k^{i_k}$ היא ככמות התמורות עם חזרות - $\frac{n!}{i_1!...i_k!}$)

* כל איבר בפיתוח של המכפלה הוא מהצורה $a^ib^jc^kd^l$ כאשר $i+j+k+l=n$,
דוגמה - כדי לקבל את הכמות הרצויה צריך שיתקיים - $1^i\left(x_2^2\right)^j\left(x^3\right)^k\left(x^5\right)^l=x^{10}$ ו-$i+j+k+l=10$. (ממן 14 5ב)

– כמות איברים - $D(k,n)$ (הוכחה: כמות פתרונות של $i_1+...+i_k=n$)

– מציאת סכום מקדמי פיתוח - הצבה $x_1=...=x_k=1$.

- $1+x^2+x^3+x^5=\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)$

עקרון ההכלה וההפרדה

- $|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$
- חישוב משלים ("כל מי שלא צייר")
  - $(A_1\cup A_2)^c=A_1^c\cap A_2^c$
  - $|A^c|=|U|-|A|$
- מציאת חלוקת מספרים - A_1 חלוקה ב3-, A_2 חלוקה ב-5, $A_1\cap A_2$ חלוקה ב-15.
- משפט ההכלה וההפרדה - $|A_1\cup...\cup A_n|=S_1-S_2...(-1)^{n-1}S_n=\sum(-1)^{i-1}S_i$. S_i הוא סכום מספרי האברים בכל $\binom{n}{i}$ החיתוכים של i קבוצות מתוך ה-n.
  - תצוגה נוספת: $|A_1^c\cap...\cap A_n^c|=|U|-(-1)^{i-1}S_i$
  - דוגמה - אפשרות לקבל בתוך הטלה של n קוביות לפחות פעם אחת מספר - $6^n-6\cdot5^n+\binom{6}{2}4^n...$.
- שאלה 4.15 - מספר האפשרויות לפזר n כדורים שונים ב-k תאים שונים באופן שלפחות תא אחד יישאר ריק - $\sum(-1)^{i-1}\binom{k}{i}(k-i)^n$

4.2.1 אי סדר מלא

- תמורה של n מספרים אם אף מספר לא נמצא במקומו - $n!\left(1+\sum(-1)^n\frac{1}{i!}\right)$.
- הפונקציה של אוילר - מספר השלמים החיוביים הקטנים מ-n וזרים ל-n: $n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$.

4.2.3 משוואות לינאריות עם פתרונות במספרים שלמים

- שימוש בעקרון ההכלה וההפרדה כדי למצוא פתרונות מתאימים

4.3 המקרה הכללי - המשך

- $E(m)=\sum(-1)^{t-m}\binom{t}{m}W(t)$ (E - מספר איברים שמקיימים בדיוק m תכונות, W מספר האיברים שמקיימים לפחות r תכונות).

פרק 5 - עקרון שובך היונים

- בחלוקה של קבוצה סופית ל-n מחלקות, קיימת לפחות מחלקה אחת אשר מספר איבריה גדול או שווה ל-$\frac{|A|}{n}$.
- שאלה 5.5 - להראות שסכום 4 מספרים הוא לפחות 40 - לסדר מהקטן לגדול, להראות שהמספר הכי קטן הוא גדול מ-10 או שסכום ארבעת המספרים הכי גדולים גדול מ-10.
- שאלה 5.6 - להראות שקיימים שני זוגות עם סכום זהה מתוך קבוצה - לחשב כמה סכומים אפשריים יש וכמה זוגות אפשריים יש.

- שאלה 5.7 - כל מספר רציונלי הוא שבר עשרוני מחזורי אינסופי - יש כמות ספרות סופית, כל פעם מחלקים ספרה, מתישהו היא תחזור.
- שאלה 5.8 - צביעת קשתות - יוצאים מצומת 5 קטעים ב-2 צבעים, חלק צריכים להיות צבועים בצבע אחד ולכן במקום אחר חייב להיווצר משולש צבוע.
- המרחק הכי גדול בין שתי נקודות בקובייה הוא אורך האלכסון שלה.

פרק 6 - רקורסיה

- יחס רקורסיבי - קושר את $f(n)$ עם אחד או יותר מן הערכים $f(k)$.
- הגדרת מילים מותרות - הגדרת מילה כתו בודד + שאר המילה.

6.2 פתרון בעיות קומבינטוריות

- חיפוש בינארי
- שאלה 6.3 - פיזור כדורים בין תאים - $a(n,k) = a(n-2,k-1) + a(n-3,k-1) + a(n-4,k-1)$
- שאלה 6.4 - סדרה הנדסית
- שאלה 6.7 - בחירה מבין סוגי עצמים - בחירת i עצמים מסוג אחד וגם $k-i$ עצמים מ$n-1$ סוגים (וסכימה של i)

6.3 פתרון של יחסי רקורסיה לינאריים

- יחס רקורסיה לינארי - $f(n) = \sum_1^k c_i f(n-i)$.
- מציאת נוסחה - הצבה $f(n) = a^n$, מצמצמים ב-a^k, פותרים משוואה, מציבים את הפתרונות ב-$f(n) = \sum A_i a_i^n$ ואת הקבועים $A_1..A_k$ קובעים לפי ערכים תחיליים ($n=1, n=2$).
  - אם יש פתרונות שאינם שונים זה מזה, מתאימים לו את m הביטויים $a_1^n, na_1^n ... n^{m-1}a_1^n$.

פרק 7 - פונקציות יוצרות

7.1 הגדרה של פונקציה יוצרת

- נתונה סדרה של מספרים a_i, הביטוי $\sum a_i x^i$ נקרא הפונקציה היוצרת.
- אפשר לחבר, לחסר, לכפול, לגזור וכו'
- הפונקציה היוצרת של $1,1,1,...$ היא $f(x) = 1 + x + x^2 ... = \frac{1}{1-x}$.
- הפונקציה היוצרת של $1,2,3,...$ היא $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 ... = \sum ix^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

7.2 מציאת מספר פתרונות של משוואות לינאריות

- כדי למצוא את הפתרונות בשלמים של המשוואה $t_1+...+t_n=k$ שמקיימים הגבלות $0\le t_i\le b_i$ יש לחשב את המקדם של x^k בפולינום $f(x)=\left(1+...+x^{b_1}\right)\left(1+...+x^{b_2}\right)...$. המקדם a_k הוא מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה.
- אם יש הגבלה על ערכי משתנה - נגביל את הפונקציה היוצרת - לדוגמה $1+x+x^2$.
- אפשר בכל מקרה להגביל כל מכפלה עד x^k (כי כל גורם אחר לא יתרום לסכום)
- אפשר לפתוח סוגריים עד שמגיעים ל-x^k ואחרי זה לא מעניין
- $\left(1+x+x^2...\right)^2=\left(1+2x+3x^2...\right)$
- אם t_i זוגי אז נסתכל על חזקות $2n_i$
- המקדם של x^k ב-$(1+x+...)^n$ הוא $D(n,k)=\binom{n-1+k}{n-1}$ (הוכחה: מייצגים בעיה של פתרונות של אותה משוואה).
- שאלה 7.19 - אם יש אילוצים בין משתנים - אפשר להציב משתנים חדשים $t_1\le t_2\Leftrightarrow t_2=t_1+u_2,0\le u_2$.
- שאלה 7.20 - אם אין הגבלה על מספר משתנים - לנסות ליצור אחת ("מספר האפשרויות לרשום את 8 כסכום של מספרים טבעיים" - 8 משתנים)
- שאלה: מצאו את המקדם של x^{16} ב-$\left(1+x^2+x^4\right)^6$
  - $\left(1+x^2+x^4\right)^6=\frac{\left(1-x^6\right)^6}{\left(1-x^2\right)^6}=\sum(-1)^i\binom{6}{i}\left(-x^6\right)\cdot\left(\sum D(6,j)x^{2j}\right)=\sum\sum\left[(-1)^i\binom{6}{i}D(6,j)\right]x^{6i+2j}$
  - $6i+2j=16$ נכון עבור $(0,8),(1,5),(2,2)$, לכן $a_{16}=D(6,8)-6\cdot D(6,5)+\binom{6}{2}D(6,2)$
- נניח $x_1+x_2=20$, $4\le x_1$, $0\le x_2$.
  - טריק 1: מציבים $y_1=x_1+4$ ופותרים את $y_1+x_2=16$. הפתרון הוא $D(2,16)$ (עבור מספר שלילי אותו דבר).
  - טריק 2: הפונקציה היוצרת היא
  - $\left(x^4+x^5...x^{20}\right)\left(1+x^2...\right)=x^4\left(1+x^2...x^{16}\right)\left(1+x^2...\right)=x^4\frac{1-x^{17}}{1-x}\cdot(1+x+...)=x^4\left(1-x^{17}\right)(1+x+...)^2=$ $x^4\left(1-x^{17}\right)\sum D(2,k)x^k=\sum D(2,k)x^{k+4}-\sum D(2,k)x^{k+21}$
    - המקדם של x^{20} הוא $D(2,16)$.
    - גרסה נוספת של הטריק: נניח $0\le x_i\ne 3$. הפונקציה היוצרת היא $\left(1+x+x^2+x^4+x^5...\right)=1+x+x^2+x^4\left(1+x+x^2\right)=1+x+x^2+\frac{x^4}{1-x}$. אין ממש מה לעשות עם זה, לפעמים מופיע בשאלות

7.3 חישובים במקדמים בינומיים

- אם יש ביטוי $\binom{n}{k}$, אפשר לומר שזה המקדם של x^k ב-$(1+x)^n$ (ולהחליף ככה את כל הביטויים במשוואה).
- $\frac{1-x^n}{1-x}=1+x+x^2...$

7.4 פונקציות יוצרות מעריכיות

- כדי לקבל את כמות החליפות עם חזרות (עם חשיבות לסדר) של k איברים מתוך n קבוצות איברים שווה למקדם של $\frac{x^k}{k!}$ בפונקציה $h(x)=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+...+a_n\frac{x^n}{n!}$.
- $h(x)=e^{nx}$.

7.5 פתרון יחסי רקורסיה

- נתונה נוסחת נסיגה. נתחיל מפונקציה יוצרת כללית $f(x)=\sum a_i x^i$, נוציא $a_0, a_1 ...$ מהביטוי כדי להביע את a_i עם a_{i-1} וכו', ונפשט. ננסה להחליף כמה שיותר דברים ב-$f(x)$.
- $1+2x+3x^2=\sum ix^{i-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$, $\sum (i-1)x^{i-1}=f(x)-a_0$.
- $\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)=1-x^2-x^3+x^5$

טענות עזר

(*)

נתון $1+x(7+8x)f(x)=f(x)$. נפתח את הביטוי השמאלי ונשווה את המקדמים לקבלת $a_n=7a_{n-1}+8a_{n-2}$

תורת הגרפים

פרק 1 - מושגים בסיסיים

1.2 מושגי יסוד

- גרף = צמתים, קשתות, פונקציה המתאימה לכל קשת צומת אחד או שניים
- צמתים שכנים, לולאה (קשת שמובילה לאותו צומת), קשתות מקבילות (מחברות אותו זוג צמתים), צומת מבודד, גרף פשוט (לא מכיל לולאות או קשתות מקבילות), דרגה של צומת (כמה קשתות יוצאות ממנו - סימון $deg_G(v)$), גרף מכוון (יש חשיבות לסדר הצמתות בפונקציה $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$)
- טענה 1.3 - $\sum deg_G(v) = 2E$ (כי כל קשת נספרת פעמיים)
  - שאלה 1 - מספר הצמתים שדרגתם אי זוגית הוא תמיד מספר זוגי (כי הסכום צריך לצאת זוגי).
- מסלול, אורך מסלול, מסלול סגור/מעגל, מסלול פשוט (כל הצמתים שונים זה מזה), מעגל פשוט, מרחק בין צמתים (אורך המסלול הקצר ביותר, אם אין מסלול אז אינסוף), גרף קשיר (יש מסלול בין כל שני צמתים), רכיב קשירות (תת קבוצה מקסימלית שבה בין כל שני צמתים יש מסלול, כל גרף בנוי מ1 או יותר כאלה).
- שאלה 2 - קשירות הוא יחס שקילות
- תת גרף (תת קבוצה של קשתות וצמתים) תת גרף פורש (תת גרף שמכיל את כל הצמתים), תת גרף מושרה (... על ידי תת קבוצה של צמתים U - תת גרף שמכיל את כל הצמתים ואת כל הקשתות ששני הקצוות שלהם נמצאים ב-U), גרף מלא K_n (מכיל את כל הקשתות האפשריות) גרף משלים (מכיל את אותם צמתים ואת כל הקשתות שלא מופיעות בגרף המקורי), השמטת צמתים מגרף (משמיטים צמתים וכל קשת שאחת הקצוות שלה הוא אחד מהצמתים).
- שאלה 3 - בגרף פשוט שבו דרגת כל צומת היא לפחות k קיים מסלול פשוט שאינו סגור בעל $k+1$ צמתים ואם $2 \leq k$ אז קיים מעגל פשוט בעל לפחות $k+1$ צמתים (נכון כי אפשר לטייל בגרף ועדיין לא לעבור ב-$k+1$ צמתים בגלל הדרגה).
- שאלה 4 - אם G גרף פשוט לא קשיר אז $\overline{G}$ קשיר.

1.3 גרפים דו צדדיים

- גרף דו צדדי (ניתן לחלק לשתי קבוצות כך שאין קשת בין איברים באותה תת קבוצה), גרף דו צדדי מלא $K_{a,b}$ (מכיל את כל הקשתות).
  - הערה: החלוקה לא חייבת להיות יחידה.
- משפט 1.6 - גרף הוא דו צדדי אם ורק אם אין בו מעגל באורך אי זוגי.
- שאלה 5 - אם גרף דו צדדי הוא קשיר אזי יש חלוקה יחידה לשתי קבוצות (הוכחה על ידי חלוקה לצמתים שהמרחק מהם הוא זוגי וצמתים שהמרחק הוא אי זוגי).

פרק 2 - עצים

- גרף יער (אין בו מעגל), עץ (יער קשיר), עלה (צומת עם דרגה 1).
- טענה 2.3 - בכל עץ בעל לפחות שני צמתים יש לפחות עלה אחד (הוכחה לפי גרף עם דרגה k מינימלית מכיל מעגל באורך $k+1$).
- טענה 2.4 - אם נוסיף לעץ צומת וקשת (עלה) נקבל עץ, אם נוריד עלה נקבל עץ.
- שאלה 2 - אם שני מסלולים בין שני צמתים בגרף שונים אז האיחוד שלהם מכיל מעגל.
- משפט 2.5 - טענות שקולות:
  - הגרף הוא עץ
  - בין כל שני צמתים יש מסלול יחיד
  - הגרף הוא קשיר מינימלי (אם נשמיט קשת הוא לא יהיה קשיר)
  - גרף קשיר ו-$|E| = |V| - 1$
  - גרף לא מכיל מעגלים ו-$|E| = |V| - 1$
- שאלה 3 - בכל עץ בעל לפחות שני צמתים יש לפחות שני עלים (כי אפשר ליצור מסלול פשוט מקסימלי)
- טענה 2.6 - כל גרף קשיר מכיל תת גרף שהוא עץ (אפשר להוריד קשתות עד שאין מעגלים)
- שאלה 4 - נתונות קבוצות שונות מתוך קבוצה גלובלית. קיים מספר שאם נוסיף אותו לכולם נקבל קבוצות שונות (אחרת הקבוצות זהות)
  - הוכחה על ידי יצירת עץ שבו כל צומת הוא תת קבוצה. הורדת קשתות שמופיעות פעמיים עד שהוא עץ, ואז מספר הקשתות הוא $n-1$ והקשת שאינה בגרף היא המספר שאפשר להוסיף.
- שאלה 5 - בעץ בעל 100 צמתים שמתוכם 20 בדרגה 2 יש לפחות 41 עלים (הוכחה על ידי $|E| = |V| - 1, \sum d = 2|E|$)

2.2 נוסחת קיילי וסדרת פרופר

- איזומורפיזם - אם קיימת העתקה חד-חד ערכית $f : V \to V'$ כך שלכל $u, v \in V$ ו-$uv \in E$ מתקיים $f(u) f(v) \in E'$.
  - אם הגרפים מתויגים - צריך שגם התגים יהיו זהים.
- משפט קיילי 2.9 - לכל $2 \leq n$ מספר העצים המתויגים השונים הוא n^{n-2}.
- סדרת פרופר - סדרה המכילה תגים של עץ. \
  - אלגוריתם עץ לסדרת פרופר: מורידים את העלה בעל התג הכי נמוך ומוסיפים את המספר של השכן שלו לסוף הסדרה. אם נשארים עם 2 צמתים עוצרים.
  - אלגוריתם סדרת פרופר לעץ: עוברים על שתי רשימות: תגים מ-1 עד n וסדרת פרופר. לוקחים את התג הכי קטן מתוך סדרת פרופר, ואת התג הכי קטן שלא קיים בסדרת פרופר, רושמים אותם ומחברים ביניהם, ומוחקים אותם מכל רשימה (דוגמה בעמוד 30).
  - אלגוריתמים אלו הם העתקות חד-חד ערכיות ועל (הפיכות).
  - משפט קיילי נכון כי כמות סדרות פרופר הן כמות האפשרויות לבחור n סוגי איברים $n-2$ פעמים עם חזרות - n^{n-2}.
- טענה 2.10 - העלים בעץ הם כל הצמתים שלא מופיעים בסדרת פרופר.
- שאלה 6 - כל צומת בעץ מופיע בסדרת פרופר $deg_T(v) - 1$ פעמים (ולכן גם עלים לא מופיעים).
- שאלות 7,8 - קשר בין מספר קשתות בעץ לצמתים, הופעה בסדרת פרופר, קשר בין דרגה למספר קשתות.
- הגדרה - קבוצת השכנים של קבוצת צמתים מסומנת כ-$\Gamma_G(X)$.

פרק 3 - מעגלי אוילר ומעגלי המילטון

- מעגל / מסלול אוילר - כל קשת מופיעה פעם אחת
- מעגל / מסלול המילטון - כל צומת מופיע פעם אחת

3.1 מעגלי אוילר

- משפט 3.1 - גרף קשיר הוא אוילרי אם ורק אם דרגת כל צומת בו היא זוגית
  - יש מסלול אוילר אם ורק אם יש בדיוק שני צמתים עם דרגה אי זוגית.
- שאלה 2 - גרף קשיר שדרגת כל צומת בו היא 2 הוא מעגל
- שאלה 3 - חלוקת גרף שדרגת הצמתים בו אי זוגית לשני מסלולים זרים על ידי הוספת שתי קשתות והפיכתו לאוילרי. כשמורידים אותן מקבלים מסלולים זרים.
- שאלה 4 - דוור צריך לעבור בכל רחוב פעם אחת - נוסיף קשתות מקבילות לקשתות הקיימות עד להפיכה לאוילרי (דרגות זוגיות) וכל הוספה של קשת מקבילה מסמלת מעבר נוסף באותו רחוב
- גרף d רגולרי - דרגת כל צומת בו היא בדיוק d.
- שאלה 5 - אם גרף הוא d רגולרי עם מספר צמתים אי זוגי אז לפחות אחד מהגרפים G או $\overline{G}$ הוא אוילרי
  - הוכחה - מספר הצמתים ב-G זוגי (כמות הצמתים בעלי אורך אי זוגי צריכה להיות זוגית), אם G הוא לא אוילרי אז הוא לא קשיר, אז $\overline{G}$ קשיר והוא $|V|-1-d$ רגולרי (מספר זוגי), לכן $\overline{G}$ אוילרי.

3.2 מעגלי המילטון

- משפט אור (3.2) - גרף פשוט בעל לפחות 3 צמתים הוא המילטוני אם לכל שני צמתים שאינם סמוכים $n \leq deg_G(u) + deg_G(v)$.
  - הערה - תנאי זה מינימלי
- משפט דירק (3.3) - אם הדרגה של כל צומת היא לפחות $\frac{n}{2}$ אז G המילטוני.
- מסלול המילטוני - מתקבל על ידי הורדת צומת אחד ממעגל המילטוני.
- שאלה 6 - הוכחת מסלול המילטוני - הוספת צומת וחיבורו עם שאר הצמתים, בדיקת הדרגות ואז הורדת הצומת.
  - בגרף שהוא איחוד של שני קליקים זרים על $\frac{n}{2}$ צמתיסף דרגת כל צומת היא בדיוק $\frac{n}{2}-1$ אבל אין בו מסלול המילטוני.
- שאלה 7 - הגרף הדו צדדי המלא $K_{p,q}$ מכיל מעגל המילטוני אם ורק אם $2 \leq p,q$ ו-$p=q$. (הוכחה - המעגל מכיל חצי וחצי מכל צומת).

פרק 4 - זיווגים, כיסויים, קליקים וקבוצות בלתי תלויות

4.1 זיווגים וכיסויים בקשתות

- הגדרה 4.1 - זיווג - קבוצת קשתות כך שאין 2 קשתות הסמוכות לאותו צומת.
- הגדרה 4.2 - כיסוי צומת - אם יש קשת שסמוכה לצומת. אם זיווג, הקשת מזווגת.
- הגדרה 4.3 - זיווג מקסימום - אם אין זיווג גדול יותר. זיווג מושלם - אם הוא מזווג את כל הצמתים. (כל זיווג מושלם הוא זיווג מקסימום).

- שאלה 1 - כדי שיהיה זיווג מושלם n חייב להיות זוגי. למעגל יש שני זיווגים מושלמים.
- הגדרה 4.4 - אם P מסלול ו-M זיווג אז P הוא מסלול M-מתחלף אם מבין כל שתי קשתות סמוכות ב-P בדיוק קשת אחת היא מ-M. מסלול שיפור אם שני הקצוות לא מזווגים.
- טענה 4.5 - אם P מסלול שיפור ביחס ל-M אז קבוצת הקשתות שהן ב-P אבל לא ב-M היא זיווג שמכיל קשת אחת יותר מ-M (ובפרט M לא זיווג מקסימום) (הוכחה - מתווספים מסלולים בקצוות).
- משפט ברג' (4.6) - M הוא זיווג מקסימום אם ורק אם אין לו מסלול שיפור.
- משפט הול (4.7) - בגרף דו צדדי יש זיווג לכל הצמתים אם ורק אם לכל תת קבוצה מתקיים $|X| \leq |\Gamma_G(X)|$.
- מסקנה 4.8 - בגרף דו צדדי יש זיווג מושלם אם ורק אם $|A| = |B|$ וגם לכל תת קבוצה מתקיים $|X| \leq |\Gamma_G(X)|$.
- הגדרה 4.9 - כיסוי בקשתות - קבוצת קשתות המכסה את כל צמתי הגרף.
- הגדרה - $v(G)$ - גודל של זיווג מקסימום, $\rho(G)$ - גודל מינימלי של כיסוי בקשתות.
- משפט 4.10 - לכל גרף ללא צמתים מבודדים מתקיים $\rho(G) = |V| - v(G)$.
  - מסקנה 4.11 - יהי Mזיווג מקסימום. נכסה כל צומת שאינו מכוסה על ידי M הסמוכה אליו ליצירת הקבוצה I. אז $M \cup I$ הוא כיסוי בקשתות בעל גודל מינימלי.
- שאלה 2 - בגרף דו צדדי פשוט d-רגולרי יש זיווג מושלם (ניתן להוכיח שהכמות הצמתים שווה בכל צד ויש יותר שכנים מאשר צמתים לכל תת קבוצה).
- שאלה 3 - בכיסוי מינימלי אין מסלולים באורך 3 (כי אפשר להוריד את האמצעית) והוא יער.
- שאלה 4 - זיווג מקסימלי להכלה אם אין זיווג אחר שמכיל אותו. מתקיים $|M^*| \leq 2|M|$ (M^* זיווג מקסימום) (הוכחה - לא תתכן קשת בודדת שלא נמצאת בזיווג מקסימלי להכלה).

4.2 קבוצות בלתי תלויות, קליקים וכיסויים בצמתים

- קבוצה בלתי תלויה (אין בה שכנים), קליק (כל שני צמתים מחוברים), כיסוי בצמתים (קבוצת צמתים שבה כל קשת בגרף סמוכה לצומת בקבוצה)
- טענה 4.13 - S קבוצה בלתי תלויה אם ורק אם $V \backslash S$ הוא כיסוי בצמתים (הוכחה - בגלל שב-S אין שני צמתים שמחוברים בקשת אז בטוח ב-$V \backslash S$ יש צומת שמכסה כל קשת).
- הגדרה - $\alpha(G)$ - גודל מקסימלי של קבוצה בלתי תלויה, $\beta(G)$ - גודל מינימלי של כיסוי בצמתים.
- טענה 4.14 - $\alpha(G) + \beta(G) = n$
- טענה 4.15 - הגודל של כל כיסוי בצמתים גדול או שווה לגודל של כל זיווג ב-G. בפרט, $v(G) \leq \beta(G)$ (הוכחה - כיסוי בצמתים נוגע בכל זיווג (קשת) ואפילו יותר.) (במעגל אי זוגי זה אי שיוויון ממש).
- משפט קניג (4.16) - לכל גרף דו צדדי $v(G) = \beta(G)$.
- שאלה 5 - גרף הוא דו צדדי אם ורק אם כל תת גרף מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל $\frac{1}{2}|V(H)|$ לפחות.
- שאלה 6 -
  - קבוצה שולטת - קבוצה שכל צומת ב-$V \backslash D$ הוא שכן של D. $\omega(G)$ - גודל מינימלי של קבוצה שולטת.
  - אם I קבוצה בלתי תלויה מקסימלית להכלה אז היא קבוצה שולטת. אם הגרף לא מכיל צמתים מבודדים אז $V \backslash I$ קבוצה שולטת.
  - $\omega(G) \leq \alpha(G)$

פרק 5 - גרפים מישוריים

- הגדרה 5.1 - גרף מישורי אם ניתן לציירו במישור כך שלא יהיו שתי קשתות שיצטלבו.
- טענה 5.2 - K_5 אינו מישורי.
- שאלה 1 - הגרף המתקבל מ-K_5 על ידי השמטת קשת כלשהי הוא מישורי.
- פאות - למעגל יש שתי פאות, לכל עץ יש פאה אחת.
- משפט אוילר (5.3) - $|F| = |E| - |V| + 2$, $f = m - n + 2$.
- מסקנה 5.4 - בגרף מישורי בעל לפחות 3 צמתים יש $3n - 6$ קשתות לכל היותר (אי שיוויון למטה + אוילר)
  - $3f \leq 2m$ - אם סופרים את כל הקשתות סביב פאות אז יש לפחות 3 קשתות לכל פאה, אבל אין מצב שנספור $2m$ קשתות כי יש קשתות חיצוניות או כאלה שאין להם פאה.
- מסקנה 5.5 - בכל גרף מישורי פשוט יש צומת שדרגתו קטנה או שווה ל-5 (הוכחה - שימוש ב3.4, סכום דרגות)
- שאלה 2 - נתון אורך מעגל מינימלי - יצירת אי שיוויון כמו 5.4 ושימוש באוילר כדי לתחום כמות קשתות
  - בגרף דו צדדי אורך המעגל המינימלי הוא 4 (חייב להיות זוגי וגדול מ-3)
  - ממן 16 שאלה 4 - נסמן ב- A את קבוצת כל הזוגות שבהם e קשת המקיפה את f. $|A| \leq 2|E|$ כי חלק מהקשתות יכולות להיספר פעמיים, אבל ישנן גם קשתות שלא ייספרו פעמיים (קשתות שהן במעטפת החיצונית של הגרף).
- שאלה 3 - $K_{3,3}$ אינו מישורי.
- הגדרה 5.6 - עידון של קשת - הוספת צומת באמצע.
- טענה 5.7 - גרף הוא מישורי אם ורק אם כל העדנה שלו היא מישורית.
- משפט 5.8 - גרף הוא מישורי אם ורק אם הוא לא מכיל כתת גרף העדנה של K_5 או $K_{3,3}$.

פרק 6 - צביעת גרפים

- הגדרה 6.1 - צביעה - פונקציה מצומתי גרף לקבוצת צבעים
  - צביעה נאותה - כל שני צמתים סמוכים צבועים בצבעים שונים.
  - מספר צביעה - מספר מינימלי לצביעה נאותה, $\chi(G)$. k-צביע אם $\chi(G) \leq k$.
  - $\chi(K_n) = n$, $\chi(2-side, n \geq 1) = 2$, $\chi(odd-circle) = 3$, $\chi(even-circle) = 2$
- סימון - $\Delta(G)$ - הדרגה המקסימלית של צומת בגרף.
- שאלה 1 - $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- משפט ברוקס (6.2) - $\chi(G) \leq \Delta(G)$ פרט לשני מקרים בהם $\chi(G) = \Delta(G) + 1$: ל-G יש רכיב קשירות המשרה גרף מלא על $\Delta(G) + 1$ צמתים, $\Delta(G) = 2$ ו-G הוא מעגל באורך אי זוגי.
- שאלה 2 - ניתן לצבוע באופן חוקי כל גרף d-מנוון ב-$d+1$ צבעים (הוכחה - אינדוקציה, נוציא צומת כלשהו ונצבע את הגרף, ובטוח יש צבע שלא השתמשנו בו כדי לצבוע את הצומת).
- שאלה 3 - אם גרף הוא k-צביע אז יש ב-G קבוצה בלתי תלויה בגודל $roundup\left(\frac{|V|}{k}\right)$. (הוכחה - כל קבוצת צבעים היא בלתי תלויה, ויש אחת בגודל הנתון אחרת הגרף לא בגודל $|V|$).

6.2 צביעת גרפים מישוריים

- מספר הצביעה של גרפים כלליים הוא לא חסום, אבל כן חסום עבור גרפים מישוריים.
- משפט 6.3 (משפט ארבעת הצבעים) - כל גרף מישורי הוא 4-צביע.
- שאלה 4 - כל גרף מישורי הוא 6-צביע.
- משפט 6.4 - כל גרף מישורי הוא 5-צביע.
- שאלה 5 - נתון מספר משולשים - אפשר להשתמש לצורך אי שיוויון כמו $3f < 2m$ (ספירת הקשתות סביב הפאות).
  - אפשר להוכיח שגרף מישורי הוא קשיר אחרת אפשר להוסיף קשת בין רכיבי קשירות והוא עדיין יהיה מישורי (כל עוד לא משפיע על תנאי השאלה).

טענות עזר

(*)

שאלה 5 מבחן 81 מועד 2021א - אם יש 4 צמתים שהדרגה שלהם 4 אז אין צומת מדרגה 5 - אם כל הצמתים מחוברים זה לזה אז יש K_5, אם לא אז יש $K_{3,3}$.

(*)

מבחן לדוגמה 12 שאלה 5 - נתון גרף 7 צמתים ו-15 קשתות עם דרגות 6,6,4,4,4,3,3 וצריך להוכיח שהוא המילטוני. נוריד את הצמתים עם דרגות 6,6, אפשרי כיוון שהם בהכרח מחוברים לשאר. נישאר עם גרף 2,2,2,1,1. הגרף הוא איחוד של שני רכיבי קשירות שהם המילטונים או עץ שהוא מסלול פשוט שהוא גם המילטוני. לכן אם נחבר את שני הצמתים האחרים שוב, נקבל גרף המילטוני כי הם מחוברים לכל שאר הצמתים.

(*)

שאלה 5 סמסטר 2023ב מועד א - לשים לב אם הנתונים מרמזים שיש גרף הוא עידון של K_5, כלומר לקחו את אחת הקשתות והורידו אותה, והוסיפו צומת באמצע במקום הקשת שהורידו.