לוגיקה סיכום

#לעשות

- -

הכנה למבחן

- לתרגל:
  - הפיכת פסוק לדיסיוניקטיבי נורמלי
  - הפיכת נוסחה לפרנקסית נורמלית + סקולמניזציה

תכנית הקורס

- פרקים 1-4 - השפה הפסוקית
- פרקים 5-6 - שפת היחסים
- פרק 7 - מבנה ותורה הקשורים לאריתמטיקה, משפט אי השלמות של גדל
- פרקים 8-9 - וריאציות של לוגיקת היחסים - לוגיקה רב סוגית ולוגיקה מסדר שני, לוגיקת זמן, לוגיקה מודאלית.

מבנה המבחן (סמסטר 2024א)

- שאלה 1 - הוכחה באינדוקציה מבנית
- שאלה 2 - שלמות קשרים או שלמות ונאותות
- שאלה 3 - האם פסוקים אמיתיים, הוכחה פורמלית וכו'
- שאלה 4 - מודלים/תת מודלים, גדירות

פרק 1 - לוגיקה ושפה פורמלית

- 1.1 טקסט ומשמעותו
  - חשובים 3 תנאים: לדעת לקרוא את הטקסט, להבין את הפירוש, ושהטקסט יהיה מועיל למטרה
    - תחביר - איך לקרוא, א"ב, מה זה ביטוי תקין
    - פירוש - איך לבצע, מה עושים כאשר קוראים כל דבר
  - 15 - מושגים: מקלדת, שפה, ביטוי, מחרוזת, שמות, משפטים
- 1.2 שפה טבעית
  - שימושית לביטוי ביומיום אבל לא חד משמעית ולא מוגדרת היטב (לפעמים אפשר להבין לפי הפירוש)
- 1.3 שפה פורמלית
  - צריכה לבטא את מה שמעניין לעסוק בו, חד משמעית, פשוטה ונוחה, מוגדרת ובלתי משתנה, קלה ללמוד וללמד, כללי תחביר פשוטים, הגדרת שפה והגדרת פירוש נפרדים
  - מבנה - מקלדת (א"ב), מחרוזת (רצף סופי של אבני שפה)
    - שמות עצם
    - טענות לוגיות - נוסחאות ופסוקים
    - חישובים - תכניות
- שפות לדוגמה
  - 1.4 מספרים טבעיים
  - 1.5 פונקציות
  - 1.6 שפת התכנות $while$
    - ניתן לחשוב עליה כפונקציה מהמספרים הטבעיים למספרים הטבעיים.
  - 1.7 שפה לניהול ספריה

פרק 2 - לוגיקה פסוקית - התחביר

- 2.2 מקלדת ושפה
  - $\sum$ - מקלדת (לדוגמה $\{a, b\}$)
    - $\sum^*$ - קבוצת כל המחרוזות מעל המקלדת (גם הקבוצה הריקה)
  - פעולת השרשור
  - כל קבוצה של מחרוזות $L \subseteq \sum^*$ תקרא שפה
- 2.3 השפה הפסוקית הגדרות
  - המקלדת הפסוקית (מופיע בדף הגדרות)
  - הגדרה ברקורסיה / הגדרה מדורגת (אינדוקציה)
- 2.4 איך מדברים בשפה הפסוקית? (הצרנה)
  - צריך להגדיר כל דבר שרוצים עם פסוקים אלמנטריים...
  - לא תמיד קל לתרגם מהשפה הטבעית - לפעמים צריך לבחור בין כמה משמעויות
    - לא תרגום אלא ניסוח - ניחוש מה הייתה כוונת הדובר, ויתור על מידע נוסף
  - לפעמים התרגום יהיה ממש ארוך! ולא קריא לבני אדם. אבל לפחות חד משמעי
  - המתקת תחביר - כדי לעזור לבני אדם (אבל לא גורע מהערך)
- 2.5 הוכחה באינדוקציה מבנית
  - משפט 2.1 - עוברים פסוקים אלמנטריים, קשר שלילה (מניחים שלפסוק המקורי יש תכונה), קשר דו מקומי (מניחים שלמקוריים יש תכונה)
  - האינדוקציה היא על n במעבר על E_n, קבוצת הפסוקים בעלי עומק קשרי n.
  - ניסוח:
    - נוכיח באינדוקציה מבנית שלכל פסוק φ <תכונה>.
    - נוכיח שאם הוא פסוק אלמנטרי אז <מתקיימת התכונה>.
    - נוכיח שאם יש פסוק ψ שמקיים את התכונה כך $\varphi = \neg\psi$ אז φ <מקיים את התכונה>.
    - נוכיח שאם יש פסוקים ψ_1, ψ_2 כך ש-$\varphi = (\psi_1 @ \psi_2)$ אז φ <מקיים את התכונה>.
  - דוגמה - ספירת סוגריים
- 2.6 משפט הקריאה היחידה ועץ מבנה
  - מרכיב ראשי, קשר ראשי, מרכיבים ראשיים
  - למה קריאה עוזרת? - מראה שמחרוזת היא פסוק, מוצאת קשר ראשי, מראה דרך לנתח את שאר העץ, יציג את התוצאה, מראה עומק קשרי של כל תת פסוק
  - משפט הקריאה היחידה
    - סימן יחיד - פסוק אלמנטרי P_i
    - מתחיל בסימן שלילה - פסוק שלילה $\neg\beta$ (β פסוק)
    - סימן ראשון סוגר - קשר דו מקומי (נמחק סוגריים ונחפש קשר שיש מימינו ומשמאלו את אותה כמות סוגריים). $(\alpha \oplus \beta)$ כאשר α, β פסוקים.

        * אם לא - לא פסוק
            - לדוגמה - אסורים סוגריים מסביב לפסוק שלילה
    - שאלה 2.6 - רישא שהיא פסוק היא כל הפסוק
    - עץ מבנה -
        * כל צומת היא קשר, כל עלה הוא פסוק
        * עקרונית, אפשר לעצור אם רואים פסוק, לא חייבים להגיע לפסוק אלנטרי.
        * בהכרח כל עלה חייב להיות פסוק לכן אם מצאנו עלה שאינו פסוק - אפשר לעצור.

- 2.7 הגדרה באינדוקציה מבנית
    - הגדרת פונקציה - הגדרה על פסוקים אלמנטריים, שלילה, קשר דו מקומי
    - פסוק חלקי - כל פסוק שיכול להיווצר כש"מפרקים" את הפסוק המקורי (לפסוק אלמנטרי אין פירוק, פסוק מורכב - המרכיבים הראשיים של הקשר).
    - לוקליות ההגדרה באינדוקציה - אם שתי פונקציות מתלכדות על פסוקים אלמנטריים שמופיעים בפסוק והן זהות על כל קשר שמופיע בפסוק - התמונה של הפסוק בשתיהן היא זהה.
    - משפט 2.11 - כל פסוק חלקי הוא מחרוזת חלקית
- 2.8 פסוק חלקי ומחרוזת חלקית שהיא פסוק
    - למת המחרוזת החלקית - אם תת מחרוזת היא פסוק אז היא כל הפסוק או מחרוזת חלקית של רכיב ראשי
        * הוכחה - מראים שאם הוא כולל קשר ראשי כלשהו אז הוא בהכרח אינו פסוק
    - שאלה 2.12 - אם לשתי תת מחרוזות שהן פסוקים יש חפיפה, אז אחת היא בהכרח תת מחרוזת של השניה.
    - משפט 2.5 - ψ הוא פסוק חלקי של φ אם ורק אם הוא מחרוזת חלקית של φ שגם היא פסוק. (הוכחה - כיוון אחד שאלה 2.11)
    - מציאת דרגה של פסוק - מסמנים ב-0 פסוקים אלמנטריים, מסמנים ב-$n+1$ אם הרכיב הראשי הכי גבוה של קשר כלשהו הוא n. אם בסוף מקבלים מספר - זוהי הדרגה. אם לא - המחרוזת אינה פסוק.
- 2.9 הצבה והחלפת פסוק חלקי
    - שאלה 2.14 ומשפט 2.6 - החלפת פסוק בפסוק אחר מובילה לפסוק
    - הצבה - יחידה (החלפת מופע אחד), מלאה (החלפת כל המופעים) הכללה (החלפת כמה פסוקים)
    - משפט 2.8 - אם H היא פונקציה, בכל פסוק אפשר להחליף זה בזה פסוקים שהם שקולים ביחס לH, ולא משנה איזה אחד מציבים
- 2.10 סדרת בניה
    - שימוש - רשימת פסוקים חלקיים בצורת כתיבה, לא עץ
    - סדרת בניה - סדרה של מחרוזות כאשר כל מחרוזת היא אלמנטרית או מתקבלת חיבור מחרוזות קודמות לה באמצעות קשר.
        * האיבר האחרון חייב להיות הפסוק עצמו!
    - משפט 2.9 - רישא של סדרת בניה היא סדרת בניה, לכל פסוק יש סדרת בניה שכל מחרוזותיה הן פסוקים חלקיים שלו, כל פסוק חלקי של פסוק מסוים מופיע בכל סדרת בניה של הפסוק (לא משנה איזו בחרנו).
        * הערה: יש גם סדרות בניה שמכילות פסוקים לא קשורים! לא כל סדרת בניה מכילה רק פסוקים חלקיים.
    - מחרוזת היא פסוק אם ורק אם יש לה סדרת בניה, פסוק הוא תת פסוק אם ורק אם הוא מופיע בסדרת בניה כלשהי (של הפסוק המקורי)

- דקדוק BNF $(Backus - Naur)$
  - הגדרה רקורסיבית בשפה מקוצרת.
  - השפה הפסוקית: (Q פסוקים אלמנטריים, φ פסוקים)

$Q ::= P_1|P_2...|P_n|..$

$\varphi ::= Q|\neg\varphi|\,(\varphi \vee \varphi)\,|\,(\varphi \wedge \varphi)\,|\,(\varphi \rightarrow \varphi)\,|\,(\varphi \leftrightarrow \varphi)$

- סיכום
  - מחרוזת היא פסוק אם ורק אם - נבנית לפי כללי הבנייה / נמצאת בקבוצה E_n / יש לה עץ מבנה / יש לה סדרת בנייה

הערות שלי

- תכונות של פסוקים:
  - איזון סוגריים
  - מספר קשרים דו מקומיים + 1 = מספר פסוקים אלמנטריים
  - רישא ממש של פסוק אינה פסוק (סיפא יכולה להיות)
  - קשר ראשי - היחיד שמקיים איזון סוגריים
  - אם p פסוק גם $\neg p$ פסוק
  - אם p לא פסוק ייתכן ש-p) פסוק, לדוגמה $p \rightarrow q$)
  -

פרק 3 - לוגיקה פסוקית - הפירוש

- 3.1 מודל בשפה
  - כל פסוק אלמנטרי מקבל פירוש אמיתי מהעולם (לדוגמה "אתמול ירד גשם")
  - פירוש לשפה -
    - אלמנטריים - פונקציה M מקבוצת הפסוקית האלמנטריים ל-$\{T, F\}$
    - מורכבים - הגדרת M באינדוקציה מבנית לפי הקשרים
  - $M \models Q$ אם Q נכון ב-M (או במילים אחרות Q נכון ב-M / מספק / מסתפק וכו') (ו-$\neq$ אם לא)
  - M הוא מודל של קבוצת פסוקים K אם כל פסוקי K נכונים ב-M
  - אם יש n פסוקים אלמנטריים יכולים להיות 2^n מודלים
  - משפט 3.1 לוקליות ערך האמת - אמיתות פסוק תלויה רק בפסוקים האלמנטריים התלויים בו.
  - חישוב ערך אמת של פסוק לפי טבלת אמת - יוצרים סדרת בניה, לכל פסוק אלמנטרי כותבים את הערך, לכל פסוק מורכב כותבים לפי הקודמים.
  - משפט 3.2 הצבה - אפשר להציב פסוקים זהים בפסוק גדול וערכו יישמר.
- 3.2 אמת לוגית ושקילות לוגית
  - טאוטולוגיה - אמיתית בכל מודל (-הכוונה כל מודל הכולל את כל הפסוקים האלמנטריים הכלולים בפסוק, אחרת אין משמעות)
    - פסוק שקרי אם הוא לא נכון באף מודל.
  - שקילות לוגית - פסוקים שקולים לוגית ($\equiv$) אם ורק אם הם נכונים באותם המודלים
    - הערה - האם $P \equiv P \wedge (Q \vee (\neg Q))$? - רק אם Q מוגדר.
  - שני פסוקים שקולים אם ורק אם הפסוק $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ הוא טאוטולוגיה.
  - איך בודקים שקילות?
    - טבלת אמת ומראים שבכל מודל פסוק אחד נכון אם ורק אם השני נכון
    - מראים שנכונות / אי נכונות של אחד גוררת נכונות / אי נכונות של השני
  - שקילויות שימושיות (119)
  - פסוקים שקולים הם עם אותה משמעות לוגית, אבל לא בהכרח סמנטית בעולם האמיתי (בסוף אנחנו נותנים להם משמעות בעולם)
- 3.3 צורות מלאות של קשרים
  - קבוצת קשרים מלאה - לכל טבלת אמת יש פסוק שמתאים לה
    - לדוגמה - נסו להביא את $\vee$ רק עם $\wedge$ ותגלו שיש שורות בטבלת אמת שלא יהיה להן פסוק.
  - משפט 3.3 - כל פסוק שקול לפסוק עם הסימנים $(\neg, \vee)$, ו-$(\neg, \rightarrow)$
  - שאלה 3.5 - אפשר למחוק סימני שלילה עוקבים
  - קוניוניקציה - וגם, דיסיוניקציה - או
  - צורה דיסיוניקטיבית נורמלית - דיסיוניקציה של קוניוניקציות של פסוקים אלמנטריים (פשוטות). לדוגמה $(P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2)$
  - קוניוניקציה פשוטה מלאה - מזכירה כל פסוק אלמנטרי פעם אחת (יש 2^n כאלה, כל אחת היא מודל) (משפטים 3.4,3.5)
  - אלגוריתם לנרמול דיסיוניקטיבי
    - כל קשר חץ וחץ כפול ממירים ל"או" ו-"וגם"

* "מזיזים פנימה" סימני שלילה לתוך סוגריים ומוחקים סימני שלילה עוקבים. ממשיכים עד שכל סימן שלילה הוא לפני פסוק אלמנטרי.
* "מזיזים פנימה" קשרי "וגם" לתוך סוגריים לפי כללי דה מורגן
* ניקיון: $p \vee p = p$, מוחקים כל קוניוניקציה בסיסית שמכילה פסוק ושלילתו (לדוגמה $(\varphi \vee Q \vee \neg Q)$).

- 3.4 נביעה לוגית
  - ψ גורר לוגית את φ אם רק אם בכל מודל שהראשון נכון גם השני נכון (כלומר אם ורק אם $\rightarrow$ הוא טאוטולוגיה) (סימון $\Leftarrow$)
    * הגדרה לקבוצה - הקבוצה גוררת אם ורק אם בכל מודל שפסוקי הקבוצה נכונים גם השני נכון
  - משפט 3.6 - משפט הקומפקטיות - אם קבוצה גוררת לוגית פסוק אז יש לה תת קבוצה סופית שגוררת לוגית את הפסוק
- 3.5 משמעות שפות נוספות
  - עמוד 135 - דיון בהבדל בין אופרטור הנגזרת שפועל על שמות פונקציות לאופרטור הלוגי שפועל על פונקציות - ההוכחה שם מראה שתי פונקציות הם שמות שונים של אותה פונקציה לוגית, אז אופרטור הנגזרת שלהם שווה.
  - שפת הספרייה - מודל מתאר את התפתחות הספרייה לאורך הזמן (סדרה סופית של מצבים רגעיים). הוא נכון אם המעבר בין כל מצב למצב הוא חוקי
  - תכנית מחשב - בדומה לספרייה - סדרה של מצבים רגעיים על הזיכרון
- 3.7 נספח - "הבעיה SAT" היא איך להכריע האם לפסוק יש מודל. בעיה נרחבת בעולם מדעי המחשב. דוגמאות - צביעת המפות, סודוקו.

ספיקות

(לא בספר, כן בחומר)

- פסוק הוא ספיק אם יש מודלים שבהם הוא נכון (או שהוא סתירה). אפשר לומר שזה האמצע בין טאוטולוגיה לסתירה.

פרק 4 - לוגיקה פסוקית - תורת ההוכחה

4.1 דיאלקטים

- בעלות כוח ביטוי שווה וניתן לתרגם מאחת לשניה. שפות חסכוניות - קל לדון, שימוש קשה.
- כתיבת השפה הפסוקית - דיון לוגי ארוך יחסית (4 קשרים), פשוטה ואינטואיטיבית, כללי סוגריים נוקשים
- כתיבה עם XOR ו-T, F - מוסיף עוד קשרים לכל הוכחה, צריך לשאול מה התועלת?
- כתיבה פולנית (נטולת סוגריים) - פחות סימנים במקלדת אבל יותר קשה להבין
- כתיבה עתירת סוגריים - מקל על הדיון אבל כותבים הרבה וגם השימוש נראה מוזר
- כתיבה כעצים - קל להבין אבל קשה לכתוב, וגם קשה לתקשר ככה (עץ ולא שפה)
- כתיבה עם מקלדת סופית - אפשר לכתוב כל פסוק בצורה $P/P'/P''''$ וקשר I/I' וכך להסתדר עם 5 סימנים בלבד

4.2 מהי הוכחה

- הוכחה - נימוק בנכונות טענה שכל אדם שמבין אותה צריך לקבל - לא קשור לאמונה / שכנוע.
- צעדי גזירה (צעד), סדרת הוכחה (סדרת הצעדים)
  - יכיחות – ניתן להוכחה
  - בפרקים הקודמים הראנו שאפשר להראות שעובדה היא נכונה על ידי בדיקת כל המקרים.
    הוכחה היא דוגמה לנימוק שאפשר להראות על ידי צעדים לוגיים סופיים (שיכולים להיות פשוטים בהרבה מבדיקת כל המקרים).
- מנגנון הוכחה פורמלי נקרא "תחשיב הוכחה"

4.3 תחשיב הילברט

- הקדמה
  - בוחרים אקסיומות וכללי גזירה (איך מתקדמים)
  - לכל כלל גזירה יש הנחות ומסקנה
  - סדרת הוכחה - כל פסוק הוא אקסיומה או נגזר מכללים קודמים באמצעות כללי הגזירה.
  - פסוק שיש לו סדרת הוכחה הוא יכיח
  - אם פועלים נכון - כל מה שניתן להוכחה הוא טאוטולוגיה
  - **תחשיב שלם** - תחשיב שניתן להוכיח בו כל טאוטולוגיה
- התחשיב של $L_{\to}$
  - אקסיומות התחשיב
    * $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
    * $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$
    * $((\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi))$
    * כלל הגזירה - $\frac{\varphi, (\varphi \to \psi)}{\psi}$ (כלל הניתוק, MP)

- סדרת הוכחה מתוך קבוצה - סדרת הוכחה שבה כל פסוק הוא אקסיומה או מתקבל מפסוקים בקבוצה או משני פסוקים קודמים באמצעות כלל הניתוק.
  * הערה: אי אפשר להשתמש בטאוטולוגיות שלא בתחשיב.
- הגדרות נוספות
  * סדרת הוכחה בתחשיב - סדרת הוכחה מתוך הקבוצה הריקה.
  * סדרת הוכחה מתוך קבוצה לפסוק - סדרת הוכחה מתוך קבוצה כאשר הפסוק הוא האחרון בסדרה.
  * פסוק הוא משפט אם ורק אם יש לו סדרת הוכחה (סימון $K \vdash \varphi$).

• משפט 4.1 - תכונות יסודיות של הוכחות -
- כל תת סדרת הוכחה היא הוכחה וכל מחרוזת בסדרה היא משפט
- אפשר לחבר שתי סדרות הוכחה כדי לקבל סדרת הוכחה
- סדרת הוכחה של פסוק מתוך קבוצת פסוקים היא גם סדרת הוכחה של קבוצת פסוקים המכילה אותה
- אם פסוק ניתן להוכחה מתוך קבוצה + קבוצת משפטים אז הוא ניתן להוכחה מתוך הקבוצה המקורית
- כל משפט של קבוצת פסוקים הוא משפט של תת-קבוצת פסוקים סופית שלה

• למה עמוד 165
- כל אקסיומה לוגית או פסוק בקבוצה ניתן להוכחה מהקבוצה
- אם $K \vdash \varphi$ ו-$K \vdash (\varphi \to \psi)$ אז $K \vdash \psi$
- אם $K \vdash \varphi$ אז לכל פסוק מתקיים $K \vdash (\psi \to \varphi)$
- לכל פסוק $K \vdash (\varphi \to \varphi)$

• משפט הדדוקציה - אם $K \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ אז $K \vdash (\psi \to \varphi)$
- ההוכחה מראה איך אפשר להמיר כל פסוק מ-$(K \cup \{\psi\})$ ב-K כדי לקבל את טענת החץ.
- שימוש: נניח התבקשנו להוכיח ש-$\{\beta\} \vdash (\alpha_1 \to \alpha_2)$. נוכל בלהתחיל להוכיח $\{\beta, \alpha_1\} \vdash \alpha_2$ ואז להשתמש בדדוקציה.

• הוכחה בשלילה
- קבוצה היא לא עקבית אם יש פסוק שאפשר ממנה להוכיח אותו ואפשר להוכיח גם את היפוכו. קבוצה שהיא לא כזו היא עקבית.
- למה - אם כל קבוצה חלקית של קבוצה היא עקבית אז היא עקבית, אם קבוצה לא עקבית אז קיימת תת קבוצה חלקית סופית שהיא לא עקבית
- קבוצה שמכילה פסוק ואת השלילה שלו מוכיחה כל פסוק (הוכחה: שימוש באקסיומה $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ ואז $\{\psi, \neg\psi\}$ גורר כל φ)
- קבוצה לא עקבית מוכיחה כל פסוק (הוכחה: הקבוצה מוכיחה פסוק ושלילתו והם מוכיחים כל פסוק, וכיוון שהם משפטים שלה אז גם יש סדרת הוכחה לכל פסוק)
- אם $K \cup \{\neg\varphi\}$ לא עקבית אז $K \vdash \varphi$ (הוכחה: אפשר לבצע משחקים עם האקסיומות כדי להגיע למצב שבו φ הוא משפט של K)

• התחשיב נאות
- משפט 4.4 התחשיב נאות - לכל קבוצת פסוקים K ופסוק φ: אם $K \vdash \varphi$ אז $K \Rightarrow \varphi$.
  * הוכחה: כל פסוק הוא אקסיומה (לכן נכון בכל מודל) או פסוק בקבוצה (לכן כמובן נובע ממנה) או נובע מצעד הגזירה (ומזה נובע בהכרח שאם פסוקי הקבוצה נכונים אז גם ההיסק נכון)

* בפרט המשפטים הניתנים להוכחה בתחשיב הם טאוטולוגיות
* מסקנה - אם לקבוצת פסוקים יש מודל אז היא עקבית (הוכחה - אם היא לא עקבית אז היא מוכיחה פסוק ושלילתו, התחשיב נאות אז שניהם נגררים מהקבוצה, ומהגדרת הגרירה מקבלים פסוק שהוא נכון ולא נכון בו זמנית, סתירה).

- שלמות
  - תורה / מערכת אקסיומות - קבוצת פסוקים עקבית
  - תורה שלמה - כל פסוק ניתן להוכחה או להזמה (הפרכה)
    * תחשיב שלם - כל טאוטולוגיה ניתנת להוכחה או הפרכה
  - מרכיבי התורה שלמה
    * לתורה שלמה יש מודל יחיד
      - הסבר: אם יש שני מודלים אז יש לפחות פסוק אלמנטרי אחד שונה ביניהם, ולכן הפסוק והיפוכו נובעים מהקבוצה, אבל לפי 4.4 כל משפט של קבוצה נכון בכל מודל שלה, ולכן לא ייתכן ששניהם נובעים ממנו ולכן התורה לא שלמה. לכן יש מודל אחד.
    * ניתן להרחיב כל תורה לתורה שלמה
    * לכל תורה יש מודל (אפשר להרחיב ולקחת את המודל)
    * אם פסוק נובע לוגית מתורה אז הפסוק ניתן להוכחה מהקבוצה.
      - אם בוחרים קבוצת פסוקים ריקה מקבלים: כל טאוטולוגיה ניתנת להוכחה
      - הוכחה - אם לפסוק אין סדרת הוכחה אז התורה בצירוף שלילת הפסוק היא עקבית לפי משפט ההוכחה בשלילה (אם לא הייתה עקבית הוא היה חייב להיות משפט), לכן יש לה מודל, ובמודל זה התורה נכונה והפסוק לא לכן הוא לא נובע לוגית (ולכן כל פסוק שכן נובע לוגית הוא בהכרח ניתן להוכחה).
      - (שני המשפטים האחרונים הם בעצם צורה של אותה טענה)

4.4 משפט הקומפקטיות

- נוסח ראשון - אם כל קבוצה חלקית סופית היא בעלת מודל אז יש מודל שבו כל פסוקי הקבוצה נכונים
- נוסח שני - אם פסוק נובע לוגית מקבוצה אז קיימת תת קבוצה סופית שממנה הוא גם נובע. (מוכיחים שאם אין קבוצה סופית אז הוא לא נובע)

4.5 סיכום

- הסתדרנו רק עם 3 אקסיומות - האם משפטי גיאומטריה הם מיותרים? אפשר עקרונית להסתדר עם תחשיב הילברט אבל אז כל טענה תהיה פסוק אלמנטרי וזה יהיה ממש קשה.
- יש בסיכום עוד הערות על הוכחות, הוכחה במחשב וכו' - מעניין

תוספת מהאתר

- מערכת הוכחה נקראת נאותה בחזק אם **לכל** קבוצה K ולכל פסוק φ אם $K \vdash \varphi$ אז $K \vDash \varphi$
- כלל היסק $\frac{\alpha_1 ... \alpha_k}{\alpha}$ נקרא נאות כאשר: אם $\vDash \alpha_i$ לכל i אז $\vDash \alpha$
- כלל היסק $\frac{\alpha_1 ... \alpha_k}{\alpha}$ נקרא נאות בחזק או שומר תוקפות כאשר לכל קבוצת פסוקים K אם $\vDash \alpha_i$ לכל i אז $\vDash \alpha$ (בעצם אם ורק אם מתקיים $\{\alpha_1 ... \alpha_k\} \vDash \alpha$)
- אם במערכת כל האקסיומות הן טאוטולוגיות וגם כל כללי ההיסק נאותים / נאותים בחזק אז המערכת נאותה / נאותה בחזק (בהתאמה)

- אם יש במערכת ההוכחה אקסיומה שאיננה טאוטולוגיה או כלל היסק שלא נאות בחזק אז המערכת בוודאות אינה נאותה
  - הוכחה (נראה לי): אם יש סתירה אז ההפך שלה הוא טאוטולוגיה, וצירוף שניהם מאפשר להוכיח כל פסוק.

הערות שלי

- קבוצת פסוקים לא עקבית -
  - אם אין לה מודל
  - גוררת לוגית כל פסוק באופן ריק
- קבוצת פסוקים עקבית (תורה) -
  - אם יש לה לפחות מודל אחד
  - הגדרות שקולות - אם לא ניתן להוכיח ממנה פסוק ושלילתו או אם קיים פסוק φ שלא נגרר לוגית מהקבוצה
    * כיוון אחד: אם לא ניתן להוכיח פסוק ושלילתו אז בהכרח קיים פסוק לא ניתן להוכיח (שלילה של אחד הפסוקים)
    * כיוון שני: אם קיים φ שלא יכיח בקבוצה אז יש לה מודל (אחרת כל פסוק נגרר לוגית) ואם יש לה מודל אז לא ייתכן שמוכח פסוק ושלילתו.
  - משפט הקומפקטיות - עקבית אם ורק אם של תת קבוצה סופית שלה עקבית
- תורה שלמה -
  - אם יש לה רק מודל אחד
  - אם לכל פסוק הקבוצה מוכיחה אותו או את שלילתו.
- עקבית מקסימלית -
  - אם יש לה רק מודל אחד
  - אם לכל פסוק הקבוצה מכילה אותו או את שלילתו

פרק 5 - שפת היחסים – תחביר ופירוש

5.1 מבוא

- בעיה בשפה הפסוקית: כל פסוק אלמנטרי הוא אטומי ואין אפשרות לראות שיש ביניהם קשר. (לדוגמה להראות ש"דני הוא אדם" ודני הוא יפה" נראים סתם כך - $P \wedge Q$)
- תחום הדיון חייב להיות קבוצה לא ריקה! (אחרת בעייתי לטעון טענות)
- השפה שמגדירים תלויה במטרה ובנושאים שבהן היא אמורה לעסוק
- למה לא לשים בשפה אחת את כל היחסים והשמות וכו' הקיימים? - מסרבל את הדיון

5.2 שפות של שמות עצם

- מקלדת
  - משתנים, סימני פיסוק, סימני חותם (עצמים קבועים, פונקציות)
- שמות העצם
  - עומק מבני - של קבועים הוא 0, המחרוזת $F(t_1, ..., t_k)$ היא שם עצם והעומק המבני שלו הוא $1 + max\{d(t_1) ... d(t_k)\}$
  - הוכחה והגדרה באינדוקציה מבנית - צריך להגדיר לכל שם עצם קבוע ולכל פונקציה
  - הצבה - החלפת מחרוזת במחרוזת אחרת, ייתכן שלא יהיו מופעים בכלל
  - משפט 5.2 לוקליות - שתי פונקציות שלא נבדלות ביחס לעצמים המופיעים בשם ספציפי יוצרות את אותה התוצאה עבורו, הצבה של שם עצם במשתנה שווה לו תוביל לאותו שם העצם.
- מבנה בשפה
  - מבנה - אוסף של תחום הדיון, עצמים קבועים ופונקציות (דוגמה: מבנה הטבעיים - תחום הדיון הוא הטבעיים, קבוע 0, פעולות חיבור, כפל ועוקב)
- השמה למשתנים
  - שם עצם שמופיעים בו משתנים לא מתאר עצם אלא קבוצה של עצמים
  - השמה - התאמה של משתנה לעצם קבוע. השמה רלוונטית לשם עצם אם היא מכילה את כל המשתנים המופיעים בו. (באופן ספציפי: כל השמה רלוונטית לשם עצם קבוע).
- פירוש שם עצם בהשמה
  - מוגדר רקורסיבית - פירוש קבועים, פירוש משתנים (לפי ההשמה), פירוש פונקציות (מפרשים כל עצם בנפרד ומעבירים דרך הפונקציה).
  - גם פה לוקליות ההגדרה נכונה (משפט 5.2)
- פירוש שמות עצם כפונקציה במודל
  - סביבה - קבוצת השמות שמתאימות לקבוצת משתנים קבוצת ערכים מסוימת (כל השמה בנפרד יכולה להכיל עוד השמות).
  - שם עצם שמכיל משתנים יכול להיחשב כפונקציה n-מקומית. צריך להגדיר לפני מה הסדר של המשתנים (לדוגמה $t[n_1, n_2]$) לפני שמציבים (לדוגמה $t(1, 2)$).
    - המחרוזת שהיא שם העצם היא גם שם ובעצם גם מתכון לחישוב (לדוגמה $t = (1 + x_1) \cdot x_2$)

- דוגמאות לשפות ומבנים
  - שפת המספרים הטבעיים
    * קבוע אלמנטרי יחיד 0, בעומק 1 מתקבלים 4 קבועים (לדוגמה $+(0,0)=0, s(0)=1$)
    * אפשר להשתמש בכתיבה מקוצרת כל עוד לקורא יש דרך להפוך אותה לפורמלית
  - פונקציות
    * לשים לב - כל האיברים בתחום הם פונקציות ואין מספרים!

5.3 שפת היחסים - התחביר

- המקלדת
  - קשרים, סימני פיסוק, משתנים, כמתים, שמות ופונקציות
- שפת היחסים
  - שם עצם בסיסי - משתנה / קבוע
  - נוסחאות
    * אטומית - יחס ושמות עצם - $R(t_1,...,t_n)$
    * הגדרה באופן רקורסיבי עם קשרים ועם כמותים (הערה: אין בהגדרה פונקציות ושמות עצם, הם יכולים להופיע רק בתוך יחסים)
  - משפט 5.4 - הוכחה באינדוקציה - מגדירים לכל נוסחה אטומית, קשר וכמת
  - משתנה של כמת לכל הוא לא משתנה ספציפי, ובעצם אומר משהו כללי בשפה
  - אותו שם משתנה יכול להופיע במקומות שונים בתפקידים שונים (לדוגמה $(\exists x(x<y) \vee \forall x R(x))$) וזה כי שתי הנוסחאות בנפרד הן נוסחאות לגיטימיות.
  - משתנים חופשיים
    * מופע של משתנה נקרא מופע חופשי, בנוסחאות עם קשרים כל כמת קושר את המשתנים שלו, בנוסחה עם כמת אז אסור שהמשתנה יהיה קשור כבר לפני, והוספת כמת קושרת את כל המופעים שלו בנוסחה.
    * משתנה נקרא חופשי אם יש לו מופע חופשי אחד לפחות
    * נוסחה היא פסוק אם אין בה מופעים חופשיים.
- הצבה והצבה כשרה - הצבה מחליפה כל מופע חופשי של משתנה, הצבה היא כשרה אם אין לה תופעות לוואי (כלומר אף משתנה פתאום לא הופך לקשור, כמו להציב נוסחה עם x בנוסחה אחרת שיש בה x).

5.4 שפת היחסים - הפירוש

- מודל בשפה - תחום, עצמים קבועים, פונקציות, יחסים
- לוגיקה ללא שיוויון - לא חייבים לכלול את יחס השיוויון ואם הוא שם אז הוא יכול להיות גם משהו אחר לגמרי. אם זה קורה אז אומרים במפורש.
- פירוש של נוסחה - נוסחה מקבלת ערך אמת רק לאחר השמה. יחס נכון אם ורק אם העצמים שבו שייכים אליו ($(t_1...t_n) \in R$). כל קשר/כמת מוגדר בצורה סטנדרטית.
- תיקון/עדכון של השמה $S\langle x|a\rangle$ - משנים בהשמה את ההגדרה של x ל-a (ייתכן שלא הייתה כזו)
- משפט 5.5א,ב - לוקליות - שתי השמות שמלכדות על משתנים חופשיים בנוסחה מסוימת קובעים עבורה אותו ערך אמת.

- פירוש של פסוק במודל - הוא נכון/לא נכון בכל ההשמות של אותו מודל (אין משתנים חופשיים), אם נכון אז מסמנים $M \models \varphi$
- סביבה - מוגדרת בדומה למקודם. נוסחה עם משתנים חופשיים מתארת יחס n-מקומי.
- משפט 5.5ג מודולריות הפירוש ביחס להצבות - אם שתי השמות מתלכדות על עצמים שמוצבים אז הפסוק הכולל נכון באחת אם ורק אם הוא נכון בשני.
- נוסחה נכונה במודל אם ורק אם היא נכונה לכל השמה במודל.
  - סגור כולל - $\forall x_1 ... \forall x_r \varphi$.
  - משפט 5.6 - נוסחה נכונה במודל אם ורק אם הסגור שלה נכון במודל.
- צמצום והעשרה של הסיגנטורה - צמצום / העשרה של שמות עצם / פונקציות / יחסים.

5.5 דוגמאות

- מומלץ לעבור עליהן - עוזרות להבין ולתרגל
- הערה: משתנים שונים אינם בהכרח אומרים עצמים שונים.

5.6 נוסחאות שקולות ונוסחאות אמיתיות לוגית

- נוסחה אמיתית לוגית אם היא נכונה בכל מודל.
- נוסחאות שקולות לוגית אם ורק אם הן נכונות בכל השמה ובכל מודל.
- משפט 5.8 -
  - אם שתי נוסחאות שקולות אז אפשר להפעיל עליהן כל קשר או כמת ולקבל נוסחאות שקולות.
  - בנוסף אם מחליפים נוסחה שקולה אחת בשניה בתוך בנוסחה אחרת, הנוסחה הגדולה החדשה שקולה למקורית.
- משפט 5.9 טאוטולוגיות של שפת היחסים -
  - אפשר להחליף פסוקים אלמנטריים בנוסחאות ולקבל נוסחה
  - אם ניקח מודל (שפה פסוקית) והשמה (שפת יחסים) שהם שווים לכל פסוק / נוסחה שהצבנו בהתאמה, התוצאה הכוללת תהיה זהה.
  - אם פסוק אחד טאוטולוגיה השני אמיתי לוגית (נכון בכל מודל).
- אמיתות לוגית של שיוויון (מופיעים שם הנוסחאות שמגדירות מהו שיוויון - רלפקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי. בנוסף אפשר להציב שם עצם ששווה לשם עצם אחר במקומו).
- משפט 5.10 רענון משתנים -
  - אם נוסחה נכונה לכל משתנה ($\forall$) אז הנוסחה $\forall x \varphi \to \varphi[t/x]$ אמיתית לוגית (אפשר להציב שם כלשהו) (רק אם ההצבה כשרה!)
  - אם משתנה לא מופיע בנוסחה אז אפשר להחליף את המשתנה במשתנה אחר.
- שאלה 5.15 -
  - $\forall x (\varphi \vee \psi) \neq \forall x \varphi \vee \forall x \psi$ - אחד אומר שכל עצם מקיים אחת משתי תכונות, השנייה שכל העצמים מקיימים אחת או שכולם מקיימים אחרת.
    - לדוגמה כל מספר הוא שווה ל-0 או לא שווה ל-0. לעומת הטענה שכל המספרים שווים ל-0 או שונים מ-0 לא נכונה (לכל אחד יש הפרכה).

- $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) = \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ - לעומת זאת, לומר שכל העצמים מקיימים את שתי התכונות זה בסדר
- עם קשר ה"קיים" שניהם מתקיימים - $\exists x\,(\varphi \vee \psi) = \exists x\varphi \vee \exists x\psi$, $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) = \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$

- משפט 5.11 -
  - קשרים בין "קיים", "לכל" וקשר השלילה - "לא קיים זה לכל" ו"לא לכל זה קיים"
  - בקשר דו מקומי, אם משתנה לא חופשי בנוסחה שניה אז אפשר להוציא כמת - לדוגמה $\forall x\,(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \vee \psi)$.
- שאלה 5.16 - כללי הוצאת כמתים בנוסחת חץ
  - כמת על המסקנה מוציאים כפי שהוא - $\exists x\,(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \exists x\psi)$
  - כמת על התנאי הופכים - $\exists x\,(\varphi \to \psi) \leftrightarrow ((\forall x\varphi) \to \psi)$ (זה כי אם הופכים ל-$\vee$ אז על התנאי יש שלילה)

5.7 נוסחאות בצורות מיוחדות

- צורה פרנקסית - כל הכמתים מופיעים בראש הנוסחה.
- פרנקסית נורמלית - הקטע שאחרי הכמתים הוא דיסיונקטיבי נורמלי (-דיסיוניקציה של קוניוניקציות של נוסחאות בסיסיות, וכל אחת מהן היא נוסחה אטומית או שלילה של נוסחה אטומית)
  - שיטה - מוציאים החוצה כמתים, מכניסים פנימה קשרי שלילה וממירים קשרי חץ לקשרי "וגם" / "או" (דומה לדיסיוניקטיבי נורמלי אבל עם הוצאת כמתים לפני).
- כל נוסחה אפשר לייצג עם $\{\neg, \to, \forall\}$

פרק 6 - תחשיב, משפט שלמות ומבוא לתורת המודלים

(הערה: חלק מהחומר ומכאן והלאה מסוכם מההקלטות של וסים / טלי ולא נמצא בספר)

6.1 תחשיב והוכחות

- קבוצת נוסחאות K - מרשים לה להיות קבוצה של פסוקים אבל יכולנו גם להרשות לה להכיל נוסחאות.
- אקסיומות נוספות
  - אקסיומת ההצבה $\forall x\varphi \to \varphi[t/x]$ (בתנאי שההצבה כשרה)
  - אקסיומת הזזת הכמת $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$ (בתנאי ש-x לא מופיע ב-φ)
  - בלוגיקה עם שיוויון מתווספות אקסיומות שקילות והחלפה - רפלקסיביות (כל איבר שבה לעצמו), סימטריות, טרנזיטיביות, אפשר להחליף עצמים בעצמים זהים להם בתוך פונקציות / יחסים לקבל תוצאה זהה.
- כלל גזירה נוסף - $\frac{\varphi}{\forall x\varphi}$ (דומה ללומר "יהי ε,..." - זה בתנאי שהעצם ב-φ הוא חסר אישיות ומתאים לכל העצמים בתחום).
- נאותות, דדוקציה, הוכחה בשלילה.
  - משפט הדדוקציה עובד רק אם הפסוק שעליו מתבססים הוא נוסחה ולא פסוק.
- משפט 6.5 - כמתים, קבועים ושפות חלקיות
  - רענון משתנה קשור (אם החדש לא מופיע בנוסחה)
  - הוכחה בסגנון "יהי ε" - c קבוע שלא מוזכר בK ולא ב-φ, אם $K \vdash \varphi[c/x]$ אז $K \vdash \forall x\varphi$
  - נכונות פסוק בשפה היא גם בשפת-העשרה
  - קבוצה עקבית בשפה היא גם בשפת-העשרה.
- שאלה 6.4
  - $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
    - הערה: זה דומה לאקסיומת ההצבה אבל יותר חלש, כיוון שצריך שהתנאי יתקיים לכל x
  - ההפך לא בהכרח מתקיים כי אפשר לבחור טענה φ כך שהיא מתקיימת עבור עצמים מסוימים ולא עבור ψ.
- דדוקציה טבעית
  - הרחבה על מערכת ההוכחה
  - מכילה אקסיומות נוספות (כמו $((\alpha \wedge \beta) \to \alpha)$, $(\alpha \to (\beta \to (\alpha \to \beta)))$, אקסיומת הצבה עבור כמת)
  - כללי היסק - כלל ההכללה וההצבה הישי והכולל

6.2 משפט השלמות

- המשפטים בתחשיב הפסוקים נכונים גם כאן - כל תורה ניתנת להרחבה לתורה שלמה, לכל תורה יש מודל, אם פסוק נובע לוגית מתורה אז הוא ניתן להוכחה מהתורה.
  - הבדל אחד - לתורה שלמה יש אינסוף מודלים, לכל עוצמה של אינסוף. כל המודלים בכל עוצמה איזומורפיים זה לזה. (הוכחה בהמשך הספר).

- לוגיקה בלי שיוויון
  - קבוצת הנקין - קבוצת פסוקים עקבית, מקסימלית, ומקיימת תכונת הנקין (אם הקבוצה מכילה את $\neg\forall x\varphi$, אז יש קבוע c בשפה שעבורו הקבוצה מכילה את $\neg\varphi\left[c/x\right]$).
  - משפט 6.6 - משפט השלמות ללוגיקה בלי שיוויון - לתורה שלמה יש לפחות מודל אחד
    - הוכחה - מרחיבים את הקבוצה לקבוצת הנקין על ידי העשרה בקבועים ואז מראים שלקבוצת הנקין יש מודל אחד לפחות
- לוגיקה עם שיוויון
  - איזומורפיזם - העתקה שהיא חד חד ערכית ועל בין שני מודלים באותה השפה
    - באיזומורפיזם - כל טענה במודל אחד נכונה באחר (משפט 6.7)
    - הומומורפיזם - פונקציה לא בהכרח חח"ע ועל, אבל שומרת על הקבועים הפונקציות והיחסים (וייתכן שהמודל השני מכיל עוד, ההומומורפיזם לא "על").
    - בהינתן שני מודלים, נאמר שניתן להפריד ביניהם ביחס לשפה L אם יש פסוק שנכון באחד ושקרי באחר.
    - כדי להביא מודל שלא איזומורפי לאחר - שהתחום יהיה מעוצמה שונה
  - משפט 6.8 משפט השלמות ללוגיקה עם שיוויון - לכל קבוצת פסוקים עקבית בלוגיקה עם שיוויון יש לפחות מודל אחד.

6.3 המשפטים היסודיים של תורת המודלים

- מבטים על תורה
  - תורת ההוכחה - מסתכלים על המחרוזות בתורה ובמניפולציה עליהן
  - תורת המודלים - מחלקת כל המבנים שהם מודלים של התורה
  - משפט השלמות מראה שזה בעצם אותו דבר - משפטים שניתנים להוכחה הם המשפטים שנכונים בכל המודלים של התורה.
- משפט 6.9 משפט הקומפקטיות - אם לכל תת קבוצה סופית של קבוצת פסוקים אינסופית K יש מודל אז יש מודל שבו כל פסוקי K נכונים.
- משפט סקולם-לוונהיים
  - המשפט: אם לתורה יש מודל אינסופי הרי יש לה גם מודל שהוא בן מניה (לכל היותר).
  - המשפט הכללי: אם לתורה יש מודל אינסופי אז לכל עוצמה אינסופית יש לתורה מודל שעוצמתו היא העוצמה.
  - מעיד גם על חולשה: תמיד יהיו מודלים שלא נצליח לאפיין בצורה נוחה.
- משפט 6.12 - בכל תורה יש מספר סופי של עצמים או שלתורה יש מודלים בכל עוצמה אינסופית.

6.4 תורת המודלים - כמה תורות חשובות

- תורת הסדר - בתורה יש את חוק אי רפלקסיביות וחוק טרנזיטיביות
- תורת יחס סדר מלא - תורת סדר + השוואה (עבור כל שני איברים אחד גדול מהשני או שהם שווים)
- יחס סדר צפוף - סדר מלא + צפיפות (בין כל שני איברים יש עוד איבר) + לכל איבר יש קטן ממנו וגדול ממנו
- תורת השדות - אקסיומות השדה
- תורת פאנו

6.5 תורת המודלים - תורות שלמות

- שאלה - האם תורה היא שלמה?
- $T = Th(M)$ - קבוצת כל הפסוקים הנכונה באותו מודל. התורה הזו עקבית ושלמה.
  - ההגדרה בפני עצמה לא עוזרת... יש הרבה תורות קטנות באותו מודל.
- שאלה 6.18 - תורה היא שלמה אם ורק אם בכל שני מודלים שלה ה-$Th()$ שלהם שווה.
  - אם T לא שלמה אז יש פסוק φ כך שלתורה $T \cup \{\varphi\}$ יש מודל M ולתורה $T \cup \{\neg\varphi\}$ יש מודל M'. אם היא שלמה בהכרח אפשר להוכיח פסוק או שלילתו.
  - דרך 0: תורה היא לא שלמה אם ורק אם יש פסוק שנכון רק בחלק מהמודלים
  - זה בעצם מגנון לבניית תורות - אם נתקלים בפסוק שנכון רק בחלק מהמודלים, אז מוסיפים לתורה את הפסוק או שלילתו או שמפצלים לשתי תורות. (לדוגמה: ככה בונים תורה של שדות סופיים).
- דרך 1: המבחן של ווט: אם לתורה שאין לה מודלים סופיים יש עוצמה α כך שכל שני מודלים של התורה שעוצמתם α הם איזומורפיים, אז התורה היא שלמה.
- (יש עוד שני מבחנים אבל לא סיכמתי אותם)

6.6 איזומורפיזם והומומורפיזם במתמטיקה

- איזומורפיזם
  - איזומורפיזם מוכלל רלוונטי במקרים בהם יחס הזהות הוא לא יחס השיוויון
  - איזומורפיזם בין שני מבנים מראה ששניהם מהווים העתקים של אותו המבנה
  - שני מבנים הם איזומורפיים אם יש ביניהם איזומורפיזם (העתקה חח"ע ועל).
  - כשיש איזומורפיזם בין שתי מערכות, בעצם כל תובנה באחת אפשר להסיק לגבי האחרת.
    - נתנו פה דוגמה עם חישוב מסובך של מספר עם log - ממש מעניין
- הומומורפיזם
  - הומומורפיזם מפרק את המבנה לשני מבנים - תמונה הומומורפית וגרעין ההומומורפיזם.
  - אפימורפיזם - הומומורפיזם על M' (מודל היעד) ייקרא אפימורפיזם אם הוא משמר כל יחס בשפה. M'הוא תמונה הומומורפית.
  - (באלגברה יש רק פעולות ולא יחסים לכן כל הומומרפיזם באלגברה שהוא על הוא אפימורפיזם)
  - יחס קונגורואנציה ומבנה מנה
    - יחס דו מקומי ייקרא קונגרואנציה אם הוא מקיים את תכונות השיוויון -
      - יחס שקילות
      - מכבד פונקציות - אם $(a_1, b_1) \dots (a_n, b_n) \in E$ אז גם $(f(a_1 \dots a_n), f(b_1 \dots b_n)) \in E$
      - מכבד יחסים - בצורה דומה
    - מבנה מנה -
      - קבוצת המנה של E היא קבוצת המחלקות של התחום לגבי היחס E (כל שני איברים שמקיימים את היחס הם באותה קבוצה).
      - מבנה מנה - את היחסים, הפונקציות וכו' מפעילים על מחלקת השקילות של כל איבר (נראה לי)
  - משפט האיזומורפיזם הראשון - אם H אפימורפיזם אז היחס E המקיים $(a, b) \in E \Leftrightarrow H(a) = H(b)$ הוא יחס קונגרואנציה ומבנה המנה איזומורפי למבנה M'.
  - הומומורפיזם מכבד נוסחאות חיוביות (שאין בהן שלילה וחץ).

גדירות

(הנושא לא בספר בצורה רשמית, כן בחומר)

- אובייקט/קבוצה הם גדירים אם ניתן להצביע עליהם באמצעות נוסחה בשפה שמתארת אותם ורק אותם.
- גדירות של קבועים במבנה - קבוע c הוא גדיר אם ורק אם יש נוסחה במשתנה חופשי יחיד x כך שהנוסחה אמיתית במודל רק בהשמה $s(x) = c$
  - דוגמת שימוש: האם מספר הוא 3 - $P_3(x) = \exists y\,(P_2(y) \wedge (y+1=x))$
- גדירות של יחסים n-מקומיים - אם יש נוסחה בעלת n משתנים כך שהנוסחה אמיתית עבור קבוצת קבועים אם ורק אם קבוצת הקבועים שייכים ליחס
  - לדוגמה בתחום השלמים מספר הוא טבעי - $N(x) = (x > 0)$
- גדירות של פונקציות במבנה - פונקציה $f(x_1...x_n)$ גדירה אם קיימת נוסחה $P(y, x_1...x_n)$ בה y משתנה לא חופשי והיא אמיתית עבור $P(y, c_1...c_n)$ אמ"מ $f(c_1...c_n) = y$.
  - לדוגמה $f_{x^3}(y, x) = y = (x \cdot x) \cdot x$
- כדי להשתמש בגדירות שכבר עשינו - להוסיף כמת "קיים" ולהשתמש בנוסחה רק איתו - כמו בדוגמה של גדירות קבועים.
- דוגמאות נוספות
  - מספר ממשי חיובי - רק לו יש שורש ממשי $\exists y\,(y \cdot y = x)$
  - אפס -
    - ניטרלי לחיבור - $x + x = x$, אפשר גם $\forall y\,(x + y = y)$
    - מאפס בכפל - $\forall y\,(x \cdot y = x)$, אם שוללים את אחד אפשר לומר $x \cdot x = x$
    - אם אחד כבר מוגדר - המספר היחיד שעבורו $x + y = x$ כאשר $x = 1$ או $y = 1$
  - אחד -
    - ניטרלי לכפל - $\forall y\,(x \cdot y = y)$, אם שוללים את אפס אפשר לומר $x \cdot x = x$
  - מספרים שליליים טבעיים - לכל שלילי קיים מספר טבעי כך שהסכום שלהם הוא 0.
  - החלק השלם $z = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ הוא: $R(x, y, z) = ((y \cdot z \leq x) \wedge ((y \cdot (z+1) > x)))$
  - השארית - $z = rm(x, y)$ הוא: $R(x, y, z) = ((z < y) \wedge \exists t\,(y \cdot t + z = x))$

פרק 7 - המספרים הטבעיים ולוגיקת היחסים

- מתעניינים בקבוצת המספרים הטבעיים (מאוד מרכזית במתמטיקה), מגדירים קבוצת אקסיומות P - האקסיומות של פאנו.
  - שאלה ראשונה – האם התורה מוכיחה או מזימה (מפריכה) כל פסוק?
  - שאלה שניה - האם יש אלגוריתם שיכול לדעת האם יש לפסוק סדרת הוכחה (מבין האינסוף שיש)? (תת שאלה - איך נוכל לדעת תוך כמה זמן נקבל תשובה? מה אם זה יהיה עוד מיליארד שנה)?
  - שאלה שלישית - האם התורה עקבית?
    - התחשיב נאות ולכן אם יש ל-P מודל אז היא עקבית.
    - הערה: שימוש רק באמצעים סופיים.
- בשנת 1900 הילברט הציג אוסף בעיות חשובות למאה ה20 וזו הייתה הבעיה השניה. חשבו שהתשובה תהיה חיובית וב1931 גדל הוכיח שיש בעיה להגיע לתשובה.
- משפט אי השלמות של גדל
  - תורת פאנו אינה שלמה ואין דרך אלגוריתמית להשלימה.
  - לתורת פאנו ולאף קבוצה עקבית שמכילה אותה אין אלגוריתם לבדוק מה ניתן להוכחה ומה לא.
  - אין אפשרות להוכיח באמצעים סופיים שתורת פאנו עקבית.
- הערה: אין קשר בין המילה שלמות בהקשר גדל ובהקשר משפט השלמות.

פרק 8 - מבנים שתחומים שמות בשפה

- תת מודל / מודל חלקי - מודל שהתחום שלו הוא חלקי למודל הגדול, והפירוש של היחסים והפונקציות זהה (והתחום של תת המודל סגור תחת הפונקציות הללו).
  - צריך להכיל את כל הקבועים של המודל המקורי (נראה לי)
- משפט 8.1 - נוסחאות "קיים" נשמרות כלפי מעלה ונוסחאות "לכל" נשמרות כלפי מטה.
- קבוצת ה"סגור" ($sagor$) של קבוצה - הגדרה מקבילת ל"פרישה" של כל העצמים בקבוצה עם כל הפונקציות האפשריות בה. (סימון $\overline{B}$)
  - קבוצת הסגור סגורה תחת הפונקציות האפשריות
  - היא הקבוצת המינימלית המקיימת תכונה זו - כל תת קבוצה B_0 של קבוצה A שקיימת קבוצה $B_0 \subseteq C \subseteq A$ אז $\overline{B_0} \subseteq C$
- משפט 8.2 - נתון מודל M עם קבוצה A.
  - הגדרה של תת מודל מינימלי - אם ניקח קבוצה A_0 שהיא קבוצת העצמים חסרי המשתנים האפשריים ב-A אז A_0 היא התחום תת מודל M_0של M, והוא גם תת מודל של כל תת מודל אחר. M_0 נקרא תת מודל מינימלי.
- הגדרה – מודל נקרא מודל מינימלי אם אין לו תת מודל לא טריוואלי פרט לעצמו.
- לכן - מודל הוא מינימלי אם ורק אם כל עצם במודל מפרש שם עצם חסר משתנים.
  - בתת מודל מינימלי חייבים להיות הקבועים של השפה.
  - לא תמיד יש תת מודל מינימלי! - לדוגמה אם אין קבועים בשפה.
- שאלה 8.3 - האם כל תת מבנה של תורה הוא גם תורה?
  - יחס סדר חלקי/מלא - כל תת מבנה הוא גם תורה
  - יחס סדר חלקי/מלא וצפוף - המספרים הטבעיים הם תת מבנה אבל אינם צפופים.

8.2 משפט הרברנד

- אלגברה של הרברנד (לא בחומר).
  - אלגברה של הרברנד - פירוש קבועים בתור עצמם ופירוש פונקציות בתור כל האפשרויות להציב עצמים בתוך הפונקציה ("פרישה" של הפונקציה עם העצמים).
  - המודלים של הרברנד הם כל המודלים בשפה המתקבלים על ידי פירוש של יחסי השפה באלגברה של הרברנד
  - כל מודל הרברנד הוא מודל מינימלי בשפה (כל עצם במודל מפרש שם עצם קבוע) לכולם אותו תחום (קבוצת השמות הקבועים בשפה). הם שונים רק בסימני היחס.
    - משפט 8.4 -
      - לכל פסוק כולל שיש לו מודל, יש מודל הרברנד שבו הוא נכון.
      - אם פסוק הוא ישי והוא נכון בכל מודל הרברנד אז הוא אמיתי לוגי.
- משפט סקולם
  - תהליך שמחליף פסוק שרירותי בפסוק אחר שהוא פסוק כולל בשפה המעושרת, כך שאם לראשון יש מודל אז לשני יש.
  - המשפט:

* אם φ פסוק מהצורה $\exists x\varphi$ ו-c קבוע שאינו בשפה, אז כל מודל של $\varphi[c/x]$ הוא מודל של $\exists x\varphi$ וניתן להעשיר כל מודל של $\exists x\varphi$ כך שיהיה מודל של $\varphi[c/x]$.
* יהי ψ פסוק מהצורה $\forall x_1...\forall x_n\exists y\varphi$. כל מודל של $\forall x_1...\forall x_n\varphi[f(x_1...x_n)/y]$ בשפה המורחבת הוא מודל של הפסוק המקורי וכל מודל של הפסוק המקורי ניתן להעשרה למודל של הפסוק החדש.

– התהליך - הופכים את הפסוק לצורה פרנקסית נורמלית. אם הכמת הראשון הוא "קיים", מציבים במקומו קבוע c. אם k הכמתים הראשונים הם $\forall x_1...\forall x_k$ ואחראים $\exists y$, הופכים את y ל-$f(x_1...x_k)$ כאשר f הוא סימן פונקציה חדש.

– למה זה טוב? - מאותו רגע אפשר לצמצם את הדיון לתת מודלים שמכילים את הקבועים שמוזכרים בפסוק, ואז כיוון שהוא מכיל כמתי "לכל" אז הוא יהיה נכון בכל תת מודל.

• האלגוריתם של הרברנד (לא בחומר)

– הרברנד השתמש ברדוקציה של סקולם ויצר תהליך לבדיקה האם פסוק הוא בעל מודל או שהוא סתירה (לא נכון בכל מודל).

– התהליך הוא כריע למחצה - יגלה אם יש מודל אבל אף פעם לא יעצור אם אין מודל.

– בקצרה: אם יש לפסוק מודל אז יש לו מודל מינימלי שהוא איזומורפי למודל הרברנד, לכן די לבדוק האם יש לו מודל שתחומו הוא קבוצת שמות העצם חסרי המשתנים בשפה או קבוצת מנה של מודל כזה.

פרק 9 - לוגיקות אחרות

9.1 לוגיקה רב סוגית

- לוגיקה רב סוגית - אפשר ליצור לוגיקה שבה יש הרבה תחומים, ולהגדיר פונקציות ויחסים על כל תחום. זה במקום שכולם יהיו אותו תחום ונצטרך ליצור יחסים כמו $Book(x)$ ו-$Student(x)$ כדי לסווג עצמים.

9.2 לוגיקה מסדר שני

- לוגיקה מסדר שני - מסתכלים על מבנה ביחד עם כל הקבוצות החלקיות של המבנה.
  - מתקבלת על ידי הוספת שמות קבועים ומשתנים מסדר שני והוספת סימן השייכות $\in$ (יחס דו מקומי).
  - נוסחאות אטומיות - סדר ראשון + $s \in S$ + $T = S$
  - נוסחאות - נוסחאות אטומיות + קשרים
  - הערה: במבחנים ותרגולים ראיתי שאפשר גם לשים כמתים על פונקציות ויחסים - לדוגמה $\exists R(R(x,x))$.
- מודל, תורה - מקביל ללוגיקה מסדר ראשון
- דוגמה - תורת פאנו בתוספת אקסיומת האינדוקציה.
  - מה המודלים הדו סוגיים ומסדר שני?
    - המספרים הטבעיים הם היחידים מסדר שני
    - מודלים דו סוגיים יכולים להיות מגוונים - למשל קבוצת הרציונליים/ממשיים אי שליליים עם פעולת העוקב יחד עם הסוג שהוא כל הקבוצות החלקיות בלי 0.
- גדירות בלוגיקה מסדר שני - אפשר להביע יותר
  - הגדרת הטבעיים - מגדירים את הסגירות שלה $N(x) = \exists X\,(0 \in X \wedge \forall y\,(y \in X \to s(y) \in X) \to x \in X)$
  - קבוצת המספרים הזוגיים - $E(x) = \exists U\,(U(0) \wedge \forall x\,(U(x) \leftrightarrow \neg U(S(x))) \wedge U(x))$
- תמיד אחת מהטענות הבאות תיכשל בכל תחשיב מלוגיקה מסדר שני
  - תקפות - כל פסוק שניתן להוכחה אמיתי
  - שלמות - כל משפט אמיתי ניתן להוכחה
  - אין תורת הוכחה - אין אפשרות להכריע האם רצף פסוקים הוא הוכחה חוקית או לא
  - לכן עוסקים בעיקר בלוגיקה מסדר ראשון
- מבנה מסדר שני חלש -
  - הגדרה - קבוצה אחת היא תחום וקבוצה שניה היא אוסף של קבוצות חלקיות מהתחום (ולא כל הקבוצות החלקיות)
  - התחשיב שלם (לכל קבוצת פסוקים עקבית יש מודל) ומשפט הקומפקטיות נכון עבורו.
- גדירות
  - המודל הוא אינסופי - $\exists R\,(\forall x \forall y \forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) \wedge \forall x \neg R(x,x) \wedge \forall x \exists y R(x,y))$
    - למה זה נכון? - היחס הוא יחס סדר חלקי (טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי) ולכל איבר קיים איבר גדול ממנו - אז יש אינסוף איברים.
    - דרך אחרת - לא כל פונקציה חד חד ערכית מהתחום לעצמו היא גם "על" (ונראה לי שלא צריך להוכיח את נכונות המשפט)

- אקסיומת האינדוקציה
  * $\forall R\left(R\left(0\right)\wedge\forall y\left(R\left(y\right)\rightarrow R\left(S\left(y\right)\right)\right)\rightarrow\forall yR\left(y\right)\right)$
- "לכל קבוצה חסומה קיים חסם עליון קטן ביותר"

9.3 לוגיקה מודאלית (לא בחומר)

- מקרה מקביל (לא פרטי) של לוגיקת היחסים אבל קיים תרגום.
- הרעיון - יש עובדות שהן אמיתיות בעולמנו אבל לא בהכרח תמיד (לדוגמה אם החול היה סגול), יש עובדות שהן נכונות תמיד (כמו שטענה לא יכולה להיות אמיתית ושקרית בו זמנית).
- מאפשר לומר דברים כמו "כולם יודעים שפסוק נכון", "הפסוק יהיה נכון בעתיד", "הפסוק נכון ויש לו הוכחה" וכו'.

(שאר הפרק לא בחומר)

טעויות / מסקנות

- סיכום סימונים
  - $M \vdash \varphi$ או $\vdash \varphi$ - יש סדרת הוכחה מ-M או מאקסיומות התחשיב ל-φ
  - $M \vDash \varphi$ - M הוא מודל שבו φ נכון (הגדרה 3.1.1)
- קומפקטיות
  - אם לכל קבוצה חלקית סופית יש מודל אז יש מודל שבו כל פסוקי הקבוצה נכונים
  - אם קבוצה גוררת פסוק אז קיימת תת קבוצה סופית שגוררת אותו
  - דוגמאות
    * האם לכל קבוצת פסוקים קיימת קבוצת פסוקים חלקית ממש כך שמודל מסתפק באחת אם ורק אם הוא מסתפק בשניה? - לא, דוגמה נגדית היא הקבוצה הריקה שכל מודל מסתפק בה ואין לה קבוצה חלקית ממש.
    * האם לכל קבוצת פסוקים קיימת קבוצת פסוקים חלקית כך שאחת ספיקה אם ורק אם השנייה ספיקה? - כן - כיוון אחד טריוויאלי, אם קבוצת העל לא ספיקה אז היא מוכיחה פסוק ושלילתו. ממשפט הקומקפטיות נובע שלכל אחד קבוצה חלקית שממנה הוא נובע. איחוד הקבוצות מוכיח פסוק ושלילתו והוא לא ספיק.
    * הכיוון ההפוך לא נכון: ייתכן שיש פסוק שנובע מקבוצה סופית אבל יש קבוצה אינסופית שבה הוא לא מסתפק (כי היא מכילה יותר פסוקים).
- מה ההבדל בין שפה למודל? - שפה מגדירה מקלדת ותחביר, מודל מגדיר פירוש.
  - לדוגמה יכול להיות פסוק בשפת היחסים עם היחסים והקבועים $R(x_0, y_0) \vee T(v_1, v_2)$, אבל מודל אחד יהיה בתחום המספרים הממשיים והשני יהיה חברי הכנסת.
- כדי להוכיח עבור כל פסוק - אפשר הוכחה על פי מבנה
- הראו שאין פסוק שמתקבל מקבוצת פסוקים - מראים שהוא לא אקסיומה ולא יכול להתקבל מכלל ההיסק
- 2023 שאלה 5 - נתונה קבוצת מספרים טבעיים, אפשר ליצור יחסים שיגדירו מה זה 0,1
- ממן 11
  - שאלה 2 - φ פסוק, נוכיח ש-$\varphi \to \varphi$ היא מחרוזת שאינה פסוק - קוראים לפי משפט הקריאה היחידה, מניחים ש$\varphi = \neg...\neg\beta$ ולכן אפשר להוריד את סימני השלילה. אם β היא פסוק אלמנטרי אז המחרוזת אינה פסוק כי יש תת מחרוזת שלא טופלה. אם היא מהצורה $(\beta_1@\beta_2)$ אז יישאר פסוק מהצורה $(\beta_1@\beta_2) \to (\beta_1@\beta_2$ ואין במחרוזת הזו תו מאוזן סוגריים.
- תרגולים פרק 11
  - 1 - אפשר להשתמש במשפט הקריאה היחידה כדי להוכיח שמחרוזת היא פסוק / לא פסוק
  - 3 - סיפא ממש של פסוק יכולה להיות פסוק, רישא לא
  - 4 - לכל פסוק **יש** סדרת בניה שכל מחרוזותיה הן תת פסוקים אבל לא בהכרח - יש גם סדרות בניה שמכילות פסוקים שאינם תת פסוקים של הפסוק המקוריץ עם זאת, הפסוק האחרון הוא בהכרח הפסוק המקורי.
  - הוכחה לפי עץ מבנה: אפשר לעצור אם עלה הוא פסוק (גם אם לא אלמנטרי) או שאינו פסוק.
- ממן 12
  - 2 – משפט ההחלפה 2.6 ומשפט ההצבה מאפשרים לענות על שאלות שבהן מחליפים תת מחרוזות בפסוק

- ממן 13
  - 1 - מערכת הקשרים $F(),\rightarrow$ מלאה - כי $\alpha=\alpha\rightarrow F(\alpha)$
  - 2 -
    - אם מערכת היסק לא מכילה קשר מסוים בטאוטולוגיות שלה, אז אי אפשר להוכיח טאוטולוגיות עם אותם קשרים שלא נמצאים בה (לדוגמה אם בטאוטולוגיות יש רק $\leftarrow$ אז אי אפשר להסיק את $(P\vee\neg P)$.
    - כדי לבדוק אם טענה לא ניתנת להסקה - אולי היא לא טאוטולוגיה במערכת נאותה ואז אי אפשר להוכיח אותה.
- ממן 14
  - 1ד - אם $M\vDash\varphi$ אז לא בהכרח $M\vDash\neg\varphi$ – לדוגמה "$x<y$" לא נכון בכל השמה (5,3) וגם "$\neg(x<y)$" לא נכון בכל השמה (לדוגמה 3,5).
  - 2א - אפשר להשתמש בכלל ההכללה הישי באינדוקציה טבעית (לא התחשיב עם 3 אקסיומות בלבד)
  - 2ב - אינטואיציה - אם קיים x כך ש-$Q(x)$ אז קיים x כך ש-$P(x)\rightarrow Q(x)$, והוא כל אחד מהאיברים שמקיימים $Q(x)$ (וזה כי טענת הקצה נכונה). את הטענה אפשר לסכם כך: $(\exists xQ(x)\rightarrow\exists x(P(x)\rightarrow Q(x)))$.
  - $\forall y\exists xR(x,y)\rightarrow\exists x\forall yR(x,y)$ - לא נכון - בטבעיים לכל מספר קיים מספר גדול ממנו אבל אין מספר שגדול מכל מספר אחר.
- תרגול למטלה 14
  - שאלה 3 - אם $\varphi[x/y][y/x]=\varphi$ אם ורק אם ל-y אין מופעים חופשיים ב-φ.
    כיוון 1: ההחלפה מחליפה את x ב-y וy ב-x וכל המופעים החופשיים של x הם אותם מופעים שהיו מקודם
    כיוון 2: הוכחה בשלילה. נניח שיש, אז ההצבה השניה מחליפה את המופעים החופשיים של y ב-x, ולכן אין מופעים חופשיים של y במחרוזת אחת אבל בשניה יש.
  - סעיף ג' עמוד 231 - אם x לא מופיע חופשי ב-β אפשר לבצע $((\forall x\alpha)\vee\beta\rightarrow\forall x(\alpha\vee\beta))$
- מבחן לדוגמה 1
  - 2א - כל פסוק אלמנטרי הוא ספיק - כנראה שכן כי אפשר להציב בו T
  - 2ב - כדי להראות שפסוק לא ספיק - להראות שהוא סתירה
  - 3 - האיחוד של שתי תורות הוא לא בהכרח תורה (אולי באחת יש פסוק ובשני השלילה), החיתוך כן (בהכרח יש מודל)
  - 4א - "אדם אחד" - בדיוק אדם אחד, צריך לוודא שאין עוד אובייקטים
- מבחן לדוגמה 2
  - 2ב - כדי להוכיח שתורה אינה שלמה (לא כל פסוק שנובע לוגית / טאוטולוגיה הוא גם יכיח) - אם מצעד הגזירה יכול להתקבל רק קשר ראשי מסוים.
    - $\{(\neg\alpha\vee\beta),\alpha\}$ וצעד הגזירה הוא תמיד עם קשר השלילה - β אמיתי אבל לא יכיח
- מבחן לדוגמה 4
  - 3א - דוגמה של הצבה לא כשרה - הפסוק $\alpha(t)\rightarrow\exists x\alpha$ נכון כל עוד ההצבה כשרה. נניח $Q=\forall y(y=x)$ נוסחה ב-x ו-$t=y$ (הצבה לא כשרה). מתקבל פסוק אמת $Q=\forall y(y=y)$. אמנם, הפסוק $\exists x\forall y(y=x)$ לא נכון בכל קבוצה עם תחום של יותר מאיבר אחד.
  - 5ב - "לכל משולש יש שלוש צלעות" - T משולש, P נקודה, R צלע:

$$\forall x(T(x)\vee\exists y\exists z\exists t(P(y)\vee P(z)\vee P(t)\vee R(x,y)\vee R(x,z)\vee R(x,t)\vee(y\neq z)\vee(y\neq t)\vee(t\neq z)\vee\forall s(P(s)\rightarrow((s=y)\vee(s=z)\vee($$

- מבחן לדוגמה 5
  - 3 -
    - * א - אם מקבוצה של נוסחאות יוצרים קבוצה שבה לכל נוסחה מוצמד "לכל", כל משפט של המקורית הוא גם של החדשה. הוכחה באינדוקציה מבנית (כל פסוק בקבוצה המקורית מופיע בצורה עם ה-"לכל" בחדשה, ולפי ההנחה מופיעים גם $\forall x\alpha$, $\forall x(\alpha \to \beta) = \forall x\alpha \to \forall x\beta$ ולכן $\forall x\beta$
    - * ב - אותו דבר עם "קיים" - לא נכון כי לא בהכרח $\exists x(\alpha \to \beta) = \exists x\alpha \to \exists x\beta$ - לדוגמה אם בוחרים α תנאי שמתקיים רק לחלק (נגיד x הוא מספר זוגי) ו-β שלא מתקיים בכלל בתחום (נגיד x הוא מספר לא רציונלי) אז $\alpha, \alpha \to \beta$ נכונים (הגרירה נכונה כי β שקר) והמסקנה שלהם נכונה (x הוא מספר אי רציונלי) אבל אם מוסיפים לכל טענה "קיים x" אז הטענה $\exists x\beta$ שקרית כי לא קיים מספר אי רציונלי.
  - 4 - שפה רק עם שלמים,$N, +$:
    - * להגדיר את 0 ($x + x = x$),
    - * להגדיר את 1 ($O(z) = \forall x \forall y((N(z) \wedge (x + y = z)) \to (\varphi_0(x) \wedge \varphi_0(y) \wedge (x \neq y)))$) (אם הוא סכום של שני מספרים שונים אחד מהם בטוח 0)
  - 5 - "לא כל המורים הם לא מצליחים" (M מורה, L לא יוצלח) - הצרנה מפורשת היא $\neg\forall x(M(x) \to L(x))$, שקול ל-$\exists x(M(x) \wedge \neg L(x))$
- תרגילי הכנה למבחן
  - 2 - אם M מודל של $\sum$ ו-$\sum'$ נובע מהתורה, אז M גם מודל של התורה השנייה.
  - 3 - הוכח שכל קבוצת פסוקים בלי קשר שלילה היא עקבית - מועתק מ2023 והתשובה למטה.
  - 5 - כדי להוכיח שלמות במערכת נאותה, צריך להוכיח שכל טאוטולוגיה ניתנת להוכחה
  - 6 - להוכיח ש-$A[c/x][d/y] = A[d/y][c/x]$ - צריך לפצל ל4 מקרים לפי אפשרויות מופעים חופשיים של כל משתנה.
- אין תת מודל מינימלי אם אין קבועים
- כדי להוכיח שדרגה של פסוק עם קשר מרכזי דו מקומי היא המקסימלי פלוס אחד (נראה לי) - אם הם שווים אז בהכרח זה העומק הקשרי פלוס אחד, אם יש מקסימלי אבל לוקחים את המינימלי אז נובע מכך שהפסוק המינימלי נמצא בקבוצה E_n שהיא קטנה יותר ממקודם וזה לא אפשרי.
- להראות שמערכת קשרים לא שלמה - אם מראים שלכל פסוק במערכת הקשרים יש מספר שורות זוגי של T ומוצאים פסוק שרוצים להביע אותו עם מספר אי זוגי של שורות T.
- אם פסוק נובע לוגית מתורה אז הפסוק ניתן להוכחה מהקבוצה - מפרק 4
- אם שואלים האם תחשיב הוא שלם - אפשר להוכיח שהוא שקול לתחשיב הילברט (שלם) או שיש קשר שלא ניתן להביע (לא שלם) או שניתן להביע כל טענה (שלם)
- 2022א 84ו 3 - האם קיימת תת קבוצה סופית מוכלת ממש בתוך קבוצת פסוקים כך שאם טענה מסתפקת בקבוצה אז היא מסתפקת בתת קבוצה? - לא כי הקבוצה הריקה מספקת כל טענה ואין לה קבוצה חלקית ממש.
- 2022א 84ו 3 - האם אפשר למצוא קבוצה אינסופית כך שאין לה תת קבוצה סופית שקולה? - אם הקבוצה האינסופית מכילה כל פסוק אלמנטרי (יש אינסוף) אז הקבוצה הסופית בהכרח לא שקולה כי יש פסוקים שאפשר לשחק איתם שמסתפקים רק בקבוצה האינסופית.
- 2021ב 96
  - 2 - אם שואלים האם קבוצה גוררת פסוק, הטענה יכולה להתקיים גם באופן ריק אם קבוצת הפסוקים לא עקבית ולכן היא לא תורה.
  - 5 - להראות שמספר הוא חיובי - להראות שיש לו שורש (קיים מספר אחר שהוא כפול עצמו שווה הנתון)

- 2023ב

  - 1 - קבוצת פסוקים שקשר השלילה לא מופיע בהם היא עקבית - במודל שבו כל הפסוקים האלמנטריים אמיתיים אז כל פסוק מורכב הוא אמיתי, ומערכת ההוכחה נאותה אז גם כל פסוק אחר יהיה אמיתי (ולכן אי אפשר להוכיח פסוק ושלילתו). לכן לקבוצה הזו יש מודל.

    * דוגמה ממבחן אחר - כדי להוכיח שמערכת קשרים שלא מכילה את קשר השלילה היא לא שלמה, אפשר להשתמש בפסוק $\neg(p_1 \vee p_2)$ - בפסוק זה הפסוקים האלמנטריים הם כולם T והתוצאה היא F, אבל בפסוקים שמכילים כל אחד משאר הקשרים אם כל הפסוקים האלמנטריים הם T אז בהכרח גם הפסוק הכולל הוא T (הוכחה באינדוקציה מבנית).

  - 2ג - נתונה מערכת שיכולה להוכיח רק סתירות. הוכחנו שהיא יכולה להוכיח כל סתירה. אז היא לא שלמה כי כל סתירה נובעת מהמערכת אבל כפי שהוכחנו אי אפשר להוכיח כל סתירה.

- מתי כותבים "וגם" ומתי "חץ" בגדירות - אם טענה בהכרח נובעת, מתקיימת (כמו "לכל שבת יש מוצאי שבת") אז חץ, אם שני דברים בלתי קשורים אז "וגם".

- להוכיח שקבוצה עקבית - יש לה מודל! - לדוגמה שאלת ה"האם קבוצה בלי שלילה היא עקבית"