Mathematik 1
Computational and Data Science BSc

HS 2023

21. 09. 2023

Prof. Dr. rer. nat. Meike Stöhr
Büro: A1.20
Email: meike.stoehr@fhgr.ch

Information

Vorlesung: Donnerstag, 8:15 – 9:50 in B1.03
Freitag, 13:15 – 16:50 in B1.03

Übungsblätter: jede Woche jeweils ein Übungsblatt in Analysis, Linearer Algebra und Stochastik

Prüfung: - ein schriftlicher Leistungsnachweis während der Vorlesungszeit (30%) mit Dauer von 1 h und in den Prüfungswochen (70%) mit Dauer von jeweils 1h in Analysis, Linearer Algebra und Stochastik
- Hilfsmittel: eigene Formelsammlung (7 Blätter = 14 Seiten), Taschenrechner (nicht programmierbar)

Literatur:

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1/2	L. Papula, Springer Vieweg https://doi.org/10.1007/978-3-658-05620-9, https://doi.org/10.1007/978-3-658-07790-7
Mathematik verstehen und anwenden	S. Goebbels/S. Ritter, Springer https://doi.org/10.1007/978-3-662-57394-5
Mathematik zum Studienbeginn	A. Kemnitz, Springer Spektrum https://doi.org/10.1007/978-3-658-26604-2

KW	Datum	Zeit	Wochen-tag	Thema	Inhalt
38	21.09.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Mengen	Grundlagen, Zahlenmengen
38	22.09.2023	13:15-14:50	Fr	LA: Vorbereitungen	Python Einführung; Wiederholung mathematisches Vorwissen
38	22.09.2023	15:15-16:50	Fr	Mathematisches Vorwissen	Wiederholung, Aufgaben
39	28.09.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Funktionen	Einführung
39	29.09.2023	13:15-14:50	Fr	LA: Vorbereitungen	Bogen- und Winkelmass, Anwendungen
39	29.09.2023	15:15-16:50	Fr	Stochastik: Wahrscheinlichkeit	Urnenmodell, Auswahlprobleme
40	05.10.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Folgen, Reihen	Grundlagen, Analyse
40	06.10.2023	13:15-14:50	Fr	LA: Lineare Gleichungssysteme	Grundlagen, eindeutig lösbare Systeme
40	06.10.2023	15:15-16:50	Fr	Stochastik: Wahrscheinlichkeit	Auswahlprobleme
41	12.10.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Folgen, Reihen	Summen, geometrische Reihen
41	13.10.2023	13:15-14:50	Fr	LA: Lineare Gleichungssysteme	Rang, Defekt
41	13.10.2023	15:15-16:50	Fr	Stochastik	Ereignisse, Laplace Experiment
43	26.10.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Elementarfunktionen	Exponentialfunktion, hyperbolische Funktion
43	27.10.2023	13:15-14:50	Fr	LA: trigonometrische Funktionen	Grundlagen, Graphen
43	27.10.2023	15:15-16:50	Fr	Stochastik	Wahrscheinlichkeitsaxiome
44	02.11.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Elementarfunktionen	verallgemeinerte Exponentialfunktion, Modifikationen
44	03.11.2023	13:15-14:50	Fr	LA: trigonometrische Funktionen	Additionstheoreme, Modifikationen
44	03.11.2023	15:15-16:50	Fr	Stochastik	Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung
45	09.11.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Differentialrechnung	Grundlagen, Ableitungen
45	10.11.2023	13:15-14:50	Fr	Schriftlicher Test	
45	10.11.2023	15:15-16:50	Fr	LA: Vektorgeometrie	Grundlagen, lineare Abhängigkeit
46	16.11.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Differentialrechnung	Produktregel, Quotientenregel
46	17.11.2023	13:15-14:50	Fr	LA: Vektorgeometrie	Skalarprodukt
46	17.11.2023	15:15-16:50	Fr	Stochastik	Ereignisbaum, Wahrscheinlichkeitsverteilung

KW	Datum	Zeit	Wochen-tag	Thema	Inhalt
47	23.11.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Differentialrechnung	Kettenregel, Exponential-Ableitung
47	24.11.2023	13:15-14:50	Fr	LA: Vektorgeometrie	Orthogonalprojektion
47	24.11.2023	15:15-16:50	Fr	Stochastik	Zufallsvariablen: Kennwerte
48	30.11.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Differentialrechnung	trigonometrische Ableitungen
48	01.12.2023	13:15-14:50	Fr	LA: Vektorgeometrie	Vektorprodukt
48	01.12.2023	15:15-16:50	Fr	Stochastik	Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Kennwerte
49	07.12.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Integralrechnung	Grundlagen
49	08.12.2023	13:15-14:50	Fr	LA: Vektorgeometrie	Fläche, Volumen, Masse
49	08.12.2023	15:15-16:50	Fr	Stochastik	diskrete Wahscheinlichkeitsverteilungen
50	14.12.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Kurvendiskussion	lokale und globale Minima
50	15.12.2023	13:15-14:50	Fr	LA: Vektorgeometrie	Geraden
50	15.12.2023	15:15-16:50	Fr	Stochastik	stetige Wahscheinlichkeitsverteilungen
51	21.12.2023	8:15-9:50	Do	Analysis: Kurvendiskussion	Krümmungen, Wendepunkte
51	22.12.2023	13:15-14:50	Fr	LA: Vektorgeometrie	Ebenen
51	22.12.2023	13:15-16:50	Fr	Stochastik	Gausssche Normalverteilung
2	11.01.2023	8:15-9:50	Do	alle Themen	Übungsaufgaben zu Themen der vorigen Wochen/Wiederholung
2	12.01.2023	15:15-16:50	Fr	alle Themen	Prüfungsvorbereitung

Aussagenlogik

- Lehre vom folgerichtigen Denken
- Befasst sich mit Aussagen: es wird überprüft, ob eine Aussage wahr oder falsch ist (es gibt keine weiteren Möglichkeiten)
- Die Aussagen werden typischerweise mit Buchstaben abgekürzt

Beispiel:
Wenn die Sonne scheint und er keinen Besuch bekommt, dann geht Peter am Sonntag Pilze sammeln.

Wenn die Sonne scheint und er keinen Besuch bekommt, dann geht Peter am Sonntag Pilze sammeln.

→ 3 Aussagen, die miteinander verknüpft sind: A, B, C

A: w

B: w

dann C: w

Aussagenlogik

Verbindungen von Aussagen

- Negation: „nicht“, $\neg$

A	$\neg$A
w	f
f	w

- Konjunktion: „und“, $\wedge$

A	B	A $\wedge$ B
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Aussagenlogik

Verbindungen von Aussagen

- Implikation: „wenn A dann B“, „A ist hinreichend für B“, „B ist notwendig für A“, $A \Rightarrow B$

Beispiel:
Fussballstar Huber wird vom Schiedsrichter ermahnt: wenn sie den Ball nochmals absichtlich mit der Hand spielen, erhalten sie die rote Karte.

A: Ball absichtlich mit der Hand spielen
B: rote Karte erhalten

$A \Rightarrow B$

1. Fall: Huber spielt Ball mit der Hand bevor das Spiel zu Ende ist
   A: w $\Rightarrow$ B: w

2. Fall: Huber spielt den Ball nicht mit der Hand bis Ende des Spiels
   A: f $\Rightarrow$ B: w, d. h. er erhält die rote Karte z. B. wegen einem Foul
   $\Rightarrow$ B: f, d. h. er erhält keine rote Karte, begeht also kein Foul, spielt den Ball nicht mit der Hand

→ Es können also die Fälle B: w und B: f eintreten, wenn A: f vorausgeht

Aussagenlogik

Disjunktion: „oder“, $\vee$
ergibt eine wahre Aussage, wenn eine der beiden Aussagen wahr ist

Äquivalenz: „A genau dann, wenn B“, „A ist notwendig und hinreichend für B“, $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w			
w	f			
f	w			
f	f			

Quantoren

Häufig verwendete Abkürzungen = Quantoren:

$\exists$: es existiert, es gibt

$\nexists$: es existiert kein

$\exists_1$ oder $\exists\,!$: es existiert genau ein

$\forall$: für alle

Grundlagen Logik

Satz 1.1 *Seien A, B und C Aussagen. Dann gelten die*

1. *Assoziativgesetze:*

$$(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)\,,$$
$$(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)\,.$$

2. *Distributivgesetze:*

$$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))\,,$$
$$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))\,.$$

3. *Kommutativgesetze:*

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)\,,$$
$$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)\,.$$

4. De Morgan*schen Regeln:*

$$(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))\,,$$
$$(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))\,.$$

Beweis. Stellvertretend überprüfen wir die Regeln von De Morgan[1].

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
W	W	F	F	W
W	F	W	W	W
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

qed

Mengenlehre

Begründer der naiven Mengenlehre: Georg Cantor (1845 – 1918), dt. Mathematiker

Definition:
Eine Menge ist eine wohldefinierte Zusammenfassung bestimmter unterscheidbarer Objekte zu einer Gesamtheit. Die (realen oder abstrakten) Objekte nennen wir Elemente.

→ Es muss eindeutig sein, ob ein Objekt Element einer Menge ist oder nicht.

Grundlegende Aussage:
- $x \in M$ oder $M \ni x$, d. h. Element x ist in Menge M enthalten
- $x \notin M$ oder $\mathrm{M} \not\ni x$, d. h. x ist nicht Element der Menge M

Generell:
- Für Elemente werden Kleinbuchstaben verwendet
- Für Mengen werden Grossbuchstaben verwendet

Schreibweisen:
- Aufzählende Form: A = {1, 2, 3, 4, 5}
- Beschreibende Form: A = $\{x \in \mathbb{N} | \underbrace{1 \leq x \leq 10}_{\text{Bedingung}}\}$

Grundmenge

Mengenlehre

Bemerkung:
- Mengen müssen nicht Zahlen als Elemente haben.
- Angabe der Grundmenge nicht zwingend.

Bemerkung:
Eine Menge A kann Element einer Menge B sein. Dann sind jedoch die Elemente von A keine Elemente von B.

Beispiel:
- $1 \in \{1, 2, 3\}$
- $\{1\} \notin \{1, 2, 3\}$

Leere Menge: $\emptyset = \{\}$, enthält keine Elemente

Mengenlehre

Mengenrelationen

$A = B$: A und B besitzen dieselben Elemente

$A \subseteq B$: A ist Teilmenge von B, d. h. jedes Element von A ist auch Element von B; $A = B$ ist möglich

$A \subset B$: A ist <u>echte</u> Teilmenge von B, d. h. B besitzt mehr Elemente als A; $\{A \subseteq B \wedge A \neq B\}$

$A \not\subset B$: A ist keine Teilmenge von B

$A \subseteq B \Leftrightarrow B \supseteq A$
$A \subset B \Leftrightarrow B \supset A$

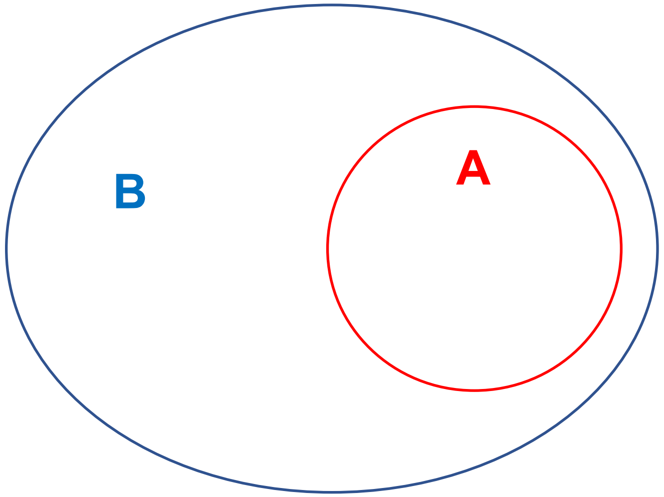
Beispiele:

- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$
- $\{1, 2\} \not\subset \{1, 2\}$
- $\emptyset \subseteq A$
- $\emptyset \subset A$

Mengenlehre

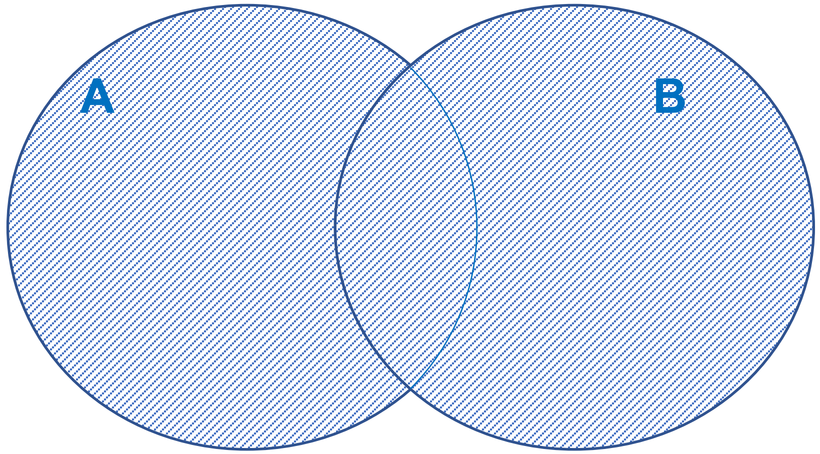
Darstellung mittels Venn-Diagrammen

$A \subseteq B$



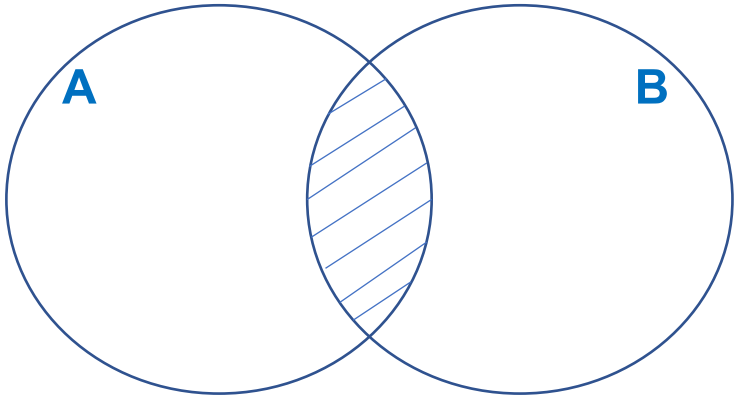
Mengenlehre
Mengenoperationen

Vereinigung: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$



Beispiel:
- $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} =$
- $\{1, 2\} \cup \{5, 8\} =$

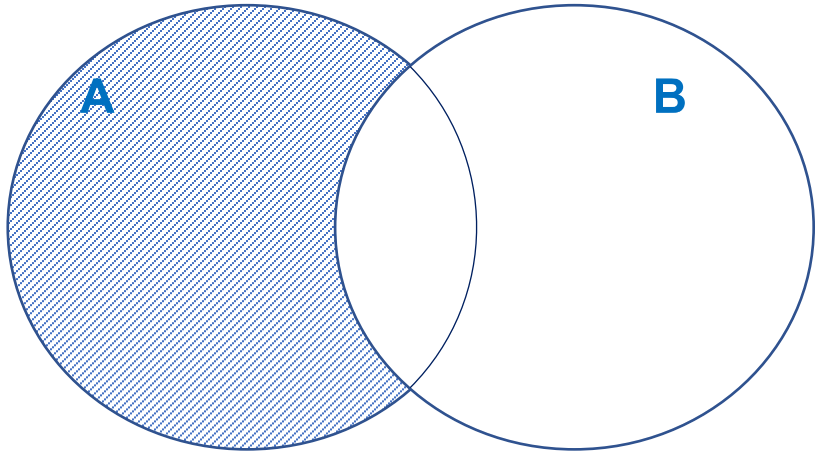
Schnittmenge: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$



Beispiel:
- $\{1, 2\} \cap \{2, 4\} =$
- $\{1, 4\} \cap \{3, 5, 7\} =$
- $\{2, 3\} \cap \varnothing =$

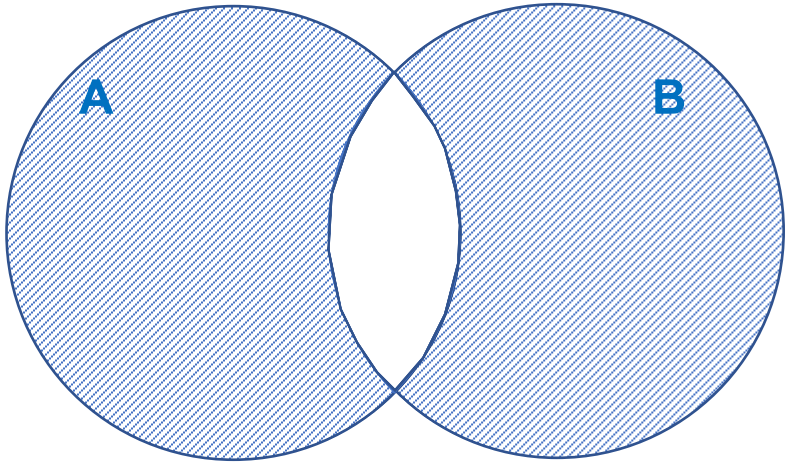
Mengenlehre
Mengenoperationen

Mengendifferenz: $A \backslash B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$



Beispiel:
- {1, 2} \ {2, 3} =
- {1, 2} \ {1, 2} =

Symmetrische Differenz: $A \Delta B = (\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \cup (B \backslash \mathrm{A}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$



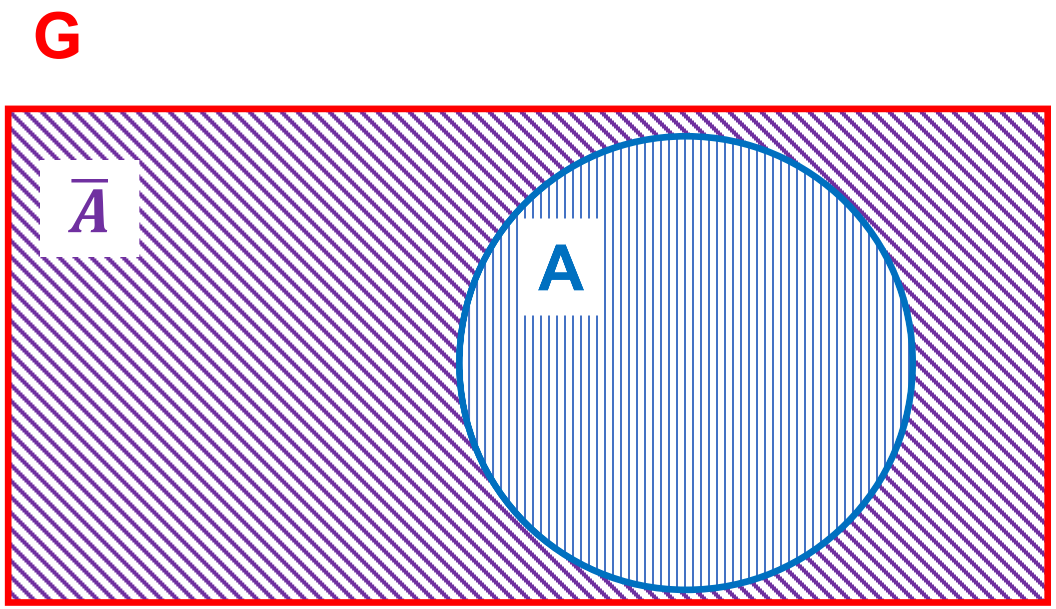
Beispiel:
- {1, 2} Δ {2, 3} =
- {1, 2} Δ {1, 2} =
- {1, 2} Δ {3, 4} =

Mengenlehre

Mengenoperationen

G = Grundmenge, A $\subseteq$ G

Komplementärmenge: $\bar{A} = G \setminus \mathrm{A} = \{x \in G \mid x \notin A\}$



Mengenlehre

Satz 1.9 *Seien A, B und C Mengen. Dann gelten die*

1. *Assoziativgesetze:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

2. *Distributivgesetze:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

3. *Kommutativgesetze:*

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cup B = B \cup A.$$

4. *Transitivität:*

$$A \subset B \text{ und } B \subset C \Longrightarrow A \subset C.$$

5. *Falls $B, C \subset A$, dann gelten die* DE MORGAN*schen Regeln:*

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$: natürliche Zahlen {1, 2, 3, 4 …}
$\mathbb{N}_0$: natürliche Zahlen mit 0

$\mathbb{Z}$: ganze Zahlen {… -2, -1, 0, 1, 2 …}

$\mathbb{Q}$: rationale Zahlen $\{\frac{m}{n}|m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, \mathrm{n} \neq 0\}$

$\mathbb{R}$: reelle Zahlen = rationale + irrationale Zahlen

Irrationale Zahlen = $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$:
Nachkommastellen laufen unendlich weiter ohne periodisch zu werden

Bemerkung: $\infty \notin \mathbb{R}, -\infty \notin \mathbb{R}$

$\boxed{\rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$

Zahlenmengen

Intervalle

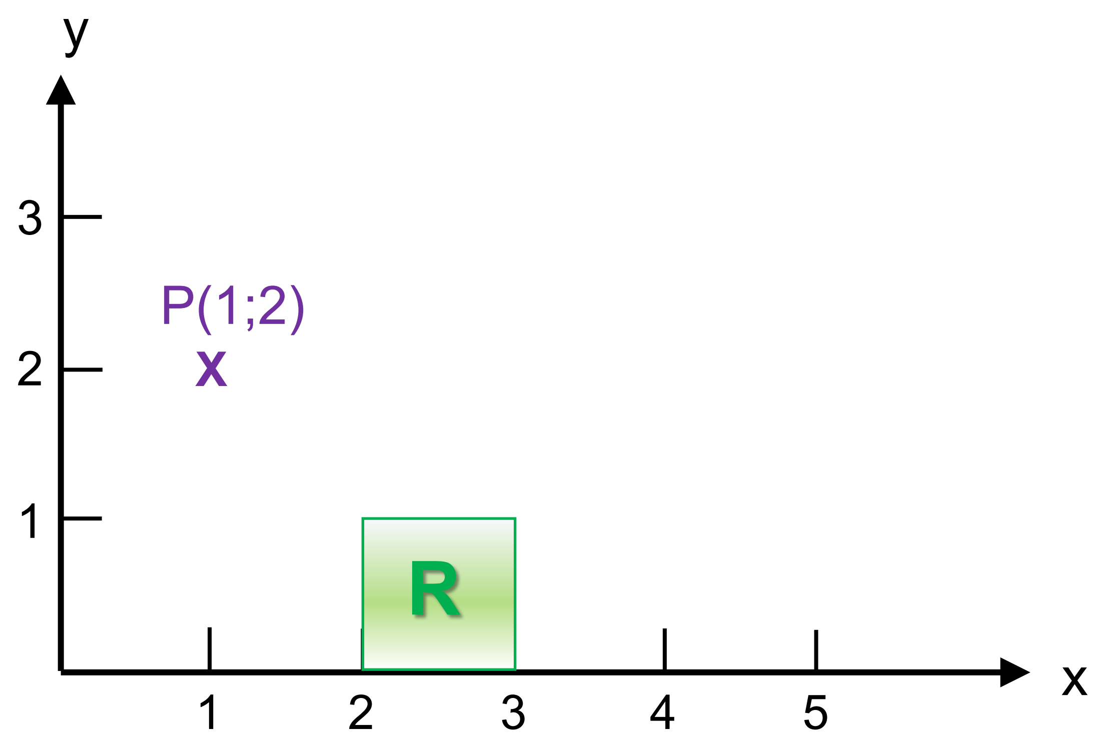
- Geschlossen: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offen: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Halboffen: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
  $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

Beispiele:
- $\mathbb{R}_0^+$ =
- $\mathbb{R}^+$ =
- $\mathbb{R}^-$ =

Beispiele:
- 1
- 3,2
- -8
- $\sqrt{10}$
- $\frac{1}{7}$
- 0

Kartesisches Produkt

xy-Diagramm wird zur Darstellung genutzt, z. B. für Funktionen oder in der Geometrie.
Ein Punkt P wird durch ein Zahlenpaar (ein Tupel) beschrieben.



Beschreibung von Punkten innerhalb des Rechtecks R sehr aufwändig (es wären sehr viele Tupel nötig)

Definition:
Kartesisches Produkt von 2 Mengen A und B:

$$AxB = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

Geordnetes Paar,
Tupel

Kartesisches Produkt

Beispiel: $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$

- $A \times B = \{(1;3), (1;4), (2;3), (2;4)\}$
- $B \times A =$

$\rightarrow A \times B \neq B \times A$

Bemerkung:
Falls $A \neq B$, dann $A \times B \neq B \times A$

Rechteck R durch kartesisches Produkt beschreiben:
$R =$