# ЛЕКЦИЯ 10. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.

**ЛИТЕРАТУРА. Учебник [1] §11.1, §11.13**

## § 10.1 ОБСУЖДЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ПРИБЛИЖЕНИЮ ФУНКЦИЙ .

В практической деятельности чаще всего приходится сталкиваться с задачами обработки данных, когда известны значения некоторой функции $f(x)$ только на множестве дискретных точек $x_0$, $x_1$, … $x_n$, но само аналитическое выражение для функции неизвестно. Общий подход к решению задачи восстановления аналитического выражения функции состоит в замене функции $f(x)$ некоторой известной и достаточно легко вычисляемой функцией $\Phi(x)$ такой, что $\Phi(x) \approx f(x)$. Подобный процесс замены неизвестной функции некоторой близкой функцией называется ***аппроксимацией***, а функция $\Phi(x)$ называется ***аппроксимирующей функцией.***

Для аппроксимации функций широко используются классы функций вида:

$$\Phi_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_m\varphi_m(x),$$

являющиеся линейными комбинациями фиксированного набора базисных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots \varphi_m(x)$. Функцию $\Phi_m(x)$ называют обобщенным многочленом по системе функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots \varphi_m(x)$, а число $m$ - называют степенью многочлена. Если в качестве базисных функций берутся степенные функции $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = \cos(2\pi x)$, $\varphi_2(x) = \sin(2\pi x)$, …. то возникает задача приближения функции тригонометрическими многочленами:

$$T_m(x) = \alpha_0 + \sum_{1 \le k \le m/2} \alpha_k \cos(2\pi kx) + \beta_k \sin(2\pi kx)$$

Выбор класса аппроксимирующих функций осуществляется с учетом того, насколько хорошо может быть приближена функция $f(x)$ функциями из этого класса.

Существуют два основных подхода в аппроксимации функций:

1. Пусть точки $f(x_i)$, $i = 0,1,...n$ получены в результате достаточно точных измерений или вычислений, т.е. есть основания считать их лишенными ошибок. Тогда следует выбирать аппроксимирующую функцию $\Phi(x)$ такой, чтобы она совпадала со значениями исходной функции в заданных точках. Геометрически это означает, что кривая $\Phi(x)$ проходит через точки $(x_i, f(x_i))$ плоскости. Такой метод приближения называется ***интерполяцией.***

2. Если точки $f(x_i)$, $i = 0,1,...n$ содержат ошибки (данные экспериментов, статистические данные и т.п.), то функция $\Phi(x)$ выбирается из условия минимума некоторого функционала, обеспечивающего сглаживание ошибок. Такой прием называется аппроксимацией функции « в среднем». Мы будем рассматривать

аппроксимацию функции по методу наименьших квадратов. Геометрически это будет означать, что кривая $\Phi(x)$ будет занимать некоторое «среднее» положение, не обязательно совпадая с исходными точками $(x_i, f(x_i))$ плоскости.

## §10.2 АЛГОРИТМ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.

**Постановка задачи.** Пусть даны точки $x_0,\ x_1, \dots x_n$, и известны значения исходной функции в этих точках $f_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\dots n$. Требуется найти такую аппроксимирующую функцию $\Phi_m(x)$, чтобы величина среднеквадратичного отклонения

$$\sigma(\Phi_m, f) = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(\Phi_m(x_i) - f_i\right)^2} \qquad (10.1)$$

была минимальной. Обычно используют аббревиатуру СКО.

Это означает, что корень квадратный из среднего арифметического квадратов разности между приближающей функцией и исходной был минимальным.

Предположим, что в качестве аппроксимирующей функции берется многочлен

$$\Phi_m(x) = P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$$

Тогда конкретизируем задачу.

**Постановка задачи приближения таблично заданной функции многочленом по методу НК**. Требуется найти многочлен $P_m$ заданной степени $m$ $(m = n)$ такой, чтобы величина среднеквадратичного отклонения (СКО)

$$\sigma(P_m, f) = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(P_m(x_i) - f_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - f_i\right)^2}$$

была минимальной.

Заметим, что при фиксированной степени $m$ среднеквадратичное отклонение $\sigma(P_m, f)$ является функцией $m+1$ коэффициента многочлена $a_0, a_1, \dots, a_m$. Минимум среднеквадратичного отклонения достигается при тех же значениях $a_0, a_1, \dots, a_m$, что и минимум функции:

$$\rho(a_0, a_1, \dots a_m, f) = \sum_{i=0}^{n}\left(P_m(x_i) - f_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - f_i\right)^2$$

**Алгоритм метода.** Существуют различные подходы к решению задачи. Простейший метод состоит в том, чтобы использовать необходимое условие экстремума функции нескольких переменных:

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_k} = 0\,, \quad k=0,1,\ldots m$$

**ПРИМЕР 10.1**. Пусть исходная таблично заданная функция

$$x_0,\ x_1,\ldots\ x_n$$
$$f_0,\ f_1,\ldots\ f_n$$

Приближается многочленом нулевой степени. Тогда $P_0 = a_0$

$$\rho(a_0, f) = \sum_{i=0}^{n}\left(P_0(x_i) - f_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(a_0 - f_i\right)^2 =$$

$$= \left(a_0 - f_0\right)^2 + \left(a_0 - f_1\right)^2 + \left(a_0 - f_2\right)^2 + \ldots + \left(a_0 - f_n\right)^2$$

Найдем производную функции $\rho(a_0, f)$ по $a_0$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_0} = 2\cdot(a_0 - f_0) + 2\cdot(a_0 - f_1) + \ldots + 2\cdot(a_0 - f_n) = 0$$

Собирая коэффициенты, получим: $(n+1)a_0 = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$

Тогда $a_0$ равно среднему арифметическому : $a_0 = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} f_i}{n+1}$

Решим задачу в общем случае многочлена степени m.

$$\rho(a_0, a_1, \ldots a_m, f) = \sum_{i=0}^{n}\left(P_m(x_i) - f_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - f_i\right)^2$$

Вычислим и приравняем к нулю частную производную по переменной $a_k$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_k} = 2\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - f_i\right)x_i^k = 0 \qquad k=0,1,\ldots m.$$

Сократим на 2, поменяем порядок суммирования и запишем систему чуть иначе:

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^k \qquad k=0,1,\ldots m \qquad (10.2)$$

Полученная система называется ***нормальной системой метода наименьших квадратов***.

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^k, \qquad k=0,1,\ldots m$$

Распишем систему более подробно:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^0\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^m\right) a_m = \sum_{i=0}^{n} f_i \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\right) a_m = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^m\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2}\right) a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m}\right) a_m = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^m \end{cases} \qquad (10.2)$$

Очевидно, что система является симметричной. Для практического использования запишем систему в виде:

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots + s_m a_m = b_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 + \ldots + s_{m+1} a_m = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_m a_0 + s_{m+1} a_1 + s_{m+2} a_2 + \ldots + s_{2m} a_m = b_m \end{cases}$$

где $s_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k$, $b_k = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^k$.

**Пример 10.2.** Приблизить функцию заданную таблично многочленами нулевой, первой второй степеней. Сравнить величины среднеквадратичного уклонения.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y_i$ | -2 | 0 | -1 | 1 | 0 |

1. $P_0(x) = a_0$, $a_0 = \dfrac{-2+0-1+1+0}{5} = -0.4$

2.Приблизим функцию многочленом 1-ой степени. $P_1(x) = a_0 + a_1 x$, $m = 1$ .

Нормальная система наименьших квадратов при этом примет вид:

$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 = b_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 = b_1 \end{cases}$ Вычислим коэффициенты системы: $s_0 = \sum_{i=0}^{n} x_i^0 = \sum_{i=0}^{4} 1 = 5$,

$s_1 = \sum_{i=0}^{n} x_i^1 = 0$, $s_2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 10$, $b_0 = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot x_i^0 = -2$

$b_1 = \sum_{i=0}^{4} y_i \cdot x_i^1 = 5$

Таким образом, система имеет вид:

$$\begin{cases} 5a_0 + 0a_1 = -2 \\ 0a_0 + 10a_1 = 5 \end{cases}, \quad a_0 = -0.4, \; a_1 = 0.5$$

$$P_1(x) = -0.4 + 0.5x$$

Для нахождения среднеквадратичного отклонения вычислим значения многочлена в узлах таблицы:

$P_1(-2) = -1.4$, $P_1(-1) = -0.9$, $P_1(0) = -0.4$, $P_1(1) = 0.1$, $P_1(2) = 0.6$.

Тогда

$$\sigma(P_1, f) = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{4}\left(P(x_i) - f_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5}\left[(-1.4+2)^2 + 0.9^2 + (-0.4+1)^2 + (0.1-1)^2 + 0.6^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5}(3\cdot 0.6^2 + 2\cdot 0.9^2)} = \sqrt{\frac{1}{5}2.7} = \sqrt{0.54} = 0.73$$

2.Приблизим функцию многочленом 2-ой степени. $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $m = 2$ .

Нормальная система наименьших квадратов при этом примет вид:

$$\begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 + s_2a_2 = b_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 + s_3a_2 = b_1 \\ s_2a_0 + s_3a_1 + s_4a_2 = b_2 \end{cases}$$

Вычислим недостающие коэффициенты системы: $s_3 = \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = 0$

$$s_4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = 34, \qquad b_2 = \sum_{i=0}^{4} y_i \cdot x_i^2 = -7$$

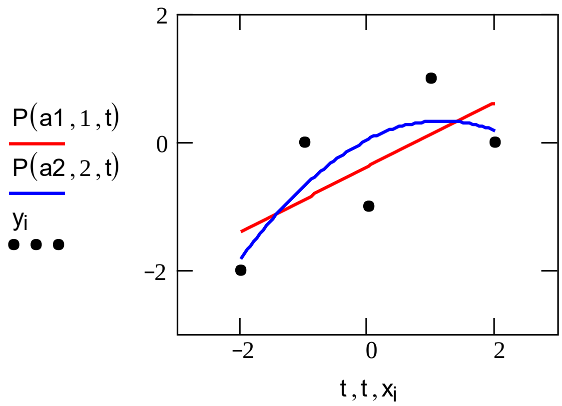
Таким образом, система имеет вид:

$$\begin{cases} 5a_0 + 0a_1 + 10a_2 = -2 \\ 0a_0 + 10a_1 + 0a_2 = 5 \\ 10a_0 + 0a_1 + 34a_2 = -7 \end{cases}$$

Решая систему, получим требуемый многочлен $P_2(x) = 0.0286 + 0.5x - 0.214x^2$

Среднеквадратичное отклонение при этом, равно: $\sigma(P_2, f) = 0.64$

Ниже имеем графики представленных функций.




$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P(a1,1,x) = \begin{pmatrix} -1.4 \\ -0.9 \\ -0.4 \\ 0.1 \\ 0.6 \end{pmatrix} \qquad P(a2,2,x) = \begin{pmatrix} -1.829 \\ -0.686 \\ 0.029 \\ 0.314 \\ 0.171 \end{pmatrix}$$

Введем в рассмотрение матрицу системы:

$\Gamma$ с элементами $\Gamma_{k,j} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j}$ и вектор $b$ с элементами $b_k = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^k$ , $j,k = 0 \ldots m$.

Тогда систему (1) можно записать в матричном виде: $\Gamma a = b$, где $a$ - вектор неизвестных коэффициентов многочлена $P_m$

Докажем следующую теорему.

**Теорема 10.1. Многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения** $P_m(x)$ **существует и единственен.**

**Доказательство.** Вернемся к нормальной системе уравнений (10.2)

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^k, \; k = 0 \ldots m$$

Докажем сначала, что однородная система имеет только нулевое решение:

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j} = 0 \;, \quad k = 0 \ldots m$$

Для этого умножим k-ое уравнение системы на $a_k$ и просуммируем все уравнения:

$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j} = 0$. Теперь выполним перегруппировку слагаемых:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_j a_k x_i^j x_i^k = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j \sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(P_m(x_i)\right)^2 = 0$$

Так как $(m < n)$, то из основной теоремы алгебры следует, что $P_m(x) \equiv 0$, то есть $a_j = 0$, $\forall \ \ j = 0,...m$.

Пусть теперь система решена и найдены коэффициенты многочлена. Докажем, что найденный многочлен решает поставленную задачу. Возьмем другой многочлен с произвольными коэффициентами

$$Q_m(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

Найдем

$$\rho(Q_m, f) = \sum_{i=0}^{n} \left(Q_m(x_i) - f_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(Q_m(x_i) - P_m(x_i) + P_m(x_i) - f_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(Q_m(x_i) - P_m(x_i)\right)^2 + 2\sum_{i=0}^{n} \left(Q_m(x_i) - P_m(x_i)\right)\left(P_m(x_i) - f_i\right) + \sum_{i=0}^{n} \left(P_m(x_i) - f_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(Q_m(x_i) - P_m(x_i)\right)^2 + 2S + \rho(P_m, f)$$

Рассмотрим среднюю сумму.

$$S = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \left(b_j - a_j\right) x_i^j \left(\sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k - f_i\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \left(b_j - a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{m} a_k x_i^{k+j} - f_i x_i^j\right) =$$

$$\sum_{j=0}^{m} \left(b_j - a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j} - \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^j\right) = 0$$

Так как коэффициенты полинома удовлетворяют нормальной системе уравнений (1).

Очевидно, что $\rho(Q_m, f)$ будет минимальной, если взять $Q_m(x) \equiv P_m(x)$.

Ч.т.д.

Основной проблемой при аппроксимации функций МНК является выбор степени $m$ аппроксимирующего многочлена.

Существуют различные подходы к решению этой задачи.

1. Предположим, что n>>m . Будем решать задачу постепенно увеличивая степень m=0,1,2,….Значения среднеквадратических уклонений с ростом m должны убывать, а затем, достигнув некоторого минимума, при некотором m=m0, начинают возрастать. В качестве приближающей степени следует взять m0-1.

2. Иногда задают величину $\varepsilon$ -точность вычислений. Тогда увеличиваем m до тех пор, пока не будет достигнута величина среднеквадратичного приближения, равного $\varepsilon$ .

Замечания.
1. Обычно ограничиваются невысокими степенями приближающего многочлена ($m<=5$), так как при больших m нормальная система МНК плохо обусловлена.
2. В случае $m=n$ многочлен совпадает с интерполяционным многочленом.
3. МНК часто применяют для решения задачи о подборе эмпирической зависимости.

## §10.3 ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО МНК ОБОБЩЕННЫМ МНОГОЧЛЕНОМ

Пусть функция $\Phi_m(x)$ представляет собой обобщенный многочлен:

$$\Phi_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x) \qquad (10.3)$$

Запишем его в более компактном виде: $\Phi_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x)$

Задача состоит в том, чтобы найти такие коэффициенты $a_0$, $a_1$, … $a_m$, чтобы величина СКО (10.1) была минимальной.

Будем решать задачу аналогично решению задачи приближения многочленами. Заметим, что при фиксированной степени $m$ среднеквадратичное отклонение $\sigma(P_m, f)$ является функцией $m+1$ коэффициента многочлена $a_0, a_1, ..., a_m$. Минимум среднеквадратичного отклонения достигается при тех же значениях $a_0, a_1, ..., a_m$, что и минимум функции:

$$\rho(a_0, a_1, ...a_m, f) = \sum_{i=0}^{n}\left(\Phi_m(x_i) - f_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i) - f_i\right)^2$$

Запишем необходимое условие экстремума функции нескольких переменных:

$$\frac{\partial\rho}{\partial a_k} = 0, \quad k=0,1,\ldots m$$

Дифференцируя функцию по коэффициенту $a_k$, получим следующее выражение:

$$\frac{\partial\rho}{\partial a_k} = 2\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i) - f_i\right)\varphi_k(x_i) = 0$$

Меняя порядки суммирования, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_k$, $k=0,1,\ldots m$. В общем виде система выглядит так:

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\right)a_j = \sum_{i=0}^{n} f_i\varphi_k(x_i), \quad k=0,\ldots m \qquad (10.4)$$

Можно записать ее в более развернутом виде:

$$\begin{cases}\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(x_i)\cdot\varphi_0(x_i)\right)a_0+\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(x_i)\cdot\varphi_1(x_i)\right)a_1+\ldots+\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(x_i)\cdot\varphi_m(x_i)\right)a_m=\sum_{i=0}^{n}f_i\varphi_0(x_i)\\ \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_1(x_i)\cdot\varphi_1(x_i)\right)a_0+\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_1(x_i)\cdot\varphi_1(x_i)\right)a_1+\ldots+\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_1(x_i)\cdot\varphi_m(x_i)x_i^{m+1}\right)a_m=\sum_{i=0}^{n}f_i\varphi_1(x_i)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\cdot\varphi_0(x_i)\right)a_0+\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\cdot\varphi_1(x_i)\right)a_1+\ldots+\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\cdot\varphi_m(x_i)\right)a_m=\sum_{i=0}^{n}f_i\varphi_m(x_i)\end{cases}$$

**ПРИМЕР 10.2.** Пусть функция задана таблицей:

| x | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| f(x) | 0.5 | 1.5 | 2 |

Известно, что функция имеет вид: $f(x)=a+b\cdot 2^{-x}$. Найти коэффициенты a и b.

**Решение.** Функция *f(x)* задана обобщенным многочленом $\Phi_1(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)$ $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=2^{-x}$. Составим нормальную систему метода наименьших квадратов.

$$\sum_{i=0}^{2}\varphi_0(x_i)\cdot\varphi_0(x_i)=1+1+1=3 \quad \sum_{i=0}^{2}\varphi_0(x_i)\cdot\varphi_1(x_i)=1\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot 2^{-1}=3.5$$

$$\sum_{i=0}^{2}\varphi_1(x_i)\cdot\varphi_1(x_i)=2^{-1}\cdot 2^{-1}+2^0\cdot 2^0+2^1\cdot 2^1=5.25$$

Найдем правую часть:

$$\sum_{i=0}^{2}f_i\cdot\varphi_0(x_i)=0.5\cdot 1+1.5\cdot 1+2\cdot 1=4,$$

$$\sum_{i=0}^{2}f_i\cdot\varphi_1(x_i)=0.5\cdot 2^1+1.5\cdot 2^0+2\cdot 2^{-1}=3.5$$

**Получаем систему уравнений** $\begin{cases}3a+3.5b=4\\3.5a+5.25b=3.5\end{cases}$

$a=2.5$, $b=-1$. Таким образом, $f(x)=2.5-2^{-x}$. При этом СКО=0

**ПРИМЕР КЕПЛЕРА.**

В 1601 году астроном Джон Кеплер сформулировал закон движения планет $T = cx^{3/2}$, $x$ - расстояние до Солнца, измеряемое в миллионах километров, Т- период прохождения по орбите в днях, С- постоянная.
Наблюдения пар данных ( $x$, $T$ ) для первых четырех планет следующие:

| | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| Меркурий | 58 млн км | 88 –суток |
| Венера | 108 млн км | 225 суток |
| Земля | 150 млн км | 365 суток |
| Марс | 228 млн км | 687 суток |

Коэффициент С подлежит определению.

Выведем нормальную систему МНК.

$$\rho(C, y) = \sum_{i=0}^{n} \left(T(x_i) - y_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{3} \left(Cx_i^{3/2} - y_i\right)^2 .$$

Необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial \rho}{\partial C} = 0$$

примет вид: $\dfrac{d\rho}{dC} = 2\sum_{i=0}^{3} (Cx_i^{3/2} - y_i)x_i^{3/2} = 0$

Тогда ,очевидно, что:

$$C = \frac{\sum_{i=0}^{3} y_i x_i^{3/2}}{\sum_{i=0}^{3} x_i^3}$$

Вычисляя постоянную по полученным наблюдениям, получаем постоянную Кеплера:

**C= 0.199769.**