

סמי זעפרני

בן ציון קון

חשבון דפרנציאלי אינטגרלי

תיאוריה ותרגילים

בן הוצאת בק – ספרי לימוד - BAK
www.bak.co.il

תוכן עניינים

פרק 1 מבוא: מושגי יסוד, המספרים הממשיים 1

1. קשרים וכמתים לוגיים 1
2. קבוצות של מספרים ממשיים 3
3. סביבה של נקודה 10
4. יחסים ופעולות בין קבוצות 11
5. קבוצות חסומות ולא חסומות 13

פרק 2 פונקציות של משתנה ממשי יחיד 19

1. מושג הפונקציה 19
2. תאור גרפי של פונקציה 23
3. פונקציות זוגיות ואי-זוגיות 28
4. הפונקציות ההיפרבוליות (הטריגונומטריות) 32
5. פונקציות מחזוריות 33
6. פונקציות מונוטוניות 36
7. פונקציות הפוכות 38
- גרפים של פונקציות הפוכות
8. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות 41
9. פעולות ופונקציות אלמנטריות 44
- הרכבה של פונקציות (פונקציה מורכבת)
10. הצגה פרמטרית של פונקציה 48
11. קואורדינטות קוטביות 51
- פונקציות וגרפים במערכת קוטבית

פרק 3 סדרות של מספרים ממשיים 54

1. הגדרת סדרה, סדרות מונוטוניות וחסומות 54

סדרות חסומות ולא חסומות

סדרות מונוטוניות

2. גבול של סדרה 59

3. תכונות של סדרות מתכנסות 63

4. התכנסות במובן הרחב 72

5. גבול של סדרות מונוטוניות 73

6. המספר e 78

7. תתי-סדרות 80

8. גבולות חלקיים ומשפט Bolzano-Weierstrass 85

9. קריטריון קושי (Cauchy) להתכנסות סדרות 90

10. חזקות ממשיות 92

11. שיטות שונות לחישוב גבולות 96

פרק 4 גבולות של פונקציות 103

1. הגדרת הגבול של פונקציה לפי היינה (Heine) 103

שיטות להוכחת אי-קיום גבול

2. הגדרת הגבול לפי קושי (Cauchy) 110

3. גבול של פונקציה במובן הרחב 114

4. חישובי גבולות 116

בעיות גבול מן הצורה $\frac{0}{0}$

בעיות גבול מן הצורה $\frac{\infty}{\infty}$

בעיות גבול מן הצורה $0 \cdot \infty, \infty - \infty$

בעיות גבול מן הצורה 1^∞

5. גבולות חד-צדדיים 121

פרק 5 רציפות של פונקציות 125

1. הגדרת מושג הרציפות 125

2. מיון נקודות אי-רציפות 130

3. תכונות של פונקציות רציפות 133

4. רציפות במידה שווה 141

פרק 6 נגזרת של פונקציה 145

1. הגדרת מושג הנגזרת 146

2. חישובי נגזרות 154

הנגזרת של $f(x) = x^n$ הנגזרת של $f(x) = \sin x$ הנגזרת של $f(x) = \cos x$ הנגזרת של $f(x) = \tan x$ הנגזרת של $f(x) = \ln x$ הנגזרת של $f(x) = a^x$ הנגזרת של $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ הנגזרת של $f(x) = \arcsin x$

3. המשך 160

הנגזרת של פונקציות מן הצורה $u(x)^{v(x)}$

הנגזרת של פונקציה סתומה

הנגזרת של פונקציה הנתונה בצורה פרמטרית

חישוב הנגזרת על פי ההגדרה

4. נגזרות חד-צדדיות 167

5. נגזרות מסדר גבוה 170

6. קירוב ליניארי ומושג הדיפרנציאל 173

פרק 7 המשפטים היסודיים

של החשבון הדיפרנציאלי 176

1. משפטי ערך ביניים

176 (Cauchy, LaGrange, Rolle, Fermat)

2. הכלל של לופיטל 185

3. נוסחת טיילור 192

פרק 8 חקירת פונקציות 201

1. שיטת ניוטון לפתרון מקורב של משוואות 201

2. תחומי עליה ותחומי ירידה של פונקציה 206

3. מינימום ומקסימום מקומיים ומוחלטים 209

4. קמירות ונקודות פיתול 216

5. אסימפטוטות 219

6. חקירה מלאה של פונקציות 225

פרק 9 האינטגרל הלא מסוים 231

1. פונקציות קדומות ואינטגרלים מידיים 231

2. אינטגרציה לפי חלקים 235

3. אינטגרציה של פונקציות רציונליות 239

4. שיטת ההצבה 244

$$\int x^n \cdot \sqrt[m]{ax+b} dx \text{ אינטגרלים מן הצורה}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \text{ אינטגרלים מן הצורה}$$

$$\int x^{\pm 2n+1} \sqrt{a^2 \pm x^2} dx \text{ אינטגרלים מן הצורה}$$

הצבות טריגונומטריות

5. אינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות 248

פרק 10 האינטגרל המסוים 253

1. סכומים אינטגרליים והגדרת האינטגרל המסוים 254

2. סכומי דרבו ופונקציות אינטגרליות 258

3. התכונות של האינטגרל המסוים 268

4. האינטגרל המסוים והפונקציה הקדומה 273

5. חישוב של אינטגרלים מסוימים 278

החלפת משתנים

אינטגרציה לפי חלקים

6. שיטות נומריות לחישוב האינטגרל המסוים 282

שיטת המלבנים

שיטת הטרפז

שיטת סימפסון

7. שימושים של האינטגרל המסוים 288

חישוב גבולות

שטח של תחום מישורי

שטח של תחום מישורי הנתון ע"י הצגה פרמטרית

שטח של תחום מישורי הנתון ע"י הצגה קוטבית

אורך של נקום

חישוב נפחים של גופים

נפח גוף סיבובי סביב ציר- x נפח גוף סיבובי סביב ציר- y

23

פרק 11 אינטגרלים לא אמיתיים 302

1. אינטגרלים עם גבולות אינטגרציה אינסופיים 302

2. אינטגרל של פונקציה לא חסומה 310

פרק 12 תרגילי חזרה והעמקה 313

תשובות סופיות לתרגילים 339

איורים לתשובות 352

מפתח מונחים 357

2

תוכן עניינים של ספר ההמשך: חדו"א 2, חלק א'
בן-ציון קון

פרק 1 טורים מספריים, מושגים יסודיים 1

1. הגדרת הטור וסכומו 1
2. טור טלסקופי 3
3. קריטריון קושי להתכנסות טורים 4
4. תנאי הכרחי להתכנסות טורים 6
5. שארית הטור 6
6. משפטים בסיסיים על התכנסות טורים 8

פרק 2 טורים חיוביים 11

1. מבחני השוואה 11
2. מבחני דלמבר וקושי 15
3. מבחן אינטגרל 19
4. מבחן רבה 22
5. אי-קיום של טור השוואה אוניברסלי 24

26	פרק 3 טורים כלליים
26	1. התכנסות בהחלט ובתנאי
28	2. פעולות עם טורים מתכנסים
33	3. מבחן לייבניץ
38	4. מבחני דיריכלה ואבל
40	5. מכפלת טורים
43	תרגילים נוספים
45	פרק 4 סדרות של פונקציות
45	1. הגדרת סדרות של פונקציות, התכנסות
47	2. התכנסות במידה שווה
49	3. קריטריונים להתכנסות במידה שווה
52	4. רציפות הפונקציה הגבולית
55	פרק 5 טורי פונקציות
55	1. הגדרות ותחום התכנסות
58	2. התכנסות במידה שווה של טורים
60	3. מבחן וויארשטראס
62	4. מבחני דיריכלה ואבל
64	5. תכונות פונקציונליות של הטור
67	6. אינטגרליות וגזירות
71	פרק 6 טורי חזקות
71	1. הגדרות. רדיוס התכנסות. תחום התכנסות
75	2. התכנסות במידה שווה, פעולות עם טורי חזקות
79	3. פיתוח פונקציות לטור חזקות
86	תרגילים נוספים
88	פרק 7 גאומטריה אנליטית במישור
88	1. מערכת קואורדינטות, קטעים מכוונים, מרחק בין שתי נקודות
90	2. חלוקת קטע ביחס נתון
90	3. שטח המשולש
91	4. משוואת העקומים, קו ישר
93	5. המשך: מקום גאומטרי של נקודות
95	6. מעגל
96	7. אליפסה
98	8. ההיפרבולה
100	9. פרבולה
101	10. טרנספורמציה של קואורדינטות קרטזיות
102	I. הזזת הצירים
103	II. סיבוב הצירים סביב הראשית
107	11. קואורדינטות קוטביות
110	12. משוואת העקומים בצורה פרמטרית
112	פרק 8 אלגברה של וקטורים
112	1. וקטורים, חיבור חיסור ומכפלה בסקלר
116	2. צרף ליניארי

118	3. קואורדינטות קרטזיות
120	4. כוון הוקטור במרחב
123	5. מכפלה סקלרית
126	6. מכפלה וקטורית
129	7. מכפלה מעורבת
131	פרק 9 גאומטריה אנליטית במרחב
131	1. המישור במרחב
134	2. משוואת הישר במרחב
141	3. משטחים במרחב
143	4. קואורדינטות גליליות וכדוריות
145	5. טרנספורמציה של מערכת הצירים
148	פרק 10 פונקציות של מספר משתנים. הגדרות
148	1. הקדמה
149	2. מרחב אויכלידי
154	3. סדרות של נקודות
156	4. הגדרת פונקציות של משתנים אחדים
160	פרק 11 גבולות ורציפות של פונקציות של משתנים אחדים
160	1. גבולות של פונקציות
162	2. טכניקות לחישוב גבולות
165	3. גבולות חוזרים
167	4. פונקציות רציפות, הגדרה ודוגמאות
170	5. תכונות של פונקציות רציפות
173	6. המשך
174	7. רציפות במידה שווה
176	פרק 12 נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות, כלל השרשרת
176	1. נגזרות חלקיות
179	2. תאור גאומטרי של נגזרות חלקיות
180	3. דיפרנציאביליות של פונקציות במספר משתנים
187	4. דיפרנציאביליות ומישור משיק
189	5. נגזרות חלקיות של פונקציה מורכבת, כלל השרשרת
193	6. דיפרנציאל
196	7. נגזרת מכוונת
199	8. שדה סקלרי, גרדיאנט של שדה סקלרי
203	פרק 13 נגזרות חלקיות מסדר גבוה, נוסחת טיילור
203	1. נגזרות חלקיות מסדר גבוה
206	2. נגזרות חלקיות מסדר גבוה של פונקציה מורכבת
207	3. החלפת משתנים
209	4. דיפרנציאל מסדר גבוה
211	5. נוסחת טיילור
214	פרק 14 פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות
214	1. הגדרת פונקציה סתומה

221	2. נקודות סינגולריות
222	3. מערכת של פונקציות סתומות
227	4. שימושים גאומטריים (משיק, נורמל, מישור משיק)
230	5. מערכת של פונקציות הפוכות, העתקות חד-חד ערכיות בין שתי קבוצות
236	פרק 15 אקסטרמום של פונקציות של מספר משתנים
236	1. אקסטרמום לוקלי (מקומי), תנאי הכרחי לקיומו
238	2. סעיף עזר: תבניות ריבועיות
240	3. מיון נקודות קריטיות
244	4. אקסטרמום בתנאי, כופלי לגרנז'
251	5. הערך המקסימלי והמינימלי של פונקציות
254	תרגילים נוספים
256	תשובות
265	אורים לתשובות
267	מפתח מונחים

תוכן עניינים של ספר ההמשך: חדר"א 2, חלק ב'
בן-ציון קון

1	פרק 16 אינטגרלים התלויים בפרמטר
1	1. הגדרת אינטגרלים התלויים בפרמטר
2	2. תכונות של אינטגרלים התלויים בפרמטר
7	3. המשך: אינטגרציה של אינטגרל התלוי בפרמטר
10	4. אינטגרלים התלויים בפרמטר כאשר הפרמטר נמצא בגבולות האינטגרציה
13	5. אינטגרלים לא אמיתיים התלויים בפרמטר
16	6. תכונות של אינטגרלים לא אמיתיים התלויים בפרמטר
20	פרק 17 אינטגרל כפול
20	1. הגדרת שטח התחום
21	2. הגדרה של אינטגרל כפול
25	3. תכונות של אינטגרל כפול
26	4. חישוב של אינטגרל כפול
29	5. המשך: מקרה כללי
37	6. החלפת משתנים באינטגרל הכפול
44	7. שימושים של אינטגרל כפול
49	8. אינטגרלים כפולים לא אמיתיים

53	פרק 18 אינטגרל משולש
53	1. הגדרה וחשוב של אינטגרל משולש
56	2. המשך (מקרה כללי)
59	3. החלפת משתנים באינטגרל המשולש
63	4. שימושים של אינטגרל משולש
65	פרק 19 פונקציות וקטוריות של משתנה סקלרי
66	1. הגדרה ותאור גאומטרי של פונקציות וקטוריות
68	2. גבולות ורציפות של פונקציות וקטוריות
69	3. נגזרת של פונקציה וקטורית
74	4. אורך הקשת
77	5. פונקציה וקטורית התלויה בשני משתנים
80	6. שדה וקטורי
81	I. הדיברגנט
82	II. רוטור של שדה וקטורי
84	פרק 20 אינטגרל קווי
84	1. אינטגרל קווי מסוג ראשון
88	2. אינטגרל קווי מסוג שני
96	3. משפט גרין (G. Green)
104	4. אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול האינטגרציה
108	5. שדה משמר (מישורי), פונקציית הפוטנציאל
114	פרק 21 אינטגרל משטחי
114	1. הגדרת המשטח
116	2. שטח פנים של המשטח
119	3. אינטגרל משטחי מסוג ראשון
121	4. אינטגרל משטחי מסוג שני
128	5. משטף הדיברגנט (גאוס)
131	6. משפט סטוקס
136	7. שדה משמר (כללי)
141	פרק 22 דוגמאות של בחינות - חדר"א 2 וחדר"א 2 (טכניון)
165	תשובות
173	מפתח מונחים