Practicum Numerieke Wiskunde

Barbara Ameloot, Tobias Baert

Mei 2018

Opdracht 1.1

Het matrixproduct $A = L_E \cdot U$:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & \cdots & u_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Als we de elementen van dit matrixproduct elementgewijs uitschrijven krijgen we:

$a_{1,1} = 1 \cdot u_{1,1}$ $\rightarrow u_{1,1}$
$a_{1,2} = 1 \cdot u_{1,2}$ $\rightarrow u_{1,2}$
$a_{1,3} = 1 \cdot u_{1,3}$ $\rightarrow u_{1,3}$
...
$a_{1,n} = 1 \cdot u_{1,n}$ $\rightarrow u_{1,n}$

$a_{2,1} = l_{2,1} \cdot u_{1,1}$ $\rightarrow l_{2,1}$
$a_{2,2} = l_{2,1} \cdot u_{1,2} + 1 \cdot u_{2,2}$ $\rightarrow u_{2,2}$
$a_{2,3} = l_{2,1} \cdot u_{1,3} + 1 \cdot u_{2,3}$ $\rightarrow u_{2,3}$
...
$a_{2,n} = l_{2,1} \cdot u_{1,n} + 1 \cdot u_{2,n}$ $\rightarrow u_{2,n}$

$a_{3,1} = l_{3,1} \cdot u_{1,1}$ $\rightarrow l_{3,1}$
$a_{3,2} = l_{3,1} \cdot u_{1,2} + l_{3,2} \cdot u_{2,2}$ $\rightarrow l_{3,2}$
$a_{3,3} = l_{3,1} \cdot u_{1,3} + l_{3,2} \cdot u_{2,3} + 1 \cdot u_{3,3}$ $\rightarrow u_{3,3}$
...
$a_{3,n} = l_{3,1} \cdot u_{1,n} + l_{3,2} \cdot u_{2,n} + 1 \cdot u_{3,n}$ $\rightarrow u_{3,n}$

$a_{4,1} = l_{4,1} \cdot u_{1,1}$ $\rightarrow l_{4,1}$
$a_{4,2} = l_{4,1} \cdot u_{1,2} + l_{4,2} \cdot u_{2,2}$ $\rightarrow l_{4,2}$
$a_{4,3} = l_{4,1} \cdot u_{1,3} + l_{4,2} \cdot u_{2,3} + l_{4,3} \cdot u_{3,3}$ $\rightarrow l_{4,3}$
$a_{4,4} = l_{4,1} \cdot u_{1,4} + l_{4,2} \cdot u_{2,4} + l_{4,3} \cdot u_{3,4} + 1 \cdot u_{4,4}$ $\rightarrow u_{4,4}$
...
$a_{4,n} = l_{4,1} \cdot u_{1,n} + l_{4,2} \cdot u_{2,n} + l_{4,3} \cdot u_{3,n} + 1 \cdot u_{4,n}$ $\rightarrow u_{4,n}$

We kunnen de elementen $u_{i,j}$ en $l_{i,j}$ van U en L_E als volgt berekenen:
Voor elke $k = 1, 2, ..., n$:

- $u_{k,m} = a_{k,m} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j} \cdot u_{j,m}$ met $m = k, k+1, ..., n$ geeft de k^{de} rij van U

- $l_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j} \cdot u_{j,k}}{u_{k,k}}$ met $i = k+1, k+2, ..., n$ en $l_{i,i} = 1$ geeft de k^{de} kolom van L

Opdracht 1.2

Tridiagonale matrix A:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

• Voor U:
We nemen de eerste serie vergelijkingen uit 1.1:

$a_{1,k} = 1 \cdot u_{1,k}$

Omdat $a_{1,k} = 0$ voor $k > 2$ is dus ook $u_{1,k} = 0$ voor $k > 2$.

Dit kunnen we invullen in de tweede serie vergelijkingen uit 1.1:

$a_{2,k} = l_{2,1} \cdot u_{1,k} + 1 \cdot u_{2,k}$

Nu is $a_{2,k} = 0$ voor $k > 3$. Omdat we weten dat $u_{1,k} = 0$ voor $k > 2$ is dus ook $u_{1,k} = 0$ voor $k > 3$.

Algemener kunnen dus we zeggen dat $u_{i,k} = 0$ als $k > i + 1$.
Omdat we ook weten dat U een bovendriehoeksmatrix is, is de matrix U dus tridiagonaal.

• Voor L:
We nemen nu de eerste vergelijking van elke serie uit 1.1:

$a_{k,1} = l_{k,1} \cdot u_{1,1}$ met $k > 2$

Omdat $a_{k,1} = 0$ voor $k > 2$ en dat $u_{1,1} \neq 0$, volgt dat $l_{k,1} = 0$ voor $k > 2$.

Dit resultaat kunnen we invullen in de tweede vergelijking van elke serie in 1.1:

$a_{k,2} = l_{k,1} \cdot u_{1,2} + l_{k,2} \cdot u_{2,2}$ met $k > 3$

Wederom is $a_{k,2} = 0$ met $k > 3$. Omdat $l_{k,1} = 0$ voor $k > 2$ en $u_{2,2} \neq 0$ moet $l_{k,2} = 0$ voor $k > 3$.

Algemener kunnen dus we zeggen dat $l_{k,j} = 0$ als $k > j + 1$.
Omdat we ook weten dat L een benedendriehoeksmatrix is, is de matrix L dus tridiagonaal.

- Het matrixproduct $A = L_E \cdot U$ bij een tridiagonale matrix:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{3,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Opdracht 1.3.1

Aantal elementaire bewerkingen:
$(n-1) \cdot 6V + (n-1) \cdot 3O$
Met V: vermenigvuldiging/deling en O: optelling/aftrekking

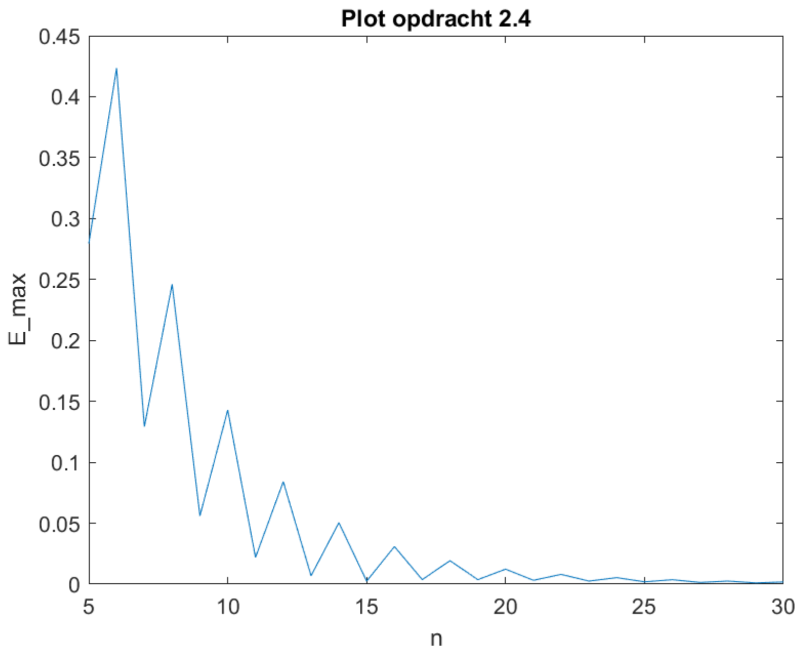
Opdracht 1.3.2

Er wordt reeds in het begin van het algoritme een nul-element gevormd op de hoofddiagonaal van U. In een volgende stap wordt door dit element gedeeld.

Opdracht 1.3.3

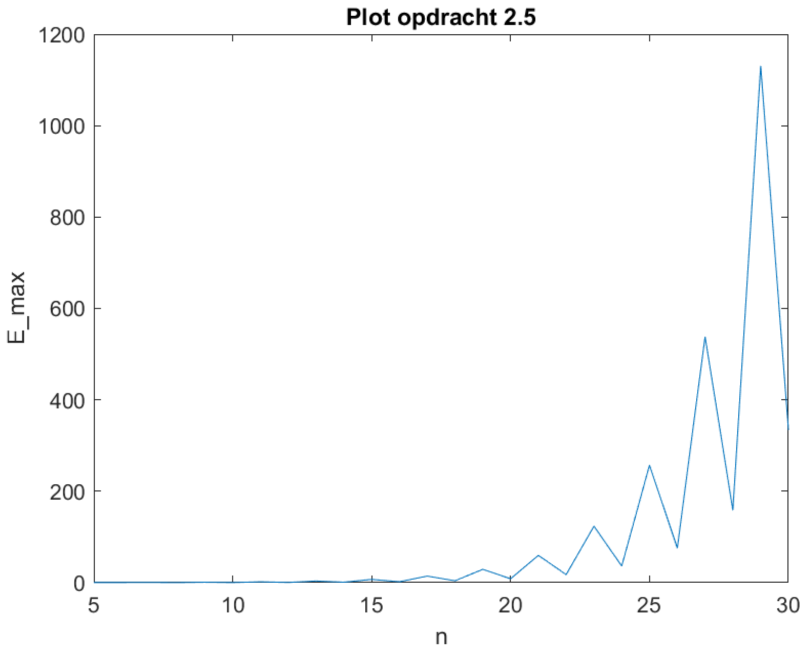
Opdracht 2.4

Plot:



Opdracht 2.5

Plot:



Opdracht 2.6

We kunnen meteen inzien dat methode uit opdracht 2.4 een betere benadering oplevert dan de methode uit opdracht 2.5 zolang het aantal knooppunten groot genoeg is. Het belangrijkste verschil tussen de twee methodes is het gebrek aan convergentie bij de methode uit opdracht 2.5. Dat is een gevolg van het verschijnsel van Runge. Interpolaties met equidistante knooppunten van bepaalde functies, waaronder de Runge-functie, convergeren niet. De benadering begint sterk te oscilleren aan de randen van het interpolatieinterval, met een grote maximale interpolatie fout als gevolg.

Verdeling werk

Barbara Ameloot: Opdracht 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 + typen verslag
Tobias Baert: Opdracht 1.1, 1.2, 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 2.6