Corso di Laurea Triennale in Ingegneria e Scienze Informatiche

Metodi Numerici **A.A. 2021-2022**

Esercitazione N. 7

Algoritmo di Fattorizzazione di Cholesky, Algoritmo di Thomas e Metodo QR

1. Per $n = 2 : 50$,

   - costruire la matrice $B = rand(n)$
   - calcolare $A = B' * B$. (tale matrice é simmetrica e, se il rango di A é n, é anche definita positiva)
   - calcolare il termine noto $b = A * (1 : n)'$. (con questa scelta la soluzione del sistema é x=(1:n)')
   - Calcolare la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ ottenuta utilizzando la fattorizzazione di Cholesky della matrice A (usare la funzione di libreria MATLAB `chol`)
   - Calcolare la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ con il metodo di eliminazione gaussiana con pivoting parziale massimo per colonne.
   - Calcolare gli errori relativi della soluzione x_c calcolata mediante ciascun metodo rispetto alla soluzione esatta x, $\|x_c - x\|_2/\|x\|_2$, al variare di n.
   - Disegnare su grafico in scala semilogaritmica sull'asse y (comando semilogy) gli errori relativi calcolati.

2. Per $n = 4 : 6 : 40$,

   - considerare il sistema lineare $Ax = b$ con A matrice di Hankel di ordine n di elementi

   $$a_{i,n+k-i} = \begin{cases} 2^k & \text{se } k > 0, \\ 2^{1/(2-k)} & \text{se } k \leq 0, \end{cases} \qquad i = 1, ..., n, \quad k = i + 1 - n, ..., i,$$

   e b scelto in modo che abbia soluzione $x = [1, 1, ..., 1]^T$.
   - Risolvere tale sistema con il metodo di fattorizzazione LU con massimo pivot parziale
   - Risolvere tale sistema con il metodo di fattorizzazione QR (comando `qr` di Matlab).

   - Calcolare gli errori relativi della soluzione x_c calcolata mediante ciascun metodo rispetto alla soluzione esatta, x $\|x_c - x\|_2/\|x\|_2$, al variare di n.
   - Disegnare su grafico in scala semilogaritmica sull'asse y (comando semilogy) gli errori relativi calcolati. Che cosa si osserva?

3. Fissato $n = 100$, calcolare $Z = eye(n) - 2 * v * v'$ con v vettore colonna di numeri a caso avente norma 2 unitaria.
   Per $k = 1 : 1 : 20$,

   - calcolare $D = eye(n)$;
   - porre $D(n, n) = 10^k$;
   - calcolare $A = Z * D$
   - calcolare l'indice di condizionamento di A
   - risolvere il sistema lineare $Ax = b$, dove il teminte noto $b = A * ones(n, 1)$, garantisce che la soluzione esatta del sistema é il vettore $x = ones(n, 1)$.
   - Calcolare l'errore relativo sulla soluzione x_c calcolata con il metodo di eliminazione gaussiana senza pivoting e con pivoting parziale rispetto alla soluzione esatta $ones(n, 1)$.

   - Disegnare su grafico in scala semilogaritmica sull'asse y (comando semilogy) gli errori relativi calcolati.

4. Per n=5:5:100

   - costruire la matrice triadiagonale di ordine n definita dai vettori

   $$a_i = 2 \quad i = 1 : n$$

   $$b_i = -1 \quad i = 2 : n$$

   $$c_i = -1 \quad i = 1 : n - 1$$

   - costruire il termine noto d, con elementi $d_1 = d_n = 1$ e $d_i = 0 \quad i = 2 : n-1$
   - risolvere con il metodo di Thomas il sistema lineare avente per matrice dei coefficienti la matrice tridiagonale (utilizzare solo i 3 vettori a,b,c senza memorizzare la matrice) e termine noto d e memorizzare il tempo di esecuzione
   - costruire la matrice $A = diag(a) + diag(b, -1) + diag(c, 1)$ e risolvere con il metodo di Gauss senza pivotaggio a perno massimo il sistema lineare $Ax = d$ e memorizzare il tempo di esecuzione
   - confrontare su grafico a scala semilogaritmica sulle y i tempi di esecuzione dei due metodi al variare di n.