AM II (Aula Prática 3)

2-1 Determine, utilizando a definição, as derivadas de 1ª ordem das seguintes funções, nos pontos indicados:

2-1.a) $f(x,y) = \dfrac{2x+y+3}{x-3y+1}$ em $(-1,1)$.

Resolução: $f(-1,1) = \dfrac{-2+1+3}{-1-3+1} = -\dfrac{2}{3}$.

· Por definição, calcule-se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h-1,1) - f(-1,1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2(h-1)+1+3}{(h-1)-3+1} + \dfrac{2}{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h+2}{h(h-3)} + \frac{2}{3h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h+\overset{\boxed{3\cdot 2}}{\cancel{6}}+2h-\cancel{6}}{(3h-9)h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8}{3h-9} = \boxed{-\frac{8}{9}} \;;$$

- usando as regras de derivação:

$$\left(\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x+y+3}{x-3y+1}\right) =$$

$$= \frac{2(x-3y+1)-(2x+y+3)}{(x-3y+1)^2} = -\frac{7y+1}{(x-3y+1)^2}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = -\frac{7+1}{(-1-3+1)^2} = \boxed{-\frac{8}{9}}$$

$\boxed{3-3}$

- Calculando $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$ por definição vem:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = \lim_{k\to 0} \frac{f(-1,1+k) - f(-1,1)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{-2+(1+k)+3}{-1-3(1+k)+1} + \frac{2}{3}}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k+2}{-3k(k+1)} + \frac{2}{3k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k+\cancel{2}-2k-\cancel{2}}{-3k(k+1)} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{3k+3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

- usando as regras de derivação vem:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x-\cancel{3y}+1+3(2x+\cancel{y}+3)}{(x-3y+1)^2} = \frac{7x+10}{(x-3y+1)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = \frac{-7+10}{(-1-3+1)^2} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

2-1. b) $g(s,t) = \sqrt{st}$ em $(1,1)$.

$g(1,1) = \sqrt{1} = 1$, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$\frac{\partial g}{\partial s}(1,1) = \lim_{h \to 0} \frac{g(1+h,1) - g(1,1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+h} - 1\right)'}{(h)'} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\sqrt{1+h}} = \frac{1}{2};$$

o cálculo de $\dfrac{\partial g}{\partial t}(1,1)$ é análogo, pelo que fica a cargo do aluno.

$\boxed{2-2}$ Considere a função $f(x,y,z) = x^2 y z^2$. Determine as derivadas parciais de f num ponto genérico $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Resolução: $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} . u'$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y z^2) = 2xyz^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y z^2) = x^2 z^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 y z^2) = 2x^2 y z.$$

$\boxed{3-6}$

$\boxed{2\text{-}3}$ Calcule, caso existam, as derivadas parciais de 1.ª ordem das funções seguintes:

$\boxed{2-3.a)}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Resolução:

Para os pontos $(x,y) \neq (0,0)$ podemos usar as regras de derivação: $\left(\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right)$, no entanto os cálculos para a origem têm de ser feitos usando a definição de derivada parcial.

Seja $(x,y) \neq (0,0)$:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2x^2+3y^2}{x^2+y^2}\right) =$

$$= \frac{4x(x^2+y^2)-(2x^2+3y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^3}+4xy^2-\cancel{4x^3}-6xy^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2};$$

analogamente : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2yx^2}{(x^2+y^2)^2}}$.

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{2h^2}{h^2}-0}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} = \infty ;$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} =$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{3k^2}{k^2}-0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{3}{k} = \infty.$$

2-3.b) A resolução é semelhante, fica a cargo do aluno.

2-4 Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ da função:

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \sin(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Resolução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0.$$

2-5 Recorrendo à definição, calcule a derivada das seguintes funções, segundo o vetor u no ponto P, indicados:

2-5.a) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$, $u = (1,1)$ e $P = (2,-1)$.

Resolução:

$$\boxed{f'_u(P) = \lim_{t \to 0} \frac{f[P + tu] - f(P)}{t}}\,.$$

$$f'_{(1,1)}(2,-1) = \lim_{t \to 0} \frac{f[(2,-1) + t(1,1)] - f(2,-1)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f[(2+t, t-1)] - \underbrace{f(2,-1)}_{=11}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2(2+t)^2 + 3(t-1)^2 - 11}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2(4+4t+t^2) + 3(t^2-2t+1) - 11}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{8+8t+2t^2+3t^2-6t+3-11}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{5t^2+2t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}(5t+2)}{\cancel{t}} = 2.$$

2-5.b) Os cálculos são análogos, ficam a cargo do aluno.

$\boxed{2-6}$ Determine a derivada <u>direcional</u>

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P) = f'_u(P).$$

Observações:

(i) Como é pedida a derivada <u>direcional</u> temos de usar o versor de u:

$$\text{vers } u = \frac{u}{\|u\|},$$

pois é o que tem norma igual a 1;

(ii) podemos usar neste cálculo o teorema que afirma que: se f é diferenciável então:

$$f'_u(P) = \nabla f(P) \mid u.$$

$\boxed{3\text{-}6.a)}$

$$\boxed{(e^{u})' = u' e^{u}}$$

$f(x,y) = e^{5xy}$, $u = (1,1)$ e $P = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Resolução:

- $\operatorname{vers} u = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

- $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(5y e^{5xy}, 5x e^{5xy}\right)$;

- $\nabla f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3} e^{-\frac{10}{9}}, \frac{10}{3} e^{-\frac{10}{9}}\right)$;

pelo que:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P) = f'_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \nabla f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \bigg| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$\boxed{3\text{-}13}$

$$= \left(-\frac{5}{3}e^{-\frac{10}{9}}, \frac{10}{3}e^{-\frac{10}{9}}\right) \Big| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} e^{-\frac{10}{9}} \left(-5+10\right) =$$

$$= \frac{5\sqrt{2}\, e^{-\frac{10}{9}}}{6}.$$

$$\boxed{(\log(u))' = \frac{u'}{u}}$$

$\boxed{3\text{-}6.\,b)}$

$g(s,t) = \log(2+s+t^2)$, $u = (1,0)$ e $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Resolução: como $u = (1,0) = \vec{e}_1$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(P) = g'_{\vec{e}_1}(P) = \frac{\partial g}{\partial s}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{1}{2+s+t^2}, \quad \text{logo}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(P) = \frac{\partial g}{\partial s}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{2}{4}}} = \frac{1}{2}.$$

3.-6.c) $\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$

$h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $u = (1,2)$ e $P = (1,0)$

- $\text{vers}(1,2) = \frac{(1,2)}{\|(1,2)\|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$;

- $\nabla h(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$;

- $\nabla h(1,0) = (1,0)$

$\frac{\partial h}{\partial u}(P) = h'_{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}(1,0) =$

$= \nabla h(1,0) \mid \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

7) Considere a seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que a derivada de f, segundo qualquer vetor $v = (v_1, v_2)$, existe em qualquer ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Resolução:

Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy(\cancel{x^2}+y^2) - 2\cancel{x^3}y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \text{ função contínua}$$

em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Justifique

também é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

logo como as duas derivadas parciais de 1ª ordem existem e, pelo menos, uma delas é contínua, a função f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

assim:

$$f'_{(v_1,v_2)}(x,y) = \nabla f(x,y) \mid (v_1, v_2) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \mid (v_1, v_2) =$$

$$= \left(\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) \mid (v_1, v_2) =$$

$$= \left(2xy^2 v_1 + x^2(x^2-y^2) v_2\right) / (x^2+y^2)^2.$$

Já $f'_v(0,0)$ tem de ser calculado usando a definição:

$$f'_{(v_1,v_2)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left[(0,0)+t(v_1,v_2)\right] - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2 v_1^2\, t\, v_2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} - 0}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^3} \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2+v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Exemplo: $f'_{(2,-3)}(0,0) = -\frac{12}{4+9} = -\frac{12}{13}.$

Em conclusão:

$\exists f'_v(P)$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$ e $\forall P \in \mathbb{R}^2$.

$\boxed{3-8}$ Considere a função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

$\boxed{3-8.a)}$ Determine o domínio de f.

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$\boxed{3-8.b)}$ Calcule, ou mostre que não existe,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)}{r^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r\,\underbrace{\cos\theta\cos(2\theta)}_{\text{limitado}} = 0$$

3-8.e) (~~seg~~) Seja $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcule, se existirem as derivadas parciais de 1ª ordem de g.

Resolução:

- Para $(x,y) \neq (0,0)$ podemos aplicar as regras de derivação, fica a cargo do aluno.
- Para $(x,y) = (0,0)$ tem de ser por definição:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{g(0,k) - g(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{0}{k^2}}{k} = 0.$$

$\boxed{3-9}$ Uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ chama-se <u>harmónica</u>, se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0, \ \forall x \in D.$$

Verifique que as funcões seguintes são harmónicas:

$\boxed{3-9.a}$ $f(x,y) = e^x \sin(y)$.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x \sin y$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^x \sin y$;

assim

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$\boxed{3.9.b}$ $V(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\boxed{3\text{-}21}$ $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)' = -\frac{u'}{2\sqrt{u^3}}}$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{2z}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \boxed{\left(u^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}u'\sqrt{u}}$$

$$= \frac{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(-x^2-y^2-z^2)+3z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(-x^2-y^2+2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{6}{2}}} =$$

$$= \frac{-x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}};$$

análogamente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{-y^2-z^2+2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

e

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{-x^2-z^2+2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}};$$

pelo que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\},$$

o que significa que a função $V(x,y,z)$ é harmónica.

$\boxed{3\text{-}10}$ Considere a função:

$$f(x,y) = x \sin(yz).$$

Determine:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x \sin(yz))\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\sin yz) = 0 \qquad \boxed{(\sin u)' = u' \cos u}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}(x \sin(yz))\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(xz \cos(yz)) = \qquad \boxed{\begin{array}{l}(uv)' = u'v + uv' \\ (\cos u)' = -u' \sin u\end{array}}$$

$$= x \cos(yz) - xyz \sin(yz).$$

Os restantes cálculos ficam a cargo do aluno.

3-11 Calcule as derivadas indicadas usando as fórmulas de derivações:

$$\boxed{(\operatorname{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}}$$

por esemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \cos(x)\, y^3\right) = \boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

$$= y^3\left(2x\cos x - x^2 \sin x\right) =$$

$$= y^3 x\left(2\cos x - x \sin x\right).$$

$$\boxed{(\cos u)' = -u' \sin u}$$

2-13 A altura em relação ao nível das águas do mar de um ponto (x,y) de uma certa montanha, é dado por 3-25

$$z = f(x,y) = 2500 - 2x^2 - 3y^2,$$

onde x, y e z são definidos em metros.

O semi-eixo OX positivo aponta para oriente (este) e o semi-eixo positivo OY indica o Norte.

Um montanhista está no ponto

$P = (-10, 5.2225)$ e pode

caminhar em qualquer direção.

a) Se se dirigir em direção a Ocidente (Oeste), o montanhista estará subindo ou descendo?

Se vamos em direção ao Ocidente, quer dizer que seguimos na direção $u^1 = (-1, 0)$.

$\nabla f(x,y) = (-4x, -6y)$, $\nabla f(P) = (40, -31.335)$.

Logo:

$$f'_{u^1}(P) = \nabla f(P) | u^1 = (40, -31.335) | (-1, 0) =$$

$$= -40 ;$$

logo o montanhista está descendo.

b) Se o montanhista caminhar em direção a Nordeste, ele estará subindo ou descendo e a que taxa?

Se ele vai em direção ao Nordeste, quer dizer que segue na direção de $u^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$f'_{u^2}(P) = \nabla f(P) | u^2 = (40, -31.335)) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(40 - 31.335) = \frac{\sqrt{2}}{2} \; \frac{8665}{1000} =$$

$$= \sqrt{2} \; \frac{1733}{400},$$

portanto ele está subindo, com taxa de crescimento ou declive igual a $\sqrt{2} \; \frac{1733}{400}$.

e) Em que direção/direções deverá caminhar para seguir uma curva de nível.

Queremos saber em que direções é que a taxa de crescimento de f é nula no ponto P:

$$f'_u(P) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(P) \,|\, (u_1, u_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{40\,000}{1000}, -\frac{31\,335}{1000} \right) \Big| (u_1, u_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4000\, u_1 - 31335\, u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

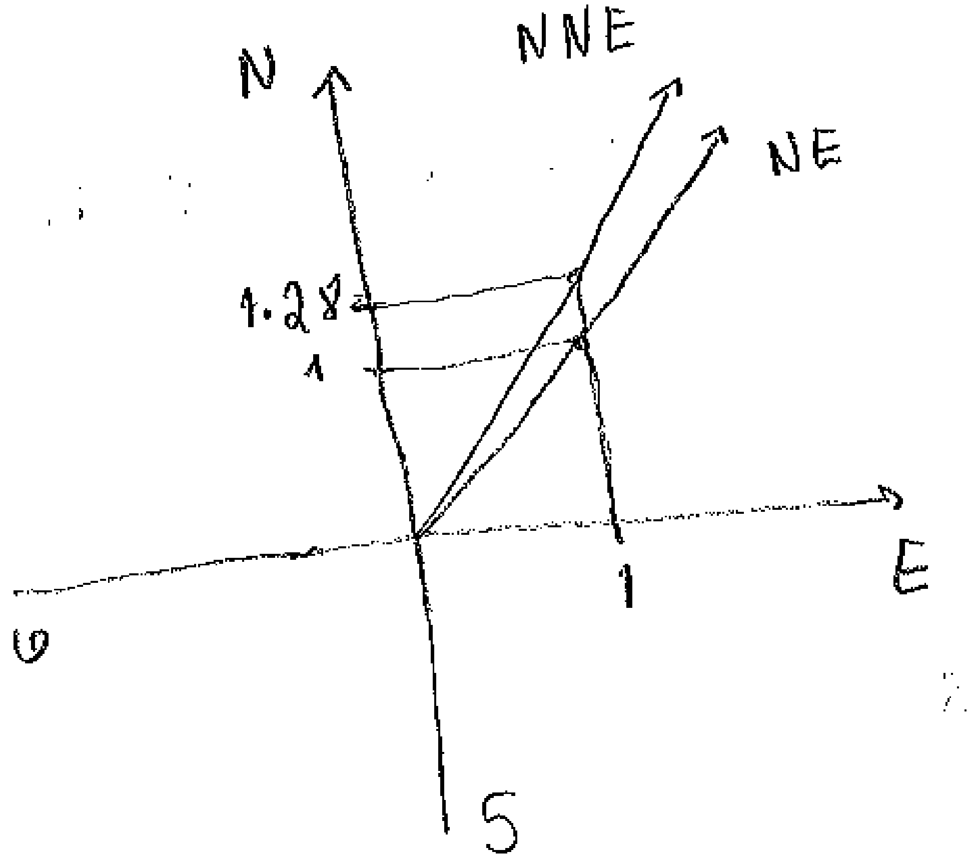
$$\Leftrightarrow u_2 = \frac{40000}{31335} u_1 \Leftrightarrow u_2 \simeq 1{,}28\, u_1.$$

Logo devemos seguir a

a direção representada pelo vetor

$$u = (1,\ 1.28);$$

ou seja devemos seguir mais ou menos para Nor-nordeste.



2-14 Mostre que as funções seguintes têm derivadas parciais de 1ª ordem na origem, mas não são diferenciáveis em (0,0).

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Resolução:

→ Derivadas parciais de 1ª ordem em (0,0):

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = 0 \quad \text{(os cálculo ficam a cargo do aluno)}$$

→ Diferenciabilidade em $(0,0)$:

Recorde que: f é diferenciável num ponto a sse:

$$f(a+h)-f(a)=h_1 f'_x(a)+h_2 f'_y(a)+\varepsilon\rho$$

com $\rho=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$ e $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon=0$.

Neste tipo de exercícios o nosso primeiro objectivo é encontrar a função ε.

Observe-se que:

$$f(h_1,h_2)-f(0,0)=h_1\underbrace{f'_x(0,0)}_{=0}+h_2\underbrace{f'_y(0,0)}_{=0}+\varepsilon\rho$$

Assim

$$f(h_1,h_2)=\varepsilon\rho \Leftrightarrow \varepsilon=\frac{f(h_1,h_2)}{\rho}=\frac{h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}.$$

A segunda e última parte destes exercícios é o cálculo de $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon$, quando este limite é zero a função é diferenciável, nos outros casos não é diferenciável.

Como: $\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 = h_1}} \frac{h_1 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} =$

$$= \lim_{h_1 \to 0} \frac{h_1^2}{\left(\sqrt{2 h_1^2}\right)^3} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{|h_1|^2}{2\sqrt{2}\,|h_1|^3} =$$

$$= \lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}\,|h_1|} = +\infty,$$

logo $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon \neq 0$, pelo que a função não é diferenciável em $(0,0)$.

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Resolução:

→ Derivadas parciais de 1.ª ordem em (0,0):

- $f'_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \dfrac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} -\dfrac{k^3}{k^3} = -1$

- $f'_x(0,0) = 0$

→ Diferenciabilidade em (0,0):

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) = h_1 \underbrace{f'_x(0,0)}_{=0} + h_2 \underbrace{f'_y(0,0)}_{=-1} + \varepsilon \rho = -h_2 + \varepsilon \rho,$$

pelo que

$$f(h_1,h_2) = -h_2 + \varepsilon \rho \Leftrightarrow \frac{h_2(h_1^2 - h_2^2)}{h_1^2 + h_2^2} + h_2 = \varepsilon \rho \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \rho = \frac{h_2 h_1^2 - \cancel{h_2^3} + h_1^2 h_2 + \cancel{h_2^3}}{h_1^2 + h_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon = \frac{2h_1^2 h_2}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3}.$$

$$\begin{cases} h_1 = \rho \cos\theta \\ h_2 = \rho \sin\theta \\ \rho = \sqrt{h_1^2+h_2^2} \end{cases}.$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^2\cos^2\theta\, \rho \sin\theta}{\rho^3} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3}{\rho^3}\cos^2\theta \sin\theta = \cos^2\theta \sin\theta,$$

Como esta expressão depende de θ, não existe $\lim_{\rho\to 0} \varepsilon$, logo a função não é diferenciável em $(0,0)$.