**Analiza modeli GARCH I M-GARCH**

*Barbara Wolska  
Bartłomiej Kaliński*

W niniejszym raporcie przedstawione zostaną wyniki analizy i modelowania szeregów czasowych przy użyciu modelu GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). Model GARCH jest popularnym narzędziem stosowanym do modelowania heteroskedastyczności, czyli zmienności wariancji, w szeregach czasowych. Jest on szczególnie przydatny w sytuacjach, gdy standardowe modele liniowe, takie jak ARIMA, nie uwzględniają występujących niestabilności wariancji.

Celem analizy było zrozumienie i modelowanie dynamiki zmienności w badanym szeregu czasowym oraz prognozowanie przyszłych wartości wariancji. Na podstawie dostępnych danych przeprowadzono estymację parametrów modelu GARCH i dokonano oceny jego adekwatności do analizowanego szeregu czasowego.

W kolejnych sekcjach raportu przedstawione zostaną szczegóły analizy, w tym prezentacja danych, estymacja parametrów modelu GARCH, diagnostyka modelu oraz prognozowanie przyszłych wartości wariancji. Ponadto, wyniki zostaną poddane krytycznej ocenie w celu określenia wiarygodności i użyteczności modelu GARCH w kontekście analizowanego szeregu czasowego.

# Symulacja i analiza szeregu Garch(2,2)

Model GARCH(2,2) jest jednym z popularnych modeli z rodziny modeli GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), które są wykorzystywane do modelowania i prognozowania heteroskedastyczności, czyli zmienności wariancji, w szeregach czasowych. Model GARCH(2,2) zakłada, że wariancje wariantów w danym szeregu czasowym zależą od wariancji wariantów w dwóch poprzednich okresach czasowych, a także od kwadratów wartości szeregów wariantów w tych okresach. W celu wysymulowania 1000 obserwacji z szeregu GARCH(2,2) założono następujący wektor parametrów [0,1 0,1 0,06 0,06 0,03] przy czym:

Rysunek 1.1. przedstawia wizualizację zmienności wysymulowanego szeregu GARCH (2,2). Amplituda wahań w większości obserwacji nie przekracza 1,5. W nielicznych przypadkach wahania sięgają 2. Charakterystycznym fragmentem szeregu są wartości w pobliżu ok. 970 obserwacji. W tym obrębie wariancja jest największa.

Rysunek .1. Wykres liniowy szeregu GARCH(2,2)

Obraz zawierający zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający diagram, Wykres, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

## Stacjonarność szeregu Garch(2,2)

Do zbadania stacjonarności reszt zastosowano test rozszerzony test Dickeya-Fullera. Rozszerzony test Dickeya-Fullera, często nazywany testem ADF, jest jednym z najpopularniejszych testów używanych do badania stacjonarności szeregów czasowych. Test ten ma na celu ocenę, czy szereg czasowy posiada jednostkowe korzenie, co wskazuje na niestacjonarność, lub brak jednostkowych korzeni, co sugeruje stacjonarność. Hipotezy testowe:

H0: Szereg jest niestacjonarny

H1: Szereg jest stacjonarny

Wartość p w badanym teście wyniosła 0,01, przy wartości statystyki testowej -9,5419. Wartość p jest zatem mniejsza od przyjętego poziomu istotności – 5%. Należy zatem odrzucić hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej – wnioskować można zatem o stacjonarności reszt modelu.

## Występowanie efektów ARCH

W celu zidentyfikowania, czy w zbudowanym modelu występują efekty ARCH, a zatem czy występuje autokorelacja reszt modelu wykorzystano test Ljunga-Boxa, dla wybranych rzędów opóźnień. Hipotezy tego testu są następujące:

H0: Brak autokorelacji reszt modelu

H1: Wnioskować można że w resztach modelu występuje autokorelacja

Autokorelacja reszt modelu została zbadana dla 1, 2, 5 oraz 10 rzędów opóźnień, a wyniki testów prezentują się następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Rząd opóźnień** | **Wartość statystyki χ2** | **p-value** |
| 1 | 3,7222 | 0,537 |
| 2 | 5,0655 | 0,0794 |
| 5 | 10,071 | 0,0733 |
| 10 | 14,229 | 0,1628 |

W każdym z badanych rzędów opóźnień p-value znacznie przekracza przyjęty poziom istotności, 5%, a zatem z dużą pewnością założyć można że autokorelacja reszt modelu nie występuje, a zatem efekty ARCH w modelu również nie występują.

## 1.3 Budowa funkcji wiarygodności oraz wyznaczanie estymatora MNW

Funkcja wiarygodności służy do oceny dopasowania modelu do danych. Zdecydowano się na zastosowanie logarytmicznej postaci funkcji wiarygodności. Dla zbudowanego modelu zaproponowano następującą postać funkcji wiarygodności:

Funkcja log-wiarygodności jest zdefiniowana na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa modelu i oblicza logarytm z iloczynu prawdopodobieństw dla każdej obserwacji. Celem jest maksymalizacja tej funkcji poprzez dobranie optymalnych wartości parametrów modelu. W przypadku szeregów czasowych, funkcja log-wiarygodności jest szczególnie użyteczna do oceny dopasowania modeli do danych finansowych, gdzie istotne jest uwzględnienie wariancji warunkowej i korelacji warunkowych między obserwacjami. Maksymalizacja funkcji log-wiarygodności umożliwia estymację parametrów modelu, co pozwala na analizę zachowań szeregów czasowych, prognozowanie przyszłych wartości oraz ocenę ryzyka. Im wyższa wartość funkcji log-wiarygodności, tym lepsze dopasowanie modelu do danych. Optymalne wartości parametrów osiągają maksimum tej funkcji, co wskazuje na najlepsze oszacowanie parametrów modelu, które najlepiej pasują do obserwacji.

Ja nie wiem dokładnie jaka jest postać tej funkcji XD

## 1.4 Estymacja modelu GARCH(2,2)

Wyestymowany model GARCH(2,2) wygląda następująco:

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, numer

Opis wygenerowany automatycznie

. W celu zbadania poprawności wyestymowanego modelu przeprowadzony został szereg testów:

* Test Ljunga-Boxa, za pomocą którego weryfikowana jest autokorelacja reszt dla jednego, dwóch oraz pięciu rzędów opóźnień, a wyniki testu wyglądają następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Rząd opóźnień** | **Wartość statystyki χ2** | **p-value** |
| 1 | 1,087 | 0,2972 |
| 2 | 1,363 | 0,3942 |
| 5 | 2,202 | 05715 |

W każdym z badanych rzędów opóźnień p-value znacznie przekracza przyjęty poziom istotności, 5%, a zatem z dużą pewnością założyć można że autokorelacja reszt modelu nie występuje.

* Test Ljunga-Boxa można przeprowadzić również na kwadratach reszt w celu sprawdzenia homoskedastyczności reszt modelu. Wyniki testu prezentują się w sposób następujący:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Rząd opóźnień** | **Wartość statystyki χ2** | **p-value** |
| 1 | 3,696 | 0,0545 |
| 11 | 10,357 | 0,0809 |
| 19 | 15,752 | 0,0739 |

W tym przypadku również zaobserwować można że p-value w każdym z badanych rzędów opóźnień znacznie przekracza przyjęty poziom istotności, 5%, a zatem z dużą pewnością założyć można że autokorelacja kwadratów reszt modelu nie występuje, a co za tym idzie reszty modelu są homoskedastyczne.

* LM ARCH test służy do zweryfikowania czy w modelu występują efekty ARCH. Hipoteza zerowa tego testu zakłada że efekty ARCH nie występują. Wyniki testu prezentują się w sposób następujący:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Rząd opóźnień** | **Wartość statystyki LR** | **p-value** |
| 5 | 2,768 | 0,0961 |
| 7 | 4,851 | 0,1306 |
| 9 | 5,964 | 0,1782 |

W każdym badanym rzędzie opóźnień p-value znacznie przekracza przyjęty poziom istotności, 5%, a zatem przyjęta została hipoteza zerowa wnioskującą o braku występowania efektu ARCH

* Nyblom stability test służy do zbadania, czy parametry wyestymowanego wcześniej modelu są stabilne. W celu określenia czy parametry są stabilne należy sprawdzić czy łączna statystyka testowa jest niższa od przyjęte wartości krytycznej. Łączna statystyka testu wyniosła 4,5557, a wartość krytyczna dla poziomu istotności 5% wynosi 1,47, a zatem nie można przyjąć hipotezy zerowej mówiącej o stałości parametrów w czasie.
* Sign Bias test służy do zbadania czy w zbudowanym modelu występuje efekt dźwigni, a zatem czy jeśli w badanym szeregu występują efekty asymetrii to wyznaczona wartość zmienności będzie zaburzona. Hipoteza zerowa tego testu zakłada poprawną specyfikację modelu. P-value dla łącznej statystyki testu wyniosło 0,1204, co znacznie przekracza przyjęty poziom istotności 5%, zatem nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej zakładającej poprawną specyfikację modelu.
* Test zgodności Pearsona jest wykorzystywany do porównywania rozkładu reszt empirycznych z przyjętym teoretycznym rozkładem prawdopodobieństwa. Hipoteza zerowa zakłada, że rozkład reszt jest równy teoretycznemu rozkładowi prawdopodobieństwa. W celu przeprowadzenia testu tworzymy kilka kategorii do których należą reszty z określonych przedziałów wielkości. Wyniki testu wyglądają następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Przedział wielkości** | **Wartość statystyki χ2** | **p-value** |
| 20 | 12,48 | 0,8641 |
| 30 | 24,26 | 0,7160 |
| 40 | 41,44 | 0.3647 |
| 50 | 40,40 | 0.8043 |

Dla każdego przedziału wielkości p-value jest wyższe niż przyjęty poziom istotności, 5%, a zatem brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej wnioskującej o równości rozkładu reszt i rozkładu teoretycznego.

## 1.5 Warunkowe wariancje, zmienności w próbie i ich prognozy

Wariancja warunkowa w momencie t jest wyliczana na podstawie przeszłych wartości błędów (reszt) i ich wariancji. Wykres wariancji warunkowej dla modelu GARCH(2,2) wygląda następująco:

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Na podstawie powyższego wykresu wariancji warunkowej stwierdzić można stwierdzić, że model dość dobrze opisuje zmienność danych. Wartości wariancji warunkowej są stosunkowo równe i niskie. Co prawda na wykresie można zaobserwować kilka pojedynczych obserwacji dla których wariancja warunkowa jest wyraźnie wyższa od pozostałych, ale są one nieliczne i nie powinny one wpływać na ogólną interpretację. Nie można też zatem wyodrębnić okresów wyjątkowo wysokiej lub niskiej zmienności, w badanym szeregu czasowym. Te same wnioski można wyciągnąć obserwując wykres zmienności warunkowej znajdujący się poniżej.

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Wyznaczenie prognozy polega na obliczeniu wartości wariancji warunkowej dla przyszłych okresów dla których chcemy uzyskać prognozę. Wartości wariancji warunkowej na 10 okresów w przód można zobaczyć na wydruku poniżej.

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, numer

Opis wygenerowany automatycznie

Oznacza to, że wartość prognozowanego szeregu czasowego znajdować się będzie w przedziale od -sigma do sigma, z prawdopodobieństwem równym 95%. Wykres poniżej jest graficzną reprezentacją prognozy wykonanej metodą „unconcditional”. Oznacza te że model nie będzie aktualizowany wraz z pojawieniem się nowych, wyprognozowanych danych. Wartość prognozy na okresy dalsze niż t+1 wyznaczana jest zatem tylko za pomocą danych historycznych. Na wykresie przewidywana wartość prognozy zaznaczona jest kolorem żółtym.

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, diagram, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

# Ocena ryzyka rynkowego dla wybranych szeregów

Celem badania jest dokonanie oceny ryzyka rynkowego, a konkretniej ryzyka cen, dla co najmniej dwóch szeregów danych - akcji Banku Millennium (MIL), akcji CD Projekt (SNK) oraz indeksu giełdowego (WIG20). Skompletowano dane zawierające 1000 przeszłych obserwacji dziennych logarytmicznych stóp zwrotu dla tych aktywów.

Ryzyko rynkowe odnosi się do niepewności, która wynika z fluktuacji cen na rynku finansowym. Analiza tego rodzaju ryzyka jest niezwykle istotna dla inwestorów, zarządców portfeli oraz osób odpowiedzialnych za podejmowanie decyzji inwestycyjnych. Pozwala na ocenę potencjalnych strat związanych z inwestycjami oraz zrozumienie, jak zmiany cen mogą wpływać na wartość portfela inwestycyjnego.

Indeks WIG20 obejmuje 20 największych i najbardziej płynnych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Stanowi on ważny wskaźnik ogólnego trendu na polskim rynku akcji oraz jest często wykorzystywany jako benchmark w analizach rynkowych. Akcje CD Projekt (SNK) są emitowane przez polską firmę zajmującą się produkcją gier komputerowych. CD Projekt jest jednym z największych graczy na rynku gier wideo i zdobył międzynarodową renomę dzięki serii gier "The Witcher" oraz wydaniu gry "Cyberpunk 2077".

Obraz zawierający diagram, tekst, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający diagram, szkic

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający diagram, linia

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający diagram, zrzut ekranu, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający diagram, tekst, zrzut ekranu, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający diagram, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, Wykres, linia, diagram

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, diagram, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, Wykres, diagram, linia

Opis wygenerowany automatycznie

## Stacjonarność szeregu

Ponownie zastosowano rozszerzony test Dickeya-Fullera w celu zbadania stacjonarności zmiennych log\_stooq\_wig20, loq\_stooq\_snk, loq\_stooq\_mil. Wartość p dla zmiennej log\_stooq\_wig20 wyniosła 0,01, a wartość statystyki testowej to -8.397. Na podstawie tej analizy, możemy stwierdzić, że wartość p jest mniejsza od przyjętego poziomu istotności 5%. Odrzucamy zatem hipotezę zerową o niestacjonarności zmiennej log\_stooq\_wig20 na korzyść hipotezy alternatywnej o jej stacjonarności.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| zmienna | Statystyka testu ADF | p-value |
| log\_stooq\_wig20 | -8.394 | 0.01 |
| log\_stooq\_snk | -9.707 | 0.01 |
| log\_stooq\_mil | -8.600 | 0.01 |

W przypadku pozostałych zmiennych graniczny poziom istotności również wyniósł 0,01 co ponownie oznacza odrzucenie hipotezy o niestacjonarności zmiennych. Analizowane zmienne są zatem stacjonarne.

## Występowanie efektów ARCH

Analogicznie do analiz w punkcie 1.1. zidentyfikowano, czy w zbudowanym modelu występują efekty ARCH, a zatem czy występuje autokorelacja reszt modelu wykorzystano test Ljunga-Boxa, dla wybranych rzędów opóźnień. Hipotezy tego testu są następujące:

H0: Brak autokorelacji reszt modelu

H1: Wnioskować można że w resztach modelu występuje autokorelacja

Autokorelacja reszt modelu została zbadana dla 1, 2, 5 oraz 10 rzędów opóźnień, a wyniki testów prezentują się następująco:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **log\_stooq\_wig20** | | **log\_stooq\_snk** | | **log\_stooq\_mil** | |
| **Rząd opóźnień** | **Wartość statystyki χ2** | **p-value** | **Wartość statystyki χ2** | **p-value** | **Wartość statystyki χ2** | **p-value** |
| 1 | 66,342 | <3,3\*10-16 | 12,596 | 0,00039 | 36,014 | 1,96\*10-9 |
| 2 | 74,067 | <2,2\*10-16 | 18,273 | 0,00011 | 43,374 | 3,92\*10-10 |
| 5 | 197.82 | <2,2\*10-16 | 56,676 | 5,90\*10-11 | 126,62 | <2,2\*10-16 |
| 10 | 264.72 | <2,2\*10-16 | 82,058 | 1,98\*10-13 | 156,3 | <2,2\*10-16 |

W każdym z badanych rzędów opóźnień p-value jest znacznie mniejsza od przyjętego poziom istotności, 5%, zatem odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. W modelu występuje efekt ARCH.

## Estymacja modeli AR-GARCH

W celu uzyskania możliwie jak najlepszego modelu przeprowadzono estymację trzech modeli o różnych specyfikacjach. W poniższej tabeli przedstawiono wyniki estymacji oraz testów dla modeli AR(1)-GARCH(1,1), AR(1)-GARCH(1,2) i AR(2)-GARCH(2,2).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **zmienna** | | **log\_stooq\_wig20** | | | **log\_stooq\_snk** | | | **log\_stooq\_mil** | | |
| **specyfikacja** | | AR(1)-GARCH(1,1) | AR(1)-GARCH(1,2) | AR(2)-GARCH(2,2) | AR(1)-GARCH(1,1) | AR(1)-GARCH(1,2) | AR(2)-GARCH(2,2) | AR(1)-GARCH(1,1) | AR(1)-GARCH(1,2) | AR(2)-GARCH(2,2) |
| **parametry** | ar1 | 0,0026  (0,2323) | 0,0027  (0,9382) | 0,0012  (0,9727) | 0,0804  (0,0217) | 0,0772  (0,0316) | -0,0794  (0,0296) | 0,0215  (0,5536) | 0,0210  (0,5668) | 0,0206  (0,5759) |
| ar2 | - | - | -0,0347  (0,3181) | - | - | -0,0550  (0,1118) | - | - | -0,0136  (0,6866) |
| omega | 0,00001  (0,0000) | 0,00001  (0,0000) | 0,00001  (0,0000) | 0,00002  (0,0002) | 0,00003  (0,0007) | 0,00003  (0,0138) | 0,0003  (0,00003) | 0,0003  (0,00003) | 0,0003  (0,0524) |
| alpha1 | 0,1168  (0,0000) | 0,1170  (0.0000) | 0,1076  (0,0166) | 0,0880  (0,0000) | 0,1140  (0,00001) | 0,1166  (0,0024) | 0,1924  (0,000005) | 0,2133  (0,000002) | 0,2136  (0,00002) |
| alpha2 | - | - | 0,0145  (0,7479) | - | - | 0,0000  (0,9999) | - | - | 0,0000  (1,0000) |
| beta1 | 0,8426  (0,0000) | 0,8421  (0,0030) | 0,8339  (0,0135) | 0,8846  (0,0000) | 0,5103  (0,0132) | 0,5193  (0,1655) | 0,5643  (0,0000) | 0,3379  (0,0115) | 0,3412  (0,3674) |
| beta2 | - | 0,000001  (0,999996) | 0,0001  (0,9997) | - | 0,3282  (0.0711) | 0,3283  (0,3129) | - | 0,1810  (0,1057) | 0,1770  (0,3216) |
| **rząd opóźnień** | | **Wartości p-value dla testu Ljunga Boxa dla reszt standaryzowanych** | | | | | | | | |
| 1 | | 0,5780 | 0,5781 | 0,5547 | 0,6956 | 0,6518 | 0,6351 | 0,8752 | 0,8505 | 0,8404 |
| 2 | | 0,9861 | 0,9862 | 0,8413 | 0,9911 | 0,09890 | 0,0127 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 5 | | 0,6843 | 0,6841 | 0,2846 | 0,2137 | 0,2204 | 0,1664 | 0,9827 | 0,9804 | 0,9034 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **zmienna** | | **log\_stooq\_wig20** | | | | | | **log\_stooq\_snk** | | | | | **log\_stooq\_mil** | | | | | |
| **specyfikacja** | | AR(1)-GARCH(1,1) | | AR(1)-GARCH(1,2) | | AR(2)-GARCH(2,2) | | AR(1)-GARCH(1,1) | | AR(1)-GARCH(1,2) | AR(2)-GARCH(2,2) | | AR(1)-GARCH(1,1) | | AR(1)-GARCH(1,2) | | AR(2)-GARCH(2,2) | |
| **rząd opóźnień** | **Wartości p-value dla testu Ljunga-Boxa dla kwadratów reszt standaryzowanych** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0,8591 | | 0,8584 | | 0,7357 | | 0,4804 | | 0,7542 | | | 0,7542 | | 0,9385 | | 0,8391 | | 0,8402 |
| 2 | 0,4877 | | 0,5346 | | 0,5602 | | 0,8754 | | 0,9897 | | | 0,9922 | | 0,7784 | | 0,8207 | | 0,7893 |
| 5 | 0,5615 | | 0,6723 | | 0,6605 | | 0,9668 | | 0,9942 | | | 0,9958 | | 0,7575 | | 0,8106 | | 0,8303 |
| **rząd opóźnień** | **Wartości p-value dla testu LM ARCH** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 0,1217 | | 0,3644 | | 0,2265 | | 0,7088 | | 0,8704 | | | 0,7979 | | 0,6147 | | 0,3022 | | 0,1934 |
| 5 | 0,1942 | | 0,4902 | | 0,5510 | | 0,9706 | | 0,8885 | | | 0,8309 | | 0,4882 | | 0,3368 | | 0,4605 |
| 7 | 0,3213 | | 0,5895 | | 0,6111 | | 0,9705 | | 0,9693 | | | 0,9417 | | 0,6064 | | 0,3938 | | 0,3991 |
| **Test** | **Pozostałe statystyki** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Test Nybloma łącznej stabilności parametrów** | Niestabilny | | Niestabilny | | Niestabilny | | Stabilny | | Stabilny | | | Stabilny | | Stabilny | | Stabilny | | Stabilny |
| **Test Nybloma dla każdego parametru indywidualnie** | brak stabilnych parametrów | | brak stabilnych parametrów | | brak stabilnych parametrów | | wszystkie parametry stabilne | | wszystkie parametry stabilne | | | wszystkie parametry stabilne | | wszystkie parametry stabilne | | wszystkie parametry stabilne | | wszystkie parametry stabilne |
| **Sign Bias Test** | Brak efektów asymetrii | | Brak efektów asymetrii | | Brak efektów asymetrii | | Brak efektów asymetrii | | Brak efektów asymetrii | | | Brak efektów asymetrii | | Brak efektów asymetrii | | Brak efektów asymetrii | | Brak efektów asymetrii |

* W przypadku zmiennej WIG20 test Ljunga-Boxa dla reszt standaryzowanych wskazuje na brak autokorelacji reszt niezależnie od specyfikacji modelu oraz rzędu opóźnień. Test ten dla kwadratów reszt nasuwa podobne wnioski, a zatem wnioskować można o homoskedastyczności reszt niezależnie od specyfikacji modelu oraz rzędu opóźnień. Wyniki testu LM ARCH również nie różnią się zbytnio w zależności od specyfikacji modelu. W każdym rozważanym modelu wyniki tego testu wskazują że efekty ARCH nie występują dla tej zmiennej. Co prawda można zauważyć że poszczególne wartości p są nieco mniejsze dla modelu AR(1)-GARCH(1,1) niż w przypadku pozostałych modeli, ale tutaj również przekraczają one znacząco przyjęty poziom istotności 5%. W przypadku pozostałych testów weryfikujących stabilność oraz efekty dźwigni, tu również poszczególne specyfikacje modelu nie różnią się między sobą. Zarówno test łącznej stabilności parametrów, jak i indywidualne testy stabilności wskazują na to że parametry niestety nie są stabilne dla zmiennej WIG20. Dla żadnej ze specyfikacji efekty asymetrii nie występują, a zatem każda ze specyfikacji jest poprawna. Podsumowując ciężko jest zdecydować się na jedną specyfikację modelu dla zmiennej WIG20. Wartości p są minimalnie wyższe w większości testów w modelu AR(1)-GARCH(1,2), więc gdyby trzeba zdecydować się na jedną specyfikację, wybrany zostałby model AR(1)-GARCH(1,2).
* Dla zmiennej SNK test Ljunga-Boxa również wskazuje na brak autokorelacji brak autokorelacji reszt niezależnie od specyfikacji modelu oraz rzędu opóźnień przy poziomie istotności 5%, poza jednym wyjątkiem: w modelu AR(2)-GARCH(2,2), dla rzędu opóźnień równego 2 wartość p dla tego testu wyniosła 0,0127, co oznacza że dla tej specyfikacji istnieje ryzyko występowania autokorelacji reszt drugiego stopnia. Test Ljunga Boxa dla kwadratów reszt wskazuje natomiast, tak jak w przypadku zmiennej wskazuje na homoskedastyczność reszt w każdej konfiguracji modelu. Test LM ARCH nie wykazał nigdzie występowania efektów ARCH, a pozostałe testy wskazały że model niezależnie od specyfikacji ma stabilne parametry oraz nie występują w nim efekty asymetrii. Ze względu na wyniki testu Ljunga Boxa dla reszt standaryzowanych najlepszą specyfikacją tego modelu jest model AR(1)-GARCH(1,1).
* Zmienna MIL, podobnie jak zmienna WIG20 wykazuje bardzo zbliżone wyniki diagnostyk niezależnie od specyfikacji modelu, dlatego tu też trudno jest powiedzieć o jednej specyfikacji wyraźnie lepszej od pozostałych. Ze względu na wyniki testu LM ARCH, w którym lepsze wyniki można zaobserwować dla modelu AR(1)-GARCH(1,1), oraz fakt że parametr AR(2) nie jest istotny przy specyfikacji modelu AR(2)-GARCH(2,2) (jest to prawdą również dla pozostałych zmiennych) można przyjąć, że najlepszą specyfikacją modelu dla zmiennej MIL jest model AR(1)-GARCH(1,1).
* Dodatkowo, wartości kryteriów informacyjnych potwierdziły wcześniejsze rozważania na temat wyboru specyfikacji modelu, i wskazały one na dokładnie te same specyfikacje dla poszczególnych zmiennych co analiza wyników poszczególnych testów i statystyk.

## Warunkowe wariancje, zmienności w próbie i prognozy

Wariancja warunkowa w momencie t jest wyliczana na podstawie przeszłych wartości błędów (reszt) i ich wariancji. Na poniższych wykresach wariancji warunkowej i zmienności warunkowej dla zmiennej WIG20 zaobserwować można, że wartości te są niezwykle niskie. Maksymalna wartość wariancji warunkowej dla tej zmiennej wyniosła nieco ponad 0,0035. Wciąż jednak zaobserwować można w których momentach była ona wyraźnie większa niż zwykle. Dla indeksu ok. 200 wyraźnie zaznaczone wierzchołki spowodowane są wybuchem pandemii COVID-19. Skok w wartościach wariancji przy indeksach ok. 700 spowodowany jest początkiem inwazji Rosji na Ukrainę. Poza tymi dwoma wyraźnymi okresami wysokiej zmienności wariancja oscyluje praktycznie wokół zera.Obraz zawierający tekst, diagram, zrzut ekranu, linia

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, Czcionka, diagram, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

Dla zmiennej SNK wariancja i zmienność warunkowa wyglądają nieco inaczej. Wciąż widać wierzchołki w tych samych momentach co dla zmiennej WIG20, natomiast są one mniej wyraźne. Wariancja warunkowa SNK jest mniej stabilna, co może świadczyć o tym że model dla tej zmiennej minimalnie gorzej radzi z opisaniem zmienności danych rzeczywistych niż w przypadku zmiennej WIG20. Wykresy wariancji warunkowej i zmienności warunkowej zmiennej SNK można zobaczyć poniżej.

Obraz zawierający tekst, Czcionka, zrzut ekranu, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, Czcionka, zrzut ekranu, diagram

Opis wygenerowany automatycznie Dla zmiennej MIL sytuacja wygląda prawie tak jak w przypadku zmiennej WIG20, bardzo niska wariancja warunkowa charakteryzująca się wartościami skrajnymi dla indeksów ok. 200 i ok. 700. Wykresy wariancji warunkowej i zmienności warunkowej zmiennej SNK można zobaczyć poniżej.

Obraz zawierający tekst, diagram, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Prognozy są natomiast wyznaczane w sposób analogiczny do metody opisanej w punkcie 1.5. Prognozy były przeprowadzone na specyfikacjach modelu wybranych wcześniej. Wartości wariancji warunkowej na 10 okresów w przód można zobaczyć na wydruku poniżej (kolejność zmiennych od lewej: WIG20, SNK, MIL).

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, numer

Opis wygenerowany automatycznie

Oznacza to, że wartość prognozowanego szeregu czasowego znajdować się będzie w przedziale od -sigma do sigma, z prawdopodobieństwem równym 95%. Wykres poniżej jest graficzną reprezentacją prognozy wykonanej metodą „unconcditional”. Oznacza te że model nie będzie aktualizowany wraz z pojawieniem się nowych, wyprognozowanych danych. Wartość prognozy na okresy dalsze niż t+1 wyznaczana jest zatem tylko za pomocą danych historycznych. Na poniższych wykresach przewidywana wartość prognozy zaznaczona jest kolorem żółtym. Wykresy przedstawiają prognozowane wartości kolejno dla zmiennych WIG20, SNK i MIL

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, diagram, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

# Estymacja zmienności i korelacji warunkowych finansowych szeregów czasowych

Celem tego raportu jest ocena zmienności warunkowych i korelacji warunkowych w modelu MGARCH (Multivariate GARCH) dla dwóch szeregów czasowych - logarytmicznych stóp zwrotu akcji francuskiej firmy Burelle (log\_Burelle) oraz francuskiego indeksu giełdowego CAC40 (log\_FCHI). Dane te zostały zebrane z platformy Yahoo Finance i obejmują 1000 przeszłych obserwacji dziennych.

Zmienność warunkowa odzwierciedla stopień fluktuacji lub ryzyka w danym szeregu czasowym. W przypadku finansowych szeregów czasowych, zmienność warunkowa odgrywa istotną rolę w analizie ryzyka inwestycji. Model MGARCH jest używany do modelowania zmienności warunkowej, uwzględniając potencjalne zależności i nieliniowości w danych.

Zmienna CAC40 odnosi się do indeksu giełdowego CAC 40. CAC 40 jest głównym indeksem giełdowym we Francji i reprezentuje 40 największych i najbardziej płynnych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Paryżu (Euronext Paris). Indeks CAC 40 jest szeroko używany jako miara ogólnego stanu i wydajności francuskiego rynku akcji.

Zmienna Burelle odnosi się do akcji francuskiej firmy Burelle. Burelle jest spółką holdingową z siedzibą we Francji, która jest zaangażowana w różne sektory, takie jak motoryzacja, tworzywa sztuczne, energia odnawialna itp. Akcje Burelle są notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Paryżu i reprezentują udziały w tej spółce.

Obraz zawierający tekst, diagram, zrzut ekranu, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, diagram, zrzut ekranu, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

## Analiza zmienności i korelacji

Analiza zmienności i korelacji została przeprowadzona na próbie rolowanej. Polega to na wyborze pewnej ilości obserwacji (w tym przypadku 60) i przesuwanie ich wzdłuż serii czasowej. Badanie zmienności na próbie rolowanej pozwala na lepszą identyfikację wzorców zmian w czasie. Za pomocą tej metody łatwo jest zaobserwować pewne trendy które mogą przejawiać się w zgromadzonych danych, takich jak np. trendy sezonowe.

Na poniższych wykresach zaobserwować można odchylenia standardowe, korelację i kowariancję obliczone na próbie rolowanej. Przy zmiennej Burelle można wyraźnie oddzielić okresy o większej i mniejszej zmienności. Odchylenie standardowe jest wyraźnie większe w okresach początku pandemii i początków wojny na Ukrainie. Najniższe odchylenie std. widać w okresie pandemii, co może być spowodowane niższą aktywnością ekonomiczną na całym świecie. Wykres zmiennej FCHI wygląda podobnie, średnie odchylenie jest dla tej zmiennej odrobinę niższe, może to być spowodowane faktem, że zagregowany indeks dla 40 spółek powinien wykazywać większą stabilność niż dla jednej spółki. Wykres korelacji wskazuje na istnienie korelacji dynamicznej między tymi zmiennymi, a zatem jest ona wyraźnie zmienna w czasie. Zaznaczyć też jednak, że korelacja ta nie jest zbyt wysoka, mieści się ona w przedziale od ok. -0.3 do 0.3. Nie ma zatem sensu doszukiwać się dużego związku między tymi zmiennymi, a korelacje te mogą mieć charakter pozorny. Wykres kowariancji pokazuje jednak, że zmienne nie są jednak od siebie całkowicie niezależne, gdyż dosyć rzadko oscyluje ona wokół zera. Może być tak ponieważ zmienne te w podobny sposób reagują na szoki zewnętrzne.

Obraz zawierający tekst, diagram, szkic, linia

Opis wygenerowany automatycznie

# Estymacja AR-MGARCH

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | DCC(1,1)-AR(1)-GARCH(1,1) | | DCC(1,0)-AR(1)-GARCH(1,1) | | DCC(1,1)-AR(2)-GARCH(2,2) | | DCC(1,0)-AR(2)-GARCH(2,2) | |
| [log\_Burelle] | [log\_FCHI] | [log\_Burelle] | [log\_FCHI] | [log\_Burelle] | [log\_FCHI] | [log\_Burelle] | [log\_FCHI] |
| ar1 | 0,0451  (0,1294) | -0,0265  (0,5047) | 0,0451  (0,2193) | -0,0265  (0,5051) | 0,0474  (0,1933) | -0,0252  (0,9861) | 0,0474  (0,1933) | -0,0252  (0,9861) |
| ar2 | 0,1014  (0,2188) | - | 0,1014  (0,2188) | - | -0,0249  (0,5084) | -0,0248  (0,9823) | -0,0249  (0,5084) | -0,0248  (0,9823) |
| omega | 0,1289  (0,0384) | 0,1160  (0,0046) | 0,1289  (0,0384) | 0,1014  (0,0384) | 0,1878  (0,0257) | 0,1225  (0,9905) | 0,1878  (0,0257) | 0,1225  (0,9905) |
| alpha1 | 0,8516  (0,0001) | 0,1889  (0,0006) | 0,8516  (0,0001) | 0,1289  (0,0001) | 0,0971  (0,0099) | 0,1730  (0,9835) | 0,0971  (0,0099) | 0,1730  (0,9835) |
| alpha2 | - | - | - | - | 0,1633  (0,0002) | 0,0253  (0,9979) | 0,1633  (0,0002) | 0,0253  (0,9979) |
| beta1 | 0,8516  (0,0000) | 0,7524  (0,0000) | 0,8516  (0,0000) | 0,7524  (0,0000) | 0,0000  (1,0000) | 0,7397  (0,9950) | 0,0000  (1,0000) | 0,7397  (0,9950) |
| beta2 | - | - | - | - | 0,7088  (0,0000) | 0,000001  (1,0000) | 0,7088  (0,0000) | 0,000001  (1,0000) |
| dcca1 | 0,0038  (0,2891) | | 0,0187  (0,4646) | | 0,0039  (0,4766) | | 0,0208  (0,7173) | |
| dccb1 | 0,9910  (0,0000) | | - | | 0,9907  (0,0000) | | - | |

Parametr dcca1 odzwierciedla asymetrię w wariancji warunkowej dla pierwszego szeregu czasowego, natomiast parametr dccb1 odzwierciedla asymetrię w wariancji warunkowej dla drugiego szeregu czasowego. Wartości tych parametrów wskazują na obecność asymetrii w wariancji warunkowej, co oznacza, że zmienność stóp zwrotu może różnić się w zależności od kierunku zmian. Jeśli wartość parametru dcca1 lub dccb1 jest różna od zera, oznacza to istnienie asymetrii w wariancji dla danego szeregu czasowego. Na podstawie wartości parametrów dccb1 w modelach można stwierdzić, że wariancja szeregu log\_FCHI charakteryzuje się znaczną asymetrią. Asymetria wariancji dla szeregu log\_Burella w każdym z modeli jest nieznaczna. Oszacowania wartości parametrów dla par modeli DCC(1,1)-AR(1)-GARCH(1,1), DCC(1,0)-AR(1)-GARCH(1,1) i DCC(1,1)-AR(2)-GARCH(2,2), DCC(1,0)-AR(2)-GARCH(2,2) są niemalże identyczne. W żadnym z analizowanych modeli parametry ar1 i ar2 nie są istotne statystycznie (na przyjętym poziomie istotności 5%).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Kryterium inf./model** | DCC(1,1)-AR(1)-GARCH(1,1) | DCC(1,0)-AR(1)-GARCH(1,1) | DCC(1,1)-AR(2)-GARCH(2,2) | DCC(1,0)-AR(2)-GARCH(2,2) |
| **Akaike** | 7,1100 | 7,1089 | 7,1134 | 7,1123 |
| **Bayes** | 7,1738 | 7,1678 | 7,2067 | 7,2006 |
| **Shibata** | 7,1096 | 7,1086 | 7,1127 | 7,1117 |
| **Hannan-Quinn** | 7,1342 | 7,1313 | 7,1489 | 7,1459 |
| **Log-Likelihood** | -3541,987 | -3542,453 | -3537,717 | -3538,148 |

Najniższe wartości kryterium informacyjnych, a zarazem najwyższą bezwzględna wartość logarytmicznej funkcji wiarygodności osiąga model DCC(1,0)-AR(1)-GARCH(1,1).

## Warunkowe wariancje, zmienności w próbie i ich prognozy

Obraz zawierający tekst, Czcionka, diagram, linia

Opis wygenerowany automatycznie