

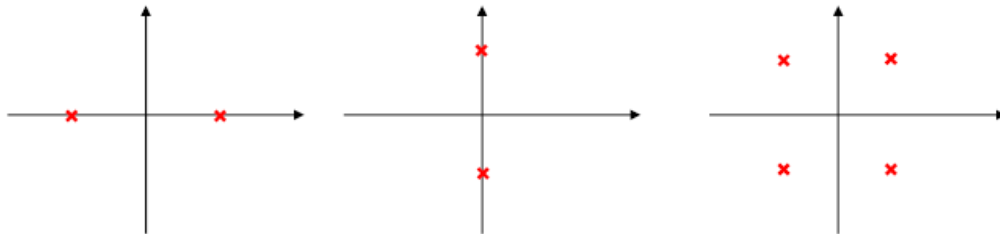
دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

تحقیق مشتق گیری در حضور سطر تماماً صفر
روش راث هرویتز

باربد طاهرخانی ۴۰۱۲۰۴۹۳

۱ یک سطر تماماً صفر

در واقع زمانی این اتفاق می افتد که معادله مشخصه حداقل یک جفت ریشه غیر هم علامت (یک قطب پایدار و یکی ناپایدار) یا یک جفت ریشه موهومی (قطب ناپایدار مرزی) یا اینکه چند جفت ریشه مزدوج مختلط داشته باشد. در هر صورت سیستم در حضور این سطر پایدار نخواهد بود.



پس در حضور این سطر راه حل ما متوقف نمی شود، از سطر ماقبل صقر مشتق گرفته و ضرایب آن را با سطر جایگزین میکنیم این چند جمله ای را کمکی یا در اصطلاح *Auxiliary Polynomial* می گویند.

۲ تعریف چندجمله‌ای فرعی

وقتی یک سطر در جدول راث صفر می شود، سطر بالایی که هنوز مقدار دارد، یک چندجمله‌ای ویژه به نام چندجمله‌ای فرعی ایجاد می کند:

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-4} s^{n-4} + \dots \quad (1)$$

این چندجمله‌ای از ضرایب ستون اول سطر بالایی جدول ساخته می شود.

۳ خاصیت چندجمله‌ای فرعی

یک خاصیت مهم این چندجمله‌ای این است که ریشه‌های آن ریشه‌های معادله مشخصه‌ای هستند که دقیقاً روی محور موهومی قرار دارند و متقارن اند.
به عبارت دیگر، اگر $s = j\omega$ یک ریشه باشد، آنگاه $s = -j\omega$ نیز حتماً ریشه خواهد بود.

۴ اثبات متقارن بودن ریشه‌ها

۱.۴ گام اول: ضرایب متقارن

چندجمله‌ای فرعی فقط شامل توان‌های زوج از s است:

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_0 \quad (۲)$$

از آنجایی که همه ضرایب حقیقی هستند، می‌توان نشان داد که اگر $s = j\omega$ یک ریشه باشد، آنگاه $s = -j\omega$ نیز ریشه است.

۲.۴ گام دوم: نتیجه‌گیری از صفر شدن سطر

در جدول راث-هرویتز، وقتی سطری به‌طور کامل صفر می‌شود، به این معناست که سطر بالایی (چندجمله‌ای فرعی) یک عامل مضاعف از چندجمله‌ای مشخصه اصلی است.

چندجمله‌ای فرعی دارای ریشه‌های خالصاً موهومی است و این ریشه‌ها در معادله مشخصه اصلی نیز حضور دارند. به دلیل تقارن ضرایب، هر ریشه روی محور موهومی دارای جفت متقارن خود است.

حالا با اثبات وجود ریشه متقارن می‌ایم اثبات مشتق از سطر بالا انجام می‌دهیم.

۵ اثبات مشتق‌گیری

۱.۵ مرحله‌ی اول.

فرض کنید در جدول راث سطر $(k+1)$ ام کاملاً صفر شود.

۲.۵ مرحله‌ی دوم.

نشان دادیم این اتفاق معادل است با اینکه چندجمله‌ای $P(s)$ دارای عامل $(s^2 + \omega^2)^m$ باشد (ریشه‌ی موهومی تکراری)

۳.۵ مرحله‌ی سوم.

سطر k ام که قبل از این سطر صفر قرار دارد، حاوی ضرایب یک چندجمله‌ای از جنس $B(s)$ است که در واقع نشان‌دهنده‌ی بخشی از $P(s)$ (یا ترکیبی خطی از ضرایب آن) می‌باشد. این همان «چندجمله‌ای کمکی» است.

۴.۵ مرحله‌ی چهارم.

وقتی $(s^2 + \omega^2)^m$ (با $m \geq 2$) در $P(s)$ ظاهر شود، شرط ریشه‌ی تکراری ایجاب می‌کند که هم $P(j\omega) = 0$ و هم $P'(j\omega) = 0$ باشند. در بخش مربوط به روش راث، صفر شدن سطر $-(k+1)$ ام به معنای «برآورده شدن شرط $P(j\omega) = 0$ » است؛ اما برای ادامه‌ی روند تحلیل و رعایت شرط $P'(j\omega) = 0$ باید از مشتق همان بخش (چندجمله‌ای کمکی) استفاده کنیم.

۵.۵ مرحله‌ی پنجم.

بنابراین با جایگزین کردن سطر صفر با ضرایب مشتق $B(s)$ (یعنی $B'(s)$)، در حقیقت اجازه می‌دهیم تا اثر «ریشه‌ی تکراری» در ادامه‌ی راث لحاظ شود. پس از این مرحله، می‌توانیم دوباره روابط راث را دنبال کنیم و نتیجه‌ی نهایی درباره‌ی تعداد ریشه‌های با قسمت حقیقی منفی یا مثبت را به دست آوریم.

۶.۵ جمع بندی

مشتق گیری در واقع بیانگر ارتباط دینامیکی بین ریشه‌های تقارن یافته روی محور موهومی است. با این کار تاثیر این ریش ها بهطور غیر مستقیم در سیستم لحاظ میشود در واقع با اینکار داریم عوامل باقی مانده چند جمله ای را برای ناپایداری بررسی کند.