



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

کنترل خطی تمرین سری اول

باربد طاهرخانی ۴۰۱۲۰۴۹۳

تهیه شده با \LaTeX



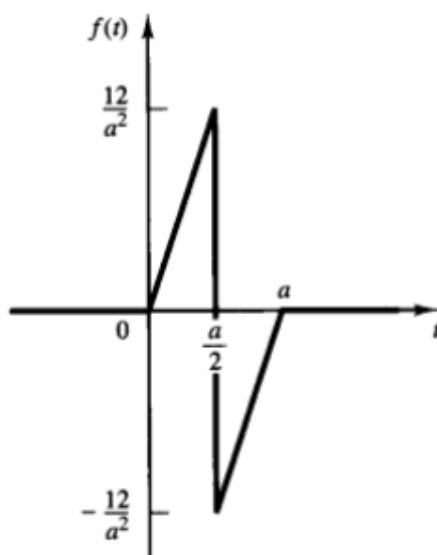
فهرست مطالب

۲	۱	سوال اول
۳	۲	سوال دوم
۳	۱.۲	بخش الف
۳	۲.۲	بخش ب
۴	۳.۲	بخش ج
۵	۳	سوال سوم
۵	۱.۳	بخش الف
۶	۲.۳	بخش ب
۷	۴	سوال چهارم
۹	۱.۴	بخش الف
۹	۲.۴	بخش ب



۱ سوال اول

برای پیدا کردن لاپلاس کافیه معادله دو خط را پیدا کرده و در گام بعد از بازه 0 تا a انتگرال می گیریم.



بازه انتگرال گیری 0 تا $\frac{a}{2}$:

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{24xe^{-sx}}{a^3} dx = \frac{24}{a^3} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-\frac{as}{2}} \left(\frac{as}{2} + 1 \right)}{s^2} \right)$$

بازه انتگرال گیری $\frac{a}{2}$ تا a :

$$\int_{\frac{a}{2}}^a \left(\frac{24x}{a^3} - \frac{24}{a^2} \right) e^{-sx} dx = -\frac{12e^{-as} \left(ase^{\frac{as}{2}} - 2e^{\frac{as}{2}} + 2 \right)}{a^3 s^2}$$

جمع این دو انتگرال:

$$\frac{24}{a^3} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-\frac{as}{2}} \left(\frac{as}{2} + 1 \right)}{s^2} \right) - \frac{12e^{-as} \left(ase^{\frac{as}{2}} - 2e^{\frac{as}{2}} + 2 \right)}{a^3 s^2} =$$

تبدیل لاپلاس این نمودار:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{24e^{-as} + 24ase^{-\frac{as}{2}} - 24}{a^3 s^2}$$



۲ سوال دوم

۱.۲ بخش الف

مدل سازی بخش مکانیکی :

$$\tau_m = T_L + b\omega + K\theta + J\frac{d\omega}{dt}$$

و می دانیم که :

$$K_m i = \tau$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

حال با توجه به مدل سازی و دانسته ها تبدیل لاپلاس از عبارت می گیریم :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} =$$

$$K_m I(S) = b\omega(S) + JS\omega(S) + K\frac{\omega(S)}{S} + T_L$$

۲.۲ بخش ب

حال کافی است که با ارتباط بخش الکتریکی و مکانیکی تابع تبدیل را بدست بیاوریم. سه المان که موازی هستند را به حوزه لاپلاس برده و موازی می کنیم :

$$R_{eq} = R \parallel LS \parallel \frac{1}{CS}$$

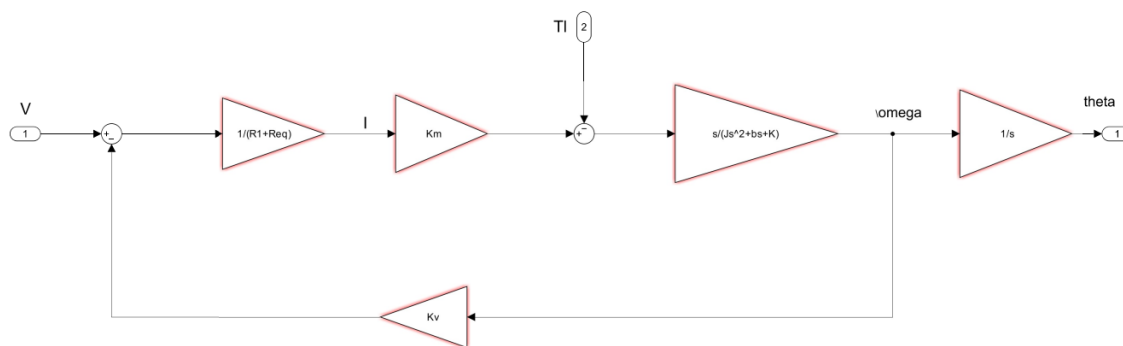
$$R_{eq} = \frac{\frac{S}{C}}{S^2 + \frac{1}{RC}S + \frac{1}{LC}}$$

یک KVL می زنیم و معادلات رو می نویسیم :

$$V(S) = (R_1 + R_{eq})I(S) + K_v\omega(S)$$



حالا که معادلات مکانیکی و الکتریکی حاکم به سیستم را نوشتیم، نوبت نمودار بلوک دیاگرام است:



شکل ۱: بلوک دیاگرام سیستم

۳.۲ بخش ج

در اینجا برای سادگی بر خلاف بخش الف و ب از اغتشاش چشم‌پوشی می‌کنیم و با توجه به فرمول که در بخش ب ۲.۲ $I(S)$ را بدست می‌آوریم.

$$I(S) = \frac{V(S) - K_v \omega(S)}{R1 + R_{eq}}$$

و در فرمول ۱.۲ جایگذاری می‌کنیم.

$$K_m \frac{V(S) - K_v \omega(S)}{R1 + R_{eq}} = b\omega(S) + JS\omega(S) + K \frac{\omega(S)}{S} + T_L$$

همان جور که قرار شد از اغتشاش نظر می‌کنیم:

$$K_m \frac{V(S)}{R1 + R_{eq}} = b\omega(S) + JS\omega(S) + K \frac{\omega(S)}{S} + \frac{K_v \omega(S)}{R1 + R_{eq}} k_m$$

$$K_m \frac{V(S)}{R1 + R_{eq}(b + JS + K \frac{1}{S} + \frac{K_v}{R1 + R_{eq}} k_m)} = \omega(S)$$

$$K_m \frac{V(S)}{R1 + R_{eq}(b + JS + K \frac{1}{S} + \frac{K_v}{R1 + R_{eq}} k_m)} = S\theta(S)$$

تقسیم بر $R1$ می‌کنیم و بجای ولتاژ تابع پله را قرار می‌دهیم:

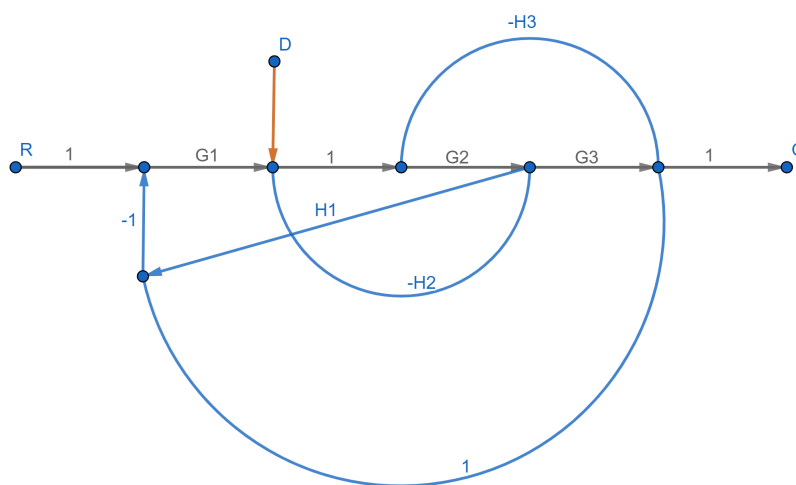
$$\frac{\theta(S)}{R1} = K_m \frac{\frac{1}{S^2}}{R1 + R_{eq}(b + JS + K \frac{1}{S} + \frac{K_v}{R1 + R_{eq}} k_m) R1}$$



۳ سوال سوم

۱.۳ بخش الف

نمودار SFG را رسم می‌کنیم. (خطوط آبی مسیر فیدبک و خط نارنجی مسیر ورود اغتشاش است):



شکل ۲: نمودار SFG

ما دو ورودی داریم و از آنجا که سول در بخش اول خروجی به ورودی را خواسته ما از ورودی اغتشاش صرف نظر می‌کنیم. حال با استفاده از قاعده میسن تابع تبدیل را حساب می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_i \Delta_i}{\Delta}$$

مسیر پیشرو:

$$p_1 = G_{123}$$

حلقه ها:

$$l_1 = -H_2 G_2$$

$$l_2 = -H_3 G_{23}$$

$$l_3 = -G_{123}$$

$$l_4 = -H_1 G_{12}$$

$$\Delta = 1 - \sum l$$

با توجه به اینکه همه حلقه ها با هم تماس دارند:

$$\Delta_1 = 1$$



با این تفاسیر تابع تبدیل ما برابر است با:

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G_{123}}{1 + H_2 G_2 + H_3 G_{23} + H_1 G_{12} + G_{123}}$$

۲.۳ بخش ب

حال با توجه به اصل جمع پذیری در سیستم های خطی، ورودی را اغتشاش می گیریم. از بخش قبل گین حلقه ها را پیدا کردیم فقط کافی است مسیر پیشرو جدید را پیدا کنیم که برابر است با:

$$p_1 = G_{23}$$

تابع تبدیل خروجی به اغتشاش:

$$\frac{C(S)}{D(S)} = \frac{G_{23}}{1 + H_2 G_2 + H_3 G_{23} + H_1 G_{12} + G_{123}}$$

در نهایت برای اینکه اثر اغتشاش ما رفع شود باید اثر ورودی خیلی بیشتر از اغتشاش باشد و با تقسیم این دو تابع تبدیل اینکار را انجام می دهیم که برای اینکه اثر اغتشاش از بین برود تابع تبدیل صورت باید خیلی بزرگ تر باشد:

$$\frac{\frac{C(S)}{R(S)}}{\frac{C(S)}{D(S)}} = G1$$

$$G1 \simeq \infty$$

برای اینکه این کسر بزرگ باشد نیاز است که $G1$ به سمت بی نهایت میل کند.



۴ سوال چهارم

در T_2 هدف پیدا کردن تابع تبدیل خروجی به ورودی سیستم است اما در T_1 ما تابع تبدیل خروجی به تابع خطا را پیدا می‌کنیم پس از خاصیت نسبت استفاده می‌کنیم و درواقع:

$$T_1 = \frac{T_2}{\frac{Y_2}{Y_1}}$$

```
1 clear all
2 s=zpk('s');
3 G1 = 1/s;
4 G2 = 2*s+1;
5 G3 = 1/(s^2+1);
6 G4 = s/(s+1);
7 H1 = 3/s;
8 H2 = (s-1)/(s+3);
9 H3 = s/(s^2+3*s+1);
10 H4 = 1/(s+2);
11
12 %Y5/Y1
13 systemnames = 'G1 G2 G3 G4 H1 H2 H3 H4';
14 inputvar = '[r]';
15 outputvar = '[G3 - H4]';
16 input_to_G1 = '[r - H1 - H3]';
17 input_to_G2 = '[G1]';
18 input_to_G3 = '[G2 +G4 - H2]';
19 input_to_G4 = '[r -H1 - H3]';
20 input_to_H1 = '[G1]';
21 input_to_H2 = '[G3 - H4]';
22 input_to_H3 = '[G3 - H4]';
23 input_to_H4 = '[G3 - H4]';
24 sysoutname = 'plant_ic';
25 cleanupsysic = 'yes';
26 sysic
27
28
29 plant_ic.InputName = {'y1'}; % Set the input names
30 plant_ic.OutputName = {'y5'}; % Set the output names
```



```

31 T2 = minreal(plant_ic);
32
33
34 %Y5/Y2
35 systemnames = 'G1 G2 G3 G4 H1 H2 H3 H4';
36 inputvar = '[r]';
37 outputvar = '[r - H1 - H3]';
38 input_to_G1 = '[r - H1 - H3]';
39 input_to_G2 = '[G1]';
40 input_to_G3 = '[G2 +G4 - H2]';
41 input_to_G4 = '[r -H1 - H3]';
42 input_to_H1 = '[G1]';
43 input_to_H2 = '[G3 - H4]';
44 input_to_H3 = '[G3 - H4]';
45 input_to_H4 = '[G3 - H4]';
46 sysoutname = 'plant_ic2';
47 cleanupsysic = 'yes';
48 sysic
49
50 %T1=T2/(Y2/Y1)
51 plant_ic2.InputName = {'y1'}; % Set the input names
52 plant_ic2.OutputName = {'y2'}; % Set the output names
53 plant_ic2 = minreal(plant_ic2);
54 T1=minreal(plant_ic/plant_ic2);
55
56
57 T2
58 T1
59 pole(T2)

```

Code 1: Transfer Function

۱.۴ بخش الف

خروجی:

$$T2 =$$

From input "y1" to output "y5" :

$$3s(s+3)(s+2.618)(s+2)(s+0.382)(s^2+s+0.3333)$$

$$(s+2.444)(s+0.9276)(s+0.3896)(s^2+6.083s+9.52)(s^2+0.2081s+0.6491)(s^2-0.05238s+3.847)$$

$$T1 =$$

From input "y2" to output "y5" :

$$3(s+3)(s+2)(s^2+s+0.3333)$$

$$s(s+1)(s^2+5.727s+8.627)(s^2+0.2727s+0.8114)$$

۲.۴ بخش ب

قطب ها:

$$-2.4444 + 0.0000i$$

$$-0.3896 + 0.0000i$$

$$0.0262 + 1.9612i$$

$$0.0262 - 1.9612i$$

$$-3.0414 + 0.5200i$$

$$-3.0414 - 0.5200i$$

$$-0.1041 + 0.7989i$$

$$-0.1041 - 0.7989i$$