دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

کنترل خطی

تمرین سری دوم

باربد طاهرخانی ۴۰۱۲۰۴۹۳

فهرست مطالب

۱ سوال اول

داده های مهمی که روی شکل مشخص شده را استخراج می‌کنیم :

زمان فراجهش :	$t_p = 0.332$
زمان نشست :	$t_s = 1.41$
مقدار حالت ماندگار :	$c(\infty) = 1.58$
مقدار فراجهش :	$c(t_p) = 2.28$
درصد فراجهش :	$M_p = 44.3\%$

حال با استفاده از روابط ویژگی ها و رفتار گذرا ζ و ω_n و K را پیدا می‌کنیم.

۱.۱ پیدا کردن K

با توجه به مقدار حالت ماندگار می‌توان K را بدست اورد، کافی است که از مقدار نهایی استفاده کنیم :

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

ورودی پله است پس :

$$Y(s) = T(s)R(s) = T(s)\tfrac{1}{s}$$

در نتیجه :

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sT(s)\tfrac{1}{s}$$
$$T(0) = \tfrac{K\omega_n^2}{\omega_n^2}$$
$$K = 1.58$$

۲.۱ پیدا کردن ζ

با استفاده از فرمول درصد فراجهش ζ را پیدا می‌کنیم :

$$M_p = 100e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$
$$\frac{44.3}{100} = e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$
$$\ln\frac{44.3}{100} = (\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})$$
$$-0.81418 = (\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})$$

به توان دو می‌رسانیم :

$$0.66288 = (\frac{\zeta^2\pi^2}{1-\zeta^2})$$
$$0.66288(1-\zeta^2) = \zeta^2\pi^2$$
$$\zeta = \sqrt{\frac{0.66288}{0.66288+\pi^2}} = 0.250875114$$

۳.۱ پیدا کردن ω_n

از فرمول زمان نشست یا از فرمول زمان فراجهش استفاده می‌کنیم :
فرمول فراجهش:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta = 0.250875114 \quad t_p = 0.332$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\zeta^2}} = 9.775246115$$

۴.۱ تابع تبدیل

تابع تبدیل برابر می‌شود با :

$$\frac{151}{s^2 + 4.905s + 95.56}$$

۵.۱ کد متلب

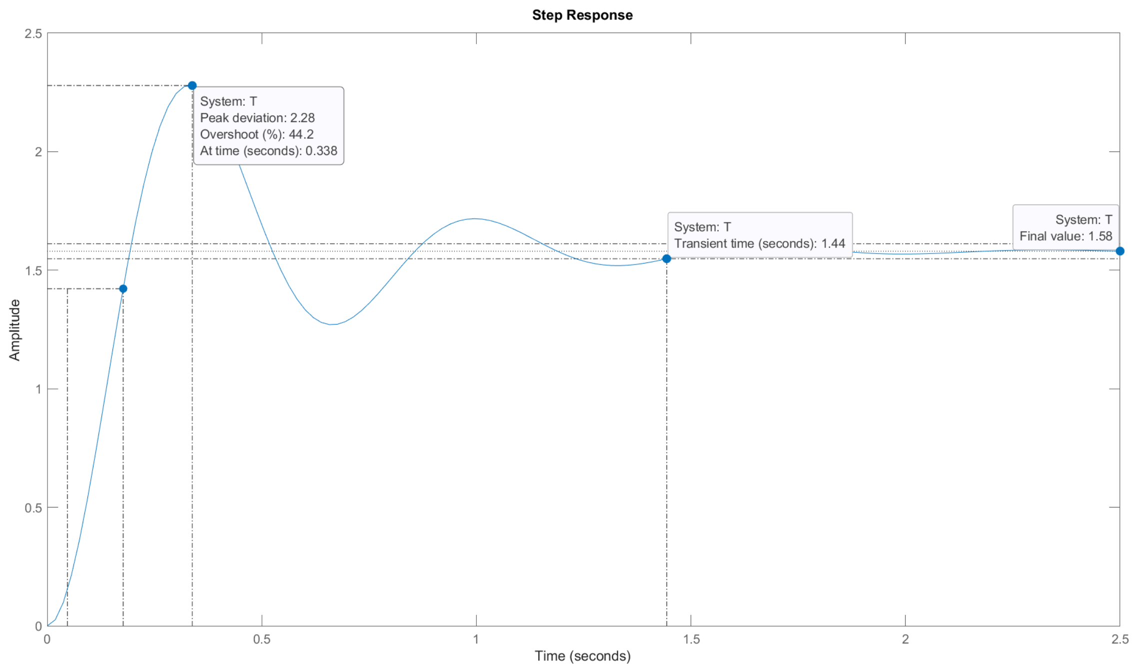
حالا برای اطمینان مقادیر بدست اورده را در متلب امتحان می‌کنیم :

```
zeta = 0.250875114;
wn = 9.775245115;
K = 1.58;            %DCgain

% Transerfunction
num = K * wn^2 ;
den = [1, 2*wn*zeta, wn^2];
T = tf(num, den);

% plot
step(T);
```

Code 1: Step Response

۶.۱ نمودار

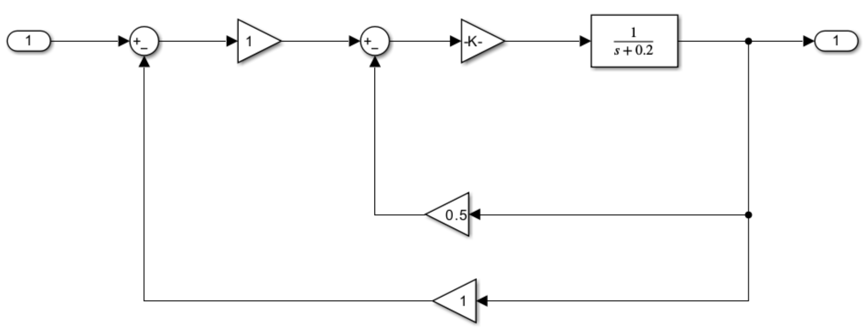
نمودار بدست آمده با تقریب خوبی نزدیک نمودار سوال است :



شکل ۱: سیگنال خروجی

۲ سوال دوم

بلوک دیاگرام مدل را رسم می‌کنیم :



شکل ۲: مدل ماشین دیسی

۱.۲ بخش الف

نخست تابع تبدیل بدون فیدبک را حساب می‌کنیم : برای اینکار نخست تابع تبدیل فیدبک ذاتی سیستم را بدست اورده و ضربدر K_a می‌کنیم :

$$G(s) = \frac{0.4\frac{1}{s+0.2}}{1 + 0.5 \times 0.4\frac{1}{s+0.2}}$$

$$G(s) = \frac{0.4\frac{1}{s+0.2}}{\frac{s+0.2+0.2}{s+0.2}}$$

$$G(s) = \frac{0.4}{s+0.4}$$

کافی است هم ضربدر یک کنیم تا گین حلقه باز محاسبه شود پس همین برابر با گین است : برای گین حلقه بسته گین حلقه باز را که فیدبک روش امده اعمال می‌کنیم:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$T(s) = \frac{\frac{0.4}{s+0.4}}{1+\frac{0.4}{s+0.4}}$$

$$T(s) = \frac{\frac{0.4}{s+0.4}}{\frac{s+0.4}{s+0.4}+\frac{0.4}{s+0.4}}$$

$$T(s) = \frac{\frac{0.4}{s+0.4}}{1+\frac{0.4}{s+0.4}}$$

$$T(s) = \frac{0.4\frac{1}{s+0.4}}{\frac{s+0.8}{s+0.4}}$$

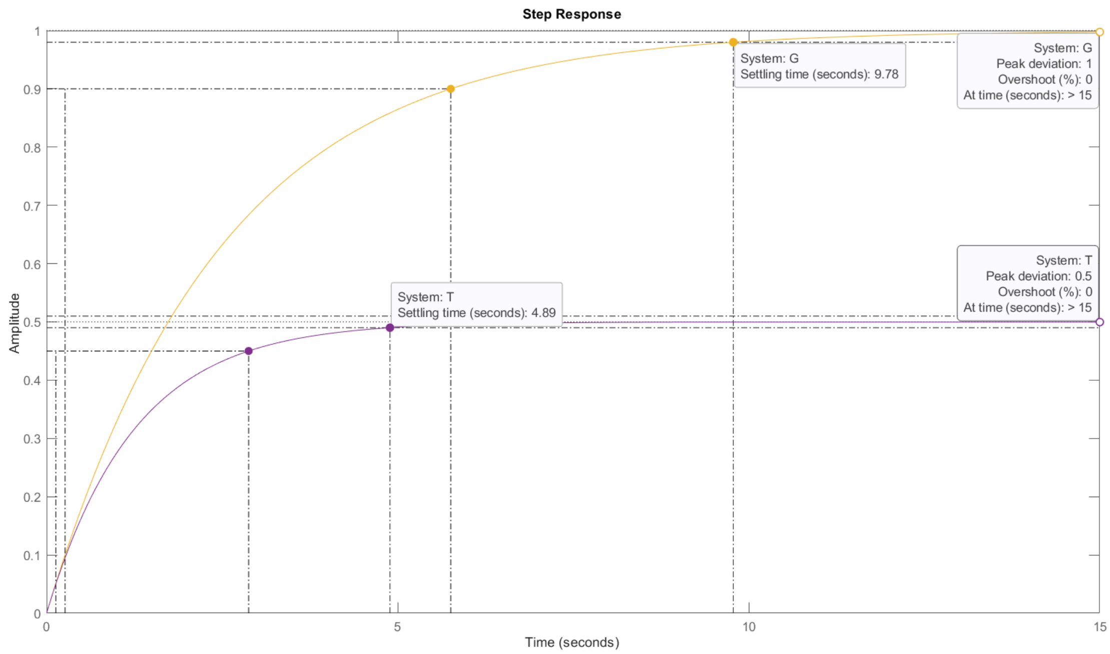
$$T(s) = \frac{0.4}{s+0.8}$$

۲.۲ بخش ب

با کد متلب نمودار و مشخصه های زمانی را بدست می‌آوریم :

```
clear all;

G=tf(0.4,[1 0.4]);
T=tf(0.4,[1 0.8]);
step(G);
hold on;
step(T);
stepinfo(G);
stepinfo(T);
```

Code 2: Step Response



شکل ۳: نمودار متلب

RiseTime	5.4925
TransientTime	9.7802
SettlingTime	9.7802
SettlingMin	0.9045
SettlingMax	0.9993
Overshoot	0
Undershoot	0
Peak	0.9993
PeakTime	18.3056

شکل ۴: پارامتر های سیستم حلقه باز

RiseTime	2.7463
TransientTime	4.8901
SettlingTime	4.8901
SettlingMin	0.4523
SettlingMax	0.4997
Overshoot	0
Undershoot	0
Peak	0.4997
PeakTime	9.1528

شکل ۵: پارامتر های سیستم حلقه بسته

خطای ماندگار برابر $e = y - r$ در بی نهایت است پس خطای ماندگار حلقه باز همان جور که می‌بینید بسیار نزدیک به صفر است اما خطا حلقه بسته تقریبا برابر 0.5 است.

۳ سوال سوم

۱.۳ بخش الف

تابع تبدیل سیستم:

یک مسیر فیدبک داریم

$$T(s) = \frac{K\frac{1}{s^2+4s}}{1+K\frac{1}{s^2+4s}}$$

$$T(s) = \frac{K}{s^2+4s+K}$$

با توجه به اینکه $K = 16$

$$T(s) = \frac{16}{s^2+4s+16}$$

خطای ماندگار سیستم :

با توجه به اینکه سیستم تیپ یک است پس خطای ماندگارش به ورودی پله صفر است.

درصد فراجهش:

$$M_p = 100e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

از روی تابع تبدیل و با توجه به ساختار کلی سیستم مرتبه دو :

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

در نتیجه ζ برابر با 0.5 است .

$$M_p = 100e^{\left(\frac{-0.5\pi}{\sqrt{1-(0.5)^2}}\right)}$$

$$M_p = 100e^{-1.8137993}$$

$$M_p = 16.30335\%$$

مقدار فراجهش برابر است با : 1.163
حال نوبت پیدا کردن زمان نشست است :

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$\zeta = 0.5 \quad \omega_n = 4$$

در نتیجه: $t_s = 2$

اما در جزوه استاد برای $\zeta < 0.69$ فرمولی دیگر امده است:

$$t_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n}$$

$$t_s = \frac{3.2}{4 \times 0.5}$$

با این روش برابر با 1.6 می‌شود که کمی دورتر از جواب است.

۲.۳ بخش ب

$$M_p = 100e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

$$\frac{5}{100} = e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

$$\ln\frac{5}{100} = (\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})$$

$$-2.995732 = (\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})$$

به توان دو می‌رسانیم :

$$8.97441 = (\frac{\zeta^2\pi^2}{1-\zeta^2})$$

$$8.97441(1-\zeta^2) = \zeta^2\pi^2$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{8.97441}{8.97441+\pi^2}} = 0.690106693$$

طبق فرم کلی تابع تبدیل ۱.۳ ζ را بر حسب K حساب می‌کنیم.

$$\zeta = \frac{2}{\sqrt{k}}$$

$$K = 8.398998669$$

۳.۳ بخش ج

تابع تبدیل این سیستم :

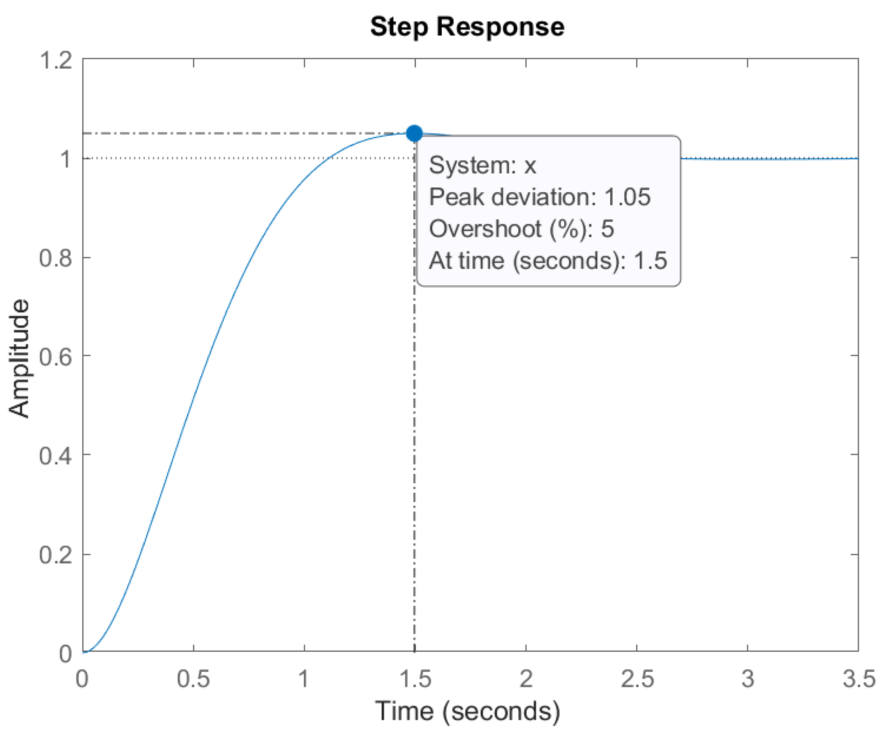
$$\frac{8.399}{s^2+4s+8.399}$$

کد متلب :

```
clear all;
num=8.399;
den=[1,4,8.399];
x=tf(num,den);
x=minreal(x);
step(x)%plot
```

Code 3: Step Response

نمودار :



۴.۳ بخش د

تابع تبدیل سیستم :

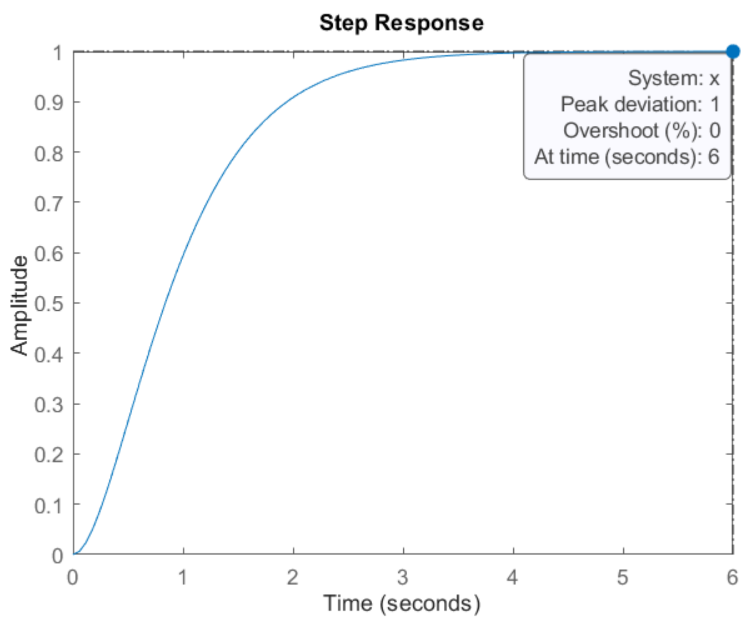
$$\frac{4}{s^2+4s+4}$$

که در واقع:

$$\frac{4}{(s+2)^2}$$

ریشه مضاعف در مخرج داریم یعنی $\zeta = 1$ که حالت میرایی مرزی است و خبری از نوسان و فراجهش هم در این حالت نیست.

نمودار :



۴ سوال چهارم

چون سیستم خطی است می‌توانیم از اثر ورودی صرف نظر کنیم تا خطای ورودی اغتشاش در نظر بگیریم :

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1+KG(s)}$$

$$E_d(s) = D(s) - KY(s)$$

ضرب در k می‌کنیم و تفضیل در صورت :

$$\frac{KY(s)}{D(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{-D(s)+KY(s)}{D(s)} = \frac{KG(s)-1-KG(s)}{1+KG(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{1+G(s)(K-1)}{1+KG(s)}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{E(s)}{D(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+KG(s)} = -B$$

$$\frac{1}{1+KG(0)} = -B$$

$$\Rightarrow 1 = -B(1+KG(0))$$

$$1+B = -BKG(0)$$

$$G(0) = \frac{1+B}{-BK}$$

حال می‌آییم و خطای حالت ماندگار ورودی را حساب می‌کنیم :

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

$$\frac{Y(s)-G(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)-1-KG(s)}{1+KG(s)}$$

در یه منفی ضرب می‌کنیم تا عبارت خطا را بسازیم :

$$E_2(s) = D(s) - Y(s)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+KG(s)}$$

خطای حالت ماندگار :

$$\lim_{s\to\infty} e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\frac{1}{1+KG(s)}s$$

$$\to \frac{1}{1+KG(0)}$$

$$\frac{1}{1+K\frac{1+B}{-KB}} = \frac{1}{\frac{B-1-B}{B}} = -B$$

۵ سوال پنجم

$$\int_0^\infty e^t \cdot e^{-st} = \mathcal{L}(e^t)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^t = \mathcal{L}(e^t)\Big|_{s=0} = E(0)$$

پس کافی است $E(s)$ را پیدا کنیم:

$$E(s) = X(s) - Y(s) \Rightarrow E(s) = (X(s) - Y(s)) \times \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$E(s) = (1 - T(s))X(s)$$

از آنجا ک ورودی $\frac{1}{s}$ است :

$$\lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1 - T(s)}{s} \Rightarrow \frac{0}{0} H \Rightarrow$$

هوپیتال می‌زنیم:

$$\lim_{s\to 0} -T'(s)$$

مشتق $\prod_{i=1}^{m}(B_i s + 1)$ کافی است که مشتق ضرب را بنویسیم و هربار از یک جمله مشتق می‌گیریم و ضریب باقی می‌ماند و بقیه جملات یک می‌شود پس چیزی که باقی می‌ماند برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{m} B_i$$

برای همین $\prod_{i=1}^{n}(A_i s + 1)$ به همین منوال است :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i$$

با توجه به این در ادامه :

$$= \lim_{s\to 0} -\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \times \prod_{i=1}^{m}(B_i s + 1) - \sum_{i=1}^{m} B_i \times \prod_{i=1}^{n}(A_i s + 1)}{\left(\prod_{i=1}^{m}(B_i s + 1)\right)^2}$$

$$= -\left(\sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{i=1}^{m} B_i\right) = \sum_{i=1}^{m} B_i - \sum_{i=1}^{n} A_i$$