



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

کنترل خطی تمرین سری چهارم

باربد طاهرخانی ۴۰۱۲۰۴۹۳



فهرست مطالب

۲	۱ سوال اول	۱
۲	۱.۱ پیدا کردن تابع تبدیل سینوسی	۲
۲	۲.۱ نمودار نایکویست :	۲
۴	۲ سوال دوم	۲
۵	۱.۲ حساب کردن K	۵
۶	۲.۲ مقدار خطا	۶
۶	۳ سوال سوم	۶
۷	۱.۳ تحلیل با متلب	۷
۹	۴ سوال چهارم	۹
۱۰	۱.۴ نمودار دستی	۱۰
۱۱	۲.۴ نمودار با متلب	۱۱
۱۲	۵ سوال پنجم	۱۲
۱۳	۱.۵ نمودار نایکویست	۱۳



۱ سوال اول

۱.۱ پیدا کردن تابع تبدیل سینوسی

معادله تابع انتقال به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{K}{s(1+Ts)}$$

برای تحلیل پاسخ فرکانسی بجای $s = j\omega$ می گذاریم.

$$\frac{1}{j\omega(1+Tj\omega)} = \frac{-T\omega^2 + j\omega}{T^2\omega^4 + \omega^2}$$

و سپس:

$$\text{قسمت موهومی : } \frac{j\omega}{T^2\omega^4 + \omega^2} \quad \text{قسمت حقیقی : } \frac{-T\omega^2}{T^2\omega^4 + \omega^2}$$

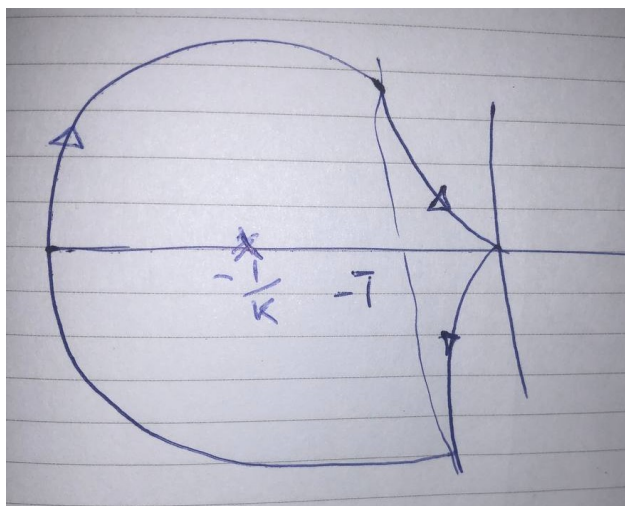
حدود برای ω به صورت زیر است:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow Re : -T \quad Im : \infty$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow Re : 0 \quad Im : 0$$

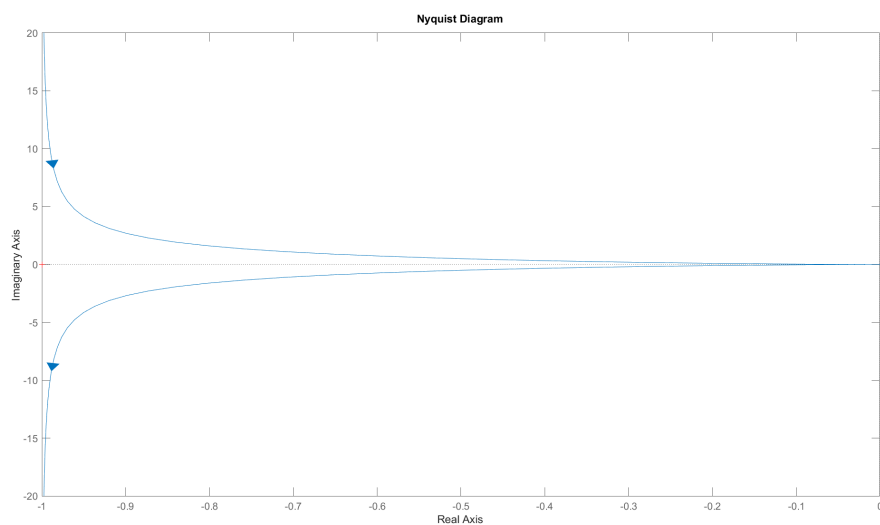
ناحیه برخورد به قسمت حقیقی هم نداریم و داشتن قطب در مخرج دایره با شعاع نزدیک به صفر که پادساعتگرد میچرخد را به شعاع بی نهایت نگاشت می دهد.

۲.۱ نمودار نایکویست :



شکل ۱: نمودار دستی

نمودار را در متلب میتوان به ازای T های مختلف رسم کرد نتیجه مشابه است فقط فرق در مجانب قسمت حقیقی است که همان $-T$ است. ما اینجا با $T = 1$ رسم کردیم.

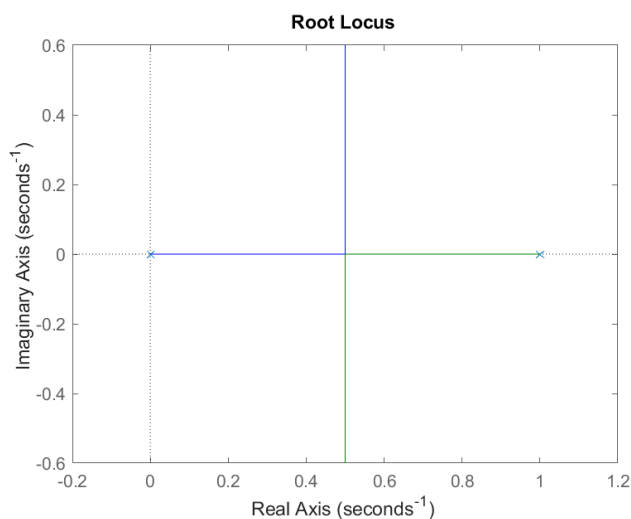


شکل ۲: نمودار نایکوئیست

دایره با شعاع بی نهایت و ساعتگرد را نکشیده متلب ولی از همین نمودار می توان دریافت که با وجود داشتن یک قطب ناپایدار باید یک چرخش پادساعتگرد داشته باشیم که $-1/k$ مت اینجا قرار بگیرد ولی همچنین ناحیه ای موجود نیست.

$$Z = N + P \quad p = 1 \quad \text{باشد} \quad N \text{ نمیتواند منفی یک باشد}$$

برای اطمینان خودمان از نمودار مکان هندسی ریشه ها هم کمک میگیریم:



شکل ۳: نمودار مکان هندسی

تمام ریشه ها روی $ORHP$ قرار دارد پس همیشه ناپایدار است.



۲ سوال دوم

$$H(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+10)}$$

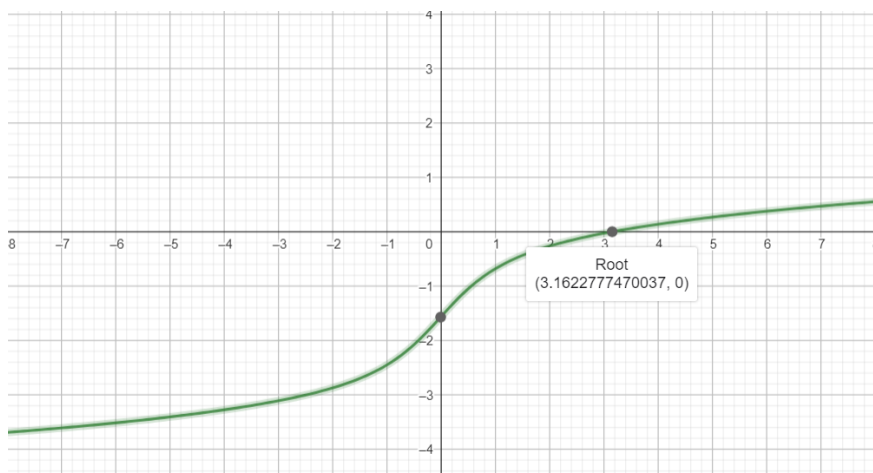
برای پیدا کردن حاشیه بهره، فاز را مساوی منفی ۱۸۰ میگذاریم در واقع فاز کراس اور را پیدا میکنیم.

$$\angle H(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)(j\omega+1)(j\omega+10)}$$

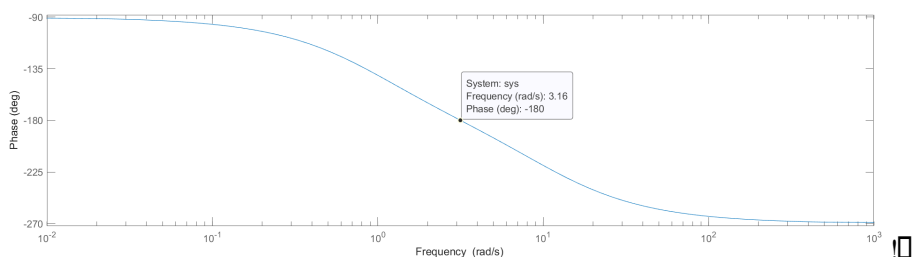
$$\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) = -\pi$$

$$\arctan(\omega) + \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) = \frac{\pi}{2}$$

هم از طریق روش تکرار و خطا مثلا نیوتون رافسون میود به جواب رسید ولی با توجه به دسترس بودن کامپیوتر و با رسم نمودار میشود فرکانس را پیدا کرد یا نمودار فاز بودی فرکانسی که منفی ۱۸۰ را شامل میشود :



شکل ۴: نمودار



شکل ۵: نمودار بودی فاز

۱.۲ حساب کردن K

$$\omega = 3.16$$

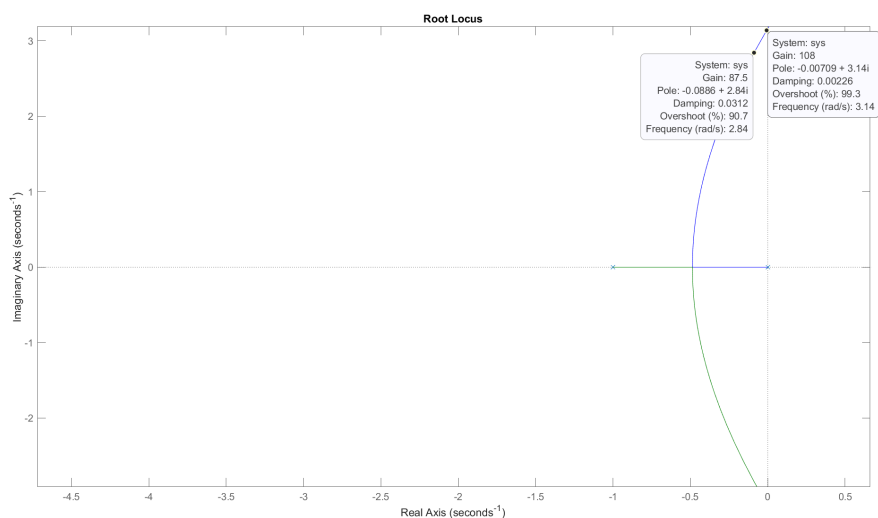
$$|H(j\omega)| = \frac{k}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{\omega^2 + 100}}$$

$$|H(j3.16)| = \frac{k}{3.16 \times 3.31 \times 10.48}$$

$$1.1 = -20 \log |H(j\omega)| \Rightarrow$$

$$H(j\omega) = 0.88 \quad k = 94.49$$

در این K پایدار است با مکان هندسی میتوان این را اثبات کرد :



شکل ۶: مکان هندسی تابع تبدیل

این سیستم تیپ یک است به ورودی پله خطای ماندگارش برابر صفر است.
ولی به ورودی شیب :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{kv} = \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{\frac{96.46}{10}}$$

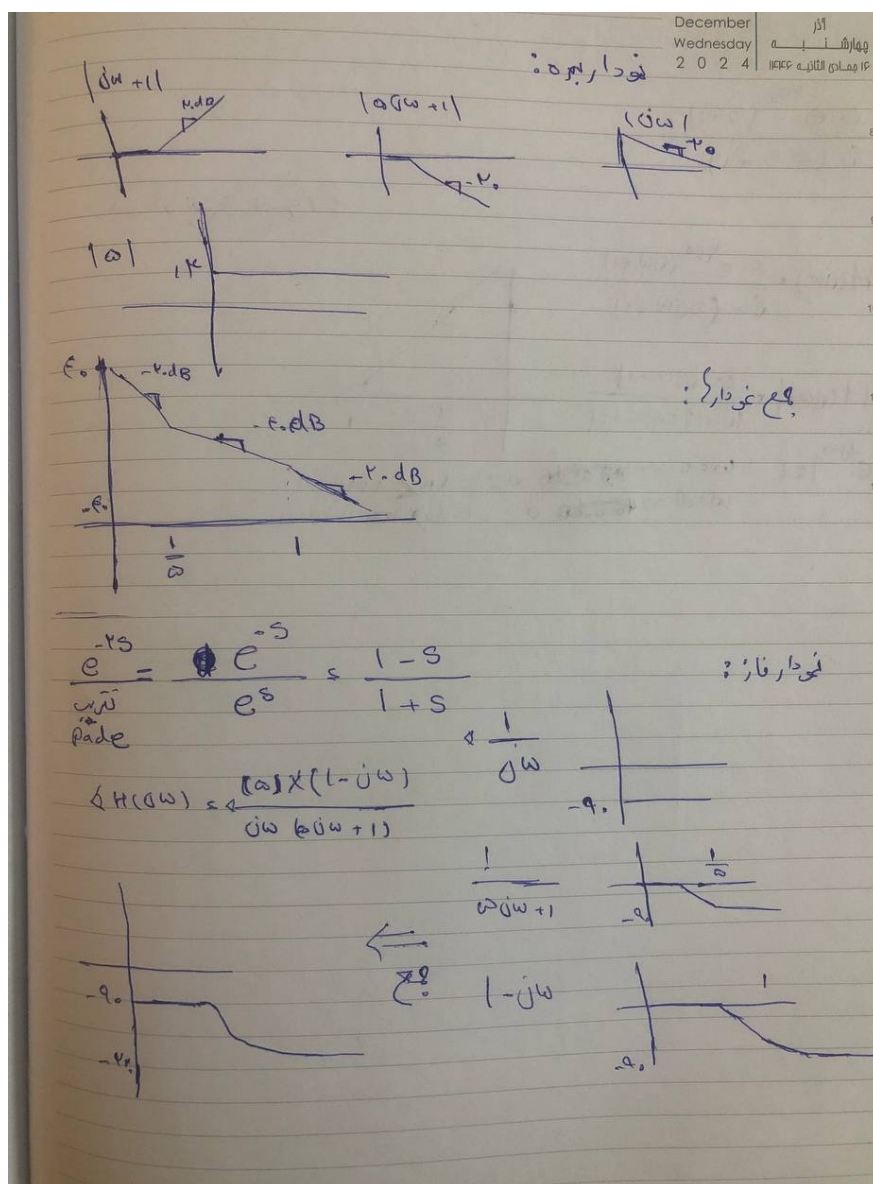


۲.۲ مقدار خطا

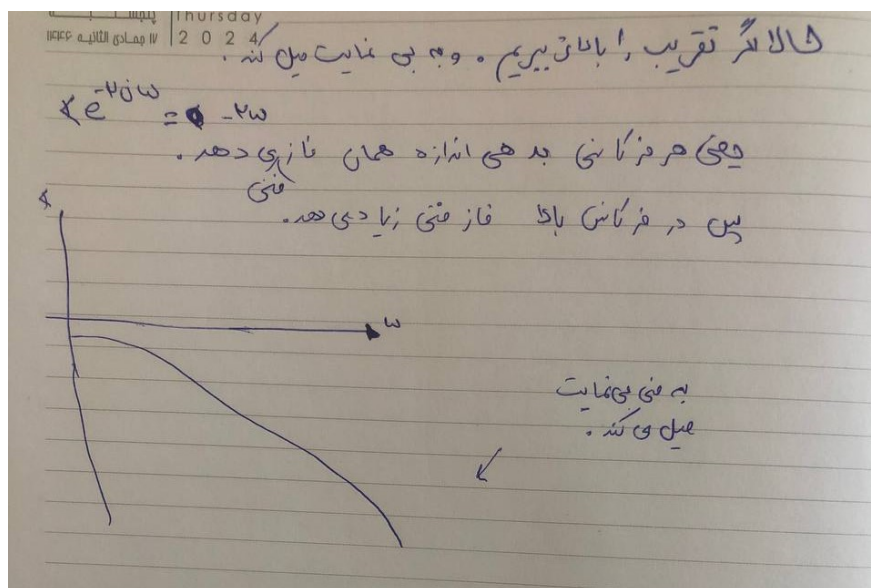
$$sL(s) = 0.10366$$

۳ سوال سوم

نمودار دستی بودی را ترسیم میکنیم روی بهره تاخیر تاثیر ندارد ولی روی فاز تاثیر بسیاری دارد :



شکل ۷: نمودار دستی



شکل ۸: تحلیل تاثیر تاخیر روی فاز

۱.۳ تحلیل با متلب

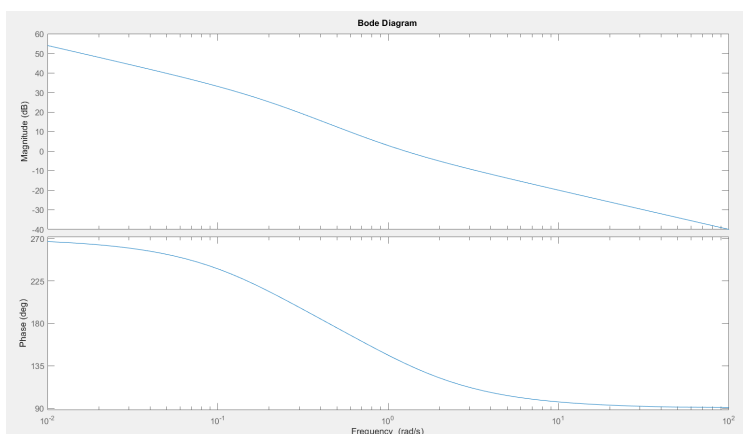
```

1 clear all;
2 s=tf('s');
3
4 T=2;%sabet zamani
5 N=1;%martabe taghrib
6 sys=(5*(s+1)/(5*s+1)/s);
7 [num,den]=pade(T,N);
8 sys2=tf(num,den);
9 sys3=sys2*sys;
10 bode(sys3)

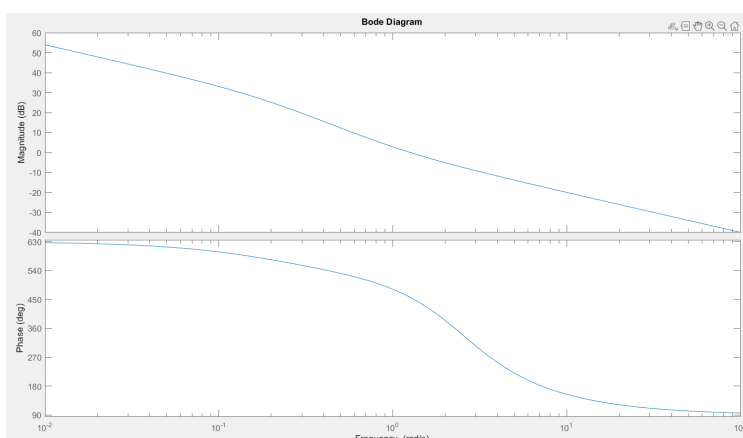
```

Code 1: PADE

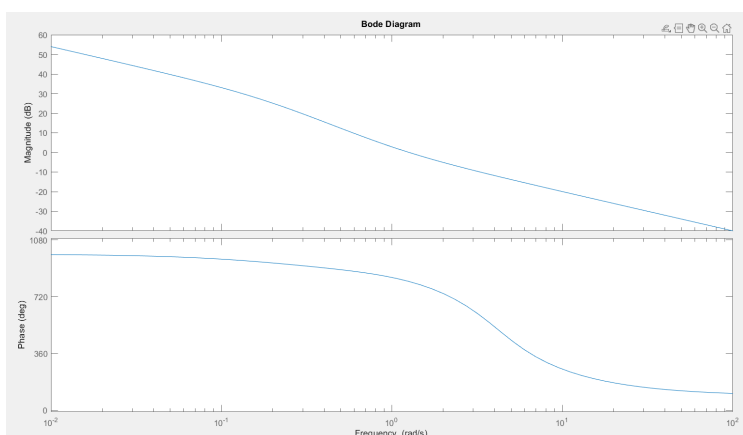
همان جور که میبیند و پیشبینی کردیم بهره ثابت است ولی با بالا بردن مرتبه تقریب در فرکانس های بالا فاز به سمت منفی بی نهایت میل میکند.



شکل ۹: تقریب مرتبه اول



شکل ۱۰: تقریب مرتبه سوم

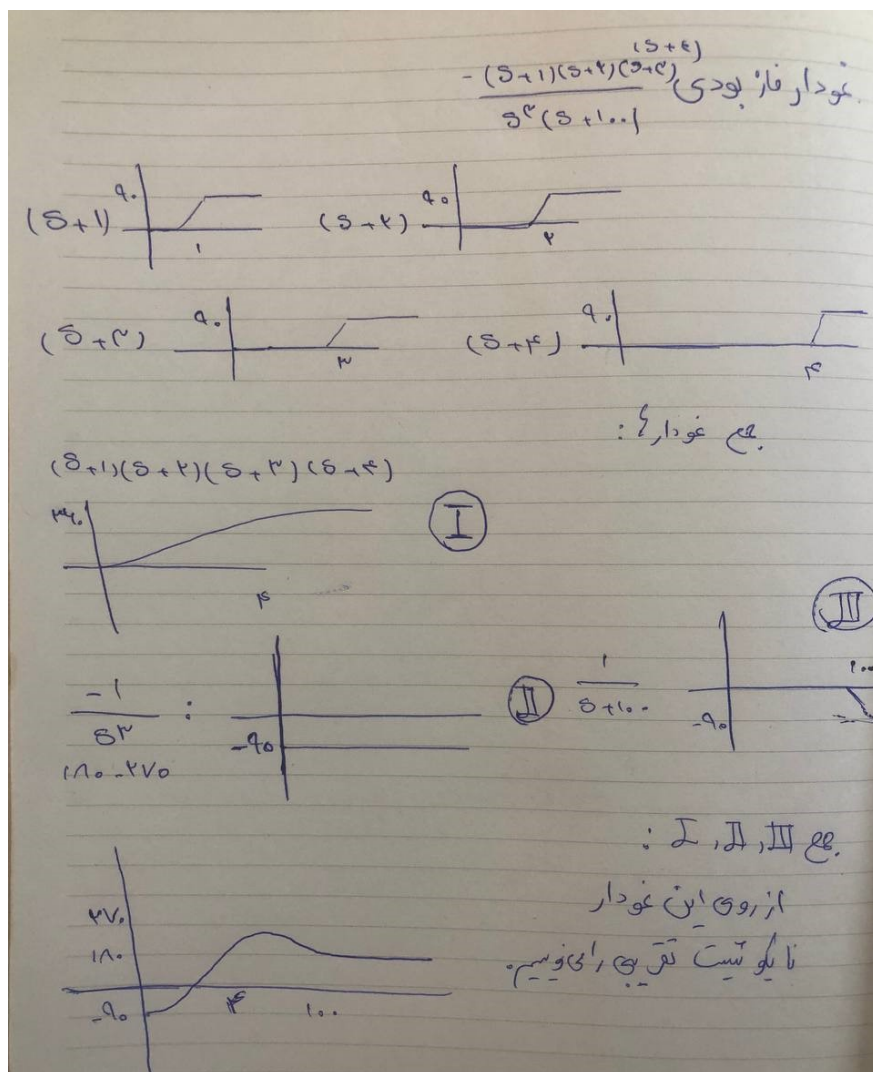


شکل ۱۱: تقریب مرتبه پنجم

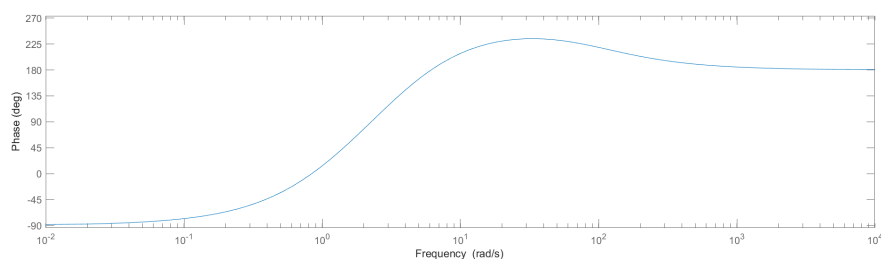


۴ سوال چهارم

خب برای رسم نمودار نایکوئیست از نمودار فاز کمک میگیریم:
نمودار دستی:



شکل ۱۲: نمودار فرکانس بودی



شکل ۱۳: نمودار متلب فاز

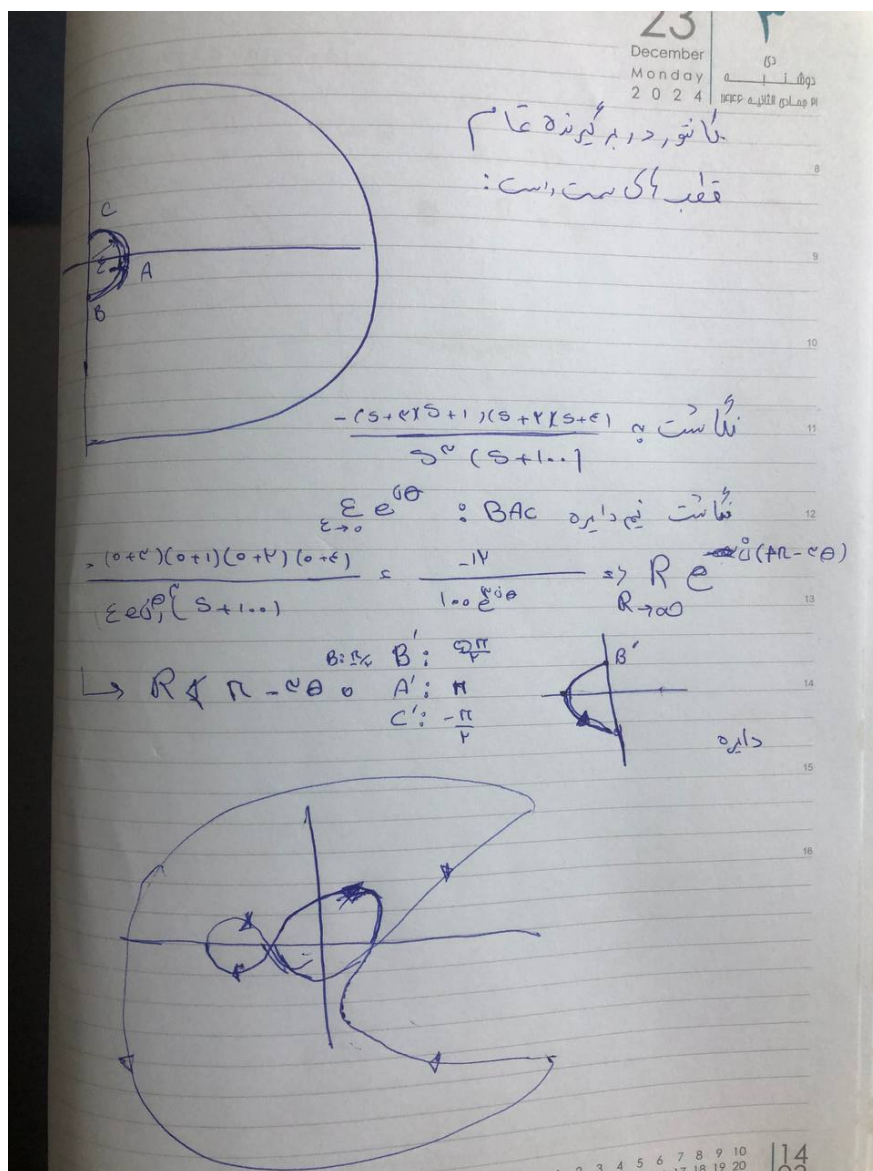
کافی است در فرکانس صفر و بی نهایت اندازه را پیدا کنیم تا نایکوئیست را تکمیل کنیم:

$$\omega \rightarrow 0 \rightarrow \infty$$

$$\omega \rightarrow \infty \rightarrow -1$$

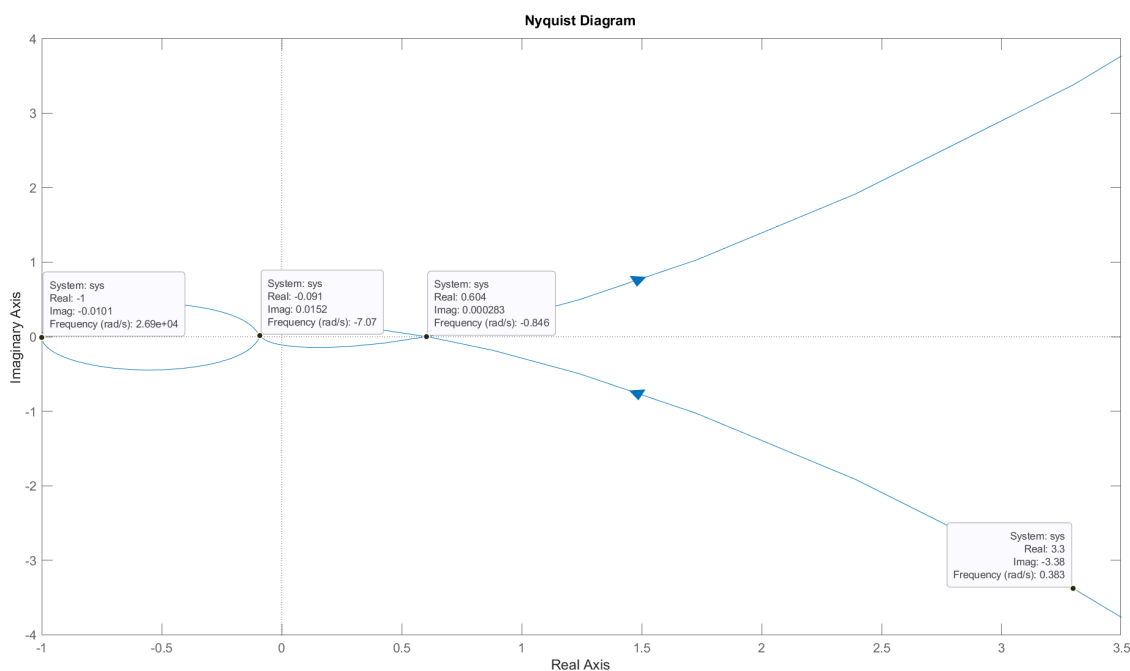
۱.۴ نمودار دستی

از فرکانس صفر به بی نهایت میرویم همان طور که میبینید فاز از منفی نود شروع شده به نود رفته و بعد به صد و هشتاد رفته بعد نزدیک دویست و هفتاد شده و در آخر دوباره به صد و هشتاد برگشته گذر از صد و هشتاد یا صفر یعنی برخورد با محور حقیقی که سه بار این اتفاق افتاده پس سه بار برخورد داریم بعد رسم قسمت مثبت فرکانس منفی را مانند جفت آن در آینه آن را میکشیم و ادامه میدهیم و دایره با شعاع بی نهایت را با روش کانتور در برگیرنده تمام قطب های سمت راست میرویم.



شکل ۱۴: ناکوئیس

۲.۴ نمودار با متلب



شکل ۱۵: نمودار متلب

۵ سوال پنجم

از روی نمودار فاز مشخص است که سیستم $LEAD$ و پیش فازی است :

$$\frac{K(T_1s + 1)}{T_2s + 1} \quad T_2 \ll T_1$$

حال از روی نمودار گین مشخص است که در فرکانس صفر برابر با منفی 20 دسی بل است ایت یعنی همان 0.1 پس :

$$K = \frac{1}{10}$$

اگر کمی دقت کنیم هم از روی نمودار فاز هم از روی نمودار بهره میشود نقاط شکست رو فهمید که یعنی یک صفر در 10 و یک قطب در 100 دارد پس شکل کلی سیستم برابر است با :

$$L(s) = \frac{1}{10} \frac{0.1s + 1}{0.01s + 1}$$

برای تحلیل پاسخ فرکانسی بجای $s = j\omega$ می گذاریم.

$$\frac{1}{10} \frac{0.1j\omega + 1}{0.01j\omega + 1}$$

و سپس: اندازه آنها را مشخص میکنیم که همان برخورد با محور حقیقی است. (چون در فرکانس های صفر و بی نهایت اختلاف فاز نداریم و صفر است.)

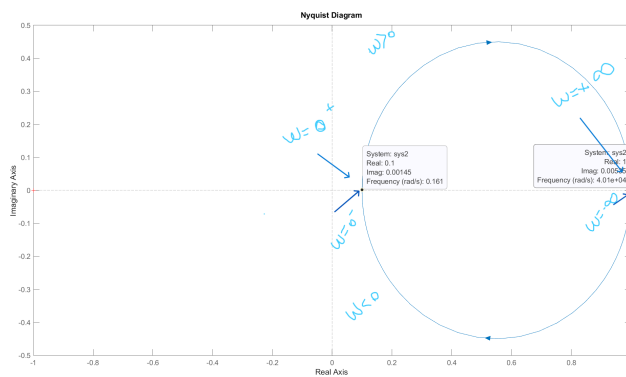
$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{10}$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow 1$$



از روی نمودار فاز هم میشود فهمید که در فرکانس های پایین فاز زیاد میشود و بعد کم میشود و دوباره صفر میشود پس فرکانس مثبت نیم دایره بالای محور حقیقی است.

۱.۵ نمودار نایکوئیست



شکل ۱۶: نمودار نایکوئیست