

دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

تکلیف سری ششم کنترل خطی
باربد طاهرخانی ۴۰۱۲۰۴۹۳

فهرست مطالب

۱	سوال اول	۲
۱.۱	حاشیه فاز جدید	۳
۲.۱	کد متلب	۴
۳.۱	خطای ماندگار سیستم	۴
۲	سوال دوم	۵
۱.۰.۲	قسمت الف	۵
۲.۰.۲	قسمت ب	۵
۳.۰.۲	تحلیل با متلب	۶
۴.۰.۲	پاسخ پله با و بدون کنترلر	۷
۳	سوال سوم	۷
۱.۳	روش اول	۷
۱.۱.۳	پیدا کردن کنترلر	۸
۲.۱.۳	پاسخ پله	۹
۲.۳	روش دوم (پیشنهادی)	۹
۱.۲.۳	کنترلر	۱۰
۲.۲.۳	پاسخ پله	۱۰
۴	سوال چهارم	۱۱
۱.۴	قسمت الف	۱۱
۲.۴	قسمت ب	۱۱
۱.۲.۴	خطای ماندگار	۱۱
۲.۲.۴	روش کنترلر پیشفاز	۱۲
۳.۲.۴	روش کنترلر پسفاز	۱۳
۴.۲.۴	کد متلب	۱۴
۵	سوال پنجم	۱۵
۱.۵	قسمت الف	۱۵
۱.۱.۵	خروجی متلب	۱۷
۲.۱.۵	پاسخ پله مطلوب	۱۸
۲.۵	قسمت ب	۱۹
۱.۲.۵	پیدا کردن K_p	۱۹
۲.۲.۵	$K_d : 0.1 \text{ to } 0.5$	۱۹
۳.۲.۵	حاشیه فاز و پهنای باند	۲۰

۱ سوال اول

اول $loop\ gain$ سیستم را بدست می آوریم بعد خطای سیستم را بدست می آوریم ببینیم چند است، یک فیدبک داخلی داریم آنرا حساب می کنیم :

$$H(s) = \frac{\frac{5}{s(s+2)}}{\frac{5}{s(s+2)} + 1} = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

حالا گین حلقه باز سیستم میشود :

$$L(s) = H(s) \times \frac{2}{s(s+3)} = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} \times \frac{2}{s(s+3)}$$

حالا خطا را پیدا میکنیم از انجایی که خواسته خطای سیستم 30 برابر بهبود بدهیم یعنی خطا نه صفر است نه بی نهایت و از انجایی که سیستم مرتبه یک است یعنی نسبت به ورودی پله باید بسنجیم:

$$E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{K_v}$$

$$K_v = sL(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{\frac{5}{0^2+20+5} \times \frac{2}{(0+3)}} = \frac{1}{\frac{10}{15}}$$

حالا خطای دوم باید سی برابر بهتر باشد یعنی :

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{1}{30}$$

$$E_2 = \frac{15}{10} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{20}$$

خب خواسته مسئله این است که خطا را بهبود بدهیم این یعنی نیاز به جبران ساز پس فاز داریم، فرم کلی :

$$C(s) = \frac{K_c(\alpha Ts + 1)}{Ts + 1}$$

کافی است این مقادیر را جایگذاری کنیم تا به کنترلر دلخواه برسیم :

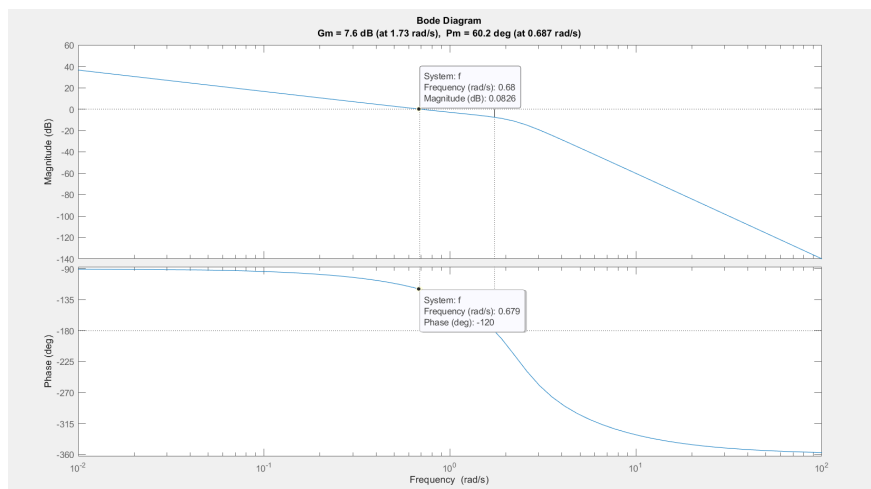
$$K_c = 30$$

$$\alpha = \frac{1}{K_c}$$

$$\epsilon = 0.05$$

$$K_1 = K_c - 1 = 29 \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_c} \sqrt{\left(\frac{K_1}{\epsilon}\right)^2 - 1}$$

حالا فرکانس گذر بهره را پیدا میکنیم تا مقادیر کنترلر را جایگذاری کنیم :



$$Gm = 7.6dB, Pm = 60.2deg$$

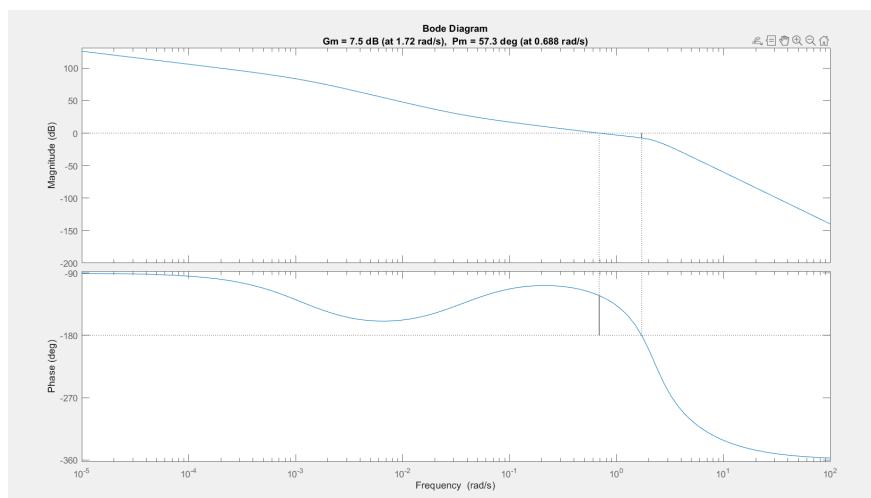
$$\omega_c = 0.687 \Rightarrow T = 844.249$$

کنترلر میشود:

$$C(s) = 30 \frac{28.14s + 1}{844.269s + 1}$$

۱.۱ حاشیه فاز جدید

حاشیه فاز ها زیاد جابجا نشدند یعنی طراحی ما مناسب بوده است.



۲.۱ کد متلب

```

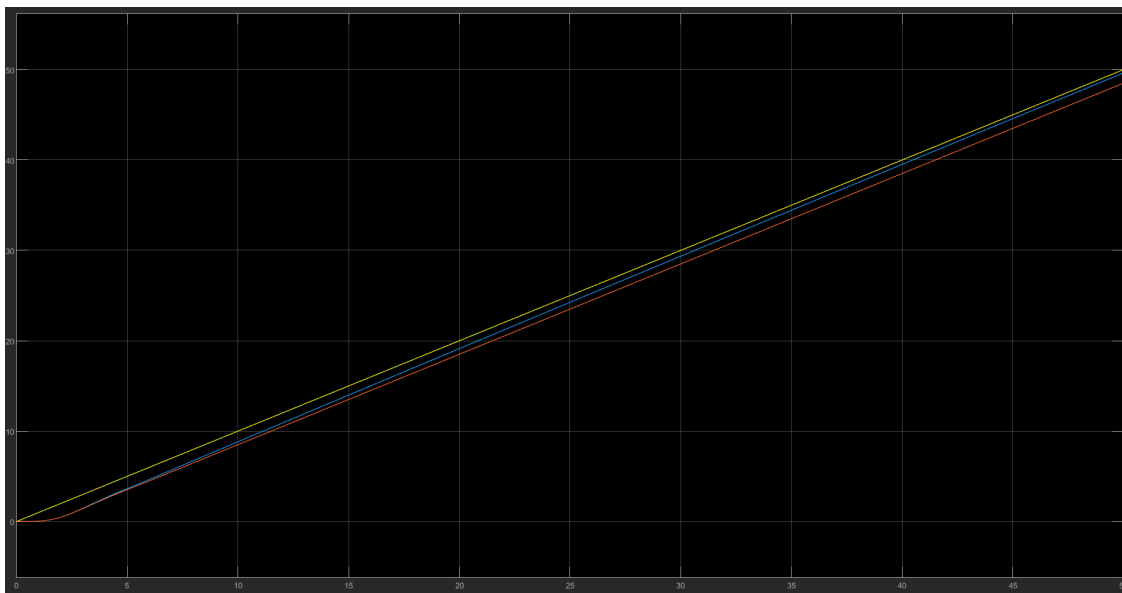
1 clear all
2 s=tf('s');
3 y=tf(5/(s*(s+2)+5));
4 z=tf(2/(s*(s+3)));
5 c=tf(30*(28.14*s+1)/(844.24*s+1));
6 f=y*z;
7 h=f*c;
8 margin(h)

```

Code 1: Code soal 1

۳.۱ خطای ماندگار سیستم

حالا خطای ماندگار را بررسی می کنیم :



شکل ۱: نمودار خطا در سیمولینک

همان جور که مشاهده میکنید نمودار آبی رنگ هرچند که کند است ولی خطای ماندگار بهتری را نسبت به نمودار قرمز که بدون کنترلر است دارد و به وردودی که نمودار زرد است نزدیک تر است و خطای ماندگار برابر 0.05 است. (برای تند کردن سیستم می شود از یک کنترلر *lead* نیز استفاده کرد)

۲ سوال دوم

۱.۰.۲ قسمت الف

از آنجا که پهنای باند خیلی پایین است به کنترلی نیاز داریم که پهنای باند را افزایش دهد پس کنترلر ما از جنس پیشفاز است:

$$C(s) = \frac{k}{\sqrt{a}} \left(\frac{aTs + 1}{Ts + 1} \right), |a| > 1$$

برای درست کردن خطای ماندگار هم کار خاصی نیاز نیست انجام دهیم به این دلیل که اگر دقت کنید خود سیستم در فرکانس های پایین گین بالایی دارد و یک اختلاف فاز ذاتی منفی نود درجه همه جا حکمفرماست این یعنی سیستم تیپ یک است و یک قطب در مبدا دارد پس خطای ماندگارش به ورودی پله صفر است.

۲.۰.۲ قسمت ب

برای اینکه پهنای باند 10 رادیان داشته باشیم باید فرکانس گذر بهره را جابجا کنیم به اندازه که بهره به فرکانس ده برسد اینکار را با یک بهره ثابت انجام میدهم یعنی :

$$20 \log k = 40.2 \text{ dB}$$

$$k = 102.32$$

حال اگر بهره را اضافه کنیم حاشیه فاز ما به $12 = 180 - 168$ می رسد. ولی دلخواه ما بیشتر از ۳۲ است:

برای محکم کاری $\epsilon = 5$

$$\phi = 32 - 12 + \epsilon = 25$$

$$a = \frac{1 + \sin(25)}{1 - \sin(25)} = 2.46391$$

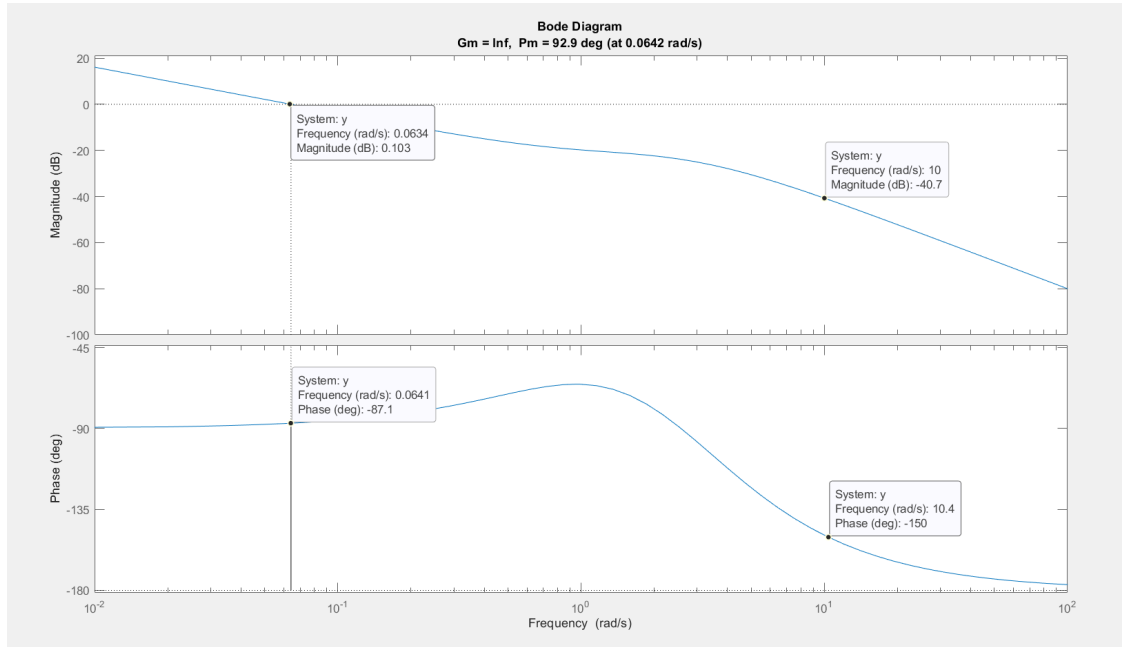
$$T = \frac{1}{\omega \sqrt{a}} = \frac{1}{10 \times \sqrt{2.463}} = 0.06375$$

کنترلر برابر میشود با :

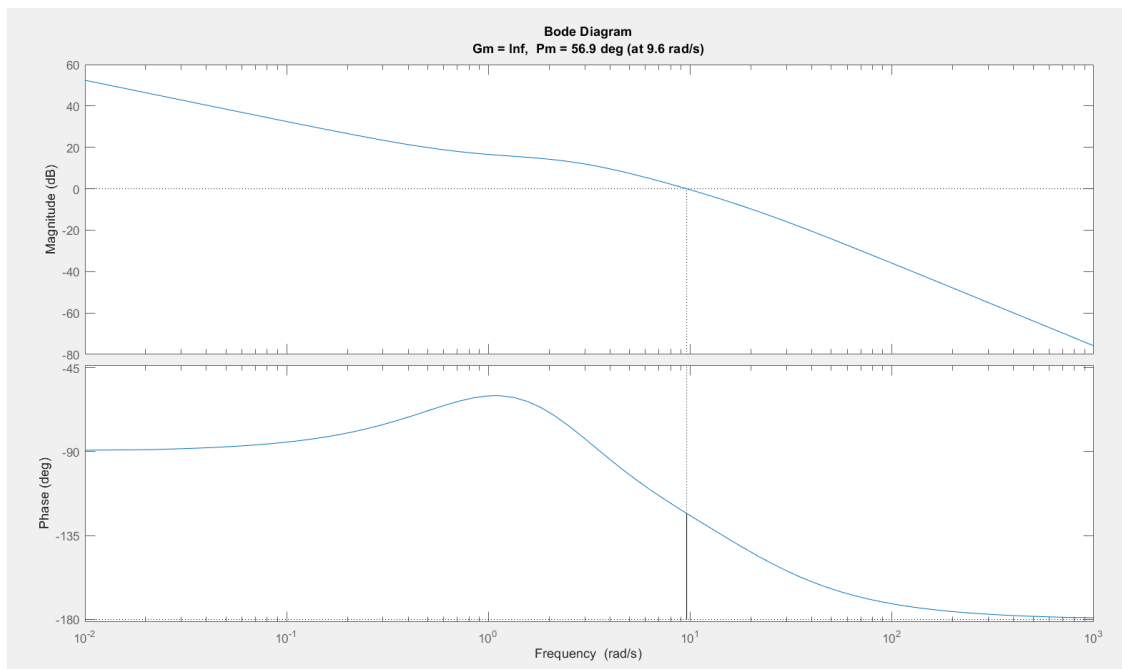
$$C(s) = 65.23 \left(\frac{0.1570s + 1}{0.0637s + 1} \right)$$

۳.۰.۲ تحلیل با متلب

سیستمی نزدیک به سوال طراحی کردیم :

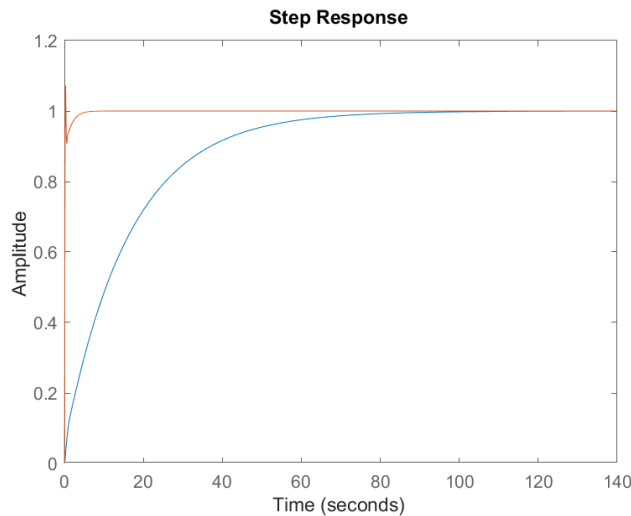


اعمال کنترلر : کنترلر جواب داده و پهنای باند را افزایش داده و حاشیه فاز را همان جور که



دلخواه و پسند ما یعنی بیش از ۳۲ برده .

۴.۰.۲ پاسخ پله با و بدون کنترلر



نمودار قرمز برای پاسخ با کنترلر است که سرعت فوق العاده نسبت به بدون کنترلر دارد و علاوه بر آن خطای ماندگارش هم صفر است.

۳ سوال سوم

۱.۳ روش اول

برای اینکه فراجاهش کمتر از ده درصد باشد باید ζ را پیدا کنیم :

$$0.1 = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\ln(0.1) = -2.302$$

$$2.302 = \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

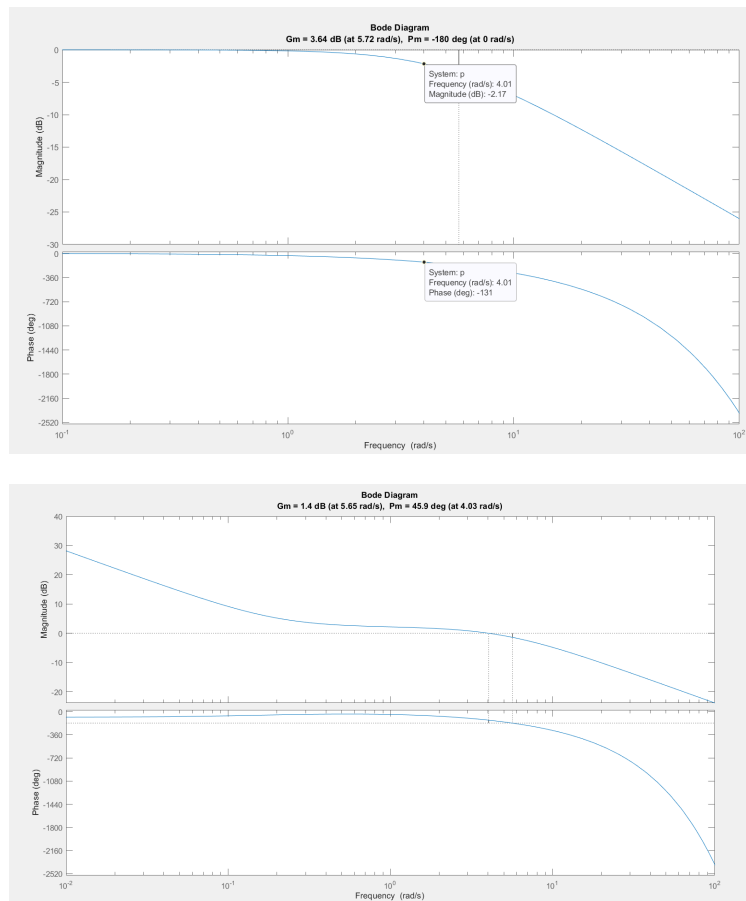
$$0.5369 = \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}$$

$$\zeta^2 = 0.348 \Rightarrow \zeta = 0.5907$$

$$\phi = 100\zeta = 59deg$$

حالا به کمک متلب حاشیه فاز و گین را پیدا میکنیم : باید پس $2.17dB$ گین بدهیم تا حاشیه فاز دلخواه برسد و فرکانس گذر بهره برابر 4 است:

$$20 \log(K_p) = 2.17$$



$$K_p = 1.283$$

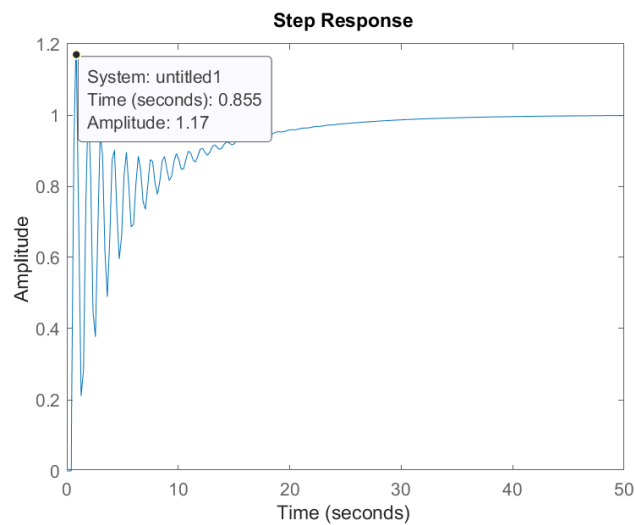
برای پیدا کردن K_i :

$$\frac{K_i}{K_p} = \frac{\omega_c}{20} \Rightarrow K_i = 0.2566$$

۱.۱.۳ پیدا کردن کنترلر

$$C(s) = 1.283 + \frac{0.2566}{s}$$

۲.۱.۳ پاسخ پله



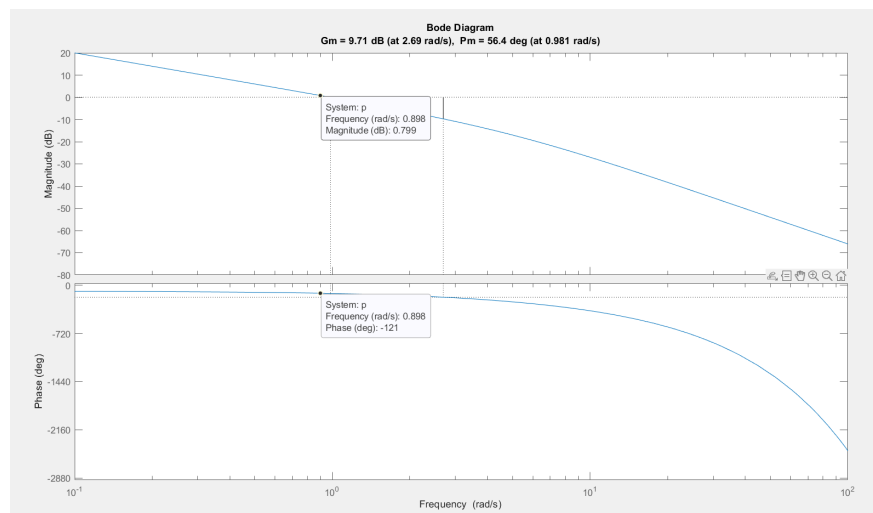
۲.۳ روش دوم (پیشنهادی)

کنترلر بصورت زیر در نظر میگیریم:

$$C(s) = \frac{K_i(1 + \frac{K_p}{k_i}s)}{s}$$

$$L(s) = \frac{e^{-0.4s}}{s(0.2s + 1)}$$

حالا حاشیه فاز این را پیدا میکنیم:



$$Pm = 56.4$$

فرکانس مورد نظر که حاشیه فاز در آن 59 است

$$\omega = 0.896$$

$$\phi = 59 - 56.4 + \epsilon = 5$$

$$T = \frac{K_p}{K_i} = \frac{\tan(\phi)}{\omega} = 0.098$$

پیدا کردن K_i :

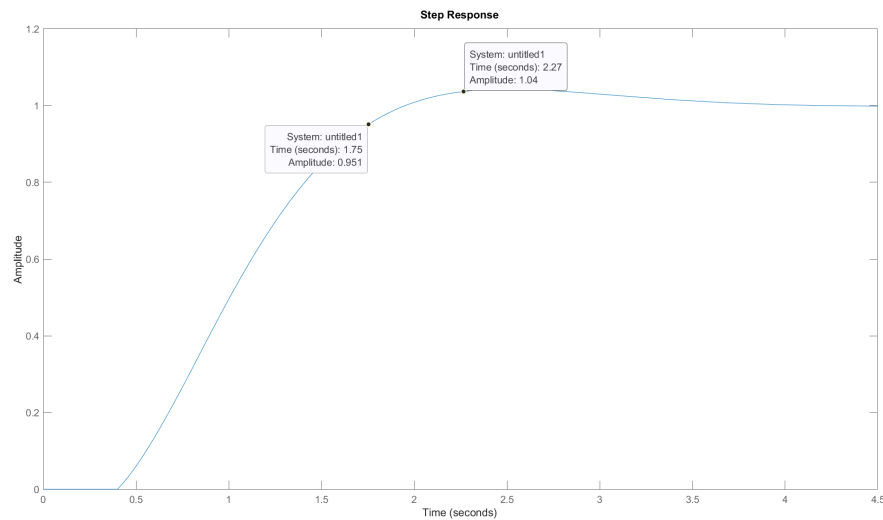
$$20 \log K_i = 0.799 \Rightarrow K_i = 1$$

۱.۲.۳ کنترلر

از فرمول pd استفاده میکنیم ولی در آخر آن $\frac{1}{s}$ را درش ضرب میکنیم:

$$C(s) = 0.098 + \frac{1}{s}$$

۲.۲.۳ پاسخ پله



در همین نمودار تاخیر 0.4 ثانیه را میبینیم و اورشوت بجای ده درصد نزدیک چهار درصد است و روش تقریبی زمان نشست (با شبیه سازی نیم ثانیه تفاوت دارد):

$$t_s = 1/\omega_c = 1/0.895 = 1.11$$

۴ سوال چهارم

۱.۴ قسمت الف

چون خود سیستم تیپ یک است خطای ماندگارش به ورودی پله صفر است. پس توجه میکنیم که کنترلی که طراحی میکنیم فاقد صفر در مبدا باشد تا تیپ سیستم را مبدا کاهش دهد.

۲.۴ قسمت ب

نخست سعی میکنیم کنترلر بهره ثابت قرار دهیم تا ببینیم شرایط ما را ارضا میکند یا خیر:

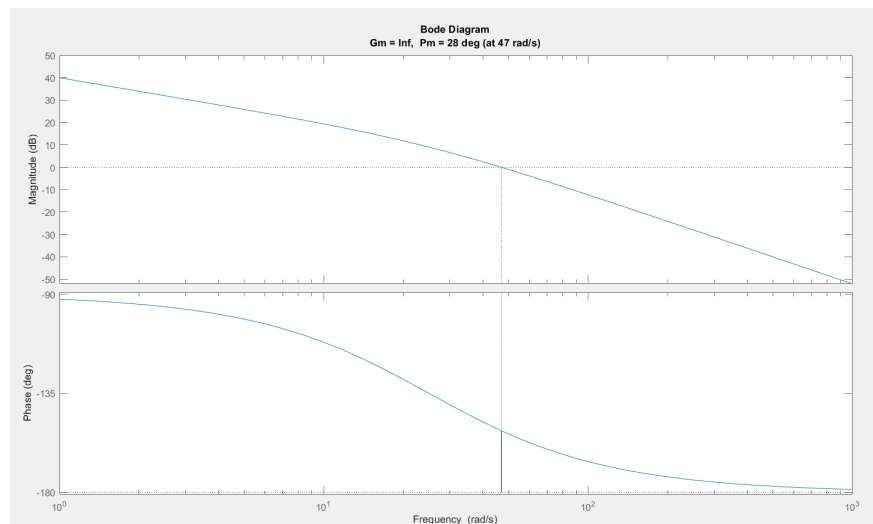
۱.۲.۴ خطای ماندگار

$$E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{K_v}$$

$$K_v = sL(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{\frac{2500K}{0+25}} = 0.01$$

پس با بهره ثابت و $K = 1$ میتوانیم به خطای دلخواه برسیم اما حاشیه فاز:



خب حاشیه فاز برابر 28 است که دلخواه ما بیش از این حرف هاست باید دنبال طراحی کنترلر باشیم دو راه پیش روی ماست روش اول طراحی با کنترلر پیش فاز و روش دوم طراحی با کنترلر پس فاز.

۲.۲.۴ روش کنترلر پیشفاز

کنترلر بصورت زیر است :

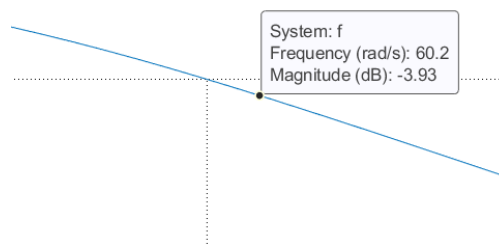
$$C(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}, |a| > 1$$

این کنترلر پهنای باند مارا افزایش داده و این امر موجب نویزپذیری بیشتر سیستم میشود. روند طراحی به این گونه است که اختلاف فاز دلخواه و فازی که داریم را بدست می آوریم. (یه مقدار کمکی هم اضافه میکنیم بین ۵ تا ۱۰ درجه برای محکم کاری اضافه میکنیم)

$$\phi_m = 45 - 28 + \epsilon = 25$$

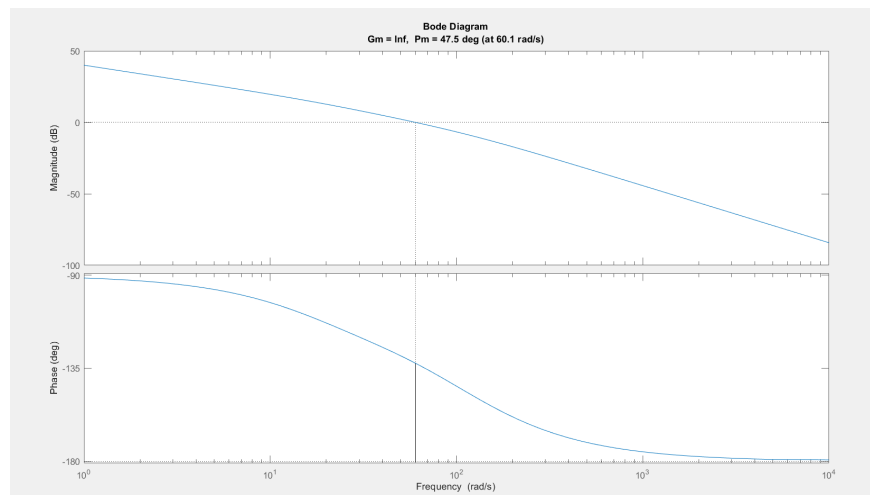
$$a = \frac{1 + \sin(\phi_m)}{1 - \sin(\phi_m)} = 2.45$$

$$20 \log |G(\omega_m)| = -10 \log(a)$$

از روی نمودار $-3.9 = -10 \log(2.45)$:-

$$\omega_m = 60.2$$

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = \frac{1}{60.2 \times 1.56} = 0.010612567 \Rightarrow C(s) = \frac{0.026s + 1}{0.0106s + 1}$$

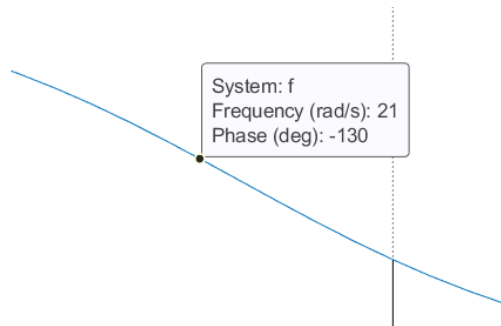


۳.۲.۴ روش کنترلر پسفاز

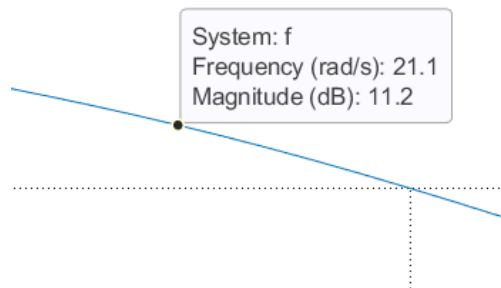
کنترلر بصورت زیر است :

$$C(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}, |a| < 1$$

این کنترلر پسفازی قطبش سمت صفرش قرار دارد و برعکس کنترلر پیشفاز سیستم را کند ولی نویزپذیری را کم میکند. در واقع این روش به گونه ای است که تغییر فرکانس گذر بهره به فاز دلخواه میرسیم. کمی باز بیشتر از ۴۵ درجه میگیریم برای احتیاط، بجای ۱۳۵ درجه ۱۳۰ درجه میگیریم که حاشیه فاز ۵۰ درجه بجا ۴۵ بده: تغییر نقطه فرکانس گذر بهره :



$$\omega_c = 21 \rightarrow 20 \log(a) + 20 \log(g(\omega_c)) = 0$$



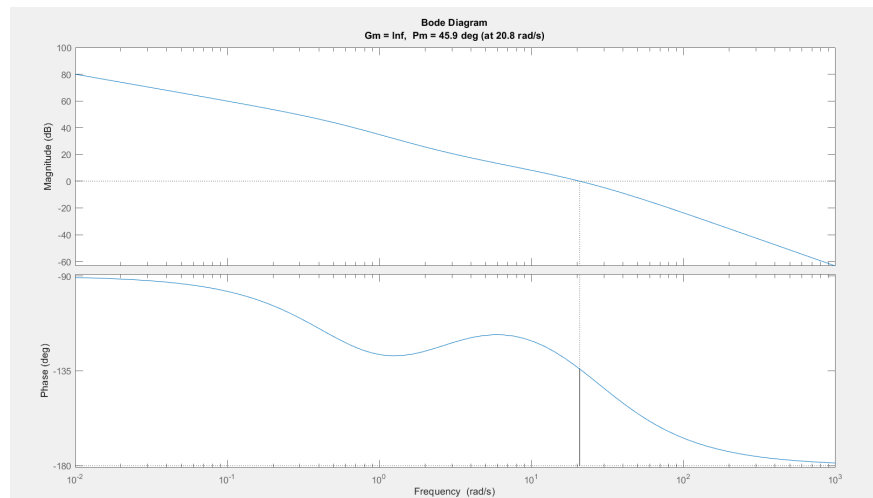
$$20 \log(a) = -11.2$$

$$a = 0.26$$

$$\frac{1}{aT} = \frac{\omega_m}{10} \Rightarrow T = 1.71$$

کنترلر:

$$C(s) = \frac{0.46s + 1}{1.71s + 1}$$



۴.۲.۴ کد متلب

```

1 clear all
2 s=tf('s');
3 y=tf(2500/s/(s+25));
4 c=tf((0.46*s+1)/(1.71*s+1));
5 h=tf((0.026*s+1)/(0.0106*s+1));
6 f=y*c;
7 margin(f)

```

Code 2: Code soal 2

۵ سوال پنجم

۱.۵ قسمت الف

با توجه به خواسته مسئله pd طراحی میکنیم که بدون فراجش و تا ثانیه سوم به مقدار نهایی برسد. برای اینکار اول نیاز داریم فرکانس گذر بهره را جابجا کنیم تا با اینکار به همان ثانیه سوم برسیم زمان نشست برابر است با :

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega} = 3$$

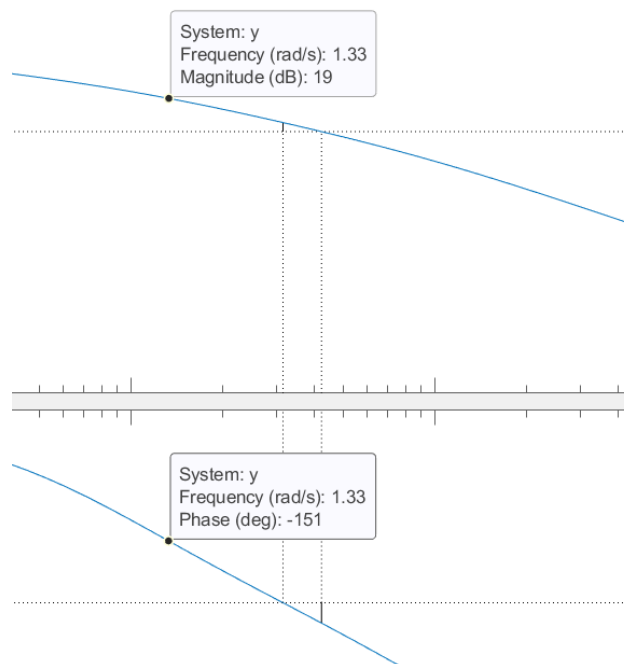
از انجایی که گفته اورشوت نداشته باشیم یعنی:

$$\zeta = 1$$

پس از روابط بالا فرکانس برابر است با :

$$\omega = 4/3 = 1.33$$

باید فرکانس گذر بهره مان را به آن نقطه خاص ببریم برای این کار کافی است یک بهره ثابتی در



سیستم ضرب شود که مقدارش برابر:

$$20 \log(k) = -19$$

در نتیجه :

$$k = 0.1122018$$

اما با تغییر فرکانس گذر بهره حاشیه فاز به مقدار $-151 + 180 = 29$ می رسد ولی از آنجا که اورشوت نمیخواهیم پس $zeta = 1$ و این طبق فرمول تجربی $\phi_d = 100\zeta$ پس به 100 نیاز داریم. نوبت پیدا کردن T است:

$$\phi_{cd} = 100 - 29 + \epsilon = 76 \quad T = \frac{1}{\omega_{cd}} \tan(\phi_{cd}) = 3.015$$

فرم کلی:

$$C(s) = \frac{k}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} (Ts + 1)$$

کنترلر ما برابر میشود :

$$C(s) = 0.02805(1 + 3.015s)$$

۱.۱.۵ خروجی متلب

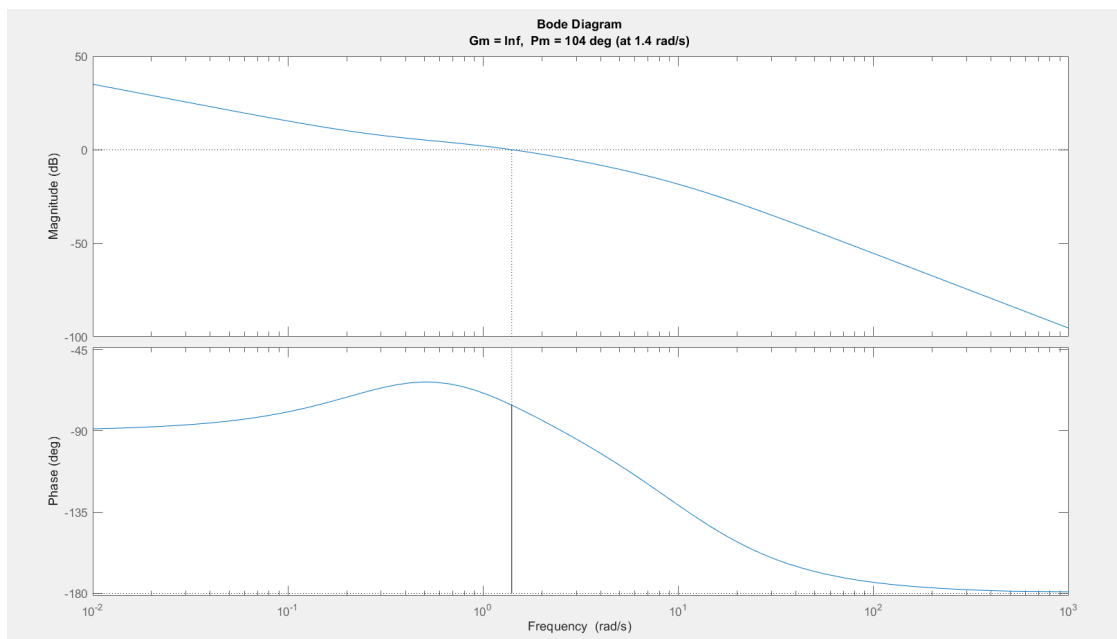
```

1 clear all
2 s=tf('s');
3 y=tf(200/(s*(s+1)*(s+10)));
4 c=0.0601*(1+1.42965*s);
5 f=y*c;
6 margin(f)
7 step(f/(1+f))

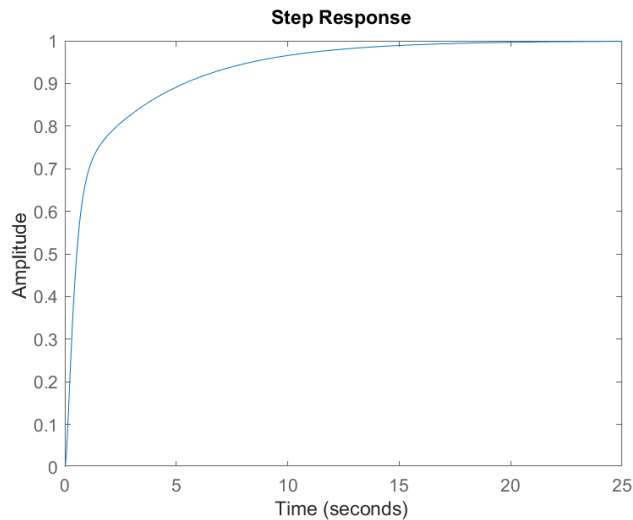
```

Code 3: Code soal 2

همان جور که مشاهده میکنید فرکانس گذر بهره 1.33 و حاشیه فاز صد درجه داریم حالا خروجی



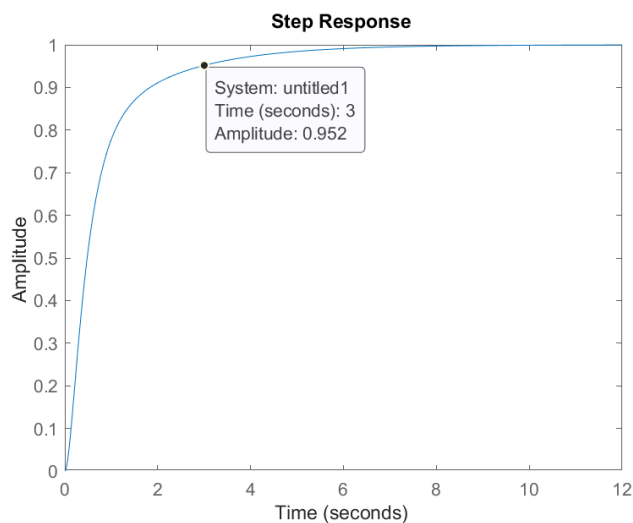
نسبت به ورودی پله: کمی کند است برای آنکه اختلاف فاز ۱۰۰ درجه ای دارد اما میشود با تغییر



فرکانس گذر بهره این کندی را بهبود بخشید.
فرکانس گذر بهره را به 1.5 میبریم و به جواب میرسیم ولی حاشیه فاز ما دیگر صد نیست. با روش جدید مانند قبل عمل میکنیم ولی کنترلر جدید میشود:

$$c = 0.0601(1 + 1.42965s)$$

۲.۱.۵ پاسخ پله مطلوب



۲.۵ قسمت ب

۱.۲.۵ پیدا کردن K_p

ثابت رمپ برابر است با :

$$K_v = sL(s) = 1$$

$$s \rightarrow 0$$

$$K_v = \frac{200}{(0+10)(0+1)}(0K_d + K_p) = 1$$

ازینجا نتیجه میگیریم که :

$$K_p = \frac{1}{20}$$

۲.۲.۵ $K_d : 0.1 \text{ to } 0.5$

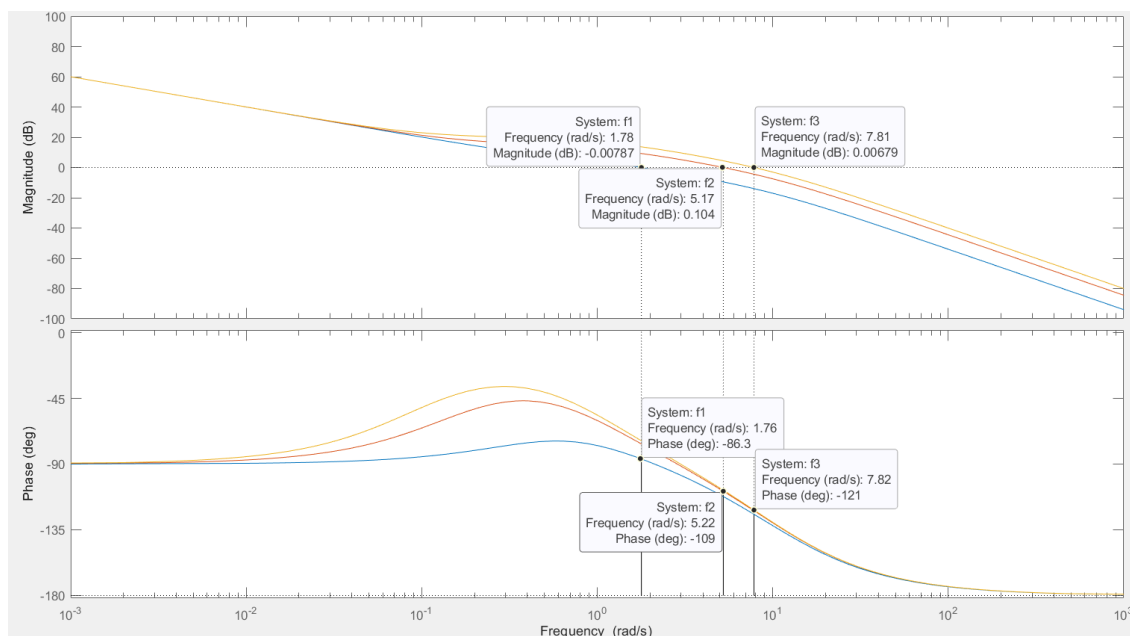
نمودار آبی متعلق به : ثابت یک دهم
 نمودار قرمز متعلق به : ثابت سه دهم
 نمودار زرد متعلق به : ثابت نیم

```

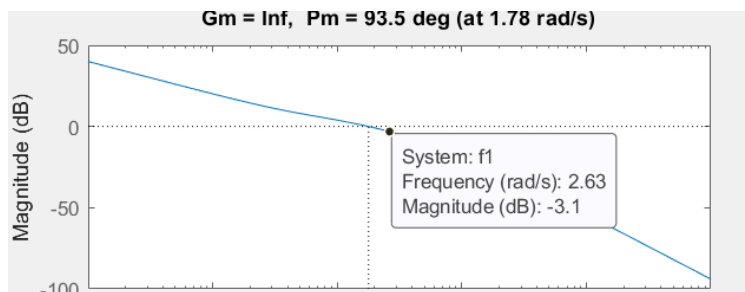
1 clear all
2 s=tf('s');
3 y=tf(200/(s*(s+1)*(s+10)));
4 c1=0.05+0.1*s;
5 c2=0.05+0.3*s;
6 c3=0.05+0.5*s;
7 f1=y*c1;
8 f2=y*c2;
9 f3=y*c3;
10 margin(f1);

```

Code 4: Code soal 2 part B



شکل ۲: حاشیه فاز سه کنترلر



شکل ۳: پهنای باند فرکانس در اندازه منفی ۳

۳.۲.۵ حاشیه فاز و پهنای باند

همان جور که مشخص است بیشترین حاشیه فاز متعلق به یک دهم هست با حاشیه فاز و پهنای باند:

$$Bw = 2.63 \quad Pm = 93.5 \quad \omega_c = 1.78$$