



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

کنترل خطی

تمرین سری سوم

باربد طاهرخانی ۴۰۱۲۰۴۹۳



## فهرست مطالب

۲	۱ سوال اول
۲	۱.۱ حلقه بسته
۳	۲.۱ حلقه باز
۳	۲ سوال دوم
۵	۳ سوال سوم
۵	۱.۳ الف
۷	۲.۳ ب
۸	۴ سوال چهارم
۸	۵ سوال پنجم
۸	۱.۵ الف
۸	۲.۵ ب
۹	۳.۵ ج
۱۰	۴.۵ ج
۱۱	۵.۵ د
۱۲	۶.۵ ه
۱۳	۶ سوال ششم



## ۱ سوال اول

## ۱.۱ حلقه بسته

تابع تبدیل را حلقه بسته در نظر گرفتیم اگر اینکار را بکنیم فقط مخرج روی پایداری تاثیر می گذارد یعنی اگر  $a$  منفی باشد صفر غیر کمینه فاز می دهد ولی روی پایداری تاثیر نمیگذارد و  $K$  هم تاثیری روی پایداری ندارد فقط یک گینی است که انگار بیرون حلقه بسته شده است پس جدول را مینویسیم:

$$\Delta = (s+2)^2(s+b)(s+4) = s^4 + (b+6)s^3 + (10+6b)s^2 + (10b+8)s + 8b = 0$$

جدول راث :

$s^4$	1	$10+6b$	$8b$
$s^3$	$b+6$	$10b+8$	0
$s^2$	$\frac{6b^2+36b+52}{b+6}$	$8b$	0
$s$	$\frac{52s^3+312s^2+520s+416}{6b^2+36b+52}$	0	0
0	$8b$	0	0

تعیین علامت  $b$  :سطر  $s^3$  :

$$b+6 > 0 \rightarrow b > -6$$

سطر  $s^2$  :

$$-3.5774 > b \quad \text{or} \quad b > -2.4226$$

سطر  $s$  :

ریشه ها :

$$-4$$

$$-1 \pm 1j$$

پس می شود :

$$b > -4$$

سطر آخر :

$$b > 0$$

اشتراک جواب ها :

$$b > 0$$

ولی بدون راث هم میشد اینکار را انجام داد از انجایی که ریشه سمت راست ناپایداری ایجاد میکند کافی است که  $b$  مثبت باشد.



## ۲.۱ حلقه باز

حالا فرض میکنیم حلقه باز است :

$$\Delta = s^4 + (8+b)s^3 + (8b+20)s^2 + (20b+16+k)s + 16b+ka$$

جدول راژ:

$s^4$	1	$8b+20$	$16b+ka$
$s^3$	$8+b$	$20b+16+k$	0
$s^2$	$\frac{8b^2+64b+176+k}{b+8} = A$	$16b+ka$	0
$s$	$\frac{A(8b^2+64b+176+k)-(16b+ka)(8+b)}{A}$	0	0
0	$16b+ka$	0	0

باید تمام ستون اول هم علامت و مثبت باشد پس :

$$b > -2.5 \quad k < 34 \quad a < 1.176$$

## ۲ سوال دوم

## معادلات و تحلیل کنترل

معادلات سیستم

$$K \frac{s+1}{s(s^2+4s+5)}$$

محاسبه قطبها

در اینجا قطبهای سیستم به صورت زیر مشخص شدهاند:

$$-1, \quad -2-i, \quad 0$$

و یک صفر در منفی یک دارد. اول مکان هندسی که تعداد فردی صفر و قطر دارد را انتخاب میکنیم.

مجانِب

$$\frac{\sum p - \sum z}{n-m} = \frac{-4+1}{2} = -1.5$$

خروج زاویه مجانب:

$$\frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pi/2, 3\pi/2$$



مشتق‌گیری از تابع

نقطه شکست را پیدا می‌کنیم :

$$\frac{dG}{ds} = \frac{s^3 + 4s^2 + 5 - (s+1)(3s^2 + 8s + 5)}{(s^3 + 4s^2 + 5)^2} = -2s^3 - 7s^2 - 8s - 5 = 0$$

نقطه شکست برابر است :

$$-2.1974$$

محاسبات بعدی:

خروج از قطب

برای خروج از قطب:

$$\sum \theta_2 - \sum \theta_p = (2k+1)\pi$$

نزدیک قطب قانون زاویه را مینویسیم

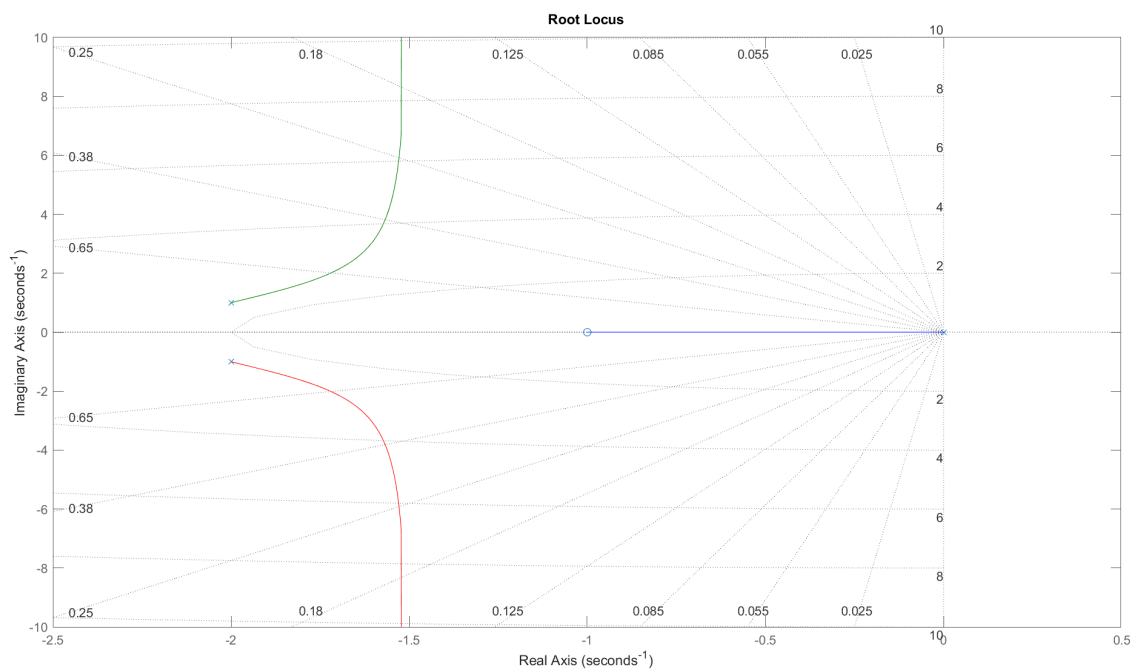
$$180 - 45 - (90 + 180 - \arctan(0.5) + \theta_p) = (2k+1)\pi$$

$$\theta_p = 71$$

طبق این ها مکان هندسی ریشه یابی به این صورت میشود :



دو تا از قطب ها در کا بی نهایت به سمت صفر نامحدود میروند و یکی دیگر به سمت صفر منفی میروند



شکل ۱: مکان هندسی ریشه

۳ سوال سوم

۱.۳ الف

اول بصورت معادله مشخصه درش می آوریم:

$$1 + kG(s) = 1 + K \frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

محاسبه قطب ها

در اینجا قطب های سیستم به صورت زیر مشخص شده اند:

$$-1 + -i, \quad -6, \quad -5, \quad 0$$

و یک صفر در منفی ۳ دارد. اول مکان هندسی که تعداد فردی صفر و قطر دارد را انتخاب میکنیم.

مجاناب

$$\frac{\sum p - \sum z}{n - m} = \frac{-5 - 6 - 2 - (-3)}{5 - 1} = -2.5$$



خروج زاویه مجانب:

$$\frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pi/4, 3\pi/4, -\pi/4, -3\pi/4$$

مشتق گیری از تابع

نقطه شکست را پیدا می کنیم :

$$\begin{aligned} \frac{dG}{ds} &= \frac{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2) - (s+3)(5s^4+52s^3+162s^2+164s+60)}{(s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2))^2} = -2s^3 - 7s^2 - 8s - 5 = 0 \\ -4s^5 - 54s^4 - 264s^3 - 568s^2 - 492s - 180 &= 0 \end{aligned}$$

نقطه شکست برابر است :

$$-5.5257$$

بقیه شان حقیقی نبودند. محاسبات بعدی:

خروج از قطب

برای خروج از قطب:

$$\sum \theta_2 - \sum \theta_p = (2k+1)\pi$$

نزدیک قطب قانون زاویه را مینویسیم

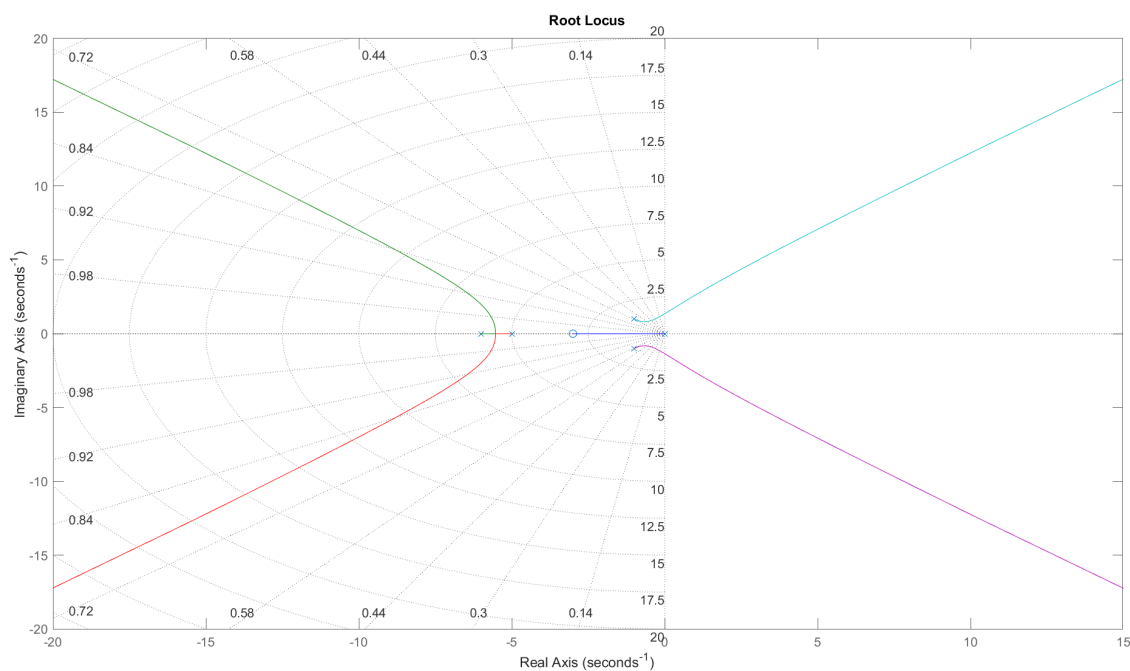
$$\arctan(0.5) - (45 + 90 + \arctan(0.25) + \arctan(0.2) + \theta_p) = (2k+1)\pi$$

$$26 - 250 - \theta_p = -180$$

$$\theta_p = -44$$

طبق این ها مکان هندسی ریشه یابی به این صورت میشود :

چهار قطب به سمت صفر نامحدود و مبدا که قطب هست در کا بی نهایت به صفر محدود میرسد.



شکل ۲: مکان هندسی ریشه ها

۲.۳ ب

تماما نوسانی باشد یعنی  $\zeta$  برابر صفر باشد و این یعنی همان صفر شدن تمام عناصر سطر راث :  
پس راث را مینویسیم:

$$\Delta = K(s+3) + s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2) = s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60+K)s + 3$$

$s^5$	1	54	$60+K$
$s^4$	13	82	$3K$
$s^3$	47.69	$\frac{780+10K}{13}$	0
$s^2$	$\frac{3130-10K}{47.69}$	$3K$	0
$s$	$\frac{\frac{3130-10K}{47.69} \times \frac{780+10K}{13} - 3K \times 47.69}{\frac{3130-10K}{47.69}}$	0	0
0	$3k$	0	0

باید سطر  $s$  تماما صفر بشود پس  $k$  مثبت را انتخاب میکنیم:

$$K = 35.51$$

اگر  $K$  برابر این مقدار باشد در سطر بالا می گذاریم تا ببینیم کجا محور عمودی را قطع میکند:

$$58s^2 = 105$$

محور  $j\omega$  را در این نقاط قطع میکند:

$$s = \pm 1.35j$$





## ۴ سوال چهارم

مقدار خطا ماندگار برابر 0.1 است خب پس باید تیپ دو باشد که مقدارش بی نهایت نباشد بقیه قطب ها روی نمودار بود -۵ و -۳ و یک صفر روی منفی ۱ دارد.

$$L(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+5)(s+2)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{K_a} = \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{\frac{k(s+1)}{(s+5)(s+2)}} = \frac{1}{10}$$

$$k = 100$$

## ۵ سوال پنجم

تابع تبدیل را تعریف میکنیم در متلب و قطب ها و صفر ها هم بدست میاریم :

۱.۵ الف

```

1 clear all
2 num=[5 10];
3 den=[1 4 5];
4 g=tf(num,den);
5 p=g/(1+g);
6 stepinfo(p);
7 step(p)
8
9 zero=zero(p)
10 pole=pole(p)

```

۲.۵ ب

حالا وقت پیدا کردن مقادیر است :



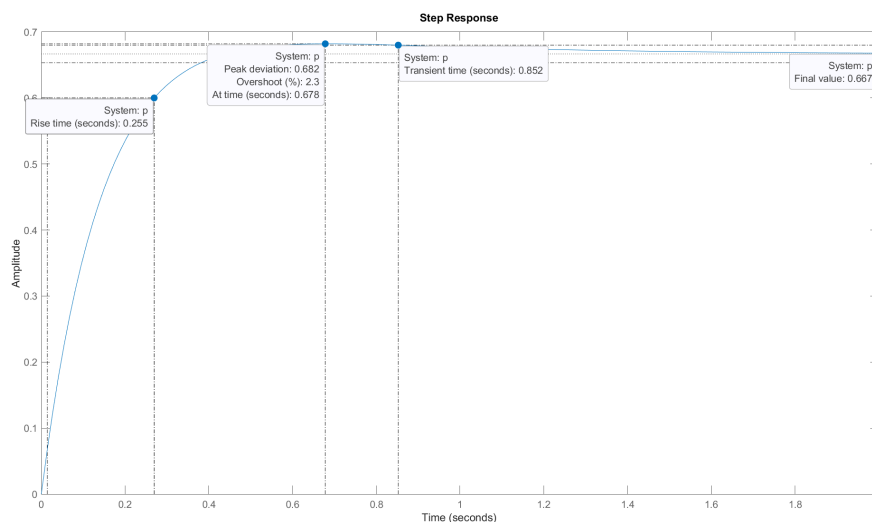
```
zero =  
  
-2.0000 + 1.0000i  
-2.0000 - 1.0000i  
-2.0000 + 0.0000i
```

```
pole =  
  
-6.7913 + 0.0000i  
-2.0000 + 1.0000i  
-2.0000 - 1.0000i  
-2.2087 + 0.0000i
```

شکل ۳: صفر و قطب

```
RiseTime: 0.2555  
TransientTime: 0.8524  
SettlingTime: 0.8524  
SettlingMin: 0.6013  
SettlingMax: 0.6820  
Overshoot: 2.3040  
Undershoot: 0  
Peak: 0.6820  
PeakTime: 0.6781
```

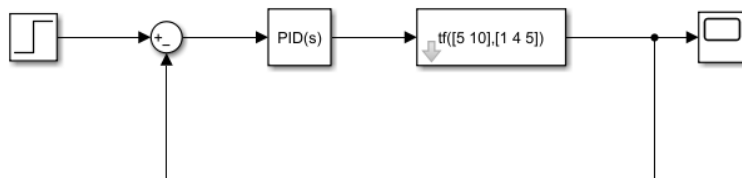
شکل ۴: مقادیر



شکل ۵: نمودار پاسخ

۳.۵ ج

در سیمولینک طراحی میکنیم: تنظیم میکنیم ولی هر مقدار گذاشتیم خود سیمولینک  $D$  را صفر میکند پس خودمان ضریب میدهیم.



شکل ۶: سیمولینک

PID 1dof (mask) (link)

This block implements continuous- and discrete-time PID control algorithms and includes advanced features such as anti-windup, external reset, and signal tracking. You can tune the PID gains automatically using the 'Tune...' button (requires Simulink Control Design).

Controller: PD Form: Parallel

Time domain:

☒ Continuous-time

☐ Discrete-time

Discrete-time settings

Sample time (-1 for inherited): -1

Compensator formula

$$P + D \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}}$$

Main Initialization Saturation Data Types State Attributes

Controller parameters

Source: internal

Proportional (P): 1

Derivative (D): 0

Filter coefficient (N): 100 ☒ Use filtered derivative

Automated tuning

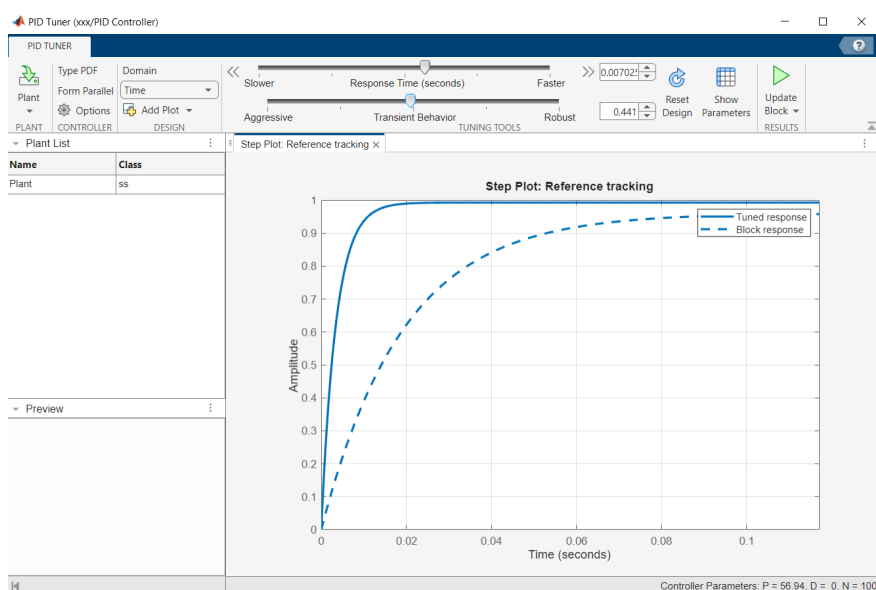
Select tuning method: Transfer Function Based (PID Tuner App) Tune...

OK Cancel Help Apply

شکل ۷: طراحی پی دی

ج ۴.۵

$$K_p = 10 \quad K_d = 2$$



شکل ۸: طراحی

Controller: PD Form: Parallel

Time domain: ☒ Continuous-time ☐ Discrete-time

Discrete-time settings: Sample time (-1 for inherited): -1

Compensator formula: 
$$P + D \frac{N}{1 + Ns}$$

Main Initialization Saturation Data Types State Attributes

Controller parameters

Source: Internal

Proportional (P): 10

Derivative (D): 0

Filter coefficient (N): 50 ☒ Use filtered derivative

Automated tuning

Select tuning method: Transfer Function Based (PID Tuner App) Tune...

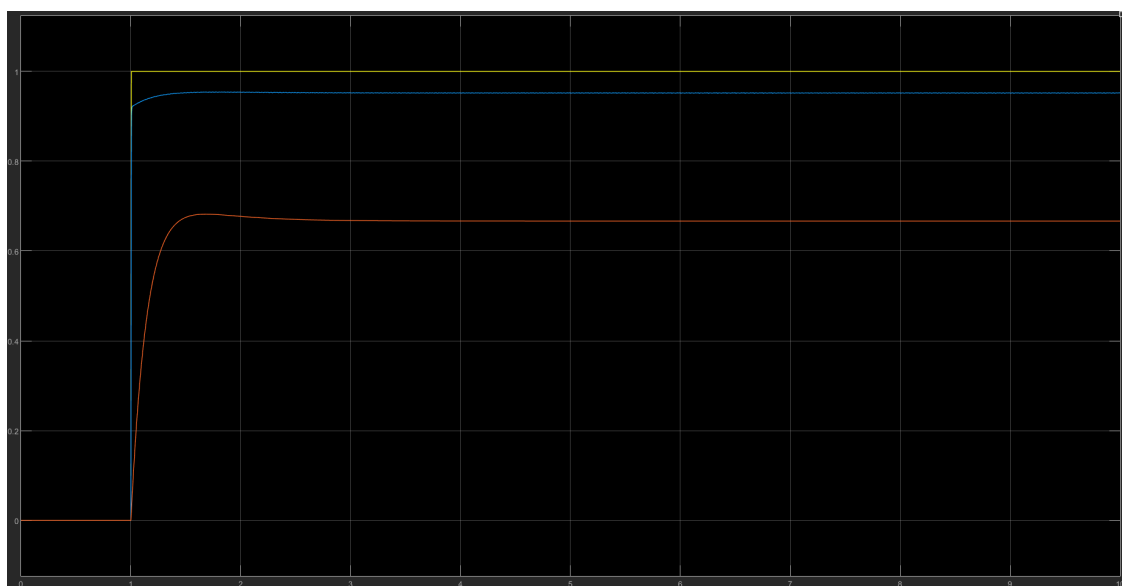
☒ Enable zero-crossing detection

OK Cancel Help Apply

شکل ۹: طراحی

۵.۵ د

سیگنال زرد : ورودی قرمز : بدون کنترلر آبی : با کنترلر



شکل ۱۰: پاسخ پله

۶.۵ ه

همان جور که مشاهده میکنید کنترلر  $PD$  باعث بهبود پاسخ میشود خطای ماندگار را کم میکند ولی هدف اصلی این کنترلر بهبود سرعت سیستم است و زمان نشست را فوق العاده پایین می آورد اینجا اورشوت هم از بین می برد .



## ۶ سوال ششم

نکات لازم برای طراحی پس فاز این است که برای پرهیز از تغییر زیاد مکان هندسی ریشه ها شبکه پس فاز را نزدیک به هم و نزدیک مبدا میگذاریم. اول می اییم  $Kv$  مساوی ۱۰ را بررسی می کنیم:

$$Kv = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = k \frac{Tds + 1}{Tps + 1} \frac{0.2}{s(s+1)}$$

$$0.2k = 10 \rightarrow k = 50$$

حالا گین حلقه بسته را مینویسیم :

$$\frac{\frac{10(Tds+1)}{s(s+1)(Tps+1)}}{1 + \frac{10(Tds+1)}{s(s+1)(Tps+1)}}$$

حال می اییم صفر کنترلر را برابر یکی از قطبهای سیستم میگذاریم انتخاب مان باید قطب منفی باشد چون اگر صفر باشد تیپ سیستم را کاهش میدهم و خطا را عوض کردیم:

$$Td = 1$$

پس تابع تبدیل :

$$\frac{\frac{10}{s(Tps+1)}}{1 + \frac{10}{s(Tps+1)}} = \frac{10}{s(Tps+1) + 10}$$

به فرمت استاندارد بازنویسی میکنیم :

$$\frac{10/Tp}{s^2 + \frac{s}{Tp} + \frac{10}{Tp}}$$

$$\zeta = 0.452 \zeta \omega_n = \frac{1}{Tp}$$

$$0.9 \omega_n = \frac{1}{Tp} \omega_n = \sqrt{\frac{1}{10}}$$

$$\rightarrow Tp = \frac{10}{81}$$

کنترلر می شود:

$$\frac{50(s+1)}{0.123s+1}$$