Gabriel Barbosa da Silva

Juliana

Métodos numéricos

Lista 4

1. Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método da eliminação de Gauss, identificando os pivôs, os multiplicadores e as operações efetuadas em cada etapa.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right|$$

Pivô $a_{11} = 2$

Linha 2: $m_{21} = \frac{1}{2}$

$$1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$$

$$-1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$$

$$2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.5$$

$$-1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -1.5$$

$$1 - \frac{1}{2} \cdot 7 = -2.5$$

Linha 3: $m_{3\,1} = \frac{3}{2}$

$3 - \frac{3}{2} \cdot 2 = 0$

$2 - \frac{3}{2} \cdot 2 =- 1$

$- 3 - \frac{3}{2} \cdot 1 =- 4.5$

$- 2 - \frac{3}{2} \cdot 1 =- 3.5$

$4 - \frac{3}{2} \cdot 7 =- 6.5$

Linha 4: $m_{4\,1} = \frac{4}{2} = 2$

$4 - 2 \cdot 2 = 0$

$3 - 2 \cdot 2 =- 1$

$2 - 2 \cdot 1 = 0$

$1 - 2 \cdot 1 =- 1$

$12 - 2 \cdot 7 =- 2$

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 1.5 & -1.5 & -2.5 \\ 0 & -1 & -4.5 & -3.5 & -6.5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right|$$

Pivô $a_{2\,2} =- 2$

Linha 3: $m_{3\,2} = \frac{-1}{-2}$

$0 - \frac{-1}{-2} \cdot 0 = 0$

$-1 - \frac{-1}{-2} \cdot -2 = 0$

$-4.5 - \frac{-1}{-2} \cdot 1.5 =- 5.25$

$-3.5 - \frac{-1}{-2} \cdot -1.5 =- 2.75$

$-6.5 - \frac{-1}{-2} \cdot -2.5 =- 5.25$

Linha 4: $m_{4\,2} = \frac{-1}{-2}$

$0 - \frac{-1}{-2} \cdot 0 = 0$

$-1 - \frac{-1}{-2} \cdot -2 = 0$

$0 - \frac{-1}{-2} \cdot 1.5 =- 0.75$

$-1 - \frac{-1}{-2} \cdot -1.5 =- 0.25$

$-2 - \frac{-1}{-2} \cdot -2.5 =- 0.75$

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 1.5 & -1.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & -5.25 & -2.75 & -5.25 \\ 0 & 0 & -0.75 & -0.25 & -0.75 \end{array}\right|$$

Pivô $a_{3\,3} =- 5.25$

Linha 4: $m_{4\,3} = \frac{-0.75}{-5.25} \simeq 0,142857143$

$$0 - \left(\frac{-0.75}{-5.25}\right) \cdot 0 = 0$$

$$0 - \left(\frac{-0.75}{-5.25}\right) \cdot 0 = 0$$

$$-0.75 - \left(\frac{-0.75}{-5.25}\right) \cdot -5.25 = 0$$

$$-0.25 - \left(\frac{-0.75}{-5.25}\right) \cdot -2.75 = 0,142857143$$

$$-0.75 - \left(\frac{-0.75}{-5.25}\right) \cdot -5.25 = 0$$

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 1.5 & -1.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & -5.25 & -2.75 & -5.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0,142857143 & 0 \end{array}\right|$$

x4 =0 / 0,142857143 = **0**

x3 = (-5.25 -(-2.75 * **0**)) / -5.25 = **1**

x2=(-2.5-(-1.5 * **0**)-(1.5 * **1**)) / -2 = **2**

x1=(7-(1 * **0**)-(1 * **1**)-(2 * **2**)) / 2 = **1**

.: X =

$$\left|\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{array}\right|$$

2. Determine a fatoração LU da matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Pivô $a_{1\,1} = 2$

Linha 2: $m_{2\,1} = 2$

$4 - 2 \cdot 2 = 0$

$3 - 2 \cdot 1 = 1$

$3 - 2 \cdot 0 = 3$

$1 - 2 \cdot 0 = 1$

Linha 3: $m_{3\,1} = 4$

$8 - 4 \cdot 2 = 0$

$7 - 4 \cdot 1 = 3$

$9 - 4 \cdot 0 = 9$

$5 - 4 \cdot 0 = 5$

Linha 4: $m_{41} = 3$

$6 - 3 \cdot 2 = 0$

$7 - 3 \cdot 1 = 4$

$9 - 3 \cdot 0 = 9$

$8 - 3 \cdot 0 = 8$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

Pivô $a_{2\,2} = 1$

Linha 3: $m_{3\,2} = 3$

$3 - 3 \cdot 1 = 0$

$9 - 3 \cdot 3 = 0$

$5 - 3 \cdot 1 = 2$

Linha 4: $m_{4\,2}$ =4

$4 - 4 \cdot 1 = 0$

$9 - 4 \cdot 3 =- 3$

$8 - 4 \cdot 1 = 4$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Pivô $a_{3\,3}$ =0

Linha 4: $m_{4\,3}$ =0

$- 3 - 0 \cdot 0 =- 3$

Como deu o mesmo resultado, trocamos apenas a quarta linha pela terceira e ficamos com:

U

=

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Após definida a matriz U, definimos a matriz L utilizando os $m_{n\,m}$ usados para as operações em cada linha:

L

=

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Construa um vetor constante não nulo b e resolva o sistema Ax=b, utilizando a fatoração LU de A obtida no exercício 2.

$$\left|\begin{array}{l} y_1 = 99 \\ 2y_1 + y_2 = 69 \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 = 2 \\ 4y_1 + 3y_2 + y_4 = 9 \end{array}\right.$$

$y_1 = 99$

$y_2 = 69 - 198 =- 129$

$y_3 = 2 + 219 = 221$

$y_4 = 9 - 9 = 0$

$$\begin{vmatrix} 2x_1 + x_2 \qquad\qquad = 99 \\ \qquad x_2 + 3x_3 + x_4 =- 129 \\ \qquad - 3x_3 + 4x_4 = 221 \\ \qquad\qquad 2x_4 = 0 \end{vmatrix}$$

$x_4 = 0$
$x_3 = 221/ - 3 \simeq- 73.666666667$
$x_2 =- 129 + 221 = 92$
$x_1 = (99 - 92)/2 = 3.5$