Gabriel Barbosa da Silva

Juliana

Métodos Numéricos

Lista 5

1 - Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

(a) Verifique a convergência do sistema para o método de Gauss-Jacobi utilizando o critério das linhas. Caso não seja satisfeito, obtenha um sistema equivalente de modo que o critério das linhas seja satisfeito.

$\alpha_1 = \frac{1}{1}(3 - 1) = 2 > 1$

$\alpha_2 = \frac{1}{2}(5 + 2) = \frac{7}{2} = 3,5 > 1$

$\alpha_3 = \frac{1}{8}(0 + 6) = \frac{6}{8} = 0,75 < 1$

Critério das linhas não satisfeito.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & -6 \end{vmatrix}$$

$L1 \Leftrightarrow L2$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 8 & -6 \end{vmatrix}$$

$\alpha_1 = \frac{1}{5}(2 + 2) = \frac{4}{5} = 0,8 < 1$

$\alpha_2 = \frac{1}{3}(1 - 1) = 0 < 1$

$\alpha_3 = \frac{1}{8}(0 + 6) = \frac{6}{8} = 0,75 < 1$

Critério satisfeito.

(b) Obtenha uma aproximação para a solução do sistema com convergência garantida no item (a) utilizando o Método de Gauss-Jacobi com precisão de 10^{-3}.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(3 - 2x_2 - 2x_3) \\ x_2 = \frac{1}{3}(-2 - x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{8}(-6 - 6x_2) \end{cases}$$

Para uma aproximação inicial igual a $x^0 = (0, 0)$:

⓪

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} \\ x_2 = -\frac{2}{3} \\ x_3 = -\frac{6}{8} \end{cases} \qquad Dr = \frac{Max\left|\left|\frac{3}{5} - 0\right|; \left|-\frac{2}{3} - 0\right|; \left|-\frac{6}{8} - 0\right|\right|}{Max\left|\left|\frac{3}{5}\right|; \left|-\frac{2}{3}\right|; \left|-\frac{6}{8}\right|\right|} = 1$$

Como $Dr > 10^{-3}$ continuamos as iterações.

①

$$\begin{cases} x_1 = 1,166666666 \\ x_2 = -1,11666666 \\ x_3 = -0,25 \end{cases} \qquad Dr = 0,485714285$$

②

$$\begin{cases} x_1 = 1,146666664 \\ x_2 = -1,13888888 \\ x_3 = 0,087499995 \end{cases} \quad Dr = 0,294331391$$

③

$$\begin{cases} x_1 = 1,020555554 \\ x_2 = -1,01972222 \\ x_3 = 0,10416666 \end{cases} \quad Dr = 0,123571038$$

④

$$\begin{cases} x_1 = 0,966222224 \\ x_2 = -0,97212963 \\ x_3 = 0,014791665 \end{cases} \quad Dr = 0,091937322$$

⑤

$$\begin{cases} x_1 = 0,982935186 \\ x_2 = -0,983810186333333 \\ x_3 = -0,0209027775 \end{cases} \quad Dr = 0,036281838708169$$

⑥

$$\begin{cases} x_1 = 1,00188518553333 \\ x_2 = -1,00127932116667 \\ x_3 = -0,01214236025 \end{cases}$$ $Dr = 0,018914342488501$

⑦

$$\begin{cases} x_1 = 1,00536867256667 \\ x_2 = -1,00467584859444 \\ x_3 = 0,000959490875002 \end{cases}$$ $Dr = 0,013031887189755$

⑧

$$\begin{cases} x_1 = 1,00148654308778 \\ x_2 = -1,00146972723056 \\ x_3 = 0,00350688644583 \end{cases}$$ $Dr = 0,003876367092188$

$Dr < 10^{-3}$ Fim das iterações.

.: $x_1 \approx 1$

$x_2 \approx -1$

$x_3 \approx 0$

2 - Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 11 \end{cases}$$

(a) Verifique a convergência do sistema usando o critério de Sassenfeld.

$\beta_1 = \frac{1}{4}(1 + 1) = \frac{1}{2} = 0,5 < 1$

$\beta_2 = \frac{1}{6}(1 \cdot 0,5 + 1) = \frac{1,5}{6} = 0,25 < 1$

$\beta_3 = \frac{1}{8}(2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,25) = \frac{1,25}{8} = 0,15625 < 1$

Critério satisfeito.

(b) Obtenha uma aproximação para a solução do sistema com convergência garantida no item (a) utilizando o Método de Gauss-Seidel após 4 iterações e calculando ambos os critérios de parada em cada iteração.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(3 - x_2 - x_3) \\ x_2 = \frac{1}{6}(8 - x_1 - x_3) \\ x_3 = \frac{1}{8}(11 - 2x_1 - x_2) \end{cases}$$

⓪

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(3 - 0 - 0) = 0,75 \\ x_2 = \frac{1}{6}(8 - 0,75 - 0) = 1,20833333333333 \\ x_3 = \frac{1}{8}(11 - 2 \cdot 0,75 - 1,20833333333333) = 1,03645833333333 \end{cases}$$

$$Dr = \frac{Max||0,75-0|;|1,20833333333333-0|;|1,03645833333333-0||}{Max||0,75|;|1,20833333333333|;|1,03645833333333||} = 1$$

①

$$\begin{cases} x_1 = 0,188802083333335 \\ x_2 = 1,12912326388889 \\ x_3 = 1,18665907118056 \end{cases}$$

Dr = 0,472922619727968

②

$$\begin{cases} x_1 = 0,171054416232638 \\ x_2 = 1,1070477520978 \\ x_3 = 1,19385542692962 \end{cases}$$

Dr = 0,143279003784034

③

$$\begin{cases} x_1 = 0,174774205243145 \\ x_2 = 1,10522839463787 \\ x_3 = 1,19315289935948 \end{cases}$$

Dr = 0,003117613017161

$\therefore\ x_1 = 0,174774205243145$

$x_2 = 1,10522839463787$

$x_3 = 1,19315289935948$