TP 01 : Approche de la logique floue

Auteur : BARCHID Sami

Introduction

Ce document est un compte rendu des exercices à réaliser dans le cadre du TP n°01 sur la Logique floue dans le cours VisA de l'option M2-IVI.

Les exercices présentés dans ce TP mettent en scène une situation où, sur base d'une variable linguistique "Température", nous devons chauffer quelque chose plus ou moins fort. Pour vulgariser, c'est comme si on cherchait à mimer le comportement d'un chauffage/chauffe-eau/etc.

Dans ce compte rendu, je présenterai :

1. **Fonctions d'appartenances** : définition de la variable linguistique "Température et exploitations des différents ensembles flous qui la composent.
2. **Opérateurs de la logique floue** : implémentation d'opérations relatives à la logique floue.
3. **Implication floue** : introduction d'une nouvelle variable linguistique avec laquelle nous allons pratiquer une implication de Mamdani avec la variable linguistique "Température".

In [1]:
```
# Imports utilisés pour la suite
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

plt.style.use('seaborn-whitegrid')  # pour l'affichage des graphiques
```

1. Fonctions d'appartenance

1.1. Définition de la variable linguistique "Température"

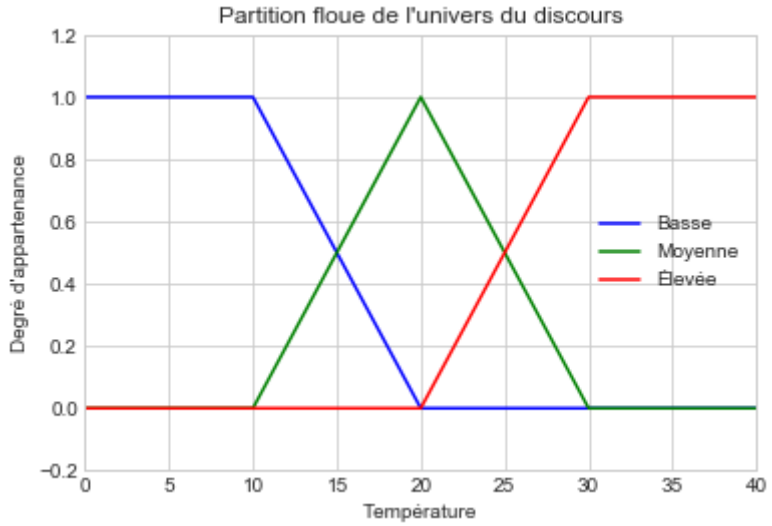
La variable linguistique "Température" est représentée par un triplet (V, U_V, T_V) où :

- $V =$ "Température", le nom de la variable
- $U_V = [0, 40]^\circ C$ est l'ensemble des valeurs de l'univers du discours. *(Note : on ne conserve que 0 à 40°C car ce sont les limites des graphiques fournis dans l'énoncé)*
- $T_V = \{Basse, Moyenne, Elevee\}$, l'ensemble des ensembles flous utilisés pour caractérisé la variable. Ces trois ensembles flous sont définis par leur fonction d'appartenance montrée dans l'énoncé.

Nous allons maintenant implémenter la variable linguistique "Température" et afficher le graphique représentant les trois ensembles flous de T_V.

In [2]:

```
#########################################################
# Définition de la variable linguistique "température"
#########################################################
#########################################################


V = "Température"
U_v = range(0, 41)  # [0,40] °C pour l'univers du discours

# DÉFINITIONS DES FONCTIONS D'APPARTENANCE POUR LES ENSEMBLES FLOUS

# Basse
def basse(x):
    if x <= 10:
        return 1.
    if x >= 20:
        return 0.
    # équation de la droite qui va entre 10 et 20 °C (y = ax + b)
    return -1./10. * x + 2

# Moyenne
def moyenne(x):
    if x <= 10 or x >= 30:
        return 0

    if x <= 20:
        return 1./10. * x - 1
    else:
        return -1./10. * x + 3

# Elevee
def elevee(x):
    if x <= 20:
        return 0
    if x >= 30:
        return 1
    return 1./10. * x - 2

# Création de T_v, l'ensemble des ensembles flous
T_v = {
    "Basse": basse,
    "Moyenne": moyenne,
    "Elevee": elevee
}

# On obtient le triplet définissant la variable linguistique température
temperature = (V, U_v, T_v)

# Affichage de l'univers du discours
plt.title("Partition floue de l'univers du discours")
plt.ylabel('Degré d\'appartenance')
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.xlabel(V)
plt.xlim(0, 40)
plt.plot([0, 10, 20, 30, 40], [basse(0), basse(10), basse(20), basse(30), basse
(40)], label="Basse", color='blue')
plt.plot([0, 10, 20, 30, 40], [moyenne(0), moyenne(10), moyenne(20), moyenne(30
), moyenne(40)], label="Moyenne", color='green')
plt.plot([0, 10, 20, 30, 40], [elevee(0), elevee(10), elevee(20), elevee(30), e
levee(40)], label="Élevée", color='red')
plt.legend()
plt.show()
```



1.2. Calcul de degré d'appartenance

Maintenant que nous avons défini la variable linguistique, nous pouvons obtenir les degrés d'appartenance aux différents sous-ensembles pour une température donnée. Ici, la température pour laquelle nous voulons obtenir le degré d'appartenance est $16^\circ C$.

In [3]:
```
# Donner les degrés d'appartenance aux différents sous-ensemble pour une tempér
ature mesurée de 16°C
print("degré d'appartenance pour basse(16) = " + str(round(basse(16), 2)))
print("degré d'appartenance pour moyenne(16) = " + str(round(moyenne(16), 2)))
print("degré d'appartenance pour elevee(16) = " + str(round(elevee(16), 2)))
```

```
degré d'appartenance pour basse(16) = 0.4
degré d'appartenance pour moyenne(16) = 0.6
degré d'appartenance pour elevee(16) = 0
```

1.3. Opérateurs de logique floue

Il est possible maintenant d'implémenter les différents opérateurs en logique floue. Les opérateurs de logique floue que nous utilisons ici sont les **opérateurs MIN/MAX de Zadeh**.

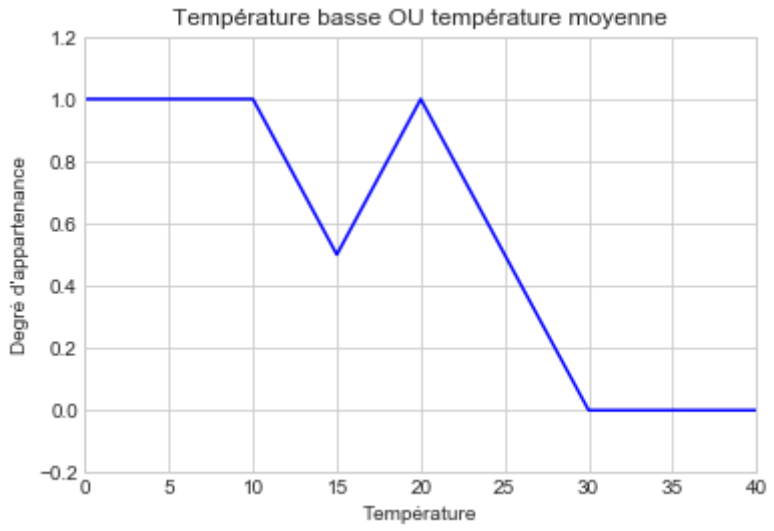
Nous allons, pour l'exemple, implémenter les opérateurs "union" et "intersection" en logique floue. Les formules de ces deux opérateurs sont :

- **Union :** $\mu_{A\cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **Intersection :** $\mu_{A\cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

In [4]:
```
def fuzzy_union(A, B, x):
    """
    Fonction d'appartenance correspondant à l'ensemble flou (A U B)
    où A et B sont des ensembles flous (comme ceux définis précédemment)
    """
    return max(A(x), B(x))


def fuzzy_intersection(A, B, x):
    """
    Fonction d'appartenance correspondant à l'ensemble flou (A INTER B)
    où A et B sont des ensembles flous (comme ceux définis précédemment)
    """
    return min(A(x), B(x))
```

Il est maintenant possible de tracer le graphique représentant l'ensemble flou "Température basse OU moyenne" :

In [5]:
```
plt.title("Température basse OU température moyenne")
plt.ylabel('Degré d\'appartenance')
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.xlabel(V)
plt.xlim(0, 40)

plt.plot([0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40], [
    fuzzy_union(basse, moyenne, 0),
    fuzzy_union(basse, moyenne, 5),
    fuzzy_union(basse, moyenne, 10),
    fuzzy_union(basse, moyenne, 15),
    fuzzy_union(basse, moyenne, 20),
    fuzzy_union(basse, moyenne, 25),
    fuzzy_union(basse, moyenne, 30),
    fuzzy_union(basse, moyenne, 35),
    fuzzy_union(basse, moyenne, 40)
], color='blue')

plt.show()
```

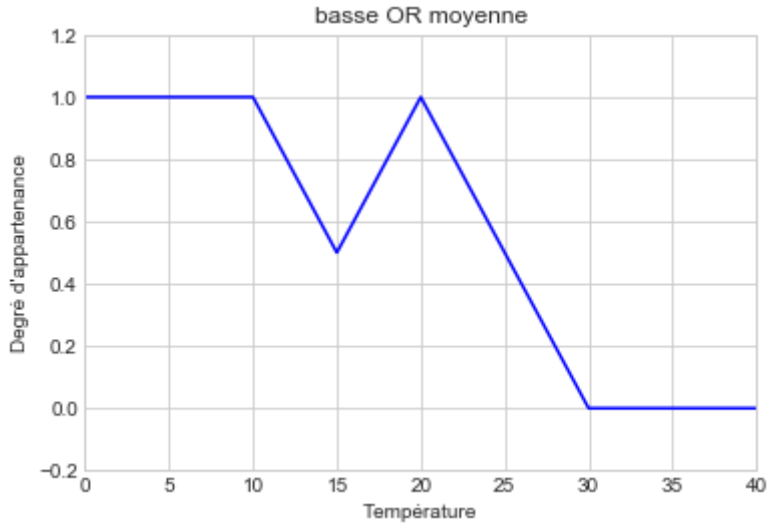


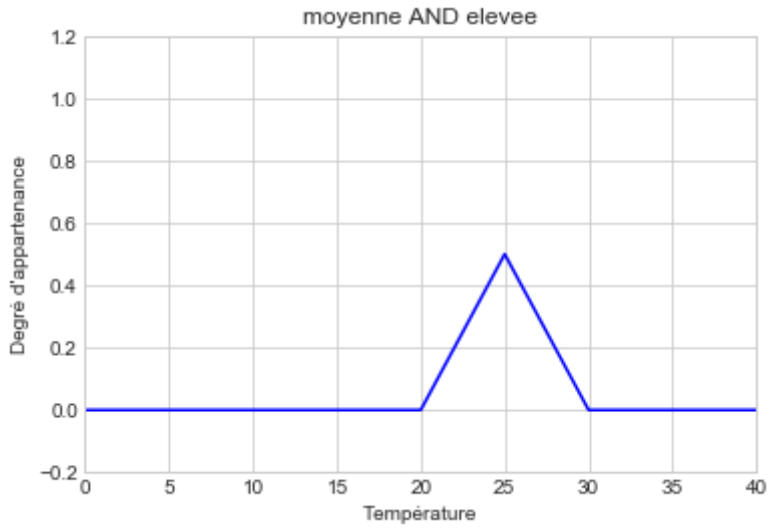
Ci-dessous, vous pouvez retrouver plusieurs autres tests avec l'intersection et l'union. Les graphiques tracés ci-dessous sont :

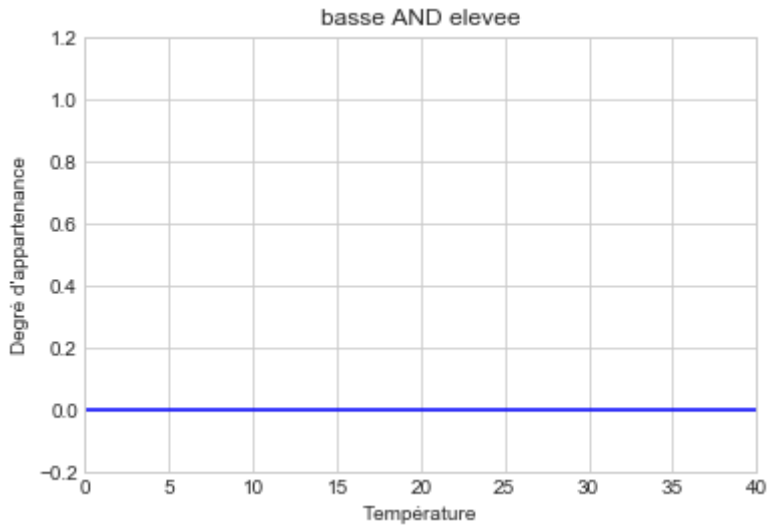
- $basse \cup moyenne$
- $moyenne \cap elevee$
- $basse \cap elevee$

In [6]:

```
# basse OR moyenne
plt.title("basse OR moyenne")
plt.ylabel('Degré d\'appartenance')
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.xlabel(V)
plt.xlim(0, 40)
degres_appartenance = []
for x in range(0, 41):
    degres_appartenance.append(fuzzy_union(basse, moyenne, x))
plt.plot(range(0,41), degres_appartenance, color="blue")
plt.show()

# moyenne AND elevee
plt.title("moyenne AND elevee")
plt.ylabel('Degré d\'appartenance')
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.xlabel(V)
plt.xlim(0, 40)
degres_appartenance = []
for x in range(0, 41):
    degres_appartenance.append(fuzzy_intersection(moyenne, elevee, x))
plt.plot(range(0,41), degres_appartenance, color="blue")
plt.show()

# basse AND elevee
plt.title("basse AND elevee")
plt.ylabel('Degré d\'appartenance')
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.xlabel(V)
plt.xlim(0, 40)
degres_appartenance = []
for x in range(0, 41):
    degres_appartenance.append(fuzzy_intersection(basse, elevee, x))
plt.plot(range(0,41), degres_appartenance, color="blue")
plt.show()
```


basse OR moyenne
Degré d'appartenance
Température
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0
5
10
15
20
25
30
35
40


moyenne AND elevee
Degré d'appartenance
Température
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0
5
10
15
20
25
30
35
40


basse AND elevee
Degré d'appartenance
Température
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0
5
10
15
20
25
30
35
40

/

2. Opérateurs de la logique floue

Nous avons implémenté les fonctions d'appartenance pour les deux opérateurs "OR" et "AND" dans l'exercice précédent. Il est également possible d'implémenter deux autres opérateurs généraux : "min" et "max", qui peuvent prendre en compte plusieurs ensembles flous :

- `min` : calcule la fonction d'appartenance où, pour chaque valeur dans l'univers du discours, chaque degré d'appartenance est le minimum trouvé parmis tous les degrés d'appartenance des ensembles flous pris en compte.
- `max` : calcule la fonction d'appartenance où, pour chaque valeur dans l'univers du discours, chaque degré d'appartenance est le maximum trouvé parmis tous les degrés d'appartenance des ensembles flous pris en compte.

Avec des définitions, il est ainsi possible d'implémenter ces deux opérateurs flous :

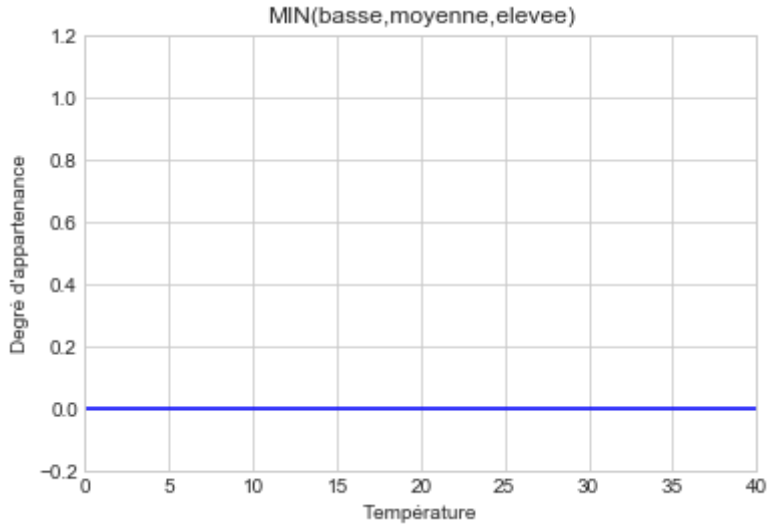
In [7]:
```
def fuzzy_min(U, *fuzzy_sets):
    """
    Opérateur min sur une liste d'ensemble flous dans un univers du discours.
    :param *fuzzy_sets: liste des ensembles flous (définis sur l'univers du dis
cours U) qui seront utilisés pour l'opérateur min
    :param U: univers du discours dans lequel sera défini l'ensemble flou de so
rtie issu de l'opérateur min.
    :return: l'ensemble flou de sorti issu de l'opérateur min
    """
    # POUR CHAQUE  [valeur de U]
    sortie = []
    for x in U:
        # TROUVER [le degré d'appartenance minimum parmis tous les degrés d'app
artenance pour chaque ensemble flou]
        degre_min = fuzzy_sets[0](x)
        for fuzzy_set in fuzzy_sets:
            degre_min = fuzzy_set(x) if degre_min > fuzzy_set(x) else degre_min
        sortie.append(degre_min)
    return sortie

def fuzzy_max(U, *fuzzy_sets):
    """
    Opérateur max sur une liste d'ensemble flous dans un univers du discours.
    :param *fuzzy_sets: liste des ensembles flous (définis sur l'univers du dis
cours U) qui seront utilisés pour l'opérateur max
    :param U: univers du discours dans lequel sera défini l'ensemble flou de so
rtie issu de l'opérateur max.
    :return: l'ensemble flou de sorti issu de l'opérateur max
    """
    # POUR CHAQUE  [valeur de U]
    sortie = []
    for x in U:
        # TROUVER [le degré d'appartenance maximum parmis tous les degrés d'app
artenance pour chaque ensemble flou]
        degre_max = fuzzy_sets[0](x)
        for fuzzy_set in fuzzy_sets:
            degre_max = fuzzy_set(x) if degre_max < fuzzy_set(x) else degre_max
        sortie.append(degre_max)
    return sortie
```

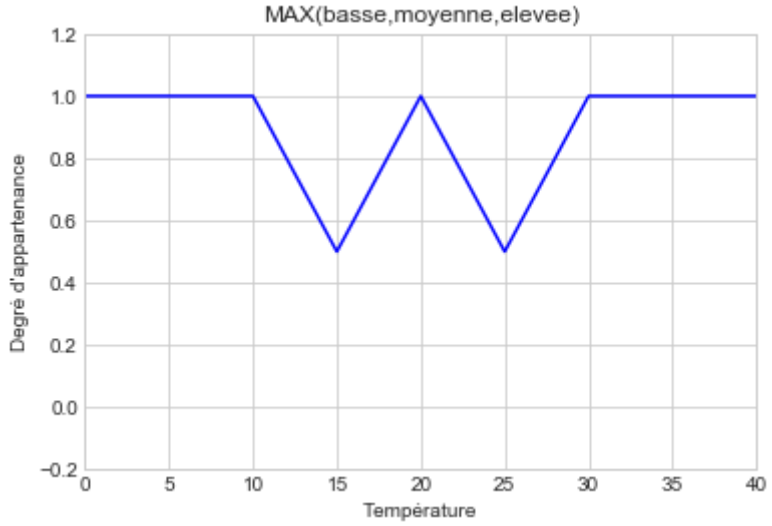
/

Il est alors possible de tracer les graphes des fonctions d'appartenance résultant des opérations min et max entre les trois ensembles flous de la variable "Température". Ci-dessous sont tracés :

- $min(basse, moyenne, elevee)$
- $max(basse, moyenne, elevee)$

In [8]:
```
# Calcul de l'opérateur min pour les trois ensembles flous de température
min_result = fuzzy_min(range(0, 41), basse, moyenne, elevee)
plt.title("MIN(basse,moyenne,elevee)")
plt.ylabel('Degré d\'appartenance')
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.xlabel(V)
plt.xlim(0, 40)

plt.plot(range(0,41), min_result, color='blue')
plt.show()

# Calcul de l'opérateur max pour les trois ensembles flous de température
max_result = fuzzy_max(range(0, 41), basse, moyenne, elevee)
plt.title("MAX(basse,moyenne,elevee)")
plt.ylabel('Degré d\'appartenance')
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.xlabel(V)
plt.xlim(0, 40)

plt.plot(range(0,41), max_result, color='blue')
plt.show()
```



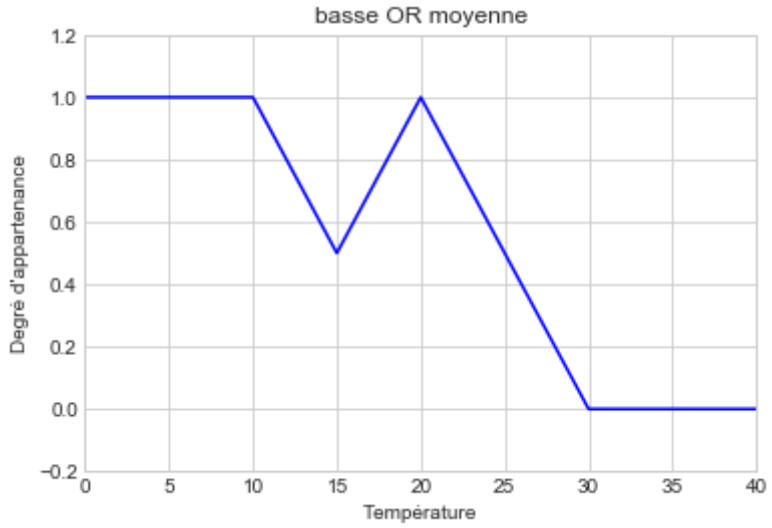


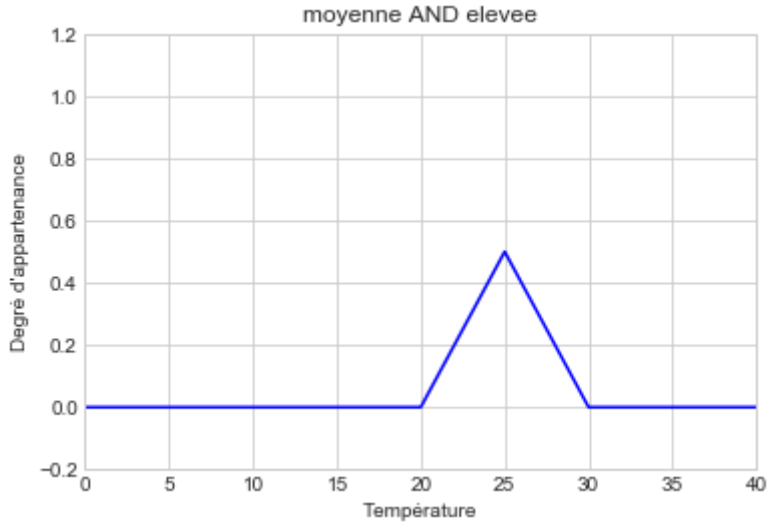
Il faut aussi noter que, grâce à ces deux opérateurs généraux `min` et `max`, nous pouvons implémenter les opérateurs d'intersection et d'union. En effet :

- $\mu_{A \cup B}$ est l'application de l'opérateur max entre les deux ensembles flous μ_A et μ_B
- $\mu_{A \cap B}$ est l'application de l'opérateur min entre les deux ensembles flous μ_A et μ_B

Ci-dessous, nous implémentons une union et une intersection qui ont déjà été créées avant avec les fonctions `fuzzy_union` et `fuzzy_intersection` :

In [9]:
```
# basse OR moyenne avec opérateur max
basse_or_moyenne = fuzzy_max(range(0,41), basse, moyenne)
plt.title("basse OR moyenne")
plt.ylabel('Degré d\'appartenance')
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.xlabel(V)
plt.xlim(0, 40)

plt.plot(range(0,41), basse_or_moyenne, color='blue')
plt.show()

# moyenne AND elevee avec opérateur min
moyenne_and_elevee = fuzzy_min(range(0,41), moyenne, elevee)
plt.title("moyenne AND elevee")
plt.ylabel('Degré d\'appartenance')
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.xlabel(V)
plt.xlim(0, 40)

plt.plot(range(0,41), moyenne_and_elevee, color='blue')
plt.show()
```





3. Implication floue

Le but de cette dernière partie de TP est de :

- introduire la nouvelle variable linguistique "Puissance de chauffe"
- implémenter l'implication de Mamdani
- tracer la courbe de l'ensemble flou résultant de la règle "SI température faible ALORS chauffer fort" lorque la température mesurée est de 12°C en utilisant l'implication de Mamdani.

3.1. Définition de la variable linguistique "Puissance de chauffe"

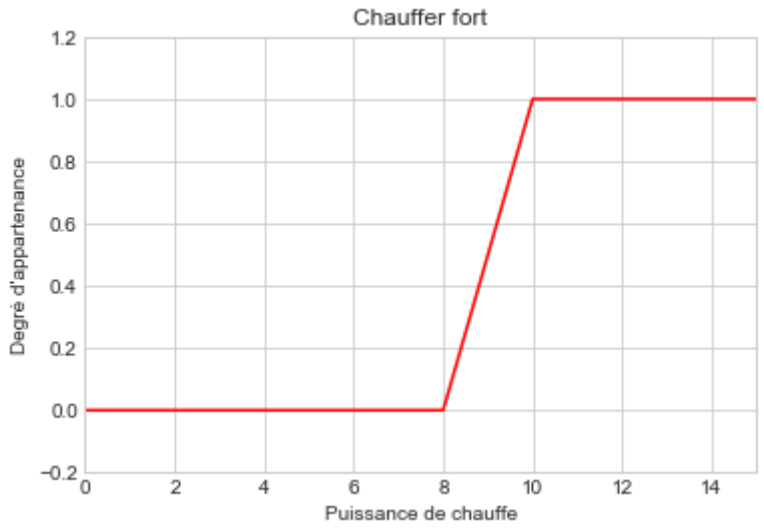
La variable linguistique "Puissance de chauffe" est représentée par un triplet (W, U_W, T_W) où :

- $W =$ "Puissance de chauffe", le nom de la variable
- $U_W = [0, 15]KW$ est l'ensemble des valeurs de l'univers du discours. *(Note : on ne conserve que 0 à 15 KW car ce sont les limites des graphiques fournis dans l'énoncé)*
- $T_W = \{$ "chauffer fort" $\}$, l'ensemble des ensembles flous utilisés pour caractérisé la variable (en l'occurrence ici, on n'en a qu'un).

Nous allons maintenant implémenter la variable linguistique "Puissance de chauffer" et afficher le graphique représentant l'ensemble flou "chauffer fort" de T_W.

In [10]:

```
#####################################################################
# Définition de la variable linguistique "Puissance de chauffe"
#####################################################################
#####################################################################
W = "Puissance de chauffe"
U_w = range(0, 16)

# Définition de la fonction d'appartenance pour l'ensemble flou "Chauffer fort"
def chauffer_fort(x):
    if x <= 8:
        return 0
    if x >= 10:
        return 1
    return 1./2. * x - 4

T_w = {"Chauffer fort": chauffer_fort}

# On obtient le triplet définissant la variable linguistique "puissance de chau
ffe"
puissance_chauffe = (W, U_w, T_w)

# Tracer le graphique de l'ensemble flou "Chauffer fort"
plt.title("Chauffer fort")
plt.ylabel('Degré d\'appartenance')
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.xlabel(W)
plt.xlim(0, 15)

degres_appartenance = []
for x in range(0, 16):
    degres_appartenance.append(chauffer_fort(x))
plt.plot(range(0,16), degres_appartenance, color="red")
plt.show()
```



3.2. Implication de Mamdani

L'implication de Mamdani est une implication donnée par la formule suivante :

$$\forall y \in U_y, \mu'_{conclusion}(y) = \min_{y \in U_y} (\mu_{predicate}(x_0), \mu_{conclusion}(y))$$

où :

- $y \in U_y$ correspond à chaque valeur y dans l'univers du discours U_y dans lequel est définie la conclusion
- $\mu_{conclusion}(y)$ correspond au degré d'appartenance de y selon la fonction d'appartenance de l'ensemble flou de conclusion.
- $\mu'_{conclusion}(y)$ correspond au degré d'appartenance de y selon l'ensemble flou de sorti issu de l'implication de Mamdani.
- $\mu_{predicate}$ correspond au prédicat.
- x_0 est la valeur observée (et donc donnée à l'avance) qui sert au prédicat pour fournir une valeur.

Avec cette formule, il est possible d'implémenter l'implication de Mamdani.

In [11]:
```python
def implication_mamdani(predicat, x_0, conclusion, U_y):
    """
    Fonction qui permet de donnerl'ensemble flou de sorti issu de l'implication de Mamdani.
    :param predicat: fonction d'appartenance correspondant au prédicat
    :param x_0: valeur observée utilisée par le prédicat
    :param conclusion: fonction de conclusion
    :param U_y: univers du discours dans lequel sera défini l'ensemble flou de sortie issu de l'implication.
    :return: l'ensemble flou de sorti issu de l'implication de Mamdani
    """
    # application simple de la formule
    sortie = []
    for y in U_y:
        sortie.append(
            min(predicat(x_0), conclusion(y))
        )
    return sortie
```

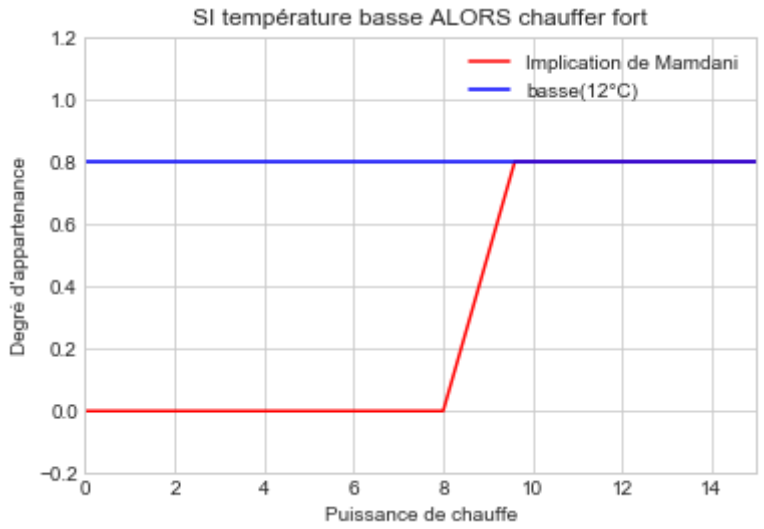
3.3. Application de l'implication de Mamdani

Soit la règle floue : "SI *température basse* ALORS *chauffer fort*. Soit une température observée de 12°C.

Nous allons utiliser l'implication de Mamdani vue plus tôt pour donner l'allure de l'ensemble flou de sorti issu de cette règle. En faisant référence à l'équation vue précédemment, nous pouvons définir ici que :

- $x_0 = 12^\circ C$.
- $\mu_{predicate}$ = basse.
- $\mu_{conclusion}$ = chauffer fort.
- U_y = l'univers du discours de la variable linguistique "Puissance de chauffe".

In [12]:
```
# Appliquer l'implication de Mamdani grâce à la fonction définie précédemment
sortie = implication_mamdani(basse, 12, chauffer_fort, np.arange(0, 15.1, 0.1))

# NOTE : on définit un pas de 0.1 pour augmenter la précision

# Afficher l'allure de la sortie
plt.title("SI température basse ALORS chauffer fort")
plt.ylabel('Degré d\'appartenance')
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.xlabel(W)
plt.xlim(0, 15)

plt.plot(np.arange(0,15.1,0.1), sortie, color='red', label="Implication de Mamd
ani")
plt.plot(U_w, [basse(12)]*len(U_w), label="basse(12°C)", color='blue')
plt.legend()
plt.show()
```



Conclusion

Dans ce TP, nous avons vu les notions de base de la logique floue en testant et en implémentant des ensembles flous, des opérateurs logiques flous et l'implication de Mamdani. Dans le raisonnement flou, nous avons pu manipuler des entrées fuzzyfiées.

Pour aller plus loin, après la partie 3, il aurait été possible d'implémenter la défuzzification (càd calculer le centre de gravité de l'ensemble flou de sorti après implication) pour obtenir une valeur finale à la sortie de la règle floue.