

# Метод перевала как первый член асимптотического разложения. Дополнение к семинару по теме: «Метод перевала»

21 июня 2018 г.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda f(x)} dx$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Пусть функция  $f(x)$  имеет на всей области интегрирования ровно одну перевальную точку  $x_0$ . Кроме того, пусть вблизи  $x_0$  функция  $f(x)$  аналитична (т.е. представляется в виде суммы бесконечного ряда Тейлора - например, функция  $\sqrt{x}$  таким свойством при  $x_0 = 0$  не обладает) и  $f''(x_0) \neq 0$ . Выполним замену переменной:

$$f(x) - f(x_0) = s^2$$

## Утверждение

Из аналитичности  $f(x)$  и  $f''(x_0) \neq 0$  следует, что  $x(s)$  - тоже аналитична.

## Доказательство

Из аналитичности функции  $f(x)$  получаем:

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = s^2$$

Первая производная отсутствует в силу того, что  $x_0$  - перевальная точка. Выражая  $s$  и выбирая правильный знак (такой, чтобы исходный интеграл был положительным), получаем:

$$s = (x - x_0) \sqrt{a_2 + a_3(x - x_0) + \dots} = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n (x - x_0)^n \quad (1)$$

Полученный ряд можно обратить и получить ряд для функции  $x(s)$ . Действительно, подставляя разложение

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k$$

в (1), получаем:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k \right)^n$$

Отсюда, путём последовательного приравнивания степеней  $s$  в левой и правой частях, можно определить коэффициенты  $c_k$ . Для  $c_1$  и  $c_2$  получаются следующие соотношения:

$$1 = a'_1 c_1$$

$$0 = a'_1 c_2 + a'_2 c_1^2$$

**Утверждение** можно считать доказанным (разумеется, на физическом уровне строгости).

Исходный интеграл переписывается в виде:

$$e^{-\lambda f(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda s^2} \frac{dx(s)}{ds} ds = \frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}} \int dt e^{-t^2} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{c'_k}{\lambda^{k/2}} \sim \frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c'_{2k}}{\lambda^k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

Здесь следует пояснить несколько моментов. Во-первых, случилось переобозначение коэффициентов  $c_k$ :

$$\frac{dx}{ds} = \sum_{k=0}^{\infty} c'_k s^k = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k s^{k-1}$$

Что более важно, в последнем переходе фигурирует значок  $\sim$ . Его следует понимать так:

$$e^{-\lambda f(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda s^2} \frac{dx(s)}{ds} ds = \frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{c'_{2k}}{\lambda^k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^N}\right)$$

Здесь мы имеем дело с асимптотическим рядом. В силу того, что  $\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$  при больших  $k$  растёт факториально, формальная сумма по  $k$  до  $\infty$  расходится. Однако, правая часть остаётся конечной в силу наличия остаточного члена, у которого тоже есть факториально растущий с  $N$  коэффициент. Формально это  $O\left(\frac{1}{\lambda^N}\right)$  получается, если написать  $x(s) - x_0 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k s^k + \frac{1}{N!} x^{(N)}(s_1) s^N$  (формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (здесь  $s_1 \in [0; s]$ )), продифференцировать по  $s$  и подставить в интеграл.

Итак, мы выяснили, что метод перевала является одним из примеров асимптотического разложения.

## Задачи для домашнего решения (необязательные)

### Задача 1 (2 балла)

Методом, изложенным на семинаре, найдите первые 3 члена асимптотического разложения  $\Gamma(z+1)$  при  $z \gg 1$ .

### Задача 2 (2 балла)

Найдите первые 2 члена асимптотического разложения при  $\lambda \rightarrow +\infty$  интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda \cos x) \frac{\sin x}{x} dx$$

Вам может пригодиться знание следующей суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$