

# Семинар по теме: «Интегралы с параметром»

28 февраля 2018 г.

## Ликбез

Порой приходится иметь дело с интегралами вида:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

или интегралами, которые сводятся к интегралам такого вида подстановкой. Это — так называемый бета-интеграл Эйлера или просто бета-функция. Этот интеграл удобно выражается через  $\Gamma(z)$  - гамма-функцию Эйлера, значения и свойства которой уже хорошо известны из предыдущих семинаров; это позволяет просто получать значения этого интеграла при различных значениях параметров:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Добавим еще одно полезное свойство гамма-функции (приводим без доказательства):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Кроме того, в задачах этого семинара будет использоваться соотношение:

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty t^{m-1} e^{-tx} dt$$

## Задача 1 (интегральные представления и подстановки)

Вычислим интеграл Френеля:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx$$

## Решение

Перейдем к переменной интегрирования  $t = x^2$ . Получим:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt$$

Следующий шаг нетривиален. Для взятия этого интеграла удобно воспользоваться “интегральным представлением функции  $1/\sqrt{t}$ ”. Такие интегральные представления - часто используемый приём, позволяющий брать определённые интегралы; в данном случае в роли этого интегрального представления будет интеграл Гаусса:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-tx^2} dx \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx e^{-tx^2} \cos t$$

Теперь возьмем интеграл по  $t$ , обозначив подынтегральную функцию как  $J(x^2)$ . Тогда:

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-at} \cos t dt = \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-at+it} dt = \operatorname{Re} \frac{1}{a-i} = \frac{a}{a^2+1}$$

Тем самым, получаем следующий интеграл:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Приведём два способа взятия этого интеграла.

**“Правильный” способ** Получившийся интеграл является интегралом от дробно-рациональной функцией и его можно взять стандартным методом разбиения на элементарные дроби. Он довольно громоздкий, поэтому приведём тут метод, позволяющий вычислить интеграл проще. Сделав замену  $x = \frac{1}{t}$ , заметим следующее:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\infty^0 \left( -\frac{dt}{t^2} \right) \frac{1/t^2}{1+1/t^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^4} dt$$

Беря полусумму двух представлений для интеграла  $I$ , получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

Теперь можно перейти к стандартной переменной для интегрирования симметрических многочленов  $t = x - \frac{1}{x}$ ; при этом  $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$ , получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^\infty = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

**“Главный” способ** Очень полезно научиться сводить такие интегралы к  $B$ -функции, о которой было рассказано выше. Перейдем в этом интеграле к переменной  $t = \frac{1}{1+x^4} \Rightarrow x = \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/4} \Rightarrow dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{-3/4} \left(-\frac{dt}{t^2}\right)$ . Имеем:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^0 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{-3/4} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^1 t^{-3/4} (1-t)^{-1/4} dt = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Используя приведенные выше свойства бета- и гамма-функций, получаем:

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

**Замечание** Заметим, что этот же ответ можно было получить гораздо проще, используя трюк с комплексными переменными и комплексным интегралом Гаусса. Нужно лишь обратить внимание на тонкость, связанную с тем, что  $\sqrt{i} = \pm e^{i\pi/4}$ , и необходимо выбрать правильный знак:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty e^{ix^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\pi}{-i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Re} e^{i\pi/4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

## Задача 2 (дифференцирование и интегрирование по параметру)

Возьмём интеграл:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$$

### Решение

Заметим, что без логарифма интеграл легко считается. Если мы продифференцируем интеграл по  $\alpha$ , то логарифм заменится на дробь, а интегралы с дробями считать легче:

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \int_0^\infty \frac{2\alpha}{(\beta^2 + x^2)(\alpha^2 + x^2)} dx$$

Пусть  $\alpha \neq \beta$ , тогда верно разложение:

$$\frac{1}{(\beta^2 + x^2)(\alpha^2 + x^2)} = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left( \frac{1}{\beta^2 + x^2} - \frac{1}{\alpha^2 + x^2} \right)$$

и каждый полученный интеграл легко считается:

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 2\alpha \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left( \frac{1}{\beta^2 + x^2} - \frac{1}{\alpha^2 + x^2} \right) dx = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\pi}{(\alpha + \beta)\beta}$$

На самом деле, при  $\alpha = \beta$ , эта формула тоже верна:

$$\int_0^\infty \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)^2} \cdot dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{2\alpha^2}$$

Теперь проинтегрируем полученное выражение по  $\alpha$ :

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{\beta} \ln(\alpha + \beta) + C(\beta)$$

Тут “постоянная”  $C(\beta)$  - произвольная функция, которая не зависит от  $\alpha$ . Чтобы найти её подставим в исходный интеграл  $\alpha = 0$ :

$$I(0, \beta) = 2 \int_0^\infty \frac{\ln x}{\beta^2 + x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \beta t \\ dx = \beta dt \end{array} \right| = 2 \int_0^\infty \frac{\ln t + \ln \beta}{\beta(1 + t^2)} dt = \frac{\pi \ln \beta}{\beta} + 2 \int_0^\infty \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$$

Последний интеграл равен нулю. Это просто показать, сделав замену  $t = e^z$ :

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{z}{1 + e^{2z}} e^z dz = \int_{-\infty}^\infty \frac{z}{e^{-z} + e^z} dz = 0$$

Итого  $I(0, \beta) = \frac{\pi \ln \beta}{\beta} \Rightarrow C(\beta) \equiv 0$ . Стоит заметить, что в решении мы неявно пользовались тем, что  $\alpha, \beta > 0$ ; но поскольку исходный интеграл очевидным образом не чувствителен к изменению их знака, то ответ в общем виде записывается как:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|)$$

### Задача 3 (составление дифференциальных уравнений)

Вычислим интегралы Лапласа:

$$I_1(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + a^2} dx$$

$$I_2(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\omega x)}{x^2 + a^2} dx$$

#### Решение

Обезразмерим интеграл, перейдя к переменной интегрирования  $x = at$  и введя “безразмерный” параметр  $\alpha = \omega a$ ; для определенности далее будем считать, что  $\alpha > 0$ . Получим:

$$I_1(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} J(\alpha)$$

Возьмем производную  $J(\alpha)$  по  $\alpha$ :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + 1} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2 + 1} dx$$

Получившийся интеграл сходится, однако производная от него уже расходится. В таком случае используем такой трюк:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin \alpha x}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x} = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right] \frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\pi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x}$$

Тут мы воспользовались табличным значением интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ . Теперь можно вычислять вторую производную, так как получающийся интеграл сходится:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + a^2} \cdot dx = J(\alpha)$$

Мы получили замкнутое дифференциальное уравнение на функцию  $J(\alpha)$ . Это уравнение линейно и его коэффициенты постоянны, поэтому оно решается с помощью подстановки  $J(\alpha) = e^{\lambda \alpha}$ . Такая подстановка приводит к алгебраическому уравнению на  $\lambda$ :  $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$  и, следовательно, общее решение уравнения записывается как:

$$J(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}$$

Константа  $C_1$  должна быть положена равной нулю. Это связано с тем, что исходный интеграл, очевидно, ограничен:  $|J(\alpha)| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx \right| = \pi$ . Константу  $C_2$  можно найти из значения интеграла при  $\alpha = 0 \Rightarrow J(0) = \pi$ . Значит, наш интеграл записывается как:

$$J(\alpha) = \pi e^{-\alpha}$$

Ответ был получен в предположении  $\alpha > 0$ . Поскольку исходный интеграл зависит лишь от модулей параметров  $a$  и  $\omega$ , то ответ в общем виде записывается как:

$$I_1(a, \omega) = \frac{\pi}{|a|} e^{-|\alpha \omega|}$$

Кроме того, заметим, что:

$$I_2(a, \omega) = -\frac{\partial}{\partial \omega} I_1(a, \omega) = \pi e^{-|\alpha \omega|} \text{sign} \omega$$

## Задача 4 (экспоненциальная регуляризация)

Используя экспоненциальную регуляризацию, найти “сумму” ряда из натуральных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

**Указание** Суть экспоненциальной регуляризации сводится к домножению на  $e^{-\varepsilon n}$  и рассмотрению поведения функции при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### Решение

Нам необходимо рассмотреть следующий ряд:

$$S(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\varepsilon n}$$

Этот ряд можно представить как производную по  $\varepsilon$  от геометрической прогрессии:

$$S(\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{1 - e^{-\varepsilon}} = \frac{e^{\varepsilon}}{(e^{\varepsilon} - 1)^2}.$$

А теперь разложимся по  $\varepsilon$ , чтобы взять предел  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} S(\varepsilon) &= \left( \frac{1}{1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 - 1 + o(\varepsilon^3)} \right)^2 \left( 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{6} + o(\varepsilon^2) \right)^{-2} \left( 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left( 1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{3\varepsilon^2}{4} + o(\varepsilon^2) \right) \left( 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{12} + o(1) \end{aligned}$$

**Замечание** Дзета-функция Римана при  $\operatorname{Re} z > 1$  определяется как сумма ряда  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ . Используя экспоненциальную регуляризацию, мы, на самом деле, получили значение  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ . Эту функцию можно доопределить (единственным образом) и для  $\operatorname{Re} z < 1$  так, чтобы полученная функция получилась аналитической (то есть имела все производные вплоть до бесконечного порядка везде, кроме некоторого набора особых точек); и значение в  $z = -1$  получено именно в смысле аналитического продолжения. Этот результат означает, что (в определенном смысле) сумма всех натуральных чисел равна  $-\frac{1}{12}$ .

## \*Задача 5 (1D Эффект Казимира)

Эта задача призвана прояснить физический смысл всевозможных регуляризаций.

Рассмотрим металлические пластины, помещённые в «одномерный» вакуум. Под одномерным вакуумом следует понимать коробку с непроницаемыми стенками (т.е. одно измерение гораздо больше двух других). Пластины находятся на расстоянии  $a \gg r$  друг от друга (здесь  $r$  - поперечный размер вакуума и радиус пластин). Необходимо вычислить силу взаимодействия между ними.

## Решение

Вычислим энергию данной системы, а затем и силу взаимодействия по формуле:  $F = -\partial E / \partial l$ . Энергия фотона с импульсом  $k$  определяется по формуле  $E_k = \frac{1}{2} \hbar \omega_k = \frac{1}{2} \hbar c k$ . Общая  $\frac{1}{2}$  - сугубо квантовой природы (нулевые колебания вакуума). К сожалению, в полной мере обсудить её происхождение на уровне 1 курса невозможно. Отметим лишь, что её можно понимать как следствие соотношения неопределённости Гейзенберга.

Полная энергия равна:

$$E = \sum_{k,\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{k,\alpha} = \frac{\hbar c}{2} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{a}$$

Здесь  $\alpha$  - индекс, нумерующий поляризации фотонов (их всего 2, отсюда и дополнительная двойка). Волновое число  $k$  стало дискретным из-за того, что в металле электрическое поле равно нулю - на самих пластинах поле зануляется.

Полученная сумма, строго говоря, расходится. Что это может означать? Определённо, что-то пошло не так. Стандартная интерпретация этого явления такова: имеющаяся у нас теория применима только для малых энергий, а что происходит на больших, мы не понимаем. На самом деле физическая величина должна быть конечной. Это значит, что «правильная» энергия должна вычисляться по формуле:

$$E = \frac{\hbar c}{2} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{a} f(n)$$

Здесь  $f(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а на не очень больших  $n$   $f(n) \approx 1$ . Строго говоря, в таком виде ничего посчитать нельзя - казалось бы, нам важно знать явный вид  $f(n)$ . Однако, можно рассмотреть разницу энергий в данной объёме чистого вакуума и вакуума с пластинами. Найдём энергию вакуума в данном объёме:

$$E_{vac} = \frac{\hbar c}{2} 2 \int_0^{\infty} \frac{n\pi}{a} f(n) dn$$

Теперь вычислим разность:

$$\Delta E = \frac{\hbar c \pi}{a} \left( \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) - \int_0^{\infty} dn n f(n) \right)$$

Вспомним формулу Эйлера-Пуассона (была на лекции Я.В.Фоминова про метод перевала):

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f(n) = \int_0^{\infty} n f(n) dn - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (n f(n))^{(2k-1)} \Big|_{n=0}$$

Здесь  $B_{2k}$  - числа Бернулли. В частности,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ . Из физических предположений разумно потребовать, чтобы  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = f''(0) = \dots = 0$ . Тогда получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f(n) - \int_0^{\infty} dn n f(n) = -\frac{1}{12}$$

Таким образом, от функции  $f$  ответ не зависит. Заметим, что та же  $-1/12$  была получена в задаче 4 из экспоненциальной регуляризации.

Итак, была получена формула для  $\Delta E$ :

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \frac{\pi \hbar c}{a}$$

Дифференцируя, находим ответ:

$$F = -\frac{\hbar \pi c}{12a^2}$$

## Задачи для домашнего решения:

### Упражнение 1

Вычислите интеграл

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 x) dx.$$

при  $y > 1$ .

Через  $J(1)$  выражается значение следующего интеграла:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$$

Его, однако, можно взять более простым способом. Сделайте это и сравните получающиеся ответы.

### Упражнение 2

Вычислите интеграл, сведя его к  $B$ -функции

$$I(n, m) = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^m x dx.$$

### Упражнение 3

Вычислите интеграл, сведя его к  $B$ -функции

$$I(n, m, k) = \int_0^\infty \frac{x^n}{(x^m + 1)^k} dx.$$

Когда он сходится?

### Упражнение 4

Вычислите точно интегралы

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty \frac{x \sin(\lambda x)}{x^2 + 1} dx,$$

$$I_2(\lambda) = \int_0^\infty \frac{x \sin(\lambda x)}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

### Задача 1

Вычислите сведением к  $\Gamma$ -функции и к  $B$ -функции

$$I(m) = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^m} dx$$

при  $0 < m < 1$ .

### Задача 2

Распределение Ферми определяется как

$$n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\epsilon/T} + 1},$$

где  $T > 0$  - температура.

Вычислите интеграл, зависящий от двух параметров

$$I(V, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon (n_F(\epsilon - eV) - n_F(\epsilon))$$

Такой интеграл возникает при вычислении электрического тока через туннельный контакт.

Почему не работает следующее рассуждение?

Разобьем интеграл на два:

$$I(V, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n_F(\epsilon - eV) - \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n_F(\epsilon)$$

и сделаем сдвиг в первом интеграле  $\epsilon' = \epsilon - eV$ . Тогда

$$I(V, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' n_F(\epsilon') - \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n_F(\epsilon) = 0$$

*Замечание: если немного подумать, ответ на задачу можно получить совсем без вычислений.*