Семинар по теме: «Преобразование Фурье»

21 марта 2018 г.

Интеграл Фурье

Если есть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то для неё можно определить разложение в интеграл Фурье (так называемое обратное преобразование Фурье):

$$f\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p) e^{ipx} \frac{dp}{2\pi}$$

При этом функцию $\tilde{f}\left(p\right)$ можно получить, используя прямое преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

Согласованность двух формул обеспечивается следующим выражением для δ-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dp = 2\pi\delta\left(x\right)$$

Напомним, δ-функция определяется как функция, такая, что для любой функции $f(x)$ выполнено:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Замечание

В разных источниках преобразование Фурье вводится по-разному. Например, в прямом преобразовании Фурье вместо e^{-ipx} можно написать e^{ipx}; в таком случае аналогичную замену нужно проделать и в обратном преобразовании Фурье; соотношения по-прежнему останутся согласованными. Кроме того, в математике часто рассматривается преобразование Фурье, в котором в интегралах вместо dx и $\frac{dp}{2\pi}$ стоит $\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ и $\frac{dp}{\sqrt{2\pi}}$; допустим любой выбор констант, лишь бы их произведение было 2π.

Ряд Фурье

Если есть функция $f(x)$, периодичная с периодом T (или просто определенная на отрезке длиной T; в таком случае ее можно просто периодически продолжить), то для этой функции можно определить разложение в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\omega_n t}$$

Периодичность функции обеспечивается требованием на частоты $\omega_n T = 2\pi n$. Коэффициенты ряда Фурье можно получить из соотношения

$$f_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}dt$$

Согласованность разложения в ряд Фурье обеспечивается следующим тождеством (тождество Пуассона):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n t}$$

Замечание

Тут тоже имеется произвол в выборе знаков в экспоненте (лишь бы они были разные) и в коэффициентах перед интегралом и рядом (лишь бы их произведение равнялось T).

Ряд Фурье для решёточных функций

Если есть исходная функция, определенная на решётке (то есть, на самом деле, она представляет собой обычную числовую последовательность) f_n, $n \in \mathbb{Z}$. В таком случае, можно рассмотреть преобразование, аналогичное предыдущему, только в "обратном" направлении. А именно, можно рассмотреть разложение f_n по плоским волнам в виде

$$f_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(k)e^{ikn}\frac{dk}{2\pi}$$

и выражение для $f(k)$ ($k \in [-\pi;\pi]$) даётся выражением:

$$f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-ikn}$$

Это преобразование полностью аналогично предыдущему, и его согласованность тоже обеспечивается тождеством Пуассона.

Дискретное преобразование Фурье

Если есть исходный набор из N чисел f_n, $n = 1,\dots,N$, то для него можно определить дискретное преобразование Фурье. Оно представляет собой разложение по дискретному набору плоских волн:

$$f_n = \sum_k \tilde{f}_k e^{ikn}$$

при этом волновой вектор $k_m = \frac{2\pi}{N}m$ и $m = 1,\dots,N$; под $\sum_k f(k)$ подразумевается $\sum_{m=1}^N f(k_m)$. При этом обратное преобразование Фурье даётся выражением

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n e^{-ikn}$$

Согласованность дискретного преобразования Фурье обеспечивается следующим тождеством:

$$\sum_k e^{ikn} = N\delta_{n0} = \begin{cases} N, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Замечание

Интересно, что разложение в ряд Фурье можно получить как предел $N \to \infty$ у дискретного преобразования Фурье; а разложение в интеграл Фурье можно получить как предел $T \to \infty$ разложения в ряд Фурье. Таким образом, все эти преобразования получаются друг из друга.

Задача 1 (Потенциал Юкавы или потенциал Дебая)

В рамках Стандартной Модели возникает так называемое взаимодействие Юкавы. Если имеется точечная частица, несущая "заряд" q и расположенная в начале координат, то оказывается, что потенциал, создаваемый этим зарядом (аналог электрического потенциала) удовлетворяет уравнению

$$-\Delta\varphi(\mathbf{r}) + \kappa^2\varphi(\mathbf{r}) = 4\pi q \cdot \delta(\mathbf{r})$$

где $\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа; κ - некий параметр задачи. Решим это уравнение, найдём потенциал.

Решение

Исходное однородное уравнение (без правой части) удовлетворяет требованию трансляционной инвариантности (то есть - если провести в уравнении замену $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ - произвольный вектор, то уравнение не изменится); это значит, что его можно решать при помощи преобразования Фурье.
Подставим в уравнение $\varphi(\mathbf{r})$ в виде (обратное преобразование Фурье):

$$\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x, y, z) = \iiint \varphi(p_x, p_y, p_z) e^{ip_x x + ip_y y + ip_z z} \frac{dp_x}{2\pi}\frac{dp_y}{2\pi}\frac{dp_z}{2\pi} \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\varphi(\mathbf{p})e^{i\mathbf{pr}}$$

(тут для удобства функцию $\varphi(\mathbf{r})$ и её фурье-образ $\varphi(\mathbf{p})$ мы обозначаем одинаково; чтобы их различать, будем иметь в виду, что когда аргумент функции - $\mathbf{p}$, то имеется в виду фурье-образ, а когда аргумент - $\mathbf{r}$, то имеется в виду сама функция). В таком случае, все дифференцирования, содержащиеся в операторе Лапласа, можно "пронести" под знак интеграла, где они будут действовать только на экспоненту как $\frac{\partial}{\partial x}e^{i\mathbf{pr}} = ip_x e^{i\mathbf{pr}}$. Таким образом, можно сразу записать:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\varphi(\mathbf{p})(-\mathbf{p}^2)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

По свойству δ-функции, правую часть можно тоже представить в виде преобразования Фурье от константы:

$$4\pi q\delta(\mathbf{r}) = 4\pi q \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

А значит, уравнение запишется как:

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}(\mathbf{p}^2 + \kappa^2)\varphi(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}4\pi q \cdot e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

А теперь мы можем провести преобразование Фурье этого выражения. В данном уравнении это равносильно условному "сокращению" операции $\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\ldots$ слева и справа. Таким образом, для Фурье-образа $\varphi(\mathbf{p})$ получается тривиальное скалярное уравнение:

$$\varphi(\mathbf{p})(\mathbf{p}^2 + \kappa^2) = 4\pi q \Rightarrow \varphi(\mathbf{p}) = \frac{4\pi q}{\mathbf{p}^2 + \kappa^2}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\varphi(\mathbf{p})e^{i\mathbf{pr}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{4\pi q}{\mathbf{p}^2+\kappa^2}e^{i\mathbf{pr}}$$

Этот интеграл можно взять, перейдя к сферическим координатам. Азимутальный угол θ мы будем отсчитывать от направления вектора $\mathbf{r}$. Как мы знаем из предыдущих семинаров, якобиан перехода к сферическим координатам выглядит как $d^3\mathbf{p} = p^2dp\sin\theta d\theta d\varphi$. Таким образом:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty p^2dp\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\frac{4\pi q}{p^2+\kappa^2}e^{ipr\cos\theta} =$$
$$= \frac{2q}{\pi}\int_0^\infty p^2dp\cdot\frac{\sin(pr)}{pr}\cdot\frac{1}{p^2+\kappa^2} = \frac{2q}{\pi r}\int_0^\infty\frac{z\sin z}{z^2+\kappa^2r^2}dz = \frac{q}{r}e^{-\kappa r}$$

Тут мы взяли сперва интеграл по φ и θ, затем обезразмерили интеграл по p и воспользовались интегралом Лапласа из 4 семинара. Полученный ответ совпадает с законом Кулона на малых расстояниях $r \ll \frac{1}{\kappa}$; на больших расстояниях возникает эффект экранирования. Аналогичное явление возникает в плазме, при внесении в неё электростатического заряда q. Явление это называется дебаевским экранированием, параметр $\frac{1}{\kappa}$ в этой модели называется дебаевским радиусом. Сам же потенциал тоже иногда называется дебаевским.

Задача 2

Пусть имеется грузик на пружинке (осциллятор), который возмущается периодической внешней силой $F(t)$. Уравнение движения запишется в таком случае как:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2x(t) = f(t)$$

(где $f(t) = \frac{1}{m}F(t)$ и $\omega^2 = \frac{k}{m}$). Внешняя сила имеет период T и имеет вид “прямоугольников”: сперва в течении первой половины периода, грузик “тянут” в одну сторону, а затем - в другую:

$$f(t) = \begin{cases} -f_0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ f_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Исследуем отклик осциллятора на такую периодическую силу. Решим задачу с начальными условиями $x\,(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Решение

В силу однородности по времени уравнения без правой части (однородность и трансляционная инвариантность - это одно и то же), различные гармоники (колебания с различными частотами) будут жить независимо.
Значит, для исследования уравнения нужно представить возмущающую силу $f\,(t)$ в виде разложения в ряд Фурье. Поскольку функция имеет период T, то разложение будет содержать лишь гармоники $\omega_nT = 2\pi n \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T}n$. Получаем:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_ne^{-i\omega_nt}$$

в таком случае коэффициенты ряда Фурье будут выражаться как:

$$f_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)\, e^{i\omega_n\tau} d\tau = \frac{1}{T}\left\{-\int_{-T/2}^{0} f_0 e^{i2\pi\frac{\tau}{T}n} d\tau + \int_0^{T/2} f_0 e^{i2\pi\frac{\tau}{T}n} d\tau\right\} =$$

$$= 2i\frac{f_0}{T}\int_0^{T/2} \sin\left(2\pi\frac{\tau}{T}n\right) d\tau = \begin{cases} \frac{2if_0}{\pi}\cdot\frac{1}{n}, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

В силу вещественности функции $f(t)$, коэффициенты f_n всегда должны удовлетворять условию $f_{-n} = f_n^*$. Кроме того, в силу нечётности функции $f(t)$, коэффициенты также удовлетворяют условию $f_{-n} = -f_n$.
В таком случае, решение можно искать в виде разложения по таким гармоникам. Кроме того, для того, чтобы записать общее решение, необходимо добавить решение однородного уравнения (то есть уравнения без правой части), которое в данном случае представляет собой $C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t$ с произвольными константами C_1 и C_2. Получаем:

$$x(t) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega_n t}$$

Подстановка в уравнение даёт нам

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\left(\omega^2 - \omega_n^2\right) e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}$$

Значит, мы можем условно “сократить” на $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ldots e^{-i\omega_n t}$ и получить:

$$x_n = \frac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

Таким образом, общее решение представляется в виде ряда:

$$x(t) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{f_n}{\omega^2-\omega_n^2}e^{-i\omega_n t} =$$

$$= C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t + \sum_{n=2k+1}\frac{2if_0}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\frac{1}{\omega^2-\omega_n^2}e^{-i\omega_n t} == C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t + \sum_{n=2k+1, k\geq 0}\frac{4f_0}{\pi n}\frac{\sin\omega_n t}{\omega^2-\omega_n^2}$$

Теперь исследуем задачу Коши. Определим константы C_1 и C_2 решения из начальных условий. Поскольку $x(0) = 0$, то $C_2 \equiv 0$. Кроме того, поскольку $\dot{x}(0) = 0$, то:

$$\omega C_1 + \sum_{n=2k+1, k\geq 0}\frac{4f_0}{\pi n}\frac{\omega_n}{\omega^2-\omega_n^2} = 0$$

поэтому подставляя C_1, окончательно ответ можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{n=2k+1, k\geq 0}\frac{4f_0}{\pi n}\cdot\frac{\sin\omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega}\sin\omega t}{\omega^2-\omega_n^2}$$

Ряд этот в общем случае не суммируется. Однако наибольший интерес представляет случай резонанса. Структура ответа подсказвыает нам, что резонанс будет наступать, когда какая-то из ω_{2k+1} будет близка или равна ω. В таком случае, эта гармоника будет иметь наибольшую амплитуду и будет давать наибольший вклад в ряд; из всего ряда можно оставить лишь её. Значит, в случае близости к резонансу, решение будет выглядеть как:

$$x(t) \approx x_n e^{-i\omega_n t} + x_{-n} e^{i\omega_n t} = \frac{4f_0}{\pi n} \cdot \frac{\sin\omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega}\sin\omega t}{\omega^2 - \omega_n^2},\ \omega \approx \omega_n$$

Сам резонанс, когда $\omega = \omega_n$, можно получить, воспользовавшись трюком: в этом выражении можно взять предел $\omega \to \omega_n$, расписав его по правилу Лопиталя. Это даст ответ:

$$x(t) \approx -\frac{2f_0}{\pi\omega n} \cdot t \cdot \cos\omega t,\ \omega = \omega_n$$

Мы видим, что в случае резонанса, амплитуда соответствующей гармоники будет неограниченно возрастать со временем.

Задача 3 (случайные блуждания на решетке)

Рассмотрим задачу, которая является моделью диффузии. Пусть имеется одномерная решётка (набор узлов $n \in \mathbb{Z}$). В начальный момент времени $N \gg 1$ частиц посадили в узел $n = 0$. Затем частицы начинают случайно блуждать по решётке, причём за время dt каждая частица может перейти в один из двух соседних узлов с вероятностью λdt ($\lambda > 0$ - параметр задачи). Исследуем движение частиц.

Замечание Вместо рассмотрения N частиц и исследования числа частиц, эквивалентно можно рассматривать 1 частицу и исследовать вероятность нахождения частицы на каком-то из узлов.

Решение

Пусть в момент времени t, число частиц на узле n равна $p_n(t)$. Кроме того, начальные условия задачи таковы, что

$$p_n(0) = N \cdot \delta_{n0} = \begin{cases} N, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Случайный процесс, описанный в условии задачи, можно представить в виде бесконечной системы дифференциальных уравнений. За время dt, в узел с номером n из узлов с номерами $n \pm 1$ приходит $p_{n\pm1}(t)\lambda dt$ частиц; кроме того, с этого узла в соседние уходит $2p_n(t)\lambda dt$ частиц. Полная система дифференциальных уравнений тем самым записывается как

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda(p_{n-1}(t) + p_{n+1}(t) - 2p_n(t))$$

Эта задача тоже обладает трансляционной симметрией, как и предыдущие, а значит можно опять воспользоваться преобразованием Фурье:

$$p_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} p(k,t) e^{ikn}$$

и при этом:

$$p(k,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(t) e^{-ikn}$$

Делая необходимую подстановку в уравнение, мы получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \cdot \frac{dp(k,t)}{dt} \cdot e^{ikn} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} p(k,t) \cdot \lambda(e^{-ik} + e^{ik} - 2)$$

Опять условно “сокращая” на $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \dots e^{ikn}$, получаем тривиальное уравнение:

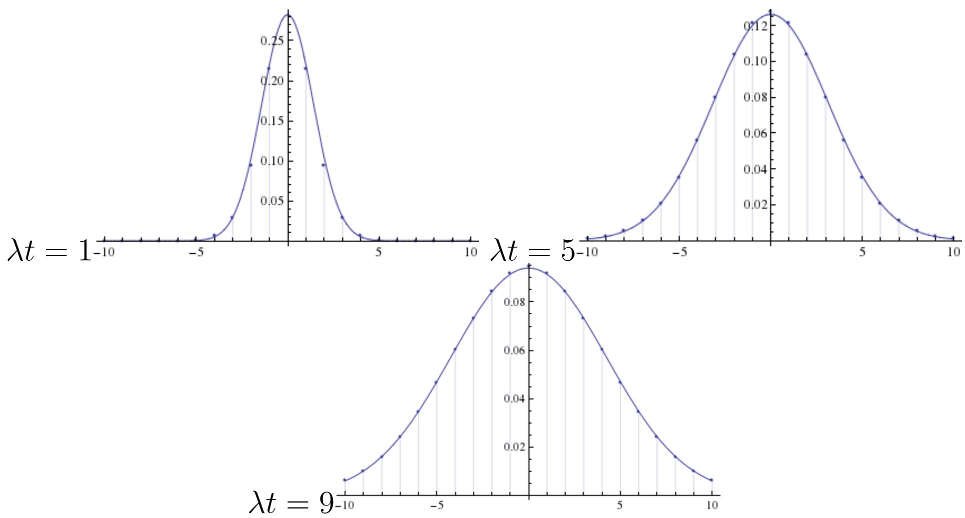
$$\frac{dp\,(k,t)}{dt} = -2\lambda(1 - \cos k)$$

$$p\,(k,t) = p\,(k,0) \exp(-2\lambda(1 - \cos k)t)$$

Теперь необходимо определить начальные условия. Возвращаясь к определению $p(k,t)$:

$$p(k,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(0) e^{-ikn} = N$$

Рис. 1: Численные значения $p_n\,(t)$ при различных λt



Пользуясь обратным преобразованием Фурье, ответ можно выразить как:

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \exp(-2\lambda(1 - \cos k)t + ikn)$$

Преобразуем интеграл, избавившись от мнимой единицы (вероятность - величина чисто вещественная). Для этого добавим такой же интеграл с заменой $k \to -k$ и разделим пополам:

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \exp(-2\lambda t(1 - \cos k)) \cos kn$$

Мы получили ответ на вопрос задачи в виде интеграла. Этот интеграл не берётся в элементарных функциях, однако можно исследовать аналитически различные асимптотики, используя большое количество методов, изложенных в этом курсе ранее. Кроме того, его можно исследовать численно (см. рисунок 1).

Задачи для домашнего решения

Упражнение 1

Вычислите преобразование Фурье следующих функций

$$\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}, \quad e^{-|x|/\epsilon}, \quad e^{-x^2/\epsilon^2}.$$

Упражнение 2

Пусть $\phi(x)$ - вещественная функция, которая $\to 0$, при $|x| \to +\infty$. Докажите следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\left(m^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(m^2+k^2\right)|\phi(k)|^2\frac{dk}{2\pi},$$

где $\phi(k)$ - преобразование Фурье функции $\phi(x)$.

Упражнение 3

Рассмотрите задачу про диффузию на решетке (см. материалы семинара). Приближенно вычислите интеграл, который получился на семинаре для распределения частиц в зависимости от времени

$$p_n(t) = N\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk}{2\pi}e^{ikn-2\lambda t(1-\cos k)}$$

в двух предельных случаях: а) $\lambda t \ll 1$, n - фиксированное произвольное число; б) $\lambda t \gg 1$.

Задача 1

В теории случайных матриц встречаются следующие функции:

$$R_{\mathcal{U}}(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad R_{\mathcal{O}}(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2} + \left[\int_1^{+\infty} dz\frac{\sin xz}{z}\right]\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Вычислите их Фурье-преобразования. Результаты изобразите графически.

Задача 2

Функция Бесселя нулевого порядка задается интегралом

$$J_0(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\phi}{2\pi}\exp\left(ix\sin\phi\right).$$

Для справки: при больших значениях аргумента она ведет себя как

$$J_0(x\gg 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\pi/4).$$

Вычислите преобразование Фурье функции $J_0(x)$ точно. Подумайте, почему особенности в полученном ответе ожидаемы?

Задача 3

Рассмотрим самую простую модель твердого тела - цепочку из одинаковых “атомов”, соединенных пружинками.

Уравнение, которое определяет закон движения атомов в цепочке:

$$m\ddot{u}_n = C(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n)$$

Здесь u_i - смещение атомов от положения равновесия, m - масса одного атома, C - жесткость пружин. Пусть a - расстояние, между атомами в состоянии равновесия. Если подставить в уравнения движения плоскую волну

$$u_n = u_0 e^{ikan - i\omega t},$$

можно найти закон дисперсии одноатомной цепочки:

$$\omega^2(k) = \frac{4C}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}.$$

Найдите уравнения движения и закон дисперсии "двухатомной" цепочки, т.е. такой же цепочки, как выше, с единственным отличием - массы атомов чередуются как

$$m_n = \begin{cases} m & n = 2l \\ M & n = 2l+1 \end{cases}$$

Без ограничений общности считайте, что $M > m$.
Подсказка: может быть удобно составить "вектор смещений"

$$\vec{U}_l = \begin{pmatrix} u_{2l} \\ u_{2l+1} \end{pmatrix}.$$