

# Трансцендентные уравнения

## Вступление

В приложениях очень часто приходится иметь дело с трансцендентными уравнениями, зависящими от одного или нескольких параметров. Как правило, они не имеют аналитического решения, а только численное; однако наличие в таких задачах малого или большого параметра на практике помогает найти приближённый вид ответа.

## Задача 1 (намагниченность ферромагнетика в теории среднего поля)

Решим уравнение

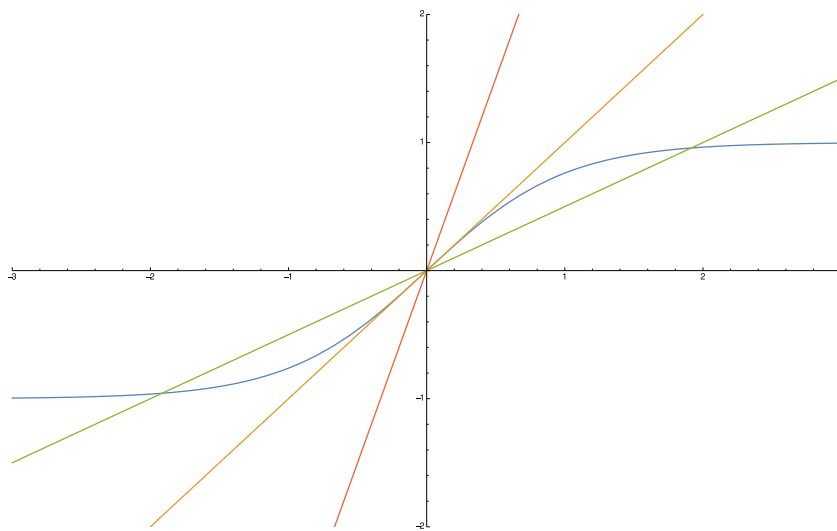
$$m = \tanh(m/T)$$

Оно всегда имеет тривиальное решение  $m = 0$ ; однако, существует критическая точка  $T = T_c$ , вблизи которой появляется нетривиальное решение  $m(T)$ . Найти асимптотическое поведение этого решения вблизи критической точки (при  $|T - T_c| \ll T_c$ ), а также вблизи нуля (при  $T \ll T_c$ ).

## Решение

Решать задачу будем графически. Для удобства сделаем перемасштабирование - введем  $\tilde{m} = m/T$ ; уравнение перепишется как  $T\tilde{m} = \tanh \tilde{m}$ . Нарисуем на графике левую и правую часть уравнения.

Рис. 1:  $T\tilde{m} = \tanh(\tilde{m})$ ,  $T = 3; 1; 0.5$



Функция  $\tanh x$  ведет себя вблизи нуля линейно:  $\tanh x \sim x$ . Из-за симметрии уравнения относительно замены  $m \mapsto -m$ , всегда будут иметься как положительные, так и отрицательные решения, поэтому следить мы будем только за положительными. Из этого и из картинки можно сделать следующие выводы:

- при  $T = 1$ , прямая касается графика  $\tanh \tilde{m}$ . Это и есть искомая критическая точка  $T_c = 1$ .
- при  $T > 1$ , прямая идет более круто и точек пересечения нет; единственное решение уравнения - тривиальное.

- при  $T < 1$ , прямая идет полого, и имеются точки пересечения обоих графиков, отличные от  $m = 0$ ; это и есть наши нетривиальные решения.
- при  $T \rightarrow 0$ , прямая идет практически горизонтально. Ордината точки пересечения стремится к 1, поэтому решение уравнения  $m(T \rightarrow 0) \rightarrow 1$ .

Перейдем обратно от переменной  $\tilde{m}$  к переменной  $m$  и найдем асимптотику аналитически.

**Окрестность критической точки  $1 - T \ll 1$**  Вблизи критической точки,  $m(T) \ll 1$ ; это позволяет нам разложить  $\tanh(m/T)$  по малости своего аргумента, и переписать уравнение приближенно как:

$$m \approx \frac{m}{T} - \frac{1}{3} \left( \frac{m}{T} \right)^3 \Rightarrow m(T) \approx \sqrt{3(1 - T)}$$

В последнем равенстве мы выбросили  $T^2 \approx 1$ , поскольку мы интересуемся ведущим порядком разложения по  $1 - T$ . Кроме того, видно, что наше предположение  $m(T) \ll 1$  действительно выполняется.

**Окрестность нуля  $T \ll 1$**  Тут видно, что  $m(T) \approx 1$  (то есть  $1 - m(T) \ll 1$ ). В таком случае удобно искать решение в виде:

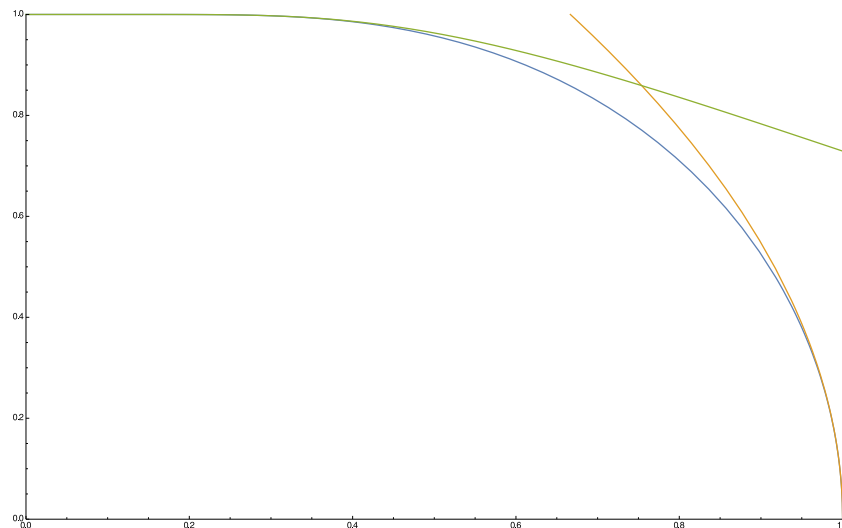
$$m = 1 - \varepsilon$$

Здесь  $\varepsilon \ll 1$ . Подставляя, получаем:

$$1 - \varepsilon = \tanh \frac{1 - \varepsilon}{T} \approx 1 - 2e^{-2/T}$$

Таким образом, мы получили поправку к 1:  $m \approx 1 - 2e^{-2/T}$ .

Рис. 2: Точное решение и найденные асимптотики



## Задача 2 (уровни энергии прямоугольной квантовой ямы)

Решим уравнение

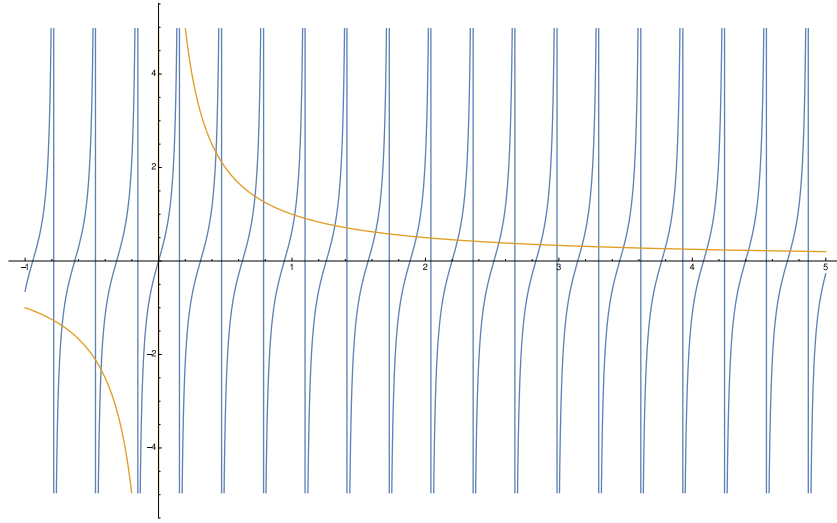
$$\tan Ax = \frac{1}{x}$$

при  $A \gg 1$ . Его решения нумеруются целым числом  $n$ ; найти асимптотическое поведение решений при  $n \ll A$  и  $n \gg A$ .

## Решение

Будем решать уравнение опять графически. Нарисуем левую и правую часть уравнения.

Рис. 3:  $\tan Ax = \frac{1}{x}$ ,  $A = 10$



Видно, что имеется целая серия точек пересечения, которые являются решением нашего уравнения. Из картинке также можно сделать вывод о том, вблизи каких точек расположены корни в обоих случаях и в окрестности каких точек стоит искать решение.

**Случай  $n \ll A$**  При  $n \ll A$ , период тангенса мал и все решения лежат вблизи нуля:  $x_n \ll 1$ . Это значит, что в качестве начального приближения можно заменить правую часть на  $+\infty$ :

$$\tan Ax = +\infty \Rightarrow x_n^{(0)} \approx \frac{1}{A} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$$

Найдём поправки, используя модификацию метода итераций: метод последовательных приближений. Введём поправку согласно  $x_n^{(1)} = \frac{1}{A} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n + \epsilon_n \right)$  и  $|\epsilon_n| \ll 1$ ; подстановка в уравнение даёт:

$$\tan \left( \frac{\pi}{2} + \pi n + \epsilon_n \right) = \frac{A}{\frac{\pi}{2} + \pi n + \epsilon_n}$$

Разложимся до наинизшего порядка. Левая часть равна  $-\frac{1}{\tan \epsilon_n} \approx -\frac{1}{\epsilon_n}$ ; в правой же части в ведущем приближении поправку можно просто выбросить.

$$\epsilon_n \approx -\frac{1}{A} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$$

(видно, что  $|\epsilon_n| \ll 1$ , и наше предположение было верным). Таким образом, в этом случае приближенно ответ записывается как:

$$x_n \approx \frac{1}{A} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right) - \frac{1}{A^2} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$$

**Случай  $n \gg A$**  В этом случае  $x_n \gg 1$  и в качестве нулевого приближения можно заменить правую часть на ноль:

$$\tan Ax = 0 \Rightarrow x_n^{(0)} \approx \frac{\pi n}{A}$$

Опять воспользуемся методом последовательных приближений - сделаем подстановку  $x_n^{(1)} = \frac{1}{A}(\pi n + \epsilon_n)$  и  $|\epsilon_n| \ll 1$ :

$$\tan(\epsilon_n + \pi n) = \frac{A}{\epsilon_n + \pi n}$$

Проводя разложение левой части  $\tan(\pi n + \epsilon_n) \approx \epsilon_n$  и выбрасывая  $\epsilon_n$  в правой части, мы получаем:

$$\epsilon_n \approx \frac{A}{\pi n}$$

(предположение  $\epsilon_n \ll 1$  тем самым выполнено). Поэтому ответ записывается как:

$$x_n \approx \frac{\pi n}{A} + \frac{1}{\pi n}$$

## Метод итераций

Один из способов решения трансцендентных уравнений вида  $x = f(x)$  есть метод простых итераций. Сам метод заключается в следующем:

- Выберем начальное приближение  $x_0$
- Построим последовательность  $\{x_k\}$  согласно  $x_{k+1} = f(x_k)$
- Если при этом  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{x}$ , то  $\tilde{x}$  является решением нужного уравнения.

Этот метод очень часто применяется для нахождения численных решений; однако, в случае наличия в задаче большого или малого параметра, он может помочь найти и приближенный аналитический вид этого решения. В таком случае, как правило, достаточно заменить последний критерий на условие  $|x_{k+1} - x_k| \ll x_k$ ; при выполнении этого условия,  $x_k$  может являться хорошим аналитическим приближением к ответу. Обычно для того, чтобы увидеть, что либо условие на каком-то шаге выполнилось, либо последовательность приближений расходится, достаточно проделать несколько итераций.

## Задача 3 (логарифмическая точность)

При  $\alpha \gg 1$  решим уравнение

$$x = e^{-\alpha x}$$

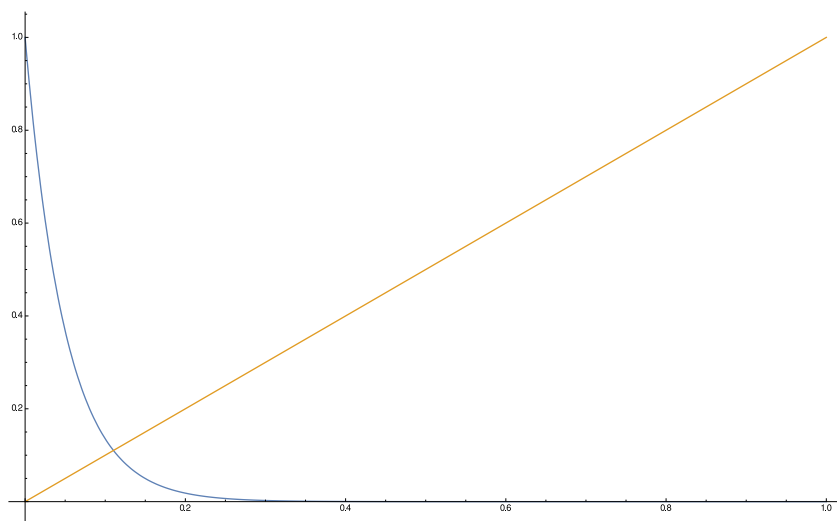
### Решение

Графический анализ показывает, что решение  $x \ll 1$ .

Кроме того, видно, что  $\alpha x$  не может быть малым числом: в противном случае  $e^{-\alpha x} \approx 1 \Rightarrow x \approx 1$ , что противоречит этому анализу. Для решения мы воспользуемся методом итераций, но применим его не к исходному уравнению, а к переписанному в виде  $x = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{x}$ .

- В качестве начального приближения давайте возьмём произвольное число  $x_0 \sim 1$ . В дальнейшем мы увидим, что от него зависит ничего не будет.
- Первое приближение даёт  $x_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{x_0}$ . Поскольку  $x_1 \ll x_0$ , то  $|x_0 - x_1| \approx x_0$  и это приближение не является хорошим.
- Второе приближение даёт  $x_2 = \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln \ln \frac{1}{x_0}$ . В силу  $\alpha \gg 1$ , второе слагаемое мало и его можно выбросить (и тем самым выпадает зависимость от начального приближения). В таком случае  $x_2 \gg x_1$  и приближение опять-таки не является хорошим.

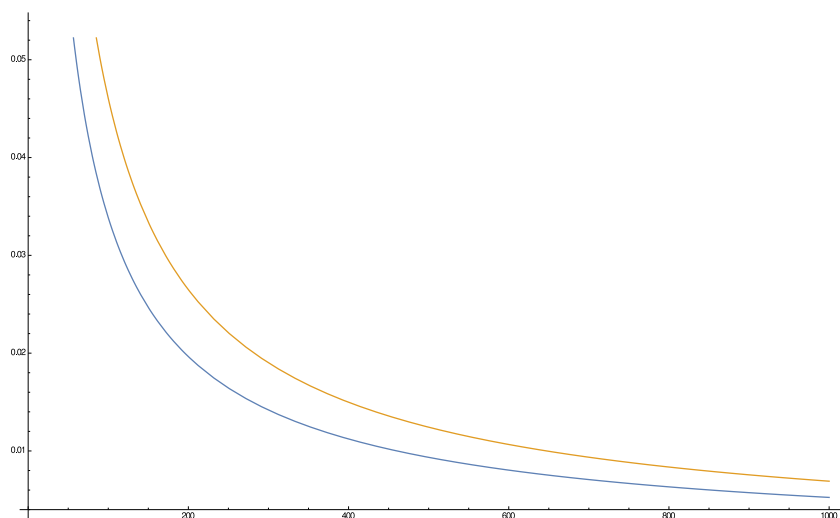
Рис. 4:  $x = e^{-\alpha x}$ ,  $\alpha = 20$



- Третье приближение даёт  $x_3 = \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{\ln \ln \alpha}{\alpha}$ . В этом случае поправка действительно оказывается малой:  $|x_3 - x_2| = \frac{\ln \ln \alpha}{\alpha} \ll x_2 = \frac{\ln \alpha}{\alpha}$ ; это наконец и означает, что мы нашли хорошее приближение, а также ведущую поправку к нему.

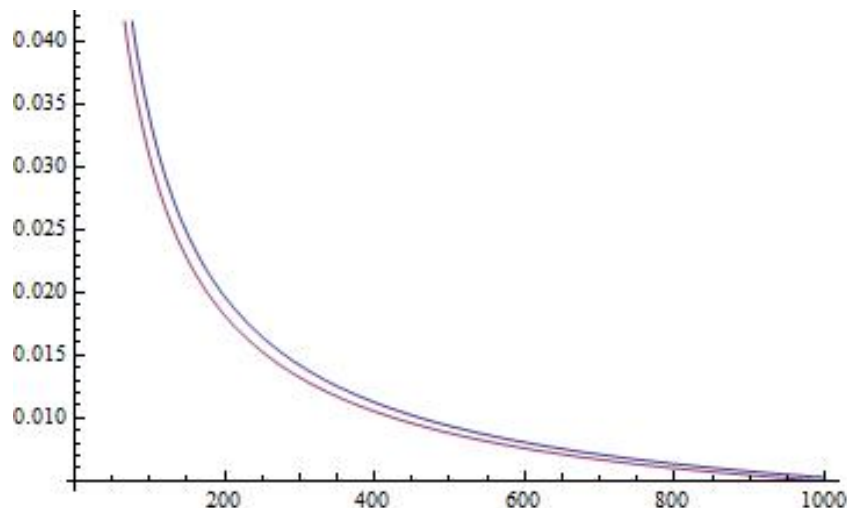
Таким образом, ответ приближенно записывается как  $x \approx \frac{\ln \alpha}{\alpha}$ .

Рис. 5: Численное решение  $x = e^{-\alpha x}$  и его асимптотика



Из-за того, что логарифм - медленно растущая функция, первое приближение работает в данном интервале не очень хорошо. Более точным будет учесть поправку:

Рис. 6: Численное решение  $x = e^{-\alpha x}$  и его асимптотика с учётом первой поправки



## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1

При  $\alpha \gg 1$  и  $\alpha \ll 1$  приближенно решите уравнение

$$x = 1 + \exp(-\alpha x).$$

### Упражнение 2

При  $\alpha \gg 1$  и  $\alpha \ll 1$  приближенно решите уравнение

$$\ln x = e^{-\alpha x}.$$

### Упражнение 3

На семинаре была определена функция Ламберта  $x(\lambda)$ , которая при  $\lambda \geq 0$  задается как решение уравнения

$$xe^x = \lambda.$$

При  $-\frac{1}{e} < \lambda < 0$  это уравнение имеет два решения:  $x_1(\lambda) > -1$  и  $x_2(\lambda) < -1$  (для непрерывности обычно именно  $x_1(\lambda)$  называют функцией Ламберта на  $-\frac{1}{e} \leq \lambda < 0$ ). При  $\lambda = -\frac{1}{e}$ , как легко увидеть,  $x_1 = x_2 = -1$ , а при  $\lambda < -\frac{1}{e}$  действительных решений нет. Приближенно найдите  $x_1(\lambda)$ ,  $x_2(\lambda)$  при  $\lambda < 0$ ,  $|\lambda| \ll 1$ .

### Упражнение 4

Найдите  $x_1(\lambda)$ ,  $x_2(\lambda)$  из упражнения 3 при  $\lambda > -\frac{1}{e}$ ,  $|\lambda + \frac{1}{e}| \ll 1$ .

## Задача 1

Приближенно решите уравнение

$$\tanh \alpha x = \arctan x$$

при  $0 < \alpha - 1 \ll 1$  и при  $\alpha \gg 1$ .

## Задача 2

При  $\alpha \ll 1$  положительные решения неравенства

$$\left| \cos x + \alpha \frac{\sin x}{x} \right| > 1$$

разбиваются на серию зон, нумеруемых целыми числами  $k = 0, 1, \dots$ . Определить ширину  $k$ -ой зоны при  $k \gg 1$ .