Метод перевала как первый член асимптотического разложения. Дополнение к семинару по теме: «Метод перевала»

23 февраля 2018 г.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda f(x)} dx$$

при $\lambda \to +\infty$. Пусть функция $f(x)$ имеет на всей области интегрирования ровно одну перевальную точку x_0. Кроме того, пусть вблизи x_0 функция $f(x)$ аналитична (т.е. представляется в виде суммы бесконечного ряда Тейлора - например, функция $\sqrt{x}$ таким свойством при $x_0 = 0$ не обладает) и $f^{''}(x_0) \neq 0$. Выполним замену переменной:

$$f(x) - f(x_0) = s^2$$

Утверждение

Из аналитичности $f(x)$ и $f^{''}(x_0) \neq 0$ следует, что $x(s)$ - тоже аналитична.

Доказательство

Из аналитичности функции $f(x)$ получаем:

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = s^2$$

Первая производная отсутствует в силу того, что x_0 - перевальная точка. Выражая s и выбирая правильный знак (такой, чтобы исходный интеграл был положительным), получаем:

$$s = (x - x_0)\sqrt{a_2 + a_3(x - x_0) + ...} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{'} (x - x_0)^n \tag{1}$$

Полученный ряд можно обратить и получить ряд для функции $x(s)$. Действительно, подставляя разложение

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k$$

в (1), получаем:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{'} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k \right)^n$$

Отсюда, путём последовательного приравнивания степеней s в левой и правой частях, можно определить коэффициенты c_k. Для c_1 и c_2 получаются следующие соотношения:

$$1 = a_1^{'} c_1$$

$$0 = a_1^{'} c_2 + a_2^{'} c_1^2$$

Утверждение можно считать доказанным (разумеется, на физическом уровне строгости).
Исходный интеграл переписывается в виде:

$$e^{-\lambda f(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda s^2} \frac{dx(s)}{ds} ds = \frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}} \int dt e^{-t^2} t^k \frac{c_k^{'}}{\lambda^{k/2}} \sim \frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{2k}^{'}}{\lambda^k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

Здесь следует пояснить несколько моментов. Во-первых, случилось переобозначение коэффициентов c_k:

$$\frac{dx}{ds} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{'} s^k = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k s^{k-1}$$

Что более важно, в последнем переходе фигурирует значок $\sim$. Его следует понимать так:

$$e^{-\lambda f(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda s^2} \frac{dx(s)}{ds} ds = \frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{c_{2k}^{'}}{\lambda^k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^N}\right)$$

Здесь бы опять имеем дело с асимптотическим рядом. В силу того, что $\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$ при больших k растёт факториально, формальная сумма по k до ∞ расходится. Однако, правая часть остаётся конечной в силу наличия остаточного члена, у которого тоже есть факториально растущий с N коэффициент. Формально это $O\left(\frac{1}{\lambda^N}\right)$ получается, если написать $x(s) - x_0 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k s^k + \frac{1}{N!} x^{(N)}(s_1) s^N$ (формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (здесь $s_1 \in [0; s]$)), продифференцировать по s и подставить в интеграл.
Итак, мы выяснили, что метод перевала является одним из примеров асимптотического разложения.

Задачи для домашнего решения (необязательные)

Задача 1 (2 балла)
Методом, изложенным на семинаре, найдите первые 3 члена асимптотического разложения $\Gamma(z+1)$ при $z \gg 1$.
Задача 2 (2 балла)
Найдите первые 2 члена асимптотического разложения при $\lambda \to +\infty$ интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\lambda \cos x\right) \frac{\sin x}{x} dx$$

Вам может пригодиться знание следующей суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$