四色猜想及其相关算法

祁宏

第一章　四色猜想问题简介

第一节　问题简介

与平面图有密切关系的一个图论应用问题是图的着色。图的着色问题起源于地图染色问题和四色猜想。这个问题最早由英国数学家弗南西斯·格思里（Francis Guthrie）于 1852 年提出来的。他发现有些地图能用 3 种颜色完成染色。他也发现，对所有地图，4 种颜色就足以完成染色，但他无法证明。此后，“每张地图都能用 4 种或者更少的颜色来染色”这个猜想开始以四色猜想（four color conjecture）而闻名，很多数学家都尝试着去证明它。四色猜想不止一次地被有的数学家宣称证明了，但又被其他数学家证明是错误的。

1976 年，美国数学家阿佩尔（Kenneth Appel）与哈肯（Wolfgang Haken）在美国伊利诺斯大学的两台不同的电子计算机上，用了 1200 个小时，作了 100 亿次判断，终于完成了四色定理的证明，并在当年的美国数学学会的夏季会议上，向全世界宣布他们已经证明了四色猜想。值得一提的是，并不是所有的数学家都满意他们的证明。

第二节　文档说明

本文旨在用合适的数据结构对猜想涉及的性质进行分析。以及利用新的数据结构讨论相关算法。本文并不是一个完善的定理证明。而是通过新的数据类型探讨新的应用领域，以及进一步深化对四色猜想的认识。

因为，从四色猜想问世至今，很少有人使用新的数据结构来探讨这类问题。而对于其它领域，比如，解析几何中，人们为了探讨有向线段，使用了向量，欧拉为三维空间变换使用了欧拉角。但对于四色猜想，除了沿用图论或拓扑现有数据结构以外，并没有人给出新的数据类型。本文则试图使用一些新的数据结构来探讨地图四色问题的规律。

第二章　带约束的连通图

第一节　周期数列与色彩约束

四色问题实际上是一个周期数列在亏格为零的平面图上的分配的问题。因为只有四种色彩，所以，其周期数列即是：0,1,2,3,0,1,2,3...

周期数列，因为其本身的复杂性，其通项公式一般借助三角函数或复数的方式来实现。比如，当前这个周期数列可以用以下通项公式：

$$A_n = \frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2} + cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

当然，我们也可以用求余运算符，用以下最简单的公式实现

$$A_n = (n\, mod\; 4)$$

mod 用来求余，那么，结果一定是，0,1,2,3,0,1,2,3...

通过使用周期数列，我们用 C 来表示色彩，用下标表示色彩的序号，我们有：

$C_0 = 0$
$C_1 = 1$
$C_2 = 2$
$C_3 = 3$
$C_4 = 0$
……

$$C_n = \frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2} + cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (n\, mod\; 4)$$

第二节　图的着色方式分类，格尼斯堡转换

在图论中，平面图着色分为顶点着色，边着色和平面图的面着色三种类型。从四色猜想发布至今，很多数学家均认为，它是格尼斯堡七桥问题的升级版。但是，比较可悲的是，四色猜想一直被认为是面着色问题。这也可能是至今无法解开此问题的一个死结。

回顾一下欧拉在格尼斯堡七桥问题中所用的方法，欧拉则是将岛与岸以及桥均转换成了点，并把道路转换成了边（连接通路）。

四色猜想从表面来看，确实是图面的着色问题。但是，假如我们把公共边以及对公共边两边的颜色不同看成是一种连接通路，再把每一个要着色的面也看成是一个点，那么，我们就抛弃了地图中每一块图的形状，只剩下了颜色与连通关系。由此，我们把这一种转换方式称为格尼斯堡转换。

通过这一转换，我们可以看出，原本是图面的着色问题，现在却已变成了顶点着色问题。但是，经过转换后，这种连通关系，并不是一般图中的通路。因为，它有多种类型：

1，完全连通，即，两个图面间有公共边，并且，两边颜色不同。

2，不连通，两个图面之间有其它图面阻隔。

3，顶点连通，两个图面，仅有顶点相接，没有公共边，因为，它对连通关系几乎没有影响，所以，我们也可以视为不连通。

4、坏连通，即，两个图面间有公共边，并且，两边颜色相同。这是这一猜想的核心。假如我们能够证明，坏连通并不存在，那么，猜想即可以成为定理。

到此，我们可以认为，四色猜想是一个基于顶点着色的连通图。但它并不是图论中的一般的连通图。而是一种特别的连通图，因为它有相应的连通关系约束。

第三节 节点的数学表示

上一节，我们分析了，四色猜想可以转换为顶点着色的带连通关系约束的连通图。在这样的连通图中，每一个顶点与它的通路一起构成了一个图的基本元素。这里，我们需要一个新的数据结构来表示这样的元素。因为，我们已经通过格尼斯堡转换，使其变成了顶点着色图，所以，我们可以把这个基本元素看成是节点。

作为一个项点连通图，我们首先要表示节点的详细数据。而节点的数据有：

节点属于几色图，也就是此连通图所用的颜色数。

节点唯一标识：也可称为节点 ID。

节点本身的颜色。

节点的连接通路。我们可以把图做成有向图，即从最初填色节点进行延展。这样，节点就有前面的连接通路，与后面的连接通路。这样，数据结构就像是双向链表。也可以把图看成是无向图，那么，一个接点的连接通路就可以完全合并。

节点的连接通过，具有以下一些特性：

1、 所连节点的 ID

2、 所点节点的颜色

3、 与所连结点的连接关系。包括：完全连通（双方颜色不同，有公共边），顶点连通（双方只有顶点相接），无连通关系（中间有其它节点间隔），非法连通（双方颜色相同，有共公边）

我们现在将这样的结构展开:

节点:

色数:

节点 ID:

颜色:

连接通路列表

通路 1

节点 ID:

颜色:

连通关系

连通类型

顺序（前面的节点，还是后面的节点）

通路 2

节点 ID:

颜色:

连通关系

连通类型

顺序（前面的节点，还是后面的节点）

那么，我们将以上结构转换成数据符号表示，我们用 Node 表示节点，示例结构如下:

$$\underset{\chi=4}{\mathrm{Node}}\left\{1(3),\begin{bmatrix}2(1)\\3(2)\\4(4)\end{bmatrix}\right\}$$

其中，$\underset{\chi=4}{\mathrm{Node}}$ 定义数据类型，以及颜色数，我们用希腊字母χ表示颜色数。这里，颜色数为 4.

{ 右则的 1(3) 是 节点 ID(颜色序号)的结构。

} 左侧的矩阵, 用来定义连接通路列表, 其中列出的也是节点 ID(颜色序号)这样的结构。

其中，我们用{}，()，[]来区分连通关系。{}为顶点连通，()为完全连通，[]为没有连通

对于非法连通，我们仍用()，因为，它也是一种连通。但我们可以看到，顶点与其连通目标是同色的。

我们可以将 Node 简化为 $\mathfrak{N}$，同时，在分析连通关系时，我们默认使用完全连通，且省

略节点 ID，这时，简化的节点数学表示如下：

$$\underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{3,\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}\right\}$$

第四节 节点连接通路组合方式

由于可用颜色数不同，每一个节点的连接通路的结构也有所不同。以下我们讨论不同颜色数约束的具体情况。

自由组合

自由组合是指，不限所用颜色数，也不限定是否同色。但若需要颜色不同，则可以增加颜色，或调整顺序。自由组合的组合关系数符合排列公式。即：

$$P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

其中，n 是项点的数量，m 则是色彩的数量。

双色组合

当我们将颜色限制在 2 种时，即是双色组合。如果对双色组合进行不同色组合约束时，我们可以发现，双色组合，只能组合链成链状。因为只有两种颜色，所以，节点只有两种结构，用节点表达式即是：

$\underset{\chi=2}{\mathfrak{N}}\{1,[2]\}$ 和 $\underset{\chi=2}{\mathfrak{N}}\{2,[1]\}$

这里我们可以看出，双色组合，如果想进行不同色组合约束，则它只能组合成链状，无法进行自由的块状组合。这是因为，每一元素只有 1 个连接通路。

三色组合

虽然基于 3 的 2 个元素的排列是 6。但是，三色组合元数的结构数则是只有 3 个。为什么呢？这是因为，三色组合元数共有 2 个连接通路，并且，这两个连接通路位置是可以互换的。由此，无论位置的先后，本质上其结构都是等价的。我们称这一特性为通路的旋转特性。

三色组合的 3 个基本结构如下：

$\underset{\chi=3}{\mathfrak{N}}\left\{1,\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\}$ ，$\underset{\chi=3}{\mathfrak{N}}\left\{2,\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right\}$ ，$\underset{\chi=3}{\mathfrak{N}}\left\{3,\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$

显然，通过一个通路绕顶点旋转，我们就可以发现这种等价关系：

$$\underset{\chi=3}{\mathfrak{N}}\left\{1,\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\} = \underset{\chi=3}{\mathfrak{N}}\left\{1,\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right\}$$

我们可以轻松证明，三色组合无法实现不同色约束。

同一节点，当通路为奇数时，会有同色相遇。因为，此时 3 色已用完，所以，无法实现不同色约束。

由此，我们可以得到一个推论。当通路为偶数是，一个节点，3 色已足够。当通路为奇数时，该节点需要四色。

四色组合

虽然基于 4 的 3 个元素的排列是 24。但是，四色组合元数的结构数则是只有 8 个。为什么呢？这是因为，四色组合元数共有 3 个连接通路。

我们把这通路的 3 种颜色看成是 1 种颜色与另外两个颜色的组合。使用这种方法，我们就消除了因为通路绕顶点旋转产生的等价结构。

于是，4 种颜色，与 2 种颜色的组合，$4 \times 2 = 8$

由此，根据数学归纳法，我们可以得到以下公式：

$$C_n = \frac{n!}{n-1} = n\,(n-2)!$$

这一公式，即是用来求不同颜色数的约束下的节点的基本结构数的公式，但这一公式仅适用于最少为 3 色的组合。比如：

当有 3 色组合时，$C_n = 3\,(3-2)! = 3$

当有 4 色组合时，$C_n = 4\,(4-2)! = 8$

当有 5 色组合时，$C_n = 5(5-2)! = 30$

当有 6 色组合时，$C_n = 6(6-2)! = 144$

四色组合的 8 个基本结构如下：

$$\underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{1,\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right\},\quad \underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{2,\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{3,\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}\right\},\quad \underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{4,\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$$

$$\underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{1,\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}\right\},\quad \underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{2,\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}\right\},\quad \underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{3,\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}\right\},\quad \underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{4,\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

假如我们把参与组合的颜色看成是环上的节点，那么，在这个环中，我们有：

C_0, C_1, C_2, C_3，四种颜色。那么，根据前述周期数列的原理，向前移一位则是加 1，向后移一位则是减 1，所以，

$C_{0-1} = C_3$, $C_{3+1} = C_0$

那么，四色组合就是分别在顺时针与逆时针的色环上选择顶点颜色，并将剩余颜色构成连接通路关系的过程。可以看上，以上 8 个顶点结构中，上方 4 项，后一项中的顶点与每一通路都是前一项对应的值加 1。比如：

$$\underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{1,\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right\}\xrightarrow{+1}\underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{2,\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{1,\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right\}\xrightarrow{+2}\underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{3,\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

那么，我们把这种关系，称为移位选择关系。

那么，四色组合，任一节点只要通过一种或两种变换，即可成为一种新的结构，这两种变换是，色彩选择的移位，改变色环排列顺序（顺时针到逆时针，或者相反）。

根据以上的变换法则，我们可以称这些结构为广义等价。这也就是说，四色组合的任一种节点结构所具有的特性，一定适用于所有的节点结构。

由此，我们可以给出一个节点通项公式：

$$\underset{\chi=4}{\mathfrak{N}}\left\{a,\begin{bmatrix}b\\c\\d\end{bmatrix}\right\}$$

通项表达式中，我们不再使用具体的颜色序号，而使用相应的代数符号。我们给代数符号代入不同的值，即可获得不同结构的节点。

多色组合

多色组合是指超过 4 色以上的组合。根据前面推导的公式，当有 5 色组合时，节点共有 30 种结构。多色组合同样存在广义等价。但由于大于 4 色的组合，可以完全避免同色连接通路，所以，这里我们不再展开更深入的讨论。

第三章 图形拓扑变换，水波二维流形

第一节 拓扑变换及其数学表示

我们将四色定理中约定的亏格为 0 的图，进行如下拓扑变换。

1、 任选一个色块为中心色块。并将这个色块变换成圆形。

2、 第一步，将所有与这个中心色块拥有公共边通道的色块全部变成扇形。让扇形的另

一边与中心色块形成同心圆。这时，我们看到的图如右图。

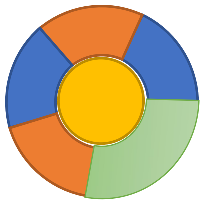

图 1 拓扑变换

通过以上变换以后，我们可以以现，中心与第一层，可以使用前面我们所用的数据结构来表示即可以了。但是，如果使用这个结构来表示很多层时，特别是，用来表示每一层的每一个色块的关系时，仍然显得复杂。所以，在此，我们需要更新的数据结构来表示。这里，我们将图的填色结构按上图的拓扑变换进行分层表示。

假如我们用C_0, C_1, C_2, C_3来表示四种色彩。 那么，图 1 中的结构可以表示为：

$L_0 = C_0$

$L_1 = 2C_1C_2 + C_3$

我们用了L_0、L_1来分别表示核心与第一层的环。因为C_1C_2组合有两个，所以，我们使用了$2C_1C_2$这样的表达式。

假如，我们现在不考虑跨层延伸的情况，则每一层都是规则的链或环，当这一层是闭合的环时，它就是环，如果不闭合，则是链。

很显然，如果不闭合，我们清楚，一个链仅需要两种颜色足够。即 $L = nC_1C_2$

如果是闭合的环，那么，当色块数是偶数是，只要两种颜色足够。但色块数是奇数时，则需要三种颜色。即：$L = nC_1C_2 + C_3$

通过这种变换，我们可以把四色问题，看成是拓扑圆盘中的二维流形。并且，这种流形是水波状的，且这种流形是有一定条件约束的。

第二节 节点组合的计算

这里，我们通过的分配方式的规则来简化相关的计算：

我们规定，当一色被使用后，需要新色彩时，我们首先下一个色彩。这就是说，如果中心色块所用是色彩是C_0，那么，接下来我们使用C_1。

我们可以发现，当三色都被用完时，唯一可选的只有第 4 个色彩。

那么，当一个色块与两个色块有公共边连通时，即是两色被使用，则会面临还有哪两个色彩可以使用的问题。针对这个问题，我们有以下计算方法：

任意两色，C_1和C_2，当我们要求剩下的两色时，第一步，我们先求两色序数的差：

$d = |C_2 - C_1| \quad (C_2 > C_1,\ \ d < 3)$

注：这里的C_1、C_2为色彩的序号，而不是色彩的值。我们发现，d 值最大为 3，那么，当 d=3 时，我们使用公式：

$d = 4 - |C_2 - C_1|$

因为，当 d=3 时，实际上，是没有按照顺序使用的原则。比如，我们首先用 1，然后，用 4，那么，

这里，我们规定，两色的序数关系：$C_2 > C_1$，并且，$d < 3$，这是因为，当 d=3 时，只有$A(C_2) = 0$且$A(C_1) = 3$的情况，此时，实际二者是相邻的。

所以，最好的计算方式是，完全使用序号。图的核心部分序号为零，后续每一个都是不断加 1。

那么，我们计算可用的两个色彩的公式则是：

$C_3 = C_2 + 1$

$C_4 = C_2 + 1 + d$

第三节　水波流形的相关计算

一、中心色块与第 1 层

对于中心色块，因为只有一个色块，所以，仅需要任选一色即可。其表达式是：

$L_0 = C_0$

而对于第一层，由于从中心色块不存在跨层延伸到本层的。所以，我们可以将它看成是一个完全规则的层。所谓规则的层，即每一个色块都与当前层内圈的圆相接。

很显然，我们可以发现，第 1 层的色块排列可以分为以下有限的 4 种情况。

首先，第一层是否为封闭的环，还是开口的 C 字形的链状。其次，则是，色块的数量。

当第一层是开口的 C 字形的链状时，无论色块的数量是奇数或偶数，仅需要两色。其表达式是：

$L_1 = nC_1C_2$ （偶数色块的情况）

或者　$L_1 = nC_1C_2 + C_1$　（奇数色块的情况）

但如果是封闭的环状时，奇数色块需要 3 种颜色。其表达式是：

$L_1 = nC_1C_2$ （偶数色块的情况）

或者　$L_1 = nC_1C_2 + C_3$　（奇数色块的情况）

由此，我们可以看出，最为复杂的情况是$L_1 = nC_1C_2 + C_3$

二、规则的第 2 层到第 n 层

这里，我们再次说明一下什么是规则的层，规则的层，则当前层的色块都在当前层的内圈圆与外圈圆之间，这就是说，不存在跨层延伸的情况，也就是说，不存在一个色块跨多层的情况。

四色定理最大的问题，即是组合是任意的，从而计算结果不是唯一的。任意组合带来了无限的不确定性。

因为这个问题，我们需要引入相应的计算规则。我们首先面向规则的层。

（1）如果每层色块数均是遇数，或者是示非封闭的环

前面一节，我们有三个表达式，其中两个颜色的有两个。分别是：

$L_1 = nC_1C_2$ 和 $L_1 = nC_1C_2 + C_1$

根据此，我们能推出，第 2 层肯定是以下两个表达式：

$L_2 = nC_3C_4$ 和 $L_2 = nC_3C_4 + C_3$

并且，我们可以看出，如果后面的层，没有出现奇数色块的闭合的环，那么，这四个表达式循环可以达到无限远。

（2）奇数色块的闭合的环

而对于奇数色块的闭合的环，其表达式是$L_1 = nC_1C_2 + C_3$

对于这种情况，有如下几种情况：

首先：当$n > 2$时， $nC_1C_2 + C_3$ 中 一定存在 $C_1C_2C_3C_1C_2$这样的组合。

如果C_3 连通两个色块，并且，这两个色块同时与三个色块连通。那么，这两个新色块均必须是C_4 ，从而造成了C_4遇见了 C_4，可见，这时需要 5 种色彩了。

我们称其为 5 块 3 色左右各 3 度组合。

但是，从这一结论来说，并不能直接推翻四色定理，这是国为，如果，我们不取中心色块，而取边角上的色块，那么，就会出现非封闭的链状，而不是封闭的环状。

如果C_3色块只与一个色块连通，且这个色块跨度不小于 2，则，这个色块必须是C_4。如果剩下的色块是数是奇数，那么，两色即够。如果是偶数，则需要第三色，并且，这个第三色必须是跨度为 1 的位置。如果所有色块跨度均大于 1，那么，这时需要 5 种色彩了。

当然，C_3有跨度小于或等于 1 的色块，可以任选C_1C_2，所以，不用考虑。

到此，我们可以获得一个结论，那就是水波流形，完全封闭的环，有时会有四色不够的情况。

第四节　扇面水波流形的相关计算

根据上一节的结论，我们不能使用带闭合环的水波流形，只能用扇面水波流形。这也就是说，中心色块，它只是在对应圆的中心。事实上它是在扇面的顶点。中心色块，至少有一条边是整个图的最外层边界。

当我们按照扇面水波流形来配色时，问题就简单多了。

1、　规则的第 2 层到第 n 层

只要是规则的，因为不是闭合的环，所以，每一层均需要两色足够。

也就是前面推出的无限循环：

$L_1 = nC_1C_2$　和　$L_1 = nC_1C_2 + C_1$

$L_2 = nC_3C_4$　和　$L_2 = nC_3C_4 + C_3$

2、　具有顶点相接的第 2 层到第 n 层

顶点相接，与边相接一样，无论是与内圈顶点相接，还是与外圈顶点相接。每一层的要求是，取与上一层不同的二色，并且，同层相邻的两外色块颜色不同即可。

所以，仍旧是以上的无限循环表达式。

$L_1 = nC_1C_2$　和　$L_1 = nC_1C_2 + C_1$

$L_2 = nC_3C_4$　和　$L_2 = nC_3C_4 + C_3$

3、　具有跨层延伸的第 2 层到第 n 层

当规则层不再出现第 5 色的需求时，我们可以考虑跨层延伸的情况了。

有跨层延伸的层是一种不规则层，跨层延伸是一个色块占领多个层。

$L_1 = nC_1C_2$　和　$L_1 = nC_1C_2 + C_1$

当上一层有跨层延伸过来时，考虑到下面的表达式

$L_2 = nC_3C_4$　和　$L_2 = nC_3C_4 + C_3$

一定是被 C_1 ，C_2 ，C_1C_2　等各种组合打断的链。所以，当出现第一层跨层时，没有任何影响。

但当到另一层与有延伸的层相接时，那必须会碰到前面所说的 5 块 3 色左右各 3 度组合。一旦这样，一样也需要第 5 色。

这也就是说，在这种情况下，四色定理也不成立。

4、　分叉与闭合跨层延伸的第 2 层到第 n 层

分叉是指部分跨层的现象。比如一色块两头占两层，中间占一层，这实际上与基本的跨

层一样，被隔开的，仍是链状，二色足够。闭合跨层，也就是，在上一层是两个同色的但不相接的色块，与本层同色的一个更大的色块接成一块。因为被包围的内部是另外两色，所以，对用色数量并无影响。

第四章 不一定是结论

第一节，水波流形拓扑变换的可行性

从前文分析，我们可以看出，总会遇到相关的反例，但目前的反例只有一个，即：5 块 3 色左右各 3 度的组合。是否还有其它反例，并不清楚。

因为圆形本身有明显的反例，所以，我们不考虑这样的情况，那么，我们只考虑扇形。而对于扇形，我们则可以用三角形来代替。假如这种拓扑变换是完全正确且可行的，那么即可以肯定，四色定理是不成立的。

我们可以从以下几个方面判断：

第一， 关于顶点链接问题：

顶点链接，至少要有四人色块的组合。因为，哪果仅有三个色块，那么，每一色块都是与另外两个色块具有边连通的。但到 4 个色块时，就会有十字交叉，就像直色坐标的象限，1,3 为顶点链接，2,4 也是。

顶点连接在三角形的拓扑变换中也是可行的，比如，图 2 即是一个示例。

图 2 中，三个三角形与某一四边形构成顶点连接。顶点连接的连接点，可以用射线拆分现有的三个三角形为任意多个三角形。可见，顶点连接在这种拓扑变换中是可行的。

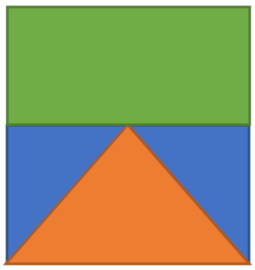

图 2，顶点连接

第二， 关于跨层延伸。一个色块可能有与其它色块边连通超过 4 个，或不足 4 个，不足四个的，一般是存在顶点连通。而对于超过 4 个的，可能通过跨层延伸来处理。

综上，三角分层流形拓扑变换的可能性是存在的。但是，这并不是确证，所有的平面图都能进行这种三角分层流形拓扑变换。

第二节，不一定是结论

我们并不清楚，是否有更好的流形方法，从而避免这些反例。

目前的结论，希望对其它人有所帮助。

从本质上来说，换一个数据结构，换一个方法，会给我们带来更新的发现。本文并不能给四色问题一个确定的结论。

但是，我们相信也希望，本文中的方法对大家有所帮助。

联系作者:

bardoqi@gmail.com byteferry@qq.com