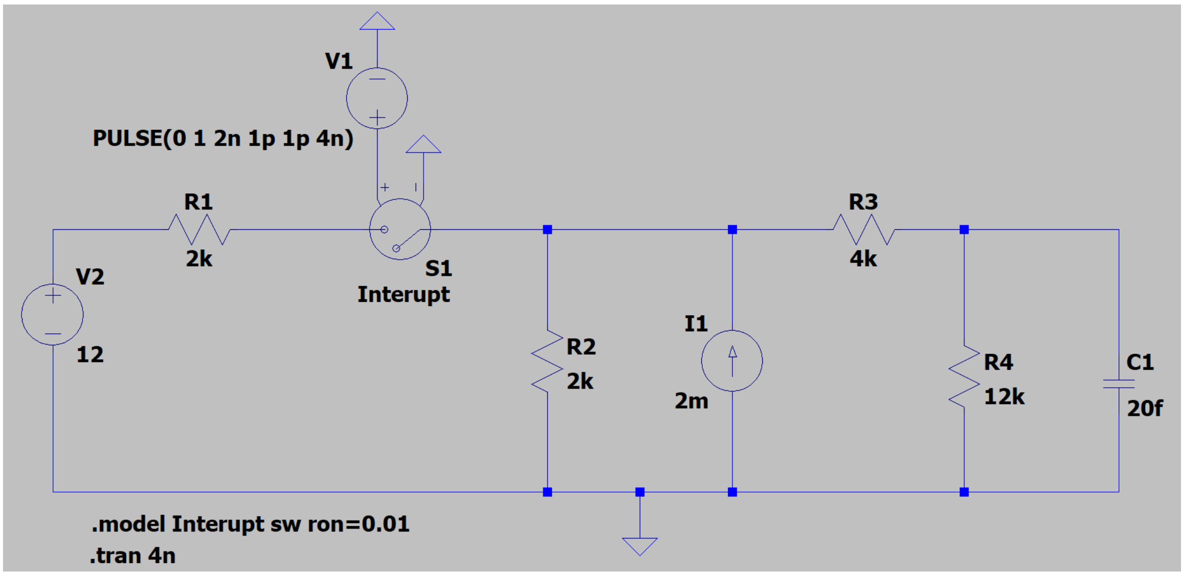
Travail 4 - Circuits RC

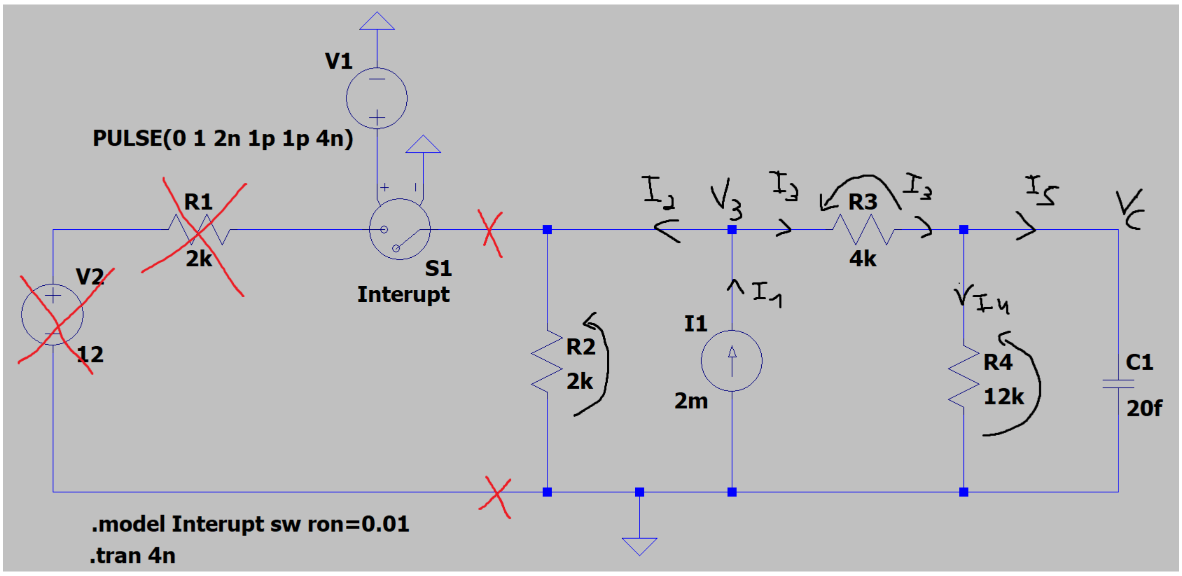
Wats Raphaël

March 6, 2021

1 Schéma du circuit



2 Le calcul de la condition initiale



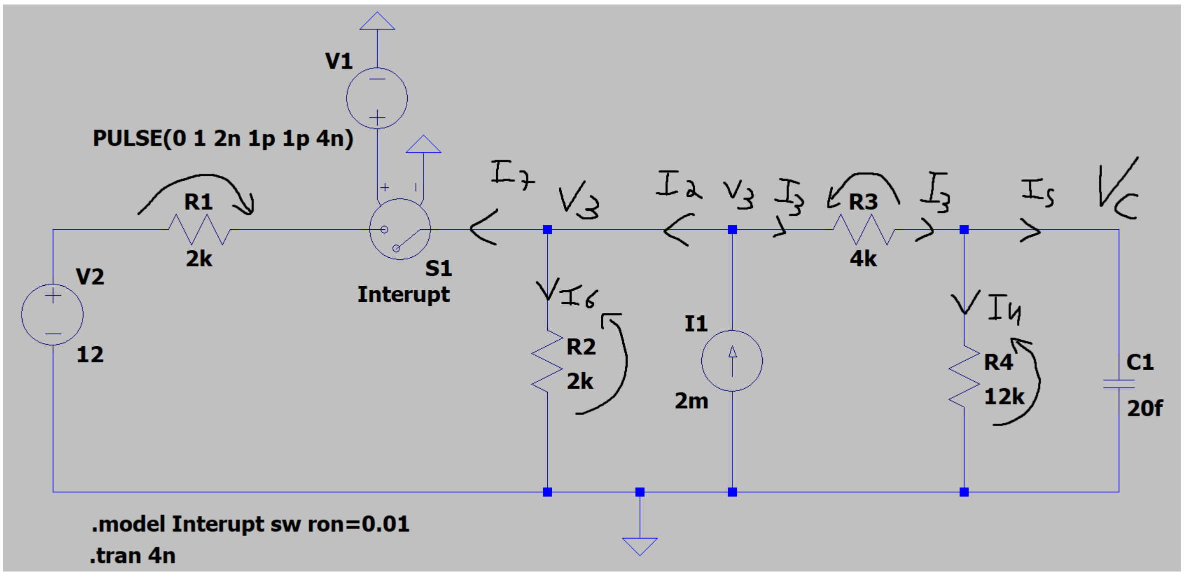
Comme la capacité est entièrement chargée, le courant I_5 dans la capacité est nul.

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag*{[2.1]}$$
$$I_3 = I_4 + I_5 \tag*{[2.2]}$$
$$I_5 = 0 \tag*{[2.3]}$$
$$I_3 = I_4 \tag*{[2.4]}$$
$$\tag*{[2.5]}$$

En exprimant V_3 en terme de V_c on peut résoudre le noeud de V_3

$$I_2 = V_3/R_2 \tag*{[2.6]}$$
$$I_3 = (V_3 - V_c)/R_3 \tag*{[2.7]}$$
$$I_3 = V_c/R_4 \tag*{[2.8]}$$
$$(V_3 - V_c)/R_3 = V_c/R_4 \tag*{[2.9]}$$
$$V_3 = (V_c \cdot R_3)/R_4 + V_c = (V_c \cdot 4000)/12000 + V_c \tag*{[2.10]}$$
$$V_3 = 4V_c/3 \tag*{[2.11]}$$
$$I_2 = (4V_c/3)/R_2 = 4V_c/6000 = 2V_c/3000 \tag*{[2.12]}$$
$$I_1 = 2V_c/3000 + V_c/12000 \tag*{[2.13]}$$
$$0.002 = 9V_c/12000 \tag*{[2.14]}$$
$$V_c = 8/3 = 2.67V \tag*{[2.15]}$$

3 Le calcul de la condition finale



On met tout d'abord en équation les différents noeuds du circuit.
Comme la capacité est entièrement chargée, le courant I_5 dans la capacité est nul.

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad [3.1]$$
$$I_2 = I_6 + I_7 \quad [3.2]$$
$$I_3 = I_4 + I_5 \quad [3.3]$$
$$I_3 = I_5 \quad [3.4]$$

Exprimer le premier noeud en terme de V_3 et V_c

$$I_6 = V_3/R_2 \quad [3.5]$$
$$I_7 = (V_3 - V_2)/R_1 \quad [3.6]$$
$$I_2 = V_3/R_2 + (V_3 - V_2)/R_1 \quad [3.7]$$
$$I_3 = (V_3 - V_c)/R_3 \quad [3.8]$$
$$I_1 = V_3/R_2 + (V_3 - V_2)/R_1 + (V_3 - V_c)/R_3 \quad [3.9]$$

Il nous reste à exprimer à présent V_c en terme de V_3

$$I_3 = (V_3 - V_c)/R_3 \quad [3.10]$$
$$I_3 = V_c/R_4 \quad [3.11]$$
$$(V_3 - V_c)/R_3 = V_c/R_4 \quad [3.12]$$
$$V_3 = (V_c \cdot R_3)/R_4 + V_c = (V_c \cdot 4000)/12000 + V_c \quad [3.13]$$
$$V_c = 3V_3/4 \quad [3.14]$$

il n'y a plus qu'à substituer dans la relation [3.9]

$$I_1 = V_3/R_2 + (V_3 - V_2)/R_1 + (V_3 - (3V_3/4))/R_3 \quad [3.15]$$
$$V_3 = 128/17 = 7.53V \quad [3.16]$$
$$V_c = (3 \cdot (128/17))/4 = 96/17 = 5.65V \quad [3.17]$$

4 Le calcul de la constante de temps

$\tau = R_{eq} \cdot C$, où R_{eq} est la résistance équivalent vu par la capacité $R_{eq} = ((R_1//R_2)+R_3)//R_4 = 3529\Omega$ et C la valeur de la capacité. $\tau = 3529\Omega \cdot 20fF = 70p$ secondes

5 Le calcul de la tension aux bornes de la capacité

La solution de l'équation différentielle du premier ordre pour calculer la tension aux bornes d'une capacité est:

$$V_c(t) = A + Be^{-t/\tau} \qquad [5.1]$$

On a alors, $V_c(t = 0) = 2.67V$ à la condition initial et $V_c(t = \infty) = 5.65V$ à la condition finale

$$V_c(0) = A + Be^{0/\tau} = 2.67V \qquad [5.2]$$
$$V_c(\infty) = A + Be^{-\infty/\tau} = 5.65V \qquad [5.3]$$

Grâce à la relation [5.2] on peut exprimer B en terme de A:

$$V_c(0) = A + Be^{0/\tau} = 2.67V \qquad [5.4]$$
$$V_c(0) = A + Be^{0} = 2.67V \qquad [5.5]$$
$$V_c(0) = A + B \cdot 1 = 2.67V \qquad [5.6]$$
$$V_c(0) = A + B = 2.67V \qquad [5.7]$$
$$B = 2.67V - A \qquad [5.8]$$

On obtient la valeur de A Grâce à la relation [5.3]

$$V_c(\infty) = A + Be^{-\infty/\tau} = 5.65V \qquad [5.9]$$
$$V_C(\infty) = A + B(1/e^{\infty/\tau} = 5.65V \qquad [5.10]$$
$$V_C(\infty) = A + B \cdot 0 = 5.65V \qquad [5.11]$$
$$V_C(\infty) = A = 5.65V \qquad [5.12]$$

Avec la relation [5.8] on a que $A = 5.65V$ et $B = -2.98V$ on a alors la relation [5.1]

$$V_c(t) = 5.65 - 2.98e^{-t/\tau} \qquad [5.13]$$

On a présent déterminer la fonction permettant de connaître l'évolution de la tension aux bornes de la capacité en fonction du temps. On peut à présent vérifier grâce à la simulation !

Pour $t = 0.05n$ secondes (on sera alors à $2.05n$ secondes sur notre simulation) on aura:

$$V_c(50 \cdot 10^{-12}) = 5.65 - 2.98e^{-50 \cdot 10^{-12}/70 \cdot 10^{-12}} = 4.185V \qquad [5.14]$$

6 Le calcul du courant de la capacité

Le courant dans la capacité en fonction du temps est donné par la relation:

$$I_c(t) = CV_c(t)' \tag{6.1}$$

$$I_c(t) = 20 \cdot 10^{-15}(2.98/\tau)e^{-t/\tau} \tag{6.2}$$

où C est égale à la valeur de la capacité et $V_c(t)'$ est la dérivée de la fonction qui donne la valeur de la tension aux bornes de la capacité en fonction du temps.

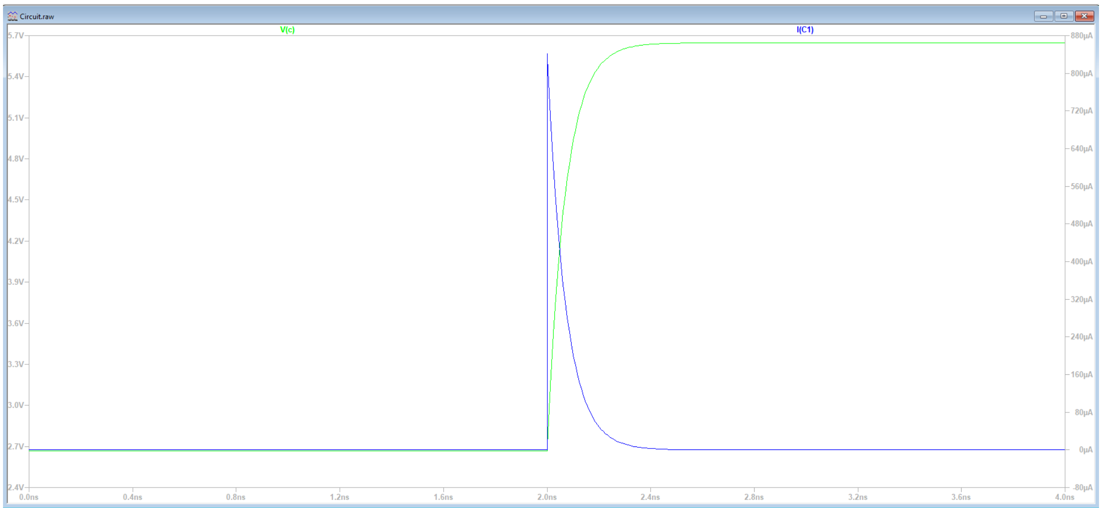
Pour $t = 0.05n$ secondes (on sera alors à $2.05n$ secondes sur notre simulation) on aura:

$$I_c(50 \cdot 10^{-12}) = 20 \cdot 10^{-15}(2.98/70 \cdot 10^{-12})e^{-50 \cdot 10^{-12}/70 \cdot 10^{-12}} \tag{6.3}$$

$$I_c(50 \cdot 10^{-12}) = 20 \cdot 10^{-15}(2.98/70 \cdot 10^{-12})e^{-5/7} \tag{6.4}$$

$$I_c(50 \cdot 10^{-12}) = 8,51 \cdot 10^{-4}e^{-5/7} = 4.17 \cdot 10^{-4}A \tag{6.5}$$

7 La simulation du circuit



Ici on observe bien l'exemple d'un circuit transitoire où la tension et le courant évolue en fonction du temps

8 Conclusion

Les résultats obtenu sont en adéquation avec ceux obtenu lors de la simulation LTspice XVII.

- On observe que la tension aux bornes de la capacité ainsi que le courant évolue en fonction du temps d'où le nom de régime transitoire.