Foglio di esercizi 1

Metodi Matematici per l'IA

18-10-2023

Esercizio 1. Provare che $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

- $|\text{Re z}| \leq |z|$ e $|\text{Im}z| \leq z$,
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w},\ \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$,
- se $|z| = \text{Re}z$ allora $z \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$,
- $\arg(z_1 z_2 z_3) = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3,\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,
- $\arg(z\bar{w}) = \arg z - \arg w$,
- Provare induttivamente che

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j|, \qquad z_j \in \mathbb{C},$$

Esercizio 2. Si determini e rappresenti graficamente l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

a) $1 < \left|\frac{z}{z-i}\right| < 2$,

b) $|iz+1| > |2\bar{z}+i|$,

c) $z^2 + \bar{z}^2 = 2i\,|z|^2$,

d) $|z+\bar{z}| \geq z\bar{z}$.

Esercizio 3. Si determino le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ del sistema di equazioni

$$\begin{cases} z^2 + iw + z = 0, \\ w - iz + 1 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z - \bar{z}}{i(z+\bar{z})^2},$$

provare che:

1. $f(z) \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$,
2. Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) > 0$.

Esercizio 5. Dimostrare la *formula di De Moivre*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Esercizio 6. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ T > 0,\ n \in \mathbb{N}$ e $\omega = \frac{2\pi}{T}$, trovare le soluzioni dell'ODE

$$u'' + (n\omega)^2 u = 0.$$

Esercizio 7. Definiamo il prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}x \tag{1}$$

1. Cosa vuol dire che la famiglia $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare (1)?
2. Dimostrare che le famiglie

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}}e^{i\,n\omega x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(n\omega x), \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(n\omega x)\right)_{n\geq 1},$$

sono ortonormali.

Esercizio 8. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{|z| - 1}{z^2 - i},$$

si rappresenti nel piano di Gauss

1. Dom (f),
2. $f^{-1}(\{0\})$.

Esercizio 9 (importante)**.** Calcolare la serie di Fourier dell'estensione 2π–periodica della restrizione in $[-\pi, \pi]$ delle funzioni

$$f(x) = |x|, \qquad g(x) = x^2.$$