Esercizio 1. Sia $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ e $a \neq 0$. Provare che il problema di Cauchy (*equazione del calore sulla retta*)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, ammette una soluzione unica per $t > 0$ data da

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t)\,\phi(y)\,dy$$

dove

$$G(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} .$$

Esercizio 2. Sia $\phi \in L^1$ e $a \neq 0$. Provare che il seguente problema con condizioni periodiche (*equazione del calore periodica*)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x+2\pi,t) = u(x,t) \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, ammette una soluzione unica per $t > 0$ data da

$$u(x,t) = \int_0^{2\pi} \Theta(x-y,t)\,\phi(y)\,dy$$

dove

$$\Theta(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-a^2 n^2 t + inx} .$$

Esercizio 3. Calcolare la funzione $f(x)$ che ha come trasformata di Fourier

$$\hat{f}(\xi) = e^{-k|\xi|} \qquad \text{con} \qquad k > 0 .$$

Esercizio 4. Sia $\phi \in L^1$ e sia $u = u(x,y)$ soluzione dell'*equazione di Laplace* nel semipiano $y \geq 0$ che soddisfa

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \quad \text{se} \quad y > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u(x,y) \to 0 \quad \text{quando} \quad y \to +\infty \quad \text{e per ogni} \quad x \in \mathbb{R} . \end{cases}$$

1. Provare che la trasformata di Fourier di u nella variabile x, i.e.

   $$\hat{u}(\xi,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\,e^{-i\xi x}\,dx ,$$

   è della forma

   $$\hat{u}(\xi,y) = \hat{\phi}(\xi)e^{-y|\xi|}$$

   dove $\hat{\phi}(\xi)$ è la trasformata di Fourier di $\phi(x)$.

2. Provare che u è data da

   $$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2}\,\phi(s)\,ds .$$