

Esercizio 1. Sia f 2π -periodica tale che

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad |c_n| = \mathcal{O}\left(2^{-|n|}\right),$$

e definiamo

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

Dimostrare che

1. $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$ in norma uniforme in \mathbb{R} e,
2. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Siano $f, g \in \mathcal{C}^\infty$ e T -periodiche, dimostrare che

1. se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ allora $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$,
2. $c_n(fg) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{n-k}(f) c_k(g)$,

Esercizio 3. Si considerino le seguenti serie trigonometriche

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n i}{1 + n^{3/2}} e^{inx}, \\ & \sum_{n \geq 1} \left[2^{-n} \cos(n\sqrt{2} x) + (-2)^{-n} \sin(n\sqrt{2} x) \right], \\ & \sum_{n \geq 0} \frac{1+i}{n!} e^{in2x}, \\ & \sum_{n \geq 1} \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{n}(1 + n^5)} \sin(3n x), \\ & \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2^n}{3^n + 4^n} e^{in2x}, \end{aligned}$$

studiare

1. Convergenza puntuale, uniforme e in energia,
2. Nel caso la serie converga a una funzione target determinare periodo, frequenza angolare e regolarità della funzione limite.