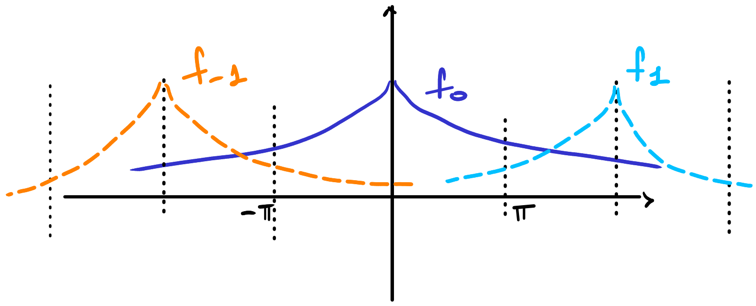
Esercizio 1

1| Voglio usare l' M-test di Weierstrass.
Notiamo il seguente



Notiamo che ogni funzione f_j, $j \in \mathbb{Z}$ è una traslazione di $2\pi j$ del grafico della funzione f_0. Pertanto $\forall j \in \mathbb{Z}$

$$\sup_{x \in [\pi,\pi]} f_j(x) = \sup_{x \in [\pi,\pi]} e^{-\alpha|x-2\pi j|} \overset{y=x-2\pi j}{=} \sup_{y \in [-(2j+1)\pi,\,(1-2j)\pi]} e^{-\alpha|y|}$$

Questa quantità deve venire maggiorata in 3 casi

$j=0$ $\quad \sup_{y \in [-\pi,\pi]} e^{-\alpha|y|} = 1 \quad = M_0$

$j>0$ $\quad \sup_{y \in [-(2j+1)\pi,\,(1-2j)\pi]} e^{-\alpha|y|} = e^{-\alpha(1-2j)\pi} \quad = M_j \quad j>0$

$j<0$ $\quad \sup_{y \in [-(2j+1)\pi,\,(1-2j)\pi]} e^{-\alpha|y|} = e^{+\alpha(2j+1)\pi} \quad = M_j \quad j<0$

Si ha che, visto che $\alpha>0$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} M_j < \infty$, pertanto posso applicare l' M-test ed ottengo che

$$T_J \xrightarrow{J \to \infty} f \quad \text{uniformemente in } [-\pi,\pi).$$

Siccome le funzioni sono 2π-periodiche questo vale pure in $\mathbb{R}$

2| Abbiamo visto che f è un limite uniforme di funzioni continue (T_J è somma finita di fz continue, pertanto è continua), e pertanto f è continua

$\Longrightarrow$ f è continua in $[-\pi, \pi]$ $\Longrightarrow$ f ammette massimo e minimo in $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \leq 2\pi \max_{[-\pi,\pi]} |f(x)| < \infty \implies f \in L^1_{\mathbb{C}}(2\pi)$$

Ovviamente $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, pertanto $f \in L^1_{\mathbb{R}}(2\pi)$.

3| Si tratta nuovamente di un'applicazione dell'M-test

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-|x - 2\pi j|} \Big) e^{-inx}\, dx$$

Posso commutare questi due ?

Definisco $g_j(x) := e^{-|x-2\pi j|} e^{-inx}$, usando i calcoli del pto 1| ho che $|g_j(x)| \leq M_j$ dove gli M_j sono definiti in 1|.

Pertanto la serie funzionale $\sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j(x)$ converge uniformemente in $[-\pi, \pi)$ e posso applicare il thm di integrazione termine a termine

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} g_j(x)\, dx$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x-2\pi j|} e^{-inx}\, dx}_{= c_n(f_j)} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_n(f_j)$$

4) Si tratta nuovamente di un'applicazione dell'M-test. Se $j \neq 0$

$$|(f_j)'(x)| = \left|\frac{d}{dx} e^{-\alpha|x-2\pi j|}\right| \leq \pi(2|j|+1)\, e^{-\alpha\pi(2|j|-1)} = \tilde{M}_j$$

Pertanto siccome $\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus 0} \tilde{M}_j < \infty$

ho che $\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus 0} f_j'$ converge uniformemente in $[-\pi,\pi)$ e quindi

$$\frac{d}{dx}\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus 0} f_j = \boxed{\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus 0} f_j'}$$ ed è una funzione continua essendo limite di fz continue

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j(x) = \frac{d}{dx}\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus 0} f_j(x) + f_0(x)$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus 0} f_j'(x) + f_0'(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j'(x)$$

Tuttavia notiamo che la fz f_0 non è derivabile con continuità in 0

$\longrightarrow$ la fz f non è derivabile con continuità in 0

$\Longrightarrow$ $f \notin C^1([-\pi,\pi);\mathbb{R})$

$\Longrightarrow$ $|c_n(f)|$ non può essere $O(|n|^{-p})$ con $p>2$ $\square$

Esercizio 2

1| Sia X un insieme e sia $d : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una fz tc $\forall x, y, z \in X$

a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

tale fz si dice metrica. La coppia (X, d) si dice spazio metrico

2| Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}\ (= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ e sia $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tale che $\forall x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$

a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ non degenere

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ omogenea

c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ sub-additiva

allora la coppia $(V, \|\cdot\|)$ si dice spazio normato

3| Sia (X, d) uno spazio metrico, una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice di Cauchy se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tc $\forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$

4| Uno spazio metrico (X, d) si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente in X.

Esercizio 3

1| Sempre il solito esempio

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -T/2 \le x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \le x \le T/2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -T/2 \le x \le 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \le T/2 \end{cases}$$

2| Consideriamo la ridotta

$$s_N(x) = \sum_{|n| \le N} (1+|n|)^{-3/2} e^{inx}$$

Applicando (di nuovo) l'M-test ottengo che $s_N \longrightarrow h$ uniformemente in $[-T/2, T/2]$, inoltre per costruzione $c_n(h) = (1+|n|)^{-3/2}$.

Esercizio 4

1| Fisso $\varepsilon > 0$ $\forall\, m > n \ge 0$ (dunque in questo caso $n_0 = 0$) ho che

$$I_R(|\mathbb{1}_{Q_m} - \mathbb{1}_{Q_n}|) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=n+1}^{m} \mathbb{1}_{\{q_k\}}(x)\, dx = \sum_{k=n+1}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{1}_{\{q_k\}}(x)\, dx$$

Definisco ora $R_{k,\varepsilon} = \left[q_k - \frac{\varepsilon}{4(m-n-1)} , q_k + \frac{\varepsilon}{4(m-n-1)} \right]$

Ovviamente

$$\sum_{k=n+1}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{1}_{\{q_k\}}(x)\, dx \le \sum_{k=n+1}^{m} \int_{R_k} dx = \sum_{k=n+1}^{m} |R_k|$$

inoltre ho che $|R_k| \equiv \frac{\varepsilon}{2(m-n-1)}$ $\forall\, k = n+1, \dots, m$

quindi $\sum_{l=n+1}^{m} |R_k| = \varepsilon/2 < \varepsilon$

Pertanto $I_R(|\mathbb{1}_{Q_m} - \mathbb{1}_{Q_n}|) < \varepsilon$ $\square$

2| Noto che $\mathbb{1}_{Q_N}(x) \xrightarrow{N \to \infty} \mathbb{1}_{Q \cap [0,1]}(x)$, pertanto applico il thm di convergenza dominata di Lebesgue con fz dominante $g(x) := \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, ed ottengo

$$\lim_{N \to \infty} I_L(\mathbb{1}_{Q_N}) = I_L(\mathbb{1}_{Q \cap [0,1]}) = 0 \qquad \square$$