Тринадцатая проблема Гильберта

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Трина́дцатая пробле́ма Ги́льберта — одна из 23 задач, которые Давид Гильберт предложил 8 августа 1900 года на II Международном конгрессе математиков. Она была мотивирована применением методов номографии к вычислению корней уравнений высоких степеней, и касалась представимости функций нескольких переменных, в частности, решения уравнения седьмой степени как функции от коэффициентов, в виде суперпозиции нескольких непрерывных функций двух переменных.

Проблема была решена В. И. Арнольдом совместно с А. Н. Колмогоровым, доказавшими, что любая непрерывная функция любого количества переменных представляется в виде суперпозиции непрерывных функций одной и двух переменных (и, более того, что в таком представлении можно обойтись, в дополнение к непрерывным функциям одной переменной, единственной функцией двух переменных — сложением):[1][2]

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{q=0}^{2n}\Phi_q\left(\sum_{p=1}^{n}\psi_{q,p}(x_p)\right).$$

Функций Φ_q и $\psi_{q,p}$, не считая нулевых, требуется не более $(n+1)(2n+1)$ штук, в частности, для двух переменных — не более 15, для трех — не более 28.

Содержание

Постановка проблемы

Уравнения степеней до четвёртой включительно разрешимы в радикалах: для их решений существуют явные формулы (формула Кардано и метод Феррари для уравнений третьей и четвёртой степени соответственно). Для уравнений степеней, начиная с пятой, их неразрешимость в радикалах утверждается теоремой Абеля — Руффини. Однако преобразования Чирнгауза позволяют свести общее уравнение степени n>4 к виду, свободному от коэффициентов при x^{n-1}, x^{n-2} и x^{n-3}; для n=5 этот результат был получен Брингом в 1786, и для общего случая Джерардом в 1834.[3]. Тем самым (после дополнительной перенормировки), решение уравнений степеней 5, 6 и 7 сводилось к решению уравнений вида

$$x^5+ax+1=0,$$
$$x^6+ax^2+bx+1=0,$$
$$x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$$

зависящих от одного, двух и трех параметров соответственно.

Непредставимость с сохранением класса гладкости

Решение: теоремы Колмогорова и Арнольда

Литература

1. ↑ В. И. Арнольд, Избранное-60, М.: Фазис, 1997. С. 18, теорема 4.
2. ↑ On a constructive proof of Kolmogorovs' superposition theorem(http://wissrech.iam.uni-bonn.de/research/pub/braun/emonkoe.pdf)
3. ↑ *Weisstein, Eric W.* Tschirnhausen Transformation (http://mathworld.wolfram.com/TschirnhausenTransformation.html)(англ.) на сайте Wolfram MathWorld.

- *В. И. Арнольд.* Избранное-60. — М.: Фазис, 1997.
- *В. И. Арнольд* О представлении непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных // Матем. сб.. — 1959. — Т. 48(90), № 1. — С. 3—74.
- *А. Н. Колмогоров* О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения // ДАН СССР. — 1957. — Т. 114, вып. 5. — С. 953—956.
- *А. Г. Витушкин* 13-я проблема Гильберта и смежные вопросы // УМН. — 2004. — Т. 59, № 1(355). — С. 11–24.
- *В. В. Прасолов.* Многочлены. — М.: МЦНМО, 2003. — 336 с. — ISBN 5-94057-077-1.
- *В. И. Арнольд* Топологические инварианты алгебраических функций. II // Функц. анализ и его прил.. — 1970. — Вып. 2. — № 4. — С. 1-9.
- *В. И. Арнольд* О классах когомологий алгебраических функций, сохраняющихся при преобразованиях Чирнгаузена // Функц. анализ и его прил.. — 1970. — Вып. 1. — № 4. — С. 84—85.
- *Г. Н. Чеботарев* К проблеме резольвент // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. — 1954. — Т. 114, № 2. — С. 189—193.
- Проблемы Гильберта / под ред. П. С. Александрова. — М.: Наука, 1969. — 240 с. — 10 700 экз.
- *David Hilbert.* Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900 (нем.). — Текст доклада, прочитанного Гильбертом 8 августа 1900 года на II Международном конгрессе математиков в Париже. Проверено 27 августа 2009. Архивировано 8 апреля 2012 года.