第二章　常用的数学工具

2.2　用生成函数求解递归方程

2.2.1　生成函数及其性质

一、生成函数的定义

定义 2.1　令 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 是一个实数序列，构造如下的函数：

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad (2.2.1)$$

则函数 $G(z)$ 称为序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 的生成函数。

例：函数

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$$

则函数 $(1+x)^n$ 便是序列 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^n$ 的生成函数。

二、生成函数的性质

1．加法　设 $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 是序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 的生成函数，$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ 是序列 $b_0, b_1, b_2, \cdots$ 的生成函数，则 $\alpha G(z) + \beta H(z)$

$$\alpha G(z) + \beta H(z) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) z^k \qquad (2.2.2)$$

是序列 $\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \cdots$ 的生成函数。

2．移位　设 $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 是序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 的生成函数，则 $z^m G(z)$

$$z^m G(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_{k-m} z^k \qquad (2.2.3)$$

是序列$0,\cdots,0,a_0,a_1,a_2,\cdots$ 的生成函数。

3．乘法　设$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$是序列$a_0,a_1,a_2,\cdots$ 的生成函数，$H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k$是序列$b_0,b_1,b_2,\cdots$ 的生成函数，则$G(z)H(z)$

$$
\begin{aligned}
G(z)H(z)&=(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots)(b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots)\\
&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\cdots\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \qquad (2.2.4)
\end{aligned}
$$

是序列$c_0,c_1,c_2,\cdots$ 的生成函数，其中，$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$

4．z 变换　设$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$是序列$a_0,a_1,a_2,\cdots$ 的生成函数，则$G(cz)$

$$
\begin{aligned}
G(cz)&=a_0+a_1(cz)+a_2(cz)^2+a_3(cz)^3+\cdots\\
&=a_0+ca_1z+c^2a_2z^2+c^3a_3z^3+\cdots \qquad (2.2.5)
\end{aligned}
$$

是序列$a_0,ca_1,c^2a_2,\cdots$ 的生成函数。

特别地，有：

$$\frac{1}{1-cz}=1+cz+c^2z^2+c^3z^3+\cdots \qquad (2.2.6)$$

所以，$\frac{1}{1-cz}$是序列$1,c,c^2,c^3,\cdots$的生成函数。

当$c=1$时，有：

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots \qquad (2.2.7)$$

则$\frac{1}{1-z}$是序列 1,1,1,⋯的生成函数。

利用：

$$\frac{1}{2}(G(z)+G(-z))=a_0+a_2z^2+a_4z^4+\cdots \qquad (2.2.8)$$

可以去掉级数中的奇数项；同样，利用

$$\frac{1}{2}(G(z)-G(-z))=a_1z+a_3z^3+a_5z^5+\cdots \qquad (2.2.9)$$

可以去掉级数中的偶数项。

5．微分和积分　设 $G(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 是序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 的生成函数，对 $G(z)$ 求导数

$$G'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}z^k \qquad (2.2.10)$$

显然，$G'(z)$ 是序列 $a_1, 2a_2, 3a_3, \cdots$ 的生成函数。同样，对 $G(z)$ 求积分

$$\int_0^z G(t)\,dt=a_0z+\frac{1}{2}a_1z^2+\frac{1}{3}a_2z^3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}a_{k-1}z^k \qquad (2.2.11)$$

则积分 $\int_0^z G(t)\,dt$ 是 $a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \cdots$ 的生成函数。

如果对（2.2.7）式求导数，可得：

$$\frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+3z^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k \qquad (2.2.12)$$

则 $\frac{1}{(1-z)^2}$ 是算术级数 1,2,3⋯的生成函数。

如果对（2.2.7）式求积分，可得：

$$\ln\frac{1}{1-z}=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}z^k \qquad (2.2.13)$$

则 $\ln\frac{1}{1-z}$ 是调和数 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ 的生成函数。

2.2.2　用生成函数求解递归方程

例 2.1　汉诺塔（Hanoi）问题。

宝石针的编号为 A、B、C，A 针串着 64 片金盘。希望把它们移到 B 针或 C 针。有可 n 是金盘的数量，$h(n)$ 是移动 n 个金盘的移动次数

1．当 $n=1$ 时，　$h(1)=1$。

2．当 $n=2$ 时，　$h(2)=2h(1)+1$。

3．当 $n=3$ 时，　$h(3)=2h(2)+1$。

递归关系式：

$$\begin{cases} h(n)=2h(n-1)+1 \\ h(1)=1 \end{cases} \qquad (2.2.14)$$

用 $h(n)$ 作为系数，构造一个生成函数：

$$G(x)=h(1)x+h(2)x^2+h(3)x^3+\cdots$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}h(k)x^k$$

令

$$G(x)-2xG(x)=h(1)x+h(2)x^2+h(3)x^3+\cdots-2h(1)x^2-2h(2)x^3-\cdots$$
$$=h(1)x+(h(2)-2h(1))x^2+(h(3)-2h(2))x^3+\cdots$$

由（2.2.14）及（2.2.7）式得：

$$(1-2x)G(x)=x+x^2+x^3+\cdots$$
$$=\frac{x}{1-x}$$

所以，

$$G(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

令：

$$G(x)=\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{(1-2x)}=\frac{A-2Ax+B-Bx}{(1-x)(1-2x)}$$

有：

$$A+B=0 \qquad -2A-B=1$$

求得 $A=-1,B=1$。所以：

$$G(x)=\frac{1}{(1-2x)}-\frac{1}{(1-x)}$$
$$=(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots)-(1+x+x^2+x^3+\cdots)$$
$$=(2-1)x+(2^2-1)x^2+(2^3-1)x^3+\cdots$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(2^k-1)x^k$$

$h(n)=2^n-1$，它是式中第 n 项的系数。当 $n=64$ 时，移动次数为 $2^{64}-1$。

例 2.2 菲波那契序列问题。

$t(n)$、$T(n)$、$f(n)$ 表示第 n 个月小兔子、大兔子的数目，及第 n 个月兔子的总数目。则：

$$T(n)=T(n-1)+t(n-1) \qquad （2.2.15）$$
$$t(n)=T(n-1) \qquad （2.2.16）$$
$$f(n)=T(n)+t(n) \qquad （2.2.17）$$

第一式：第 n 个月大兔子的数量，为前一个月大兔子的数量加上前一个月小兔子的数量；

第二式：第 n 个月小兔子的数量，为前一个月大兔子的数量；

第三式：表示第n个月兔子的总量为该月大兔子的数量及小兔子的数量之和。递归方程：

$$\begin{cases} f(n)=f(n-1)+f(n-2) \\ f(1)=f(2)=1 \end{cases} \tag{2.2.18}$$

用$f(n)$作为系数，构造生成函数：

$$\begin{aligned} F(x) &= f(1)x+f(2)x^2+f(3)x^3+\cdots\cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f(k)x^k \end{aligned}$$

令：

$$\begin{aligned} &F(x)-xF(x)-x^2F(x) \\ &= f(1)x+f(2)x^2+f(3)x^3+\cdots-x(f(1)x+f(2)x^2+\cdots)-x^2(f(1)x+\cdots) \\ &= f(1)x+(f(2)-f(1))x^2+(f(3)-f(2)-f(1))x^3+\cdots\cdots \\ &= x \end{aligned}$$

所以，有：

$$F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{-x}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}}=\frac{-x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2}$$

$$=\frac{-x}{\left(x+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}\right)\left(x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}\right)}$$

$$=\frac{A}{x+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}+\frac{B}{x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{Ax+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})A+Bx+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})B}{\left(x+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}\right)\left(x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}\right)}$$

有：$A+B=-1$，$(1+\sqrt{5})A+(1-\sqrt{5})B=0$

解得：$A=\frac{1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})$，$B=\frac{-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})$

把A、B代入$F(x)$，得到：

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2x+1-\sqrt{5}}-\frac{1+\sqrt{5}}{2x+1+\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{2x}{\sqrt{5}-1}}-\frac{1}{1-\frac{-2x}{\sqrt{5}+1}}\right)$$

令 $\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，$\beta=\frac{-2}{\sqrt{5}+1}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$

则有：

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}((\alpha-\beta)x+((\alpha^2-\beta^2)x^2+\cdots\cdots$$

所以，第 n 项系数为：

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$$

2.3　用特征方程求解递归方程

2.3.1　k 阶常系数线性齐次递归方程

一、k 阶常系数线性齐次递归方程

1、递归方程的形式：

$$\begin{cases} f(n)=a_1 f(n-1)+a_2 f(n-2)+\cdots a_k f(n-k) \\ f(i)=b_i \qquad 0\le i<k \end{cases} \tag{2.3.1}$$

2、递归方程的特征方程

x^n 取代 $f(n)$：

$$x^n=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_kx^{n-k}$$

两边分别除以 x^{n-k}，可得：

$$x^k=a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_k$$

把上式写成：

$$x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\cdots-a_k=0 \tag{2.3.2}$$

则式（2.3.2）称为递归方程（2.3.1）的特征方程。

二、k 阶常系数线性齐次递归方程的求解

1、$q_1,q_2,\cdots,q_k$ 是特征方程的 k 个互不相同的根。则递归方程（2.3.1）的通解为：

$$f(n)=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n \tag{2.3.3}$$

2、特征方程的 k 个根中有 r 个重根 $q_i, q_{i+1}, \cdots, q_{i+r-1}$，递归方程（2.3.1）的通解形式为：

$$f(n)=c_1q_1^n+\cdots+c_{i-1}q_{i-1}^n+(c_i+c_{i+1}n+\cdots+c_{i+r-1}n^{r-1})q_i^n+\cdots+c_kq_k^n \qquad (2.3.4)$$

在（2.3.3）及（2.3.4）中，$c_1, c_2, \cdots, c_k$ 为待定系数。

3、求解过程：把递归方程的初始条件代入（2.3.3）或（2.3.4）中，建立联立方程，确定系数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$，从而可求出通解 $f(n)$。

例 2.3 三阶常系数线性齐次递归方程如下：

$$\begin{cases} f(n)=6f(n-1)-11f(n-2)+6f(n-3) \\ f(0)=0 \qquad f(1)=2 \qquad f(2)=10 \end{cases}$$

解 特征方程为：

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

把方程改写成：

$$x^3-3x^2-3x^2+9x+2x-6=0$$

对特征方程进行因式分解，得：

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

则有特征根：

$$q_1=1 \qquad q_2=2 \qquad q_3=3$$

所以，递归方程的通解为：

$$\begin{aligned} f(n)&=c_1q_1^n+c_2q_2^n+c_3q_3^n \\ &=c_1+c_2\,2^n+c_3 3^n \end{aligned}$$

由初始条件得：

$$f(0)=c_1+c_2+c_3=0$$

$$f(1)=c_1+2c_2+3c_3=2$$

$$f(2)=c_1+4c_2+9c_3=10$$

解此联立方程，得：

$$c_1=0 \qquad c_2=-2 \qquad c_3=2$$

则递归方程的解为：

$$f(n)=2(3^n-2^n)$$

例 2.4 三阶常系数线性齐次递归方程如下：

$$\begin{cases} f(n)=5f(n-1)-7f(n-2)+3f(n-3) \\ f(0)=1 \qquad f(1)=2 \qquad f(2)=7 \end{cases}$$

解 特征方程为：

$$x^3-5x^2+7x-3=0$$

把特征方程改写成：

$$x^3-5x^2+6x+x-3=0$$

进行因式分解：

$$(x-3)(x^2-2x+1)=0$$

最后得：

$$(x-1)(x-1)(x-3)=0$$

求得特征方程的根为：

$$q_1=1 \qquad q_2=1 \qquad q_3=3$$

所以，递归方程的通解为：

$$\begin{aligned} f(n) &= (c_1+c_2 n)q_1^n+c_3 q_3^n \\ &= c_1+c_2 n+c_3 3^n \end{aligned}$$

代入初始条件：

$$\begin{aligned} f(0) &= c_1+c_3=1 \\ f(1) &= c_1+c_2+3c_3=2 \\ f(2) &= c_1+2c_2+9c_3=7 \end{aligned}$$

解此联立方程，得：

$$c_1=0 \qquad c_2=-1 \qquad c_3=1$$

则递归方程的解为：

$$\begin{aligned} f(n) &= (c_1+c_2 n)q_1^n+c_3 q_3^n \\ &= 3^n-n \end{aligned}$$

2.3.2　k 阶常系数线性非齐次递归方程

一、k 阶常系数线性非齐次递归方程

1、递归方程的形式：

$$\begin{cases} f(n)=a_1 f(n-1)+a_2 f(n-2)+\cdots a_k f(n-k)+g(n) \\ f(i)=b_i \qquad\qquad 0\le i<k \end{cases} \tag{2.3.5}$$

2、通解形式：

$$f(n)=\overline{f(n)}+f^*(n)$$

其中，$\overline{f(n)}$ 是对应齐次递归方程的通解，$f^*(n)$ 是原非齐次递归方程的特解。

3、特解的求取

1） $g(n)$ 是 n 的 m 次多项式，即

$$g(n)=b_1n^m+b_2n^{m-1}+\cdots+b_mn+b_{m+1} \qquad (2.3.6)$$

其中，$b_i, i=1,2,\cdots,m+1$ 是常数。特解 $f^*(n)$ 也是 n 的 m 次多项式：

$$f^*(n)=A_1n^m+A_2n^{m-1}+\cdots+A_mn+A_{m+1} \qquad (2.3.7)$$

其中，$A_i, i=1,2,\cdots,m+1$ 为待定系数。

2） $g(n)$ 是如下形式的指数函数：

$$g(n)=(b_1n^m+b_2n^{m-1}+\cdots+b_mn+b_{m+1})a^n \qquad (2.3.8)$$

其中，a 、$b_i, i=1,2,\cdots,m+1$ 为常数。

a） a 不是特征方程的重根，特解 $f^*(n)$ 为：

$$f^*(n)=(A_1n^m+A_2n^{m-1}+\cdots+A_mn+A_{m+1})a^n \qquad (2.3.9)$$

其中，$A_i, i=1,2,\cdots,m+1$ 为待定系数。

b） a 是特征方程的 r 重特征根，特解的形式为：

$$f^*(n)=(A_1n^m+A_2n^{m-1}+\cdots+A_mn+A_{m+1})n^ra^n \qquad (2.3.10)$$

其中，$A_i, i=1,2,\cdots,r+1$ 是待定系数。

例 2.5 二阶常系数线性非齐次递归方程如下：

$$\begin{cases} f(n)=7f(n-1)-10f(n-2)+4n^2 \\ f(0)=1 \qquad\qquad f(1)=2 \end{cases}$$

解 对应的齐次递归方程的特征方程为：

$$x^2-7x+10=0$$

把此方程转换为：

$$(x-2)(x-5)=0$$

得到特征根为：

$$q_1=2 \qquad q_2=5$$

所以，对应的齐次递归方程的通解为：

$$\overline{f(n)}=c_12^n+c_25^n$$

令非齐次递归方程的特解为：

$$f^*(n)=A_1n^2+A_2n+A_3$$

代入原递归方程，得：

$$A_1n^2+A_2n+A_3-7(A_1(n-1)^2+A_2(n-1)+A_3)+10(A_1(n-2)^2+A_2(n-2)+A_3)=4n^2$$

化简后得到：

$$4A_1n^2+(-26A_1+4A_2)n+33A_1-13A_2+4A_3=4n^2$$

由此，得到联立方程：

$$4A_1=4$$
$$-26A_1+4A_2=0$$
$$33A_1-13A_2+4A_3=0$$

解此联立方程，可得：

$$A_1=1 \qquad A_2=6\frac{1}{2} \qquad A_3=12\frac{7}{8}$$

所以，非齐次递归方程的通解为：

$$f(n)=c_12^n+c_25^n+n^2+6\frac{1}{2}n+12\frac{7}{8}$$

把初始条件代入，有：

$$f(0)=c_1+c_2+12\frac{7}{8}=1$$

$$f(1)=2c_1+5c_2+20\frac{3}{8}=2$$

解此联立方程，得：

$$c_1=-13\frac{2}{3} \qquad c_2=1\frac{19}{24}$$

最后，非齐次递归方程的通解为：

$$f(n)=-13\frac{2}{3}\cdot 2^n+1\frac{19}{24}\cdot 5^n+n^2+6\frac{1}{2}n+12\frac{7}{8}$$

例 2.6 二阶常系数线性非齐次递归方程如下：

$$\begin{cases} f(n)=7f(n-1)-12f(n-2)+n2^n \\ f(0)=1 \qquad\qquad f(1)=2 \end{cases}$$

解 对应齐次递归方程的特征方程为：

$$x^2-7x+12=0$$

此方程可改写成：

$$(x-3)(x-4)=0$$

所以，方程的解为：

$$q_1=3 \qquad q_2=4$$

齐次递归方程的通解为：

$$\overline{f(n)}=c_13^n+c_24^n$$

令非齐次递归方程的特解为：

$$f^*(n)=(A_1n+A_2)\,2^n$$

把特解代入原非齐次递归方程，得：

$$(A_1 n+A_2)2^n-7(A_1(n-1)+A_2)2^{n-1}+12(A_1(n-2)+A_2)2^{n-2}=n2^n$$

整理得：

$$2A_1 n+2A_2-10A_1=4n$$

可得联立方程：

$$2A_1=4$$
$$2A_2-10A_1=0$$

解此联立方程得：

$$A_1=2 \qquad A_2=10$$

所以，非齐次递归方程的通解为：

$$f(n)=c_1 3^n+c_2 4^n+(2n+10)2^n$$

用初始条件代入：

$$f(0)=c_1+c_2+10=1$$
$$f(1)=3c_1+4c_2+24=2$$

解此联立方程得：

$$c_1=-14 \qquad c_2=5$$

最后，非齐次递归方程的解为：

$$\begin{aligned} f(n)&=-14\cdot 3^n+5\cdot 4^n+(2n+10)2^n \\ &=-14\cdot 3^n+5\cdot 4^n+(n+5)2^{n+1} \end{aligned}$$

2.4　用递推方法求解递归方程

2.4.1　递推

非齐次递归方程：

$$\begin{cases} f(n)=bf(n-1)+g(n) \\ f(0)=c \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

其中，b、c 是常数，$g(n)$ 是 n 的某一个函数。直接把公式应用于式中的 $f(n-1)$，得到：

$$\begin{aligned} f(n)&=b(bf(n-2)+g(n-1))+g(n) \\ &=b^2 f(n-2)+bg(n-1)+g(n) \\ &=b^2(bf(n-3)+g(n-2))+bg(n-1)+g(n) \\ &=b^3 f(n-3)+b^2 g(n-2)+bg(n-1)+g(n) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= b^n f(0) + b^{n-1} g(1) + \cdots + b^2 g(n-2) + b\,g(n-1) + g(n) \\
&= c\,b^n + \sum_{i=1}^{n} b^{n-i} g(i) \qquad (2.4.2)
\end{aligned}
$$

例 2.7　汉诺塔问题。

由（2.2.14），汉诺塔的递归方程为：

$$
\begin{cases} h(n) = 2h(n-1) + 1 \\ h(1) = 1 \end{cases}
$$

直接利用（2.4.2）式于汉诺塔的递归方程。此时，

$$
b = 2 \qquad c = 1 \qquad g(n) = 1
$$

从 n 递推到 1，有：

$$
\begin{aligned}
h(n) &= c\,b^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} b^{n-1-i} g(i) \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}
$$

2.4.2　用递推法求解变系数递归方程

一、变系数齐次递归方程：

$$
\begin{cases} f(n) = g(n) f(n-1) \\ f(0) = c \end{cases} \qquad (2.4.3)
$$

利用递推方法，容易得到：

$$
f(n) = c\,g(n)\,g(n-1) \cdots g(1) \qquad (2.4.4)
$$

例 2.8 解如下递归函数：

$$
\begin{cases} f(n) = n\,f(n-1) \\ f(0) = 1 \end{cases}
$$

由（2.4.4）式，容易得到：

$$
\begin{aligned}
f(n) &= n(n-1)(n-2) \cdots 1 \\
&= n!
\end{aligned}
$$

二、变系数非齐次递归方程：

$$
\begin{cases} f(n) = g(n) f(n-1) + h(n) \\ f(0) = c \end{cases} \qquad (2.4.5)
$$

其中，c 是常数，$g(n)$ 和 $h(n)$ 是 n 的函数。利用（2.4.5）式对 $f(n)$ 进行递推，有：

$$
f(n) = g(n) f(n-1) + h(n)
$$

$$=g(n)(g(n-1)f(n-2)+h(n-1))+h(n)$$
$$=g(n)g(n-1)f(n-2)+g(n)h(n-1)+h(n)$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=g(n)g(n-1)\cdots g(1)f(0)+g(n)g(n-1)\cdots g(2)h(1)+\cdots$$
$$+g(n)h(n-1)+h(n)$$
$$=g(n)g(n-1)\cdots g(1)f(0)+\frac{g(n)g(n-1)\cdots g(2)g(1)h(1)}{g(1)}+\cdots$$
$$+\frac{g(n)g(n-1)\cdots g(2)g(1)h(n-1)}{g(n-1)\cdots g(2)g(1)}+\frac{g(n)g(n-1)\cdots g(2)g(1)h(n)}{g(n)g(n-1)\cdots g(2)g(1)}$$
$$=g(n)g(n-1)\cdots g(1)\left(f(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{h(i)}{g(i)g(i-1)\cdots g(1)}\right) \qquad (2.4.6)$$

例 2.9 解如下的递归函数：

$$\begin{cases} f(n)=n\,f(n-1)+n! \\ f(0)=0 \end{cases}$$

对方程进行递推，有：

$$\begin{aligned} f(n)&=n((n-1)\,f(n-2)+(n-1)!)+n! \\ &=n(n-1)\,f(n-2)+2n! \\ &=\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &=n!\,f(0)+n\,n! \\ &=n\,n! \end{aligned}$$

如果直接使用公式（2.4.6），此时，$g(n)=n\,,h(n)=n!$，有：

$$f(n)=n(n-1)\cdots 1\sum_{i=1}^{n}\frac{i!}{i(i-1)\cdots 1} \qquad f(0)=0$$
$$=n\,n!$$

得到同样结果。

例 2.10 解如下的递归方程

$$\begin{cases} f(n)=2\,f(n-1)+n \\ f(0)=0 \end{cases}$$

解 对方程进行递推，有：

$$\begin{aligned} f(n)&=2(2\,f(n-2)+(n-1))+n \\ &=2^2\,f(n-2)+2(n-1)+n \\ &=\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$=2^n f(0)+2^{n-1}+2^{n-2}2+2^0 n$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} 2^i (n-i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^{n-i}$$

$$=2^n \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$$

由公式（2.1.24），得

$$f(n)=2^n\left(2-\frac{n+2}{2^n}\right)=2^{n+1}-n-2$$

如果直接使用公式（2.4.6），此时，$g(n)=2, h(n)=n$，同样有：

$$f(n)=2^n \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}=2^{n+1}-n-2$$

2.4.3 换名

例 2.11 解如下的递归方程：

$$\begin{cases} f(n)=2f(n/2)+n/2-1 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

其中，$n=2^k$。

解 把 n 表示成 k 的关系，原递归方程改写为：

$$\begin{cases} f(2^k)=2f(2^{k-1})+2^{k-1}-1 \\ f(2^0)=1 \end{cases}$$

再令：

$$g(k)=f(2^k)=f(n)$$

于是，原递归方程可写为：

$$\begin{cases} g(k)=2g(k-1)+2^{k-1}-1 \\ g(0)=1 \end{cases}$$

对上面方程进行递推，有：

$$g(k)=2(2g(k-2)+2^{k-2}-1)+2^{k-2}-1$$

$$=2^2 g(k-2)+2\cdot 2^{k-1}-2-1$$
$$=2^3 g(k-3)+3\cdot 2^{k-1}-2^2-2-1$$
$$=\cdots\cdots\cdots$$
$$=2^k g(0)+k\cdot 2^{k-1}-\sum_{i=0}^{k-1}2^i$$
$$=2^k(1+\frac{k}{2}-\sum_{i=0}^{k-1}2^{i-k})$$
$$=2^k(1+\frac{k}{2}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i})$$
$$=2^k(1+\frac{k}{2}-(1-\frac{1}{2^k}))$$
$$=2^k(\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k})$$
$$=\frac{1}{2}2^k k+1$$
$$=\frac{1}{2}n\log n+1$$

如果直接使用（2.4.6）式，可得：

$$f(n)=g(k)=2^k(1+\sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}-1}{2^i})$$
$$=2^k(1+\sum_{i=1}^{k}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^i}))$$
$$=2^k(\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k})$$
$$=\frac{1}{2}n\log n+1$$

结果一样。

例 2.12 解如下的递归方程：

$$\begin{cases} f(n)=2f(n/2)+bn \\ f(1)=c \end{cases}$$

其中，b、c 为常数，$n=2^k$。

解 把 n 表示成 k 的关系，原递归方程改写为：

$$\begin{cases} f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + b2^k \\ f(2^0) = 1 \end{cases}$$

再令：

$$g(k) = f(2^k) = f(n)$$

于是，原递归方程可写为：

$$\begin{cases} g(k) = 2g(k-1) + b2^k \\ g(0) = c \end{cases}$$

直接使用（2.4.6）式，可得：

$$f(n) = g(k) = 2^k(c + \sum_{i=1}^{k} \frac{b2^i}{2^i})$$

$$= 2^k(c + \sum_{i=1}^{k} b)$$

$$= 2^k(c + bk)$$

$$= bn\log n + cn$$