Análisis de Sistemas Lineales en Variables de Estados de tiempo Continuo
(SCII-1)

Prof. José Ferrer Prof. José Manuel Andrade
Prof. Pedro Teppa
Prof. Leonardo Contreras
Centro de Teoría Matemática de Sistemas
Departamento de Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar

Enero-Marzo 2005

Abstract

En estas notas se procede en primer lugar a resolver las ecuaciones de estados de un sistema. El objetivo final del modelaje de todo sistema físico es aportar herramientas para determinar la respuesta de un sistema en términos de su trayectoria de estados $x(t)$ y la salida $y(t)$. Ya que $y(t)$ está relacionada algebraicamente a $x(t)$ y $u(t)$, el mayor esfuerzo se concentrará en la solcución de la ecuación diferencial para $x(t)$.

0.1 Ecuaciones Diferenciales

En esta sección se revisan ciertos conceptos y resultados fundamentales de la teoría de ecuaciones fundamentales que servirán de base para la solución de las ecuaciones de estados asociada a una planta multivariable, de tiempo continuo, invariante en el tiempo, P,

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_x^n$$

Esto es de vital importancia en el proceso de evaluación del performance de la planta bajo estudio.

Definición 1 *Sea $f : D \subset R^n \times R \longrightarrow R^n$ una función $f(x,t)$ con dominio D. Una función vectorial $x(t)$ (de dimensión n) con t en un intervalo$I \subset R$, la cual satisface*

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), t) \tag{1}$$

se dice ser ***una solución de la ecuación diferencia****l (E.D.).*

Si $x_0 \in R^n$,$t_0 \in I$,y la solución $x(t)$ cumple con

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

se dice que $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (1) que cumple con o satisface la condición inicial (2), y se representa por

$$x(t) = \varphi(t, t_0; x_0)$$

Ejemplo 2 *Considere las siguientes ecuaciones diferenciales*

1. *Considere la ecuación diferencial*

$$\dot{x}(t) = x - t$$

Aquí $f(x,t) = x - t$, el dominio de f es $D = R^2$, $x(t) = 1 + t + Ce^t$ es una solución con $I = R$.

2. *Tome ahora a la E.D.*

$$\dot{x}(t) = 2xt$$

donde $f(x,t) = 2xt$, ,el dominio de f es $D = R^2$, una solución es $x(t) = Ce^{t^2}$ con $I = R$.

3. *Considere la E.D.*

$$\dot{x}(t) = -\frac{x}{t}$$

Evidentemente, $f(x,t) = -\frac{x}{t}$, cuyo dominio es $D = \{(x,t) : t \neq 0\}$ y se tienen como soluciones a $x^{(1)}(t) = C/t$ con $I = (-\infty, 0)$ y a $x^{(2)}(t) = C'/t$ con $I = (0, \infty)$.

4. *Considere la ecuación*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde $f(x,t) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, t\right) =$ y $D = R^2 \times R$. Una solución es

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) &= C_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

o sea, $x(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$ donde $I = R$

Si t_0 es dado, y se sabe que $x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} \in R^2$, entonces una solución de la E.D. considerada que pasa por $x(t_0)$ es

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t, t_0, x(t_0)) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1(t_0) e^{\lambda_1(t-t_0)} \\ x_2(t_0) e^{\lambda_2(t-t_0)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La existencia y unicidad de la solución de una E.D., se determina de las propiedades del campo vectorial $f(x,t)$. A continuación se presentan las respectivas condiciones y donde lo importante son los resultados, y no tanto los detalles técnicos de la demostración (ver ([2])).

Proposición 3 *Si $f(x,t)$ es continua en un dominio abierto $D' \subseteq D$, entonces dado cualquier par $\in D' \subset R^2 \times R$, **existe** una solución $x(t)$, $t \in I$, de $\dot{x} = f(x,t)$ tal que*

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$$

o sea,

$$x(t_0) = \varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$$

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt} x(t) = 2\sqrt{|x|}$$

donde $f(x,t) = 2\sqrt{|x|}$, y $D = R^2$. Cualquier par $(x_0, t_0) \in R^2$ con $x_0 \geq 0$ está dado por $(x(t_0), t_0)$ donde $x(t)$ es la solución

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, C) \\ (t-C)^2, & t \in (C, \infty) \end{cases} \tag{3}$$

y $C = t_0 - \sqrt{x_0}$.

Es importante que la proposición anterior no excluye la posibilidad que existan mas de una solución de la E.D. y que satisfaga la condición inicial. Por ejemplo, para la ecuación considerada existen infinitas soluciones que cumplen con $x(t_0) = 0$; específicamente cada solución de la forma (3) para la cual $C > t_0$ y la solución $x(t) = x(t) = \varphi(t, t_0, 0) = 0$.

El siguiente resultado establece condiciones suficientes para que cada par $(x_0, t_0) \in D'$ ocurra en una y solo una solución de (1).

Proposición 4 *Si f y $\frac{\partial}{\partial x} f$ son continuas en un dominio abierto $D' \subseteq D$, entonces dado cualquier par $\in D' \subset R^2 \times R$, existe una **única** solución $x(t)$, $t \in I$, de $\dot{x} = f(x,t)$ tal que*

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$$

o sea,

$$x(t_0) = \varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$$

Noten que, mientras $f(x,t) = 2\sqrt{|x|}$ es continua en D (R^2), mientras

$$= \begin{cases} |x|^{-1/2}, & x > 0 \\ -|x|^{-1/2}, & x < 0 \end{cases}$$

es continua solo en $D' = \{(x.t) : x \neq 0\}$, y no está definida para $x = 0$. De hecho, se observó que para el par $(0, t_0), t_0 \in R$ ocurren muchas soluciones de $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$.

Ejemplo 5 *Considere la ecuación diferencial*

$$\dot{x}(t) = x - t$$

con $f(x,t) = x - t$, *el dominio de* f *es* $D = R^2$, $x(t) = 1 + t + Ce^t$ *es una solución con* $I = R$.

Ya que $f(x,t)$ *y* $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = 1$ *son continuas en todo el dominio* D, *para cualquier par* (x_0, t_0) *ocurre una y solo una solución de* $\dot{x}(t) = x - t$, *específicamente*

$$x(t) = 1 + t + (x_0 - t_0 - 1)e^t$$

Existen condiciones suficientes más débiles que las arriba exigidas para la existencia y unidad de las soluciones. Sin embargo, en estas notas se emplearán las exigidas por las proposiciones dadas.

Exercicio 6 *Use los resultados presentados en esta sección para demostrar la existencia o unicidad de las soluciones de las siguiente ecuaciones diferenciales:*

1. $\dot{x}(t) = x + e^t$
2. $\dot{x} = -x\cot(t) + 5e^{\cos(t)}, t \neq n\pi, n$ *es un entero.*

0.2 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Considere la ecuación diferencial de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= a(t)x(t) + b(t)u(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{4}$$

en el cual todas la variables involucradas son escalares, antes de estudiar el caso más general donde el vector de estado $x(t) \in R^n$.Cuando la señal de entrada $u(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, \infty)$, la ecuación diferencial para x se dice ser homogénea. En cuyo caso

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= a(t)x(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5}$$

donde $a(.) : [t_0, \infty) \to R$ es una función continua. En este caso, se tiene que $f(x,t) = a(t)x(t)$ y se obtiene de inmediato:

- el campo vectorial $f(x,t) = a(t)\,x : R \times [t_0, \infty) \to R$ es continua en todo el dominio. Por lo tanto, según (3), existe una solución de (5) tal que $x(t_0) = x_0$.
- tanto f como $\frac{\partial f}{\partial x} = a(t)$ son continuas en todo el dominio $R \times [t_0, \infty)$; en consecuencia, existe una y solo una solución $x(t) = \phi(t, t_0; x_0)$ de (5) que cumple con $x(t_0) = \phi(t_0, t_0; x_0) = x_0$ debido a (4).

Se sabe entonces que existe tal solución y que es única. ¿Cómo se calcula dicha solución única?. Una manera es usando la técnica de variación de parámetro o de factor integrante.

La ecuación (5) puede expresarse como

$$\frac{dx(t)}{x} = a(t)\,dt$$

y ya que las variables están separadas y como cada lado representa un diferencial exacta, estos pueden ser integrados

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \ln(x)|_{x(t_0)}^{x(t)} = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau$$

o sea

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau$$

Usando en $\ln x(t) - \ln x(t_0) = \ln\left[\frac{x(t)}{x(t_o)}\right]$, y el hecho que $e^{\ln x} = x$ para encontrar

$$x(t) = x(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau}$$

En el caso particular donde $a(t) = a$ es una constante, esto se reduce a

$$x(t) = x(t_0)\, e^{a(t-t_0)}$$

y como es de esperarse, las condición inicial $x(t_0)$ debe especificarse antes para que una solución única $x(t)$ pueda ser determinada.

Cuando se considera la ecuación no homogénea, una solución puede aún conseguirse mediante un rearreglo de la ecuación original. Solo basta con recordar que

$$\frac{d}{dt}\{f(t)\,x(t)\} = x(t)\,\frac{d}{dt}f(t) + f(t)\,\frac{d}{dt}x(t)$$

Por lo tanto, si la ecuación (4) se multiplica por $f(t)$, se obtiene

$$f(t)\,\frac{dx(t)}{dt} - f(t)\,a(t)\,x(t) = f(t)\,b(t)\,u(t)$$

Por lo tanto, si se toma

$$f(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau}$$

se tiene que

$$\frac{df(t)}{dt} = -e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} a(t) = -f(t)\, a(t)$$

o sea,

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} x(t)\right\} = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} b(t)\, u(t)$$

Integrando

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t=t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(\mu)d\mu} b(\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} x(t_0) + e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \int_{t=t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(\mu)d\mu} b(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \\ &= e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} x(t_0) + \int_{t=t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t} a(\tau)d\tau} b(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \\ &= \phi\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right) \end{aligned}$$

Si se tiene $a(t) = a$, entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t=t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} b(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \\ &= \phi\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right) \end{aligned}$$

Finalmente, cuando $b(t) = b$, entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t=t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} b u(\tau)\, d\tau \\ &= e^{at} x_0 + \int_{0}^{t} e^{a(t-\tau)} b u(\tau)\, d\tau \\ &= \phi\left(t, 0, x_0; u_{[0,t)}\right) \end{aligned}$$

Exercicio 7 *Encuentre la solución de cada una de las ecuaciones diferenciales del ejercicio (6).*

1 Solución a las Ecuaciones de Estados

Suponga que se tiene una planta P con entrada $u \in U = (L_2[0,\infty))^{n_u}$, con salida $y \in Y = (L_2[0,\infty))^{n_y}$, lineal, invariante en el tiempo, de tiempo continuo y n-dimensional cuyas ecuaciones dinámicas están dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in R^n \end{aligned} \tag{6}$$

donde $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times n_u}, C \in R^{n_y \times n}$, y $D \in R^{n_y \times n_u}$.

Esta sección tiene como objetivo principal resolver los siguientes problemas de Análisis de Sistemas:

- Cálculo de la **trayectoria de estados** de P : Dada una señal de entrada $u(.)$ en un segmento de tiempo $[t_0, t)$, representado por $u_{[t_0,t)}$ y si el sistema en $t = t_0$ se encontraba la planta en un estado dado $x(t_0) = x_0$, encuentre, si existe, el valor del vector de estado $x(.)$ en cada instante de tiempo $t \geq t_0$. Esto es, determine

$$x(t) = \varphi\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right) \in R^n$$

  para cada $t \geq t_{0.}$

- Cálculo de la **trayectoria de salida** de P :Dada una señal de entrada $u(.)$ en un segmento de tiempo $[t_0, t)$, representado por $u_{[t_0,t)}$ y si el sistema en $t = t_0$ se encontraba la planta en un estado dado $x(t_0) = x_0$, encuentre, si existe, el valor del vector de salida $y(.)$ en cada instante de tiempo $t \geq t_0$. Esto es, determine

$$y(t) = \eta\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right) \in R^{n_y}$$

  para cada $t \geq t_0$.

Considere entonces el caso correspondiente al sistema autónomo, esto es, el caso cuando $u(t) = 0$. Por lo tanto, se tiene la ecuación diferencial homogénea

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in R^n \end{aligned} \qquad (7)$$

donde $A \in R^{n \times n}$.

Lo primero que debe inquerirse es sí la solución existe, y la unicidad de ella. Ahora bien, esto es directo como se desprende de las proposiciones (3) y (4), se tiene que existe una y solo una solución a la ecuación homogénea que cumple con la condición inicial dada.

Existen varías maneras de calcular la solución dada, en esta sección se aplicará una que ilustra un método interesante para analizar una serie de propiedades de los sistemas lineales.

Teorema 8 *El conjunto de todas las soluciones de la ecuación* $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$ *constituye un espacio lineal de dimensión* n *sobre el cuerpo de los números reales* R.

Proof. *Sean* $\psi_1(t)$ *y* $\psi_2(t)$ *dos soluciones de dimensión* n, *o sea,* $\frac{d}{dt}\psi_1(t) = A\psi_1(t)$ *y* $\frac{d}{dt}\psi_2(t) = A\psi_2(t)$, *entonces es fácil demostrar que* $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ *es solución como también lo es* $\psi(t) = k\psi_1(t)$, *con* $k \in R$; *en consecuencia el conjunto de todas la soluciones de* $\dot{x}(t) = Ax(t)$ *es un espacio vectorial*

sobre R. Solo resta demostrar que el mencionado espacio lineal es de dimensión n. Para eso, suponga que es la solución de la ecuación $\dot{x}(t) = Ax(t)$ *con* $x(t_0) = e_i$*, donde* $e_i = \left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{posición-i} \right)^{Tr}$ *para* $i = 1, 2, \cdots, n.$
Entonces, el conjunto de soluciones , ya que si

$$\alpha_1 \psi_1(t) + \alpha_2 \psi_2(t) + \cdots + \alpha_n \psi_n(t) = 0$$

para todo $t \in [t_0, \infty)$*, y en particular debe cumplirse para* $t = t_0$*, o sea,*

$$\begin{aligned} \alpha_1 \psi_1(t_0) + \alpha_2 \psi_2(t_0) + \cdots + \alpha_n \psi_n(t_0) &= 0 \\ \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n &= 0 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}}_{I_n} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0$$

y por lo tanto, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = e_n = 0$*, Demostrándose de esta manera que las soluciones* $\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, , \psi_n(t)$ *es linealmente independientes sobre R. Suponga ahora que se tiene una solución* $\psi(t)$ *de* $\dot{x}(t) = Ax(t)$ *tal que* $\psi(t_0) = x_0 = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}^{Tr}$*, la cual existe y es única. Por otro lado, como*

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \psi_i(t)$$

es una solución de $\dot{x}(t) = Ax(t)$*, y cumple con*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \psi_i(t_0) &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \\ &= \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}^{Tr} \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Por la unicidad, se concluye que

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \psi_i(t)$$

o sea, toda solución de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ *puede expresarse como combinación lineal de el conjunto de soluciones "básicas"* $\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, , \psi_n(t)$*. Demostrándose así el teorema.* ■

Ejemplo 9 *Considere una planta descrita por la ecuación de estados*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

Se puede demostrar que $\psi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $\psi_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}$ *son soluciones básicas, y por lo tanto, para calcular la solución* $x(t)$ *que pasa por el vector de estado inicial*

$$x_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

en $t = t_0$, *solo basta observar que*

$$x_0 = -3e_1 + 5e_2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t, t_0, x_0) = -3 \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3e^{-(t-t_0)} \\ 5e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}, t \geq t_0. \end{aligned}$$

Definición 10 *Una matriz fundamental de*

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$$

es una matriz $\Psi(t)$ *de dimensión* $(n \times n)$ *cuyas* n *columnas son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea dada.*

De inmediato se observa que las n soluciones básicas $\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, , \psi_n(t)$ constituyen una matriz fundamental.

Ejemplo 11 *La matriz* (2×2)

$$\Psi^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental de

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

También lo es

$$\Psi^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} \\ 2e^{2(t-t_0)} & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

También debe ser evidente de la definición de matriz fundamental $\Psi(t)$ de $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$ es invertible para todo $t \in [t_0, \infty)$, o sea,

$$\det \Psi(t) \neq 0$$

para todo $t \in [t_0, \infty)$.

Una vez calculada una matriz fundamental $\Psi(t)$ de (7), es posible calcular la solución única $x(t) = \phi(t, t_0; x_0)$ donde x_0 es un estado inicial, arbitrario pero fijo, mediante

$$x(t) = \Psi(t) M x_0$$

para alguna matriz no singular M que dependerá del estado inicial x_0.

Para calcular M solo evalúe en $t = t_0$; esto es,

$$x(t_0) = \Psi(t_0) M x_0$$

y como x_0 es arbitrario, entonces M debe ser igual a $\Psi^{-1}(t_0)$. Por lo tanto,

$$x(t) = \phi(t, t_0; x_0) = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0) x_0$$

Denote por

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0)$$

a la llamada **matriz transición de estados** de (7) y puede demostrarse que es única e independiente de la matriz fundamental $\Psi(t)$. Esto es si $\Psi^{(1)}(t)$ y $\Psi^{(2)}(t)$ son matrices fundamentales, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= \Psi^{(1)}(t) \left[\Psi^{(1)}(t_0)\right]^{-1} \\ &= \Psi^{(2)}(t) \left[\Psi^{(2)}(t_0)\right]^{-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 12 *Halle la matriz transición de estados de la ecuación de estados*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

De ejemplos anteriores se tiene

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix} \\ \Psi^{(2)}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} \\ 2e^{2(t-t_0)} & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= \Psi^{(1)}(t) \left[\Psi^{(1)}(t_0)\right]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
\Phi(t,t_0) &= \Psi^{(2)}(t)\left[\Psi^{(2)}(t_0)\right]^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} \\ 2e^{2(t-t_0)} & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} \\ 2e^{2(t-t_0)} & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$x(t) = \Phi(t,t_0)\,x_0$$

y si $x_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, *entonces*

$$\begin{aligned}
x(t) &= \phi\left(t,t_0;\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3e^{-(t-t_0)} \\ 5e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

como se había calculado previamente.

Exercicio 13 *Usando los siguientes hechos relacionados con la ecuación de estado homogénea* $\dot{x}(t) = Ax(t)$

- *El conjunto de soluciones es un espacio lineal de dimensión* n.
- *Las columnas de una matriz fundamental* $\Psi(t)$ *son un conjunto de* n *soluciones linealmente independientes,*

Demuestre que

1. *Dadas dos matrices fundamentales* $\Psi_1(t), \Psi_2(t)$ *asociadas a la ecuación de estados homogénea bajo estudio, entonces existe una matriz* $Q \in GL_n(R)$ *tal que*
$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t)\,P$$
2. *Demuestre que la matriz transición de estados del sistema* $\Phi(t,t_0) = \Psi_1(t)\,\Psi_1^{-1}(t_0)$ *no depende de* $\Psi_1(t)$.

De la definición de la matriz de transición de estados es evidente que cumple con las siguientes propiedades:

1. $\Phi(t,t) = \Psi(t)\,\Psi^{-1}(t) = I_n$.

2. $\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$.

   Ya que

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(t,t_0) &= \left\{\Psi(t)\,\Psi^{-1}(t_0)\right\}^{-1}\\ &= \left[\Psi^{-1}(t_0)\right]^{-1}\Psi^{-1}(t)=\Psi(t_0)\,\Psi^{-1}(t)\\ &= \Phi(t_0,t)\end{aligned}$$

3. (propiedad de semigrupo) $\Phi(t_2,t_0)=\Phi(t_2,t_1)\,\Phi(t_1,t_0)$

   Ya que por definición

$$\begin{aligned}\Phi(t_2,t_0) &= \Psi(t_2)\,\Psi^{-1}(t_0)\\ &= \Psi(t_2)\,\Psi^{-1}(t_1)\,\Psi(t_1)\,\Psi^{-1}(t_0)\\ &= \left[\Psi(t_2)\,\Psi^{-1}(t_1)\right]\left[\Psi(t_1)\,\Psi^{-1}(t_0)\right]\\ &= \Phi(t_2,t_1)\,\Phi(t_1,t_0)\end{aligned}$$

4. $\det\,\Phi(t,t_0)\neq 0$ para todo $t,t_0\in(-\infty,\infty)$. O sea, $\Phi(t,t_0)$ es invertible para todo $t,t_0\in(-\infty,\infty)$.

5. La matriz transición de estados $\Phi(t,t_0)$ es la solución única de la ecuación diferencial matricial

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X(t) &= AX(t)\\ X(t_0) &= I_n\end{aligned}$$

   Esto se debe a la definición de $\Phi(t,t_0)$, ya que si $\Phi(t,t_0)=\Psi(t)\,\Psi^{-1}(t_0)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0) &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\Psi(t)\,\Psi^{-1}(t_0)\right\}\\ &= \left\{\frac{d}{dt}\Psi(t)\right\}\Psi^{-1}(t_0)\end{aligned}$$

   Suponga ahora que

$$\Psi(t)=\left[\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t)\right]$$

   entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(t) &= \frac{d}{dt}\left[\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t)\right]\\ &= \left[\frac{d}{dt}\psi_1(t),\frac{d}{dt}\psi_2(t),\cdots,\frac{d}{dt}\psi_n(t)\right]\\ &= \left[A\psi_1(t),A\psi_2(t),\cdots,A\psi_n(t)\right]\\ &= A\left[\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t)\right]\\ &= A\Psi(t)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0) = A\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) = A\Phi(t,t_0)$$

o sea, $\Phi(t,t_0)$ es una solución de $\frac{d}{dt}X(t) = AX(t)$, pero además cumple con $\Phi(t_0,t_0) = I_n$. Más aún, como $f(X,t) = AX$ y $\frac{\partial}{\partial X}f(X,t) = A$ son continuas, la solución $\Phi(t,t_0)$ es única como se quería demostrar.

Ejemplo 14 *Considere una planta P descrita por las ecuaciones de estados*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La matriz transición de estados asociada a dicho sistema es

$$\Phi(t,t_0) = \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix}$$

ya que cumple con la propiedad (5), o sea,

$$\Phi(t_0,t_0) = \begin{bmatrix} \cos(t_0-t_0) & \sin(t_0-t_0) \\ -\sin(t_0-t_0) & \cos(t_0-t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\cos(t-t_0) & \frac{\partial}{\partial t}\sin(t-t_0) \\ -\frac{\partial}{\partial t}\sin(t-t_0) & \frac{\partial}{\partial t}\cos(t-t_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \\ -\cos(t-t_0) & -\sin(t-t_0) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}A\Phi(t,t_0) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \\ -\cos(t-t_0) & -\sin(t-t_0) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0) = A\Phi(t,t_0)$$

También se nota que cumple con la llamada propiedad de semigrupo ya que

$$\begin{aligned}\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0) &= \begin{bmatrix} \cos(t_2-t_1) & \sin(t_2-t_1) \\ -\sin(t_2-t_1) & \cos(t_2-t_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(t_1-t_0) & \sin(t_1-t_0) \\ -\sin(t_1-t_0) & \cos(t_1-t_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{array}{c} \cos(-t_0+t_1)\cos(-t_1+t_2) \\ -\sin(-t_0+t_1)\sin(-t_1+t_2) \end{array} & \begin{array}{c} \cos(-t_0+t_1)\sin(-t_1+t_2) \\ +\cos(-t_1+t_2)\sin(-t_0+t_1) \end{array} \\ \begin{array}{c} -\cos(-t_0+t_1)\sin(-t_1+t_2) \\ -\cos(-t_1+t_2)\sin(-t_0+t_1) \end{array} & \begin{array}{c} \cos(-t_0+t_1)\cos(-t_1+t_2) \\ -\sin(-t_0+t_1)\sin(-t_1+t_2) \end{array} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

y utilizando las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(-a) &= \cos a \\ \sin(-a) &= -\sin(a) \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} \Phi(t_2,t_1)\,\Phi(t_1,t_0) &= \begin{bmatrix} \cos(-t_0+t_2) & \sin(-t_0+t_2) \\ -\sin(-t_0+t_2) & \cos(-t_0+t_2) \end{bmatrix} \\ &= \Phi(t_2,t_0) \end{aligned}$$

Una vez conocida la matriz transición de estados, se puede determinar el estado para cualquier tiempo $t \geq t_0$ cuando la entrada u es cero y el estado inicial en $t = t_0$ es $x_0 = \begin{pmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t,t_0;x_0) = \Phi(t,t_0)\,x_0 \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0^{(1)}\cos(t-t_0) + x_0^{(2)}\sin(t-t_0) \\ x_2(t) &= -x_0^{(1)}\sin(t-t_0) + x_0^{(2)}\cos(t-t_0) \end{aligned}$$

Ahora ya se tiene toda la maquinaria necesaria para calcular la trayectoria de estados $x(t) = \phi\left(t,t_0;x_0,u_{[t_0,t)}\right)$ para una planta P descrita por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

para una entrada $u(.)$ dada.

El siguiente resultado es bien conocido

Teorema 15 *Sea D un rectángulo en R^2 dado por*

$$D = \{(\tau,t) : a \leq \tau \leq b, c \leq t \leq d\}$$

Sea $f : D \subset R^2 \to R$ y $\frac{\partial}{\partial t}f$ son ambas continuas en D, y que $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$ sean funciones diferenciables. Entonces la función $\zeta(.)$ definida en $[c,d]$ por

$$\zeta(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(\tau,t)\,d\tau$$

Entonces, $\zeta(t)$ es derivable en cada $t \in [c,d]$ y su derivada está dada por

$$\dot{\zeta}(t) = f(\beta(t),t)\,\dot{\beta}(t) - f(\alpha(t),t)\,\dot{\alpha}(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(\tau,t)\,dx$$

A continuación se presenta el principal resultado de esta sección.

Teorema 16 *Dada una planta P descrita por la ecuación de estados*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in R^n\end{aligned}$$

la cual se encuentra inicialmente en $t = t_0$ en el estado x_0. Su trayectoria de estados $x(t), t \geq t_0$ resultante al aplicar una entrada $u(.)$ está dada por

$$x(t) = \phi\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right) = \Phi(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, Bu(\tau)\, d\tau \tag{8}$$

Proof. *Para demostrar este teorema es necesario corroborar que $x(t) = \phi\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right)$ dada por (8) es una solución de las ecuaciones de estados y que satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$.*

Derivando $x(t)$ se obtiene

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\Phi(t, t_0)\, x_0\right] + \frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, Bu(\tau)\, d\tau$$

Sin embargo, empleando la propiedad (5) de la matriz transición de estados se obtiene que la derivada del primer sumando

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\Phi(t, t_0)\, x_0\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0)\right] x_0 \\ &= A\Phi(t, t_0)\, x_0\end{aligned}$$

Por otro lado, recordando la ley de Leibnitz (15)se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, Bu(\tau)\, d\tau &= \Phi(t, t)\, Bu(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}\left[\Phi(t, \tau)\, Bu(\tau)\right] d\tau \\ &= Bu(t) + \int_{t_0}^{t} \left\{\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \tau)\right\} Bu(\tau)\, d\tau \\ &= Bu(t) + \int_{t_0}^{t} A\Phi(t, \tau)\, Bu(\tau)\, d\tau \\ &= A\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, Bu(\tau)\, d\tau + Bu(t)\end{aligned}$$

En resumen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\Phi(t, t_0)\, x_0 + A\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, Bu(\tau)\, d\tau + Bu(t) \\ &= A\left\{\Phi(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, Bu(\tau)\, d\tau\right\} + Bu(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t)\end{aligned}$$

Demostrándose así que $x(t)$ es una solución de la ecuación de estados. Finalmente, se verifica si cumple con la condición inicial.

$$\begin{aligned} x(t)|_{t=t_0} &= \left\{ \Phi(t,t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau \right\}_{t=t_0} \\ &= \Phi(t_0,t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(t_0,\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau \\ &= \Phi(t_0,t_0)\, x_0 = I_n x_0 = x_0 \end{aligned}$$

Con esto se comprueba que $x(t)$ es la solución única de las ecuaciones de estados cuando la planta se encuentra inicialmente en el estado x_0 y se aplica el segmento de entrada $u_{[t_0,t)}$. ■

Es importante observar que la trayectoria de estado de la planta P

$$x(t) = \phi\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right) = \Phi(t,t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau$$

puede expresarse como

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right) \\ &= \phi(t, t_0; x_0, 0) + \phi\left(t, t_0; 0, u_{[t_0,t)}\right) \\ &= x_h(t) + x_f(t) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} x_h(t) &= \phi(t, t_0; x_0, 0) \\ x_f(t) &= \phi\left(t, t_0; 0, u_{[t_0,t)}\right) \end{aligned}$$

se conocen como la c**omponente natural de la trayectoria de estado**s y **componente forzada de la trayectoria de estados** respectivamente.

Finalmente se calcula la trayectoria de salida o de respuesta $y(t) = \eta\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right)$ del sistema P descrito por

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{n,x}$$

Del teorema (16) y de la ecuación de salida

$$y(t) = Cx(t) + D(u(t))$$

se obtiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \eta\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right) \\ &= C\phi\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right) + Du(t) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} y(t) &= \eta\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right) = C\left\{\Phi(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, Bu(\tau)\, d\tau\right\} + Du(t) \\ &= C\Phi(t, t_0)\, x_0 + C\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, Bu(\tau)\, d\tau + Du(t) \end{aligned}$$

Es evidente que la salida es la suma de dos cantidades mutuamente exclusivas, específicamente

$$\begin{aligned} y(t) &= \eta\left(t, t_0; x_0, u_{[t_0,t)}\right) \\ &= y_n(t) + y_f(t) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \eta(t, t_0; x_0, 0) \\ &= C\Phi(t, t_0)\, x_0 \end{aligned}$$

es la **respuesta natural, transitoria o con entrada cero** de P; mientras

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \eta\left(t, t_0; 0, u_{[t_0,t)}\right) \\ &= C\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, Bu(\tau)\, d\tau + Du(t) \\ &= C\int_{t_0}^{t} \left[\Phi(t, \tau)\, B + D\delta(t-\tau)\right] u(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

es la **respuesta forzada o con estado cero** de P.

Si la planta o sistema P descrito por $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{n,x}$ está inicialmente relajado en $t = t_0$, o sea, $x(t) = 0$, para $t < t_0$, y se aplica un impulso $\delta(t - t_0)$ en la $k-$*ésima* entrada $u_k(t)$ del vector n_u-dimensional de entrada $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_{n_u}(t) \end{bmatrix}^{Tr}$ a la planta con todas las otras entradas conectadas a tierra, y por lo tanto, se obtiene una salida de dimensión n_y, dada por $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_{n_y}(t) \end{bmatrix}^{Tr}$ que es igual a la $k-$ésima columna de la **matriz respuesta al impulso** $H(t, t_0)$ del sistema P dada por

$$H(t, t_0) = \begin{cases} C\Phi(t, t_0)\, B + D\delta(t - t_0), & t \geq t_0 \\ 0, & t_0 < t. \end{cases}$$

Si bien es cierto que se ha resulto el problema del cálculo de las trayectorias de estados y de salida de un sistema dado P, también es cierto que el método dado no es del todo fácil de aplicar, excepto en casos especiales, debido a la necesidad de calcular la matriz transición de estados $\Phi(t, t_0)$ y la que a su vez está determinada por una matriz fundamental asociada a la ecuación $\dot{x}(t) = Ax(t)$.

El próximo método se fundamenta en el siguiente resultado el cual es demasiado técnica y se refiere para ello a la literatura.

Teorema 17 *Dada una matriz A cuadrada de dimensión $(n \times n)$, y la secuencia matricial definida recursivamente por*

$$\begin{aligned} M_0 &= I_n \\ M_k(t,t_0) &= I_n + \int_{t_0}^{t} AM_k(\tau,t_0)\,d\tau \end{aligned}$$

Entonces la secuencia de matrices $M_0, M_1, \cdots, M_k, \cdots$ converge uniformemente en todo el intervalo $[t_0, \infty)$. Más aún, el límite de dicha secuencia se denota por $e^{A(t-t_0)}$ que satisface la ecuación diferencial matricial

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}X(t) &= AX(t) \\ X(t_0) &= I_n \end{aligned}$$

El resultado es interesante por varias razones, pero la mas importante *es* la que permite relacionar $e^{A(t-t_0)}$ con la matriz de transición de estados y que también justifica la realización de una serie de operaciones las cuales son verdaderas debido a la convergencia uniforme de la secuencia matricial $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Noten que para $k = 1$,

$$\begin{aligned} M_1(t,t_0) &= I_n + \int_{t_0}^{t} AM_0(\tau,t_0)\,d\tau \\ &= I_n + \int_{t_0}^{t} AI_n d\tau = I_n + A\int_{t_0}^{t} d\tau \\ &= I_n + A(t-t_0) \end{aligned}$$

para $k = 2$

$$\begin{aligned} M_2(t,t_0) &= I_n + \int_{t_0}^{t} AM_1(\tau,t_0)\,d\tau \\ &= I_n + \int_{t_0}^{t} A\left[I_n + A(\tau - t_0)\right]d\tau \\ &= I_n + A(t-t_0) + A^2\frac{(t-t_0)^2}{2!} \end{aligned}$$

por lo tanto, para $k = m$, se tiene

$$M_m(t,t_0) = I_n + A(t-t_0) + A^2\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \cdots + A^m\frac{(t-t_0)^m}{m!}$$

De acuerdo al teorema (17), se tiene entonces que

$$\begin{aligned} e^{A(t-t_0)} &= \lim_{m\to\infty} M_m(t,t_0) \qquad (9) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} A^m\frac{(t-t_0)^m}{m!} \end{aligned}$$

Esto justifica, en primer lugar, la notación exponencial ya que en el caso escalar

$$e^{x}=\sum_{m=0}^{\infty}x^{m}\frac{t^{m}}{m!}$$

Por otro lado, se puede tomar la derivada de $e^{A(t-t_0)}$ con respecto al tiempo t, o sea,

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{A(t-t_0)}=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=0}^{\infty}A^{m}\frac{(t-t_0)^{m}}{m!}$$

y como la convergencia es uniforme se puede intercambiar la derivada con la sumatoria para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}e^{A(t-t_0)} &= \frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=0}^{\infty}A^{m}\frac{(t-t_0)^{m}}{m!}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}A^{m}\frac{(t-t_0)^{m}}{m!}\\ &= A\sum_{m=0}^{\infty}A^{m}\frac{(t-t_0)^{m}}{m!}=Ae^{A(t-t_0)}\end{aligned}$$

en consecuencia, $e^{A(t-t_0)}=\sum_{m=0}^{\infty}A^{m}\frac{(t-t_0)^{m}}{m!}$ satisface la ecuación homogénea $\dot{X}(t)=AX(t)$, mientras que

$$\begin{aligned}\left.e^{A(t-t_0)}\right|_{t=t_0} &= \left.\sum_{m=0}^{\infty}A^{m}\frac{(t-t_0)^{m}}{m!}\right|_{t=t_0}\\ &= I_n\end{aligned}$$

En consecuencia, $e^{A(t-t_0)}=\sum_{m=0}^{\infty}A^{m}\frac{(t-t_0)^{m}}{m!}$ es la solución única de

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t)\\ X(t_0) &= I_n\end{aligned}$$

Pero de acuerdo a la propiedad (5) de la matriz de transición de estados, se concluye que

$$\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}=\sum_{m=0}^{\infty}A^{m}\frac{(t-t_0)^{m}}{m!}$$

Ejemplo 18 *Considérese el sistema descrito por*

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

La matriz transición de estados $\Phi(t,t_0)$ asociada al sistema dado es

$$\begin{aligned}\Phi(t,t_0) &= e^{A(t-t_0)} = \sum_{m=0}^{\infty} A^m \frac{(t-t_0)^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^m \frac{(t-t_0)^m}{m!}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}e^{At} &= I_n + At + A^2\frac{t^2}{2!} + +A^m\frac{t^m}{m!} + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2!} & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2!} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{t^3}{3!} \\ -\frac{t^3}{3!} & 0 \end{bmatrix} + \cdots\end{aligned}$$

Efectuando la suma se obtiene

$$\begin{aligned}e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$e^{A(t-t_0)} = \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix}$$

que es la matriz de transición de estados obtenida en (14).

Exercicio 19 *Verifique la matriz transición de estados $\Phi(t,0)$ para el sistema lineal descrito por*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\delta \end{bmatrix} x(t)$$

está dada por

$$\Phi(t,0) = \begin{bmatrix} e^{-\delta t}\left[\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right] & \frac{1}{\omega}e^{-\delta t}\sin\omega t \\ -\frac{1}{\omega}e^{-\delta t}\sin\omega t & e^{-\delta t}\left[\cos\omega t - \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right] \end{bmatrix}$$

donde $\omega = \sqrt{1-\delta^2}$.

Exercicio 20 *Sea A una matriz cuadrada de dimensión 2 y un sistema cuya ecuación de estados homogénea es*

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Suponga que si $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}^{Tr}$ *entonces*

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

y si $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{Tr}$ *entonces*

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix}$$

Determine la matriz transición de estados de este sistema.

Otro método para calcular la matriz transición de estados, muy conveniente cuando se realiza a mano, es el que se expone a continuación y que se fundamenta en la transformada de Laplace.

Del resultado (9), se tiene que la matriz de transición de estados para un sistema donde la matriz A es constante, tiene la propiedad

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0, 0)$$

por lo que la matriz transición de estados depende solo de la diferencia $t - t_0$, lo cual quiere decir que la trayectoria de estados libre o transitoria cumple con

$$\phi(t, t_0, x_0, 0) = \phi(t - t_0, 0, x_0, 0)$$

Por lo tanto, si se conoce , puede determinarse $\Phi(t_1, t_2)$ para cualquier valor de t_1 y t_2, ya que

$$\Phi(t_1, t_2) = \Phi(t_1 - t_2, 0)$$

Por lo tanto, es importante examinar $\Phi(t, 0) = e^{At}$. Como esta función satisface

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$$

se puede tomar la transformada de Laplace de la ecuación, esto es,

$$L\left\{\frac{d}{dt} e^{At}\right\} = L\left\{Ae^{At}\right\}$$

Antes de proceder, es importante recordar que la transformada de Laplace de una matriz se define como otra matriz cuyos elementos son las transformadas de Laplace de cada uno de los elementos de la matriz original, o sea,

$$\begin{aligned} L\left[P\left(t\right)\right] &= L\begin{bmatrix} p_{11}\left(t\right) & p_{12}\left(t\right) & \cdots & p_{1n}\left(t\right) \\ p_{21}\left(t\right) & p_{22}\left(t\right) & \cdots & p_{2n}\left(t\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}\left(t\right) & p_{m2}\left(t\right) & \cdots & p_{mn}\left(t\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L\left[p_{11}\left(t\right)\right] & L\left[p_{12}\left(t\right)\right] & \cdots & L\left[p_{1n}\left(t\right)\right] \\ L\left[p_{21}\left(t\right)\right] & L\left[p_{22}\left(t\right)\right] & \cdots & L\left[p_{2n}\left(t\right)\right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L\left[p_{m1}\left(t\right)\right] & L\left[p_{m2}\left(t\right)\right] & \cdots & L\left[p_{mn}\left(t\right)\right] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y de acuerdo a las propiedades de la transformada de Laplace

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d}{dt}e^{At}\right\} &= sL\left[e^{At}\right] - \left.e^{At}\right|_{t=0} \\ &= sL\left[e^{At}\right] - I_n \end{aligned}$$

Además de la linealidad de la transformada de Laplace

$$L\left\{Ae^{At}\right\} = AL\left[e^{At}\right]$$

se obtiene la ecuación

$$sL\left[e^{At}\right] - I_n = AL\left[e^{At}\right]$$

Factorizando $L\left[e^{At}\right]$ se logra la igualdad

$$\left(sI_n - A\right)L\left[e^{At}\right] = I_n$$

y se concluye

$$L\left[e^{At}\right] = \left(sI_n - A\right)^{-1}$$

En consecuencia

$$e^{At} = L^{-1}\left[\left(sI_n - A\right)^{-1}\right]$$

para $t \geq 0$.

La matriz

$$\Phi\left(s\right) = \left(sI_n - A\right)^{-1}$$

se denomina **la matriz resolvente asociada al sistema** $P\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{n,x}$.

Observación Note que la matriz resolvente $\Phi\left(s\right) = \left(sI_n - A\right)^{-1}$ puede calcularse usando la relación

$$\left(sI_n - A\right)^{-1} = \frac{Adj\left(sI_n - A\right)}{\det\left(sI_n - A\right)}$$

y es evidente que

1. $\chi_A(s) = \det(sI_n - A) \in R[s]$ es el polinomio característico del sistema,
2. $Adj\,(sI_n - A) \in (R[s])^{(n-1)\times(n-1)}$ es un matriz con polinomios como entradas,

como resultado, $(sI_n - A)^{-1}$ es una matriz racional en s de dimensión $n \times n$, lo cual se denota mediante $\Phi \in R^{n\times n}(s)$.

Ejemplo 21 *Considérese nuevamente la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

la matriz

$$sI_2 - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

Así que

$$\det(sI_n - A) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 1$$

y

$$adj\,(sI_n - A) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} (sI_n - A)^{-1} &= \frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} &= \cos t \\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} &= \sin t \end{aligned}$$

se concluye que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

para $t \geq 0$.

Por lo tanto,

$$\Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)} = \begin{bmatrix} \cos(t - t_0) & \sin(t - t_0) \\ -\sin(t - t_0) & \cos(t - t_0) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 22 *Considere un sistema P descrito por*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Entonces

$$\begin{aligned} sI_2 - A &= s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s-2 & 4 \\ 1 & s-5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \det(sI_2 - A) &= \det\begin{bmatrix} s-2 & 4 \\ 1 & s-5 \end{bmatrix} \\ &= s^2 - 7s + 6 = (s-1)(s-6) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$adj\,(sI_2 - A) = adj\begin{bmatrix} s-2 & 4 \\ 1 & s-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-5 & -4 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}$$

y reuniendo estos resultados

$$\begin{aligned} (sI_2 - A)^{-1} &= \frac{adj\,(sI_2 - A)}{\det(sI_2 - A)} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s-6)}\begin{bmatrix} s-5 & -4 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s-5}{(s-1)(s-6)} & \frac{-4}{(s-1)(s-6)} \\ \frac{-1}{(s-1)(s-6)} & \frac{s-2}{(s-1)(s-6)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y la transformada inversa de Laplace de esta matriz es

$$\begin{aligned} e^{At} &= L^{-1}\left[(sI_2 - A)^{-1}\right] = L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s-5}{(s-1)(s-6)} & \frac{-4}{(s-1)(s-6)} \\ \frac{-1}{(s-1)(s-6)} & \frac{s-2}{(s-1)(s-6)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{5}e^t + \frac{1}{5}e^t & \frac{4}{5}e^t - \frac{4}{5}e^{6t} \\ \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{6t} & \frac{1}{5}e^t + \frac{4}{5}e^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para $t \geq 0$.

Y

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}e^{(t-t_0)} + \frac{1}{5}e^{(t-t_0)} & \frac{4}{5}e^{(t-t_0)} - \frac{4}{5}e^{6(t-t_0)} \\ \frac{1}{5}e^{(t-t_0)} - \frac{1}{5}e^{6(t-t_0)} & \frac{1}{5}e^{(t-t_0)} + \frac{4}{5}e^{(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

ya que el sistema es invariante en el tiempo.

Ahora bien, es evidente que tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones de estados del sistema P (ver 6) se tiene

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) &= L(Ax(t)+Bu(t)) \\ s\widehat{x}(s)-x(0) &= A\widehat{x}(s)+B\widehat{u}(s) \end{aligned}$$

y reagrupando términos

$$(sI_n-A)\widehat{x}(s)=s\widehat{x}(s)-A\widehat{x}(s)=x(0)+B\widehat{u}(s)$$

Por lo tanto

$$\widehat{x}(s)=(sI_n-A)^{-1}x(0)+(sI_n-A)^{-1}B\widehat{u}(s) \tag{10}$$

y se puede identificar que

$$\begin{aligned} x_n(t) &= L^{-1}\left[(sI_n-A)^{-1}x(0)\right] \\ x_f(t) &= L^{-1}\left[(sI_n-A)^{-1}B\widehat{u}(s)\right] \end{aligned}$$

En cálculo a mano, este método de calcular las trayectorias de estados resulta más sencillo.

En consecuencia también puede calcularse las distintas componentes de la trayectoria de salida

$$\begin{aligned} y_n(t) &= L^{-1}\left\{C(sI_n-A)^{-1}x(0)\right\} \\ y_f(t) &= L^{-1}\left\{\left[C(sI_n-A)^{-1}B+D\right]\widehat{u}(s)\right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y(s)=C(sI_n-A)^{-1}x(0)+\left[C(sI_n-A)^{-1}B+D\right]\widehat{u}(s)$$

y si el estado inicial es cero, entonces

$$\begin{aligned} y(s) &= \left[C(sI_n-A)^{-1}B+D\right]\widehat{u}(s) \\ &= G_p(s)\widehat{u}(s) \end{aligned}$$

donde

$$G_p(s)=C(sI_n-A)^{-1}B+D$$

representa l**a matriz función de transferencia** de la planta P.

Notación 23 *Dada una planta P representada en variables de estados por*

$$P\left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]_{n,x}.$$

entonces su matriz función de transferencia $G_p(s)$ se denota por

$$G_p(s)=\left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]=C(sI_n-A)^{-1}B+D$$

Ejemplo 24 *Considere la planta P descrita por*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

y la matriz resolvente para este sistema es

$$(sI_2 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s-5}{(s-1)(s-6)} & \frac{-4}{(s-1)(s-6)} \\ \frac{-1}{(s-1)(s-6)} & \frac{s-2}{(s-1)(s-6)} \end{bmatrix}$$

Suponga que el estado inicial es $x(0) =$, entonces la componente transitoria de la trayectoria del estado es

$$\begin{aligned} x_n(s) &= (sI_2 - A)^{-1} x(0) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s-5}{(s-1)(s-6)} & \frac{-4}{(s-1)(s-6)} \\ \frac{-1}{(s-1)(s-6)} & \frac{s-2}{(s-1)(s-6)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{4}{5(s-1)} - \frac{1}{5(s-6)} \\ \frac{1}{5(s-6)} - \frac{1}{5(s-1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$x_n(t) = \phi\left(t, 0; \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}e^{t} - \frac{1}{5}e^{6t} \\ \frac{1}{5}e^{6t} - \frac{1}{5}e^{t} \end{bmatrix}, t \geq 0.$$

Por otro lado suponga que se aplica la entrada $u(t) = 1(t)$ con $x(0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x_f(s) &= (sI_n - A)^{-1} B\widehat{u}(s) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s-5}{(s-1)(s-6)} & \frac{-4}{(s-1)(s-6)} \\ \frac{-1}{(s-1)(s-6)} & \frac{s-2}{(s-1)(s-6)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-4}{s(s-1)(s-6)} \\ \frac{s-2}{s(s-1)(s-6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3s} + \frac{4}{5(s-1)} - \frac{2}{15(s-6)} \\ -\frac{1}{3s} + \frac{1}{5(s-1)} + \frac{2}{15(s-6)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hallando la antitransformada de Laplace se obtiene

$$x_f(t) = \phi\left(t, 0; 0, 1_{[0,t)}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} + \frac{4}{5}e^{t} - \frac{2}{15}e^{6t} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{5}e^{t} + \frac{2}{15}e^{6t} \end{bmatrix}$$

Por linealidad, si se desea hallar la respuesta completa o trayectoria total de estado se halla

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi\left(t, 0; \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, 1_{[0,t)}\right) = \phi\left(t, 0; \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\right) + \phi\left(t, 0; 0, 1_{[0,t)}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}e^{t} - \frac{1}{5}e^{6t} \\ \frac{1}{5}e^{6t} - \frac{1}{5}e^{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} + \frac{4}{5}e^{t} - \frac{2}{15}e^{6t} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{5}e^{t} + \frac{2}{15}e^{6t} \end{bmatrix}, t \geq 0. \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{6t} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}e^{6t} - \frac{1}{3} \end{bmatrix} t \geq 0 \end{aligned}$$

1.0.1 Diagonalización de Sistemas o Forma Canónica de Jordan

Se observa que la solución de las ecuaciones de estados de una planta es fácil conceptualemente, pero computacionalmente puede ser complejo. Más aún, la solución obtenida en general no muestra una relación directa con ciertos parámetros importantes del sistema, como son los polos por ejemplo. Sin embargo existe una representación canónica denominada forma de Jordan en la cual se observa directamente la relación entre la dinámica interna del sistema y el medio ambiente.

Definición 25 *Se dice que una planta dada, P, escalar, invariante en el tiempo, n-dimensional, continua, con todos sus polos diferentes entre sí, con entrada $u(\cdot)$ y salida $y(\cdot)$ está descrita en variables de estados en forma canónica de Jordan (también se dice que está diagonalizada) si su comportamiento dinámico está representado por*

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}x(t) &= A_d x(t) + B_d u(t) \\ y(t) &= C_d x(t) + D_d u(t) \end{aligned}$$

donde

$$A_{o=}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, B_c = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_c &= \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_n \end{pmatrix} \\ D_c &= d \end{aligned}$$

Estos es, la matriz A es diagonal con los polos del sistemas como sus entradas no triviales.

Siguiendo la misma línea de razonamiento que en casos anteriores, debe responderse la pregunta. ¿Cuál es la matriz de similaridad $Q \in GL_n(R)$ tal que $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n \overset{x=Qz}{\longrightarrow} \hat{P} : \begin{pmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{pmatrix}_x^n$?

Suponga que los polos de $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n$ son diferentes entre si, o sea, el espectro de A (el conjunto de polos de P) :

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

es tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$

Entonces por definición, a cada polo $\lambda_i \in \sigma(A)$, le corresponde un autovector $v_i \in C^n$ tal que:

$$Av_i = \lambda_i v_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Construya una matriz de dimensión $n \times n$ cuya i-ésima columna es el i-ésimo autovector de A. Entonces la matriz de similaridad Q que diagonaliza el sistema está dada por

$$Q^{-1} = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \tag{diagonal}$$

Esto es fácil de constatar, ya que si Q está definida por **??** e introducimos el cambio de vector de estado

$$x\left(t\right) = Qz\left(t\right)$$

entonces sabemos que

$$P : \left(\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right)_z^n \overset{x=Qz}{\longrightarrow} \overline{P} : \left(\begin{array}{cc} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{array} \right)_x^n$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \overline{A} & = & QAQ^{-1} \\ \overline{B} & = & QB \\ \overline{C} & = & CQ^{-1} \\ \overline{D} & = & D \end{array}$$

Y entonces

$$\overline{A} = \underbrace{[v_1, v_2, \ldots, v_n]}_{Q}^{-1} A \underbrace{[v_1, v_2, \ldots, v_n]}_{Q^{-1}}$$

Pero

$$\begin{array}{rcl} A[v_1, v_2, \ldots, v_n] & = & [Av_1, Av_2, \ldots, Av_n] = [\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n] \\ & = & [v_1, v_2, \ldots, v_n] \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{array} \right] \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\hat{A} = QAQ^{-1} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^{-1} [v_1, v_2, \ldots, v_n] \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{array} \right] = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Por lo que las nuevas ecuaciones de serán:

$$\tfrac{dz(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] z(t)$$

la cual es la forma canónica de Jordan.

Esta representación diagonalizada tiene muchas ventajas a saber:

1. Solución de la ecuaciones de estados es inmediata. Esto se debe a que

$$x(0) = Qz(0)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & \quad \lambda_1 x_1(t) + \gamma_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) = & \quad \lambda_2 x_2(t) + \gamma_2 u(t) \\ \vdots \quad & \qquad \quad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = & \quad \lambda_n x_n(t) + \gamma_n u(t) \end{aligned}$$

O sea, las ecuaciones de estados están **desacopladas**, y la solución de cada una de ellas está dada por

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} x_i(0) + \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} \gamma_i u(\tau) d\tau \ ; i = 1, 2, \ldots, n$$

Como consecuencia, la trayectoria natural de estados será

$$x_n(t) = diag\left(e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\right) x(0), t \geq 0$$

mientras que la trayectoria forzada de estado tiene la forma

$$x_F(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t e^{\lambda_1 (t-\tau)} \gamma_1 u(\tau) d\tau \\ \int_0^t e^{\lambda_2 (t-\tau)} \gamma_2 u(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t e^{\lambda n (t-\tau)} \gamma_n u(\tau) d\tau \end{bmatrix}, t \geq 0$$

Y finalmente, la respuesta o salida de la planta puede expresarse como

$$y(t) = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} z_1(0) + \int_0^t e^{\lambda_1 (t-\tau)} \gamma_1 u(\tau) d\tau \\ e^{\lambda_2 t} z_2(0) + \int_0^t e^{\lambda_2 (t-\tau)} \gamma_2 u(\tau) d\tau \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} z_n(0) + \int_0^t e^{\lambda_n (t-\tau)} \gamma_n u(\tau) d\tau \end{bmatrix} + Du(t)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} z_i(0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau + Du(t)$$

De inmediato:

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} z_i(0)$$
$$y_f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau + Du(t)$$

Observe que tanto en la respuesta natural como en la trayectoria natural de estados de la planta, aparecen términos de la forma $e^{\lambda_i t}$. Y es evidente que son estos términos $e^{\lambda_i t}$ denominado modo asociado al polo λ_i, los que determinan la forma y naturaleza de dichas respuestas. Más aún, note que si:

$Re(\lambda_i) < 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_i t} = 0$ (estable)
$Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_i t} = \infty$ (inestable)
$Re(\lambda_i) = 0 \Rightarrow e^{\lambda_i t} =$ sinosoide (marginalmente estable)

Por lo tanto, diremos informalmente por ahora que el polo λ_i ó el modo $e^{\lambda i t}$ es estable si $\lambda_i \in C_-$, o sea $Re\lambda_i < 0$, y el sistema $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n$ es (asintóticamente) estable si todos sus polos son estables.

También es interesante observar que la forma canónica de Jordan permite establecer cuantitativamente los distintos enlaces ambiente-sistema y sistema-ambiente:

1. Es evidente que si uno de los coeficientes de la matriz de entrada B_d es cero (digamos $\gamma_i = 0$), entonces no hay manera de influenciar el comportamiento del modo $e^{\lambda_i t}$ mediante la señal de entrada $u(t)$, en otras palabras el modo $e^{\lambda_i t}$ no es controlable.

2. Por otro lado, si uno de los coeficientes de la matriz de salida C_d es cero (digamos $\beta_i = 0$), entonces no hay manera de detectar el comportamiento del modo $e^{\lambda_i t}$ en la señal de salida $y(t)$, en otras palabras el modo $e^{\lambda_i t}$ no es observable.

   Las anteriores observaciones tendrán un gran impacto sobre diferentes técnicas de diseño que serán estudiadas posteriormente.

Ejemplo 26 *Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura (1). Las ecuaciones fundamentales del sistema son*

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v(t) \\ \frac{d}{dt}i(t) + 3i(t) + v(t) &= u(t) \\ y(t) &= 3i(t) \end{aligned}$$

Defina ahora las siguientes variables de estados

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v(t) \\ x_2(t) &= i(t) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 2x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)\\ y(t) &= 3x_2(t)\end{aligned}$$

Y en consecuencia, las ecuaciones de estados en forma matricial será

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix} u(t)\\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

El polinomio característico de la planta es

$$\begin{aligned}\chi_A(s) &= \det(sI_2 - A) = \det\begin{bmatrix} s & -2\\ 1 & s+3\end{bmatrix}\\ &= 3s + s^2 + 2 = (s+2)(s+1)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sigma(A) = \{-1, -2\}$$

y correspondientes autovectores son

$$e_1 = \begin{bmatrix} -2\\ 1\end{bmatrix} \leftrightarrow -1, e_2 = \begin{bmatrix} -1\\ 1\end{bmatrix} \leftrightarrow -2$$

y la matriz de equivalencia que diagonaliza a dicho sistema será

$$\begin{aligned}Q &= [e_1, e_2]^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Entonces

$$P : \begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}_z^n \overset{x=Qz}{\longrightarrow} \overline{P} : \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B}\\ \overline{C} & \overline{D}\end{pmatrix}_x^n$$

donde

$$\begin{aligned}\overline{A} &= QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\\ \overline{B} &= QB = \begin{bmatrix} -1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\\ 2\end{bmatrix}\\ \overline{C} &= CQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3\end{bmatrix}\\ \overline{D} &= D = 0\end{aligned}$$

Esto es, la representación en forma canónica de Jordan será

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

O sea, para la red dada puede tomarse como vector de estado

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

pero también califica como vector de estados

$$\begin{aligned} z(t) &= Qx(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -v(t) - i(t) \\ v(t) + 2i(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Suponga ahora que $u(.) = 0$ *y se quiere encontrar un conjunto de condiciones iniciales tal que la corriente (y el voltaje de salida) en la red es de la forma* $I_0 e^{-t}$ *(o sea, suponga que se desea excitar solamente un modo).*

Si selecciona

$$z(0) = \begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $u(.) = 0$, *entonces*

$$\begin{aligned} z_1(t) &= I_0 e^{-t} \\ z_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} = 3I_0 e^{-t}$$

e $i(t) = 3I_0 e^{-t}$ *es de la forma deseada. Por otro lado, para establecer las condiciones iniciales* $z(0) = \begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, *en la representación original se deben fijar*

$$\begin{aligned} x(0) &= Q^{-1} z(0) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2I_0 \\ I_0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} v(0) &= -2I_0 \\ i(0) &= I_0 \end{aligned}$$

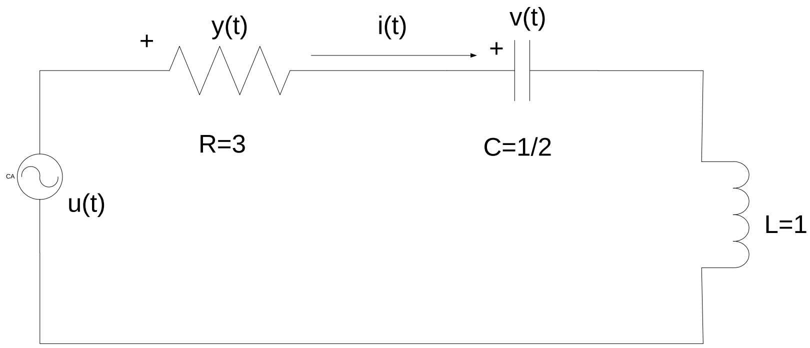


Figure 1: Circuito RLC

Existen otras maneras de diagonalizar una representación en variables de estados $P\left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]_{n,x}$ cuando todos sus polos son distintos entre si. A continuación se muestra uno de tantos métodos pero se hará mediante un ejemplo.

Suponga que se tiene una planta descrita por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{array}\right] x(t) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right] x(t) \end{aligned}$$

y la función de transferencia es

$$\begin{aligned} G_p(s) &= C(sI_n - A)^{-1} B + D \\ &= \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \frac{s+5}{s^2+5s+6} & \frac{1}{s^2+5s+6} \\ -\frac{6}{s^2+5s+6} & \frac{s}{s^2+5s+6} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right] = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Suponga ahora que dada una función de transferencia racional y propia, o sea,

$$G(s) = \frac{N(s)}{F(s)}$$

donde $N(s), F(s) \in R[s]$ y $\partial[N] \leq \partial[F]$. ¿es posible encontrar una representación en variables de estados $P\left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]_{n,x}$ tal que

$$G_p(s) = C(sI_n - A)^{-1} B + D$$

coincida con $G(s)$?

Definición 27 *Dada una función de transferencia $G(s) \in R(s)$, propia, se dice que una representación en variables de estados $P\left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]_{n,x}$ es una* ***re-***

alización *de dimensión* n *de* $G(s)$ *si*

$$G(s) = C\left(sI_n - A\right)^{-1}B + D$$

Una realización de $G(s)$ *se dice ser* ***mínima*** *si para cualquier otra realización* $P\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}_{n',z}$ *de* $G(s)$ *se tiene que*

$$n = \dim(A) \leq n' = \dim(A')$$

Ejemplo 28 *Dada la función de transferencia*

$$G(s) = \frac{5s^2 - 7}{s^3 + 6s^2 - 2s + 8}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -7 & 0 & 5 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

es una realización de $G(s)$ *ya que*

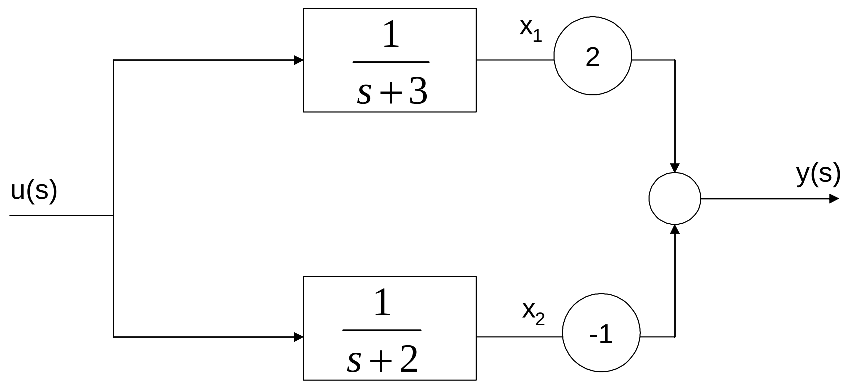
$$\begin{aligned} G_p(s) &= C\left(sI_3 - A\right)^{-1}B + D \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 8 & -2 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^3 + 6s^2 - 2s + 8} \begin{bmatrix} -7 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6s + s^2 - 2 & s+6 & 1 \\ -8 & 6s + s^2 & s \\ -8s & 2s - 8 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{5s^2 - 7}{s^3 + 6s^2 - 2s + 8} = G(s) \end{aligned}$$

Exercicio 29 *Demuestre que la representación en variables de estados*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

es una realización de la función de transferencia

$$G(s) = \frac{5s^2 - 7}{s^3 + 6s^2 - 2s + 8}$$



Suponga entonces

$$G_p(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

Expanda en fracciones parciales

$$G_p(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)} = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+2}$$

Use el hecho que si

$$g(s) = \frac{\alpha}{s+\beta} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}y(t) + \beta y(t) = \alpha u(t)$$

Defina $x(t) = y(t)$, para obtener la siguiente realización de la *función* de transferencia $g(s)$

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= (-\beta)x(t) + (a)u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada sumando en G_p define una variables de estados (ver figura (1.0.1)).

Note que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= 2x_1(t) + (-1)x_2(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

es una realización de $G(s)$ la cual está diagonalizada.

En consecuencia, un posible método para diagonalizar una representación $P\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{n,x}$ que tiene todos sus polos reales y diferentes.

- Determine

$$\begin{aligned} G_p(s) &= C(sI_n - A)^{-1} B \\ &= \frac{N_p(s)}{\chi_A(s)} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} N_p(s) &= CAdj(sI_n - A) B \\ \chi_A(s) &= \det(sI_n - A) = \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i) \end{aligned}$$

y observe que no se ha hecho simplificación alguna.

- Expanda $G_p(s)$ en fracciones parciales

$$G_p(s) = \frac{N_p(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{s - \lambda_i}$$

- Asocie a cada término de la forma $\frac{1}{s+\lambda_i}$ una variable de estados y construya la realización de $G_p(s)$ en forma canónica de Jordan

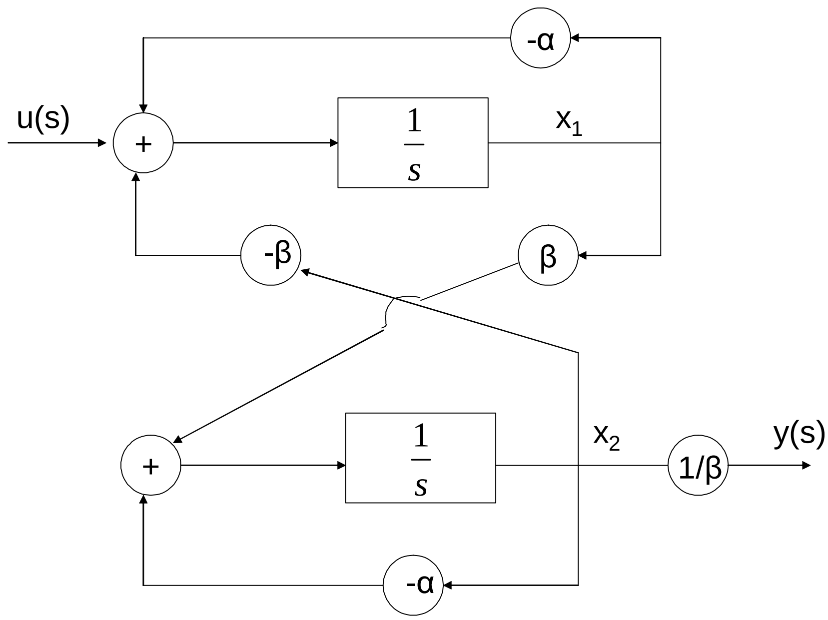
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix} x(t) + Du(t) \end{aligned}$$

y note que la matriz D es la misma que en la representación original.

¿Qué sucede cuando $\chi_A(s)$ tiene todos sus raices distintas pero tienen pares de raices complejas conjugadas? En este caso, es posible diagonalizar al sistemas empleando las mismas técnicas para el caso con polos reales ; sin embargo, las matrices de la representación resultante

$$P\begin{bmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{bmatrix}_{n,x}$$

serán complejas y lo cual no es natural para el análisis de sistemas dinámicos reales. El precio a pagar por exigir que los coeficientes de las matrices que constituyen el modelo en variables de estados, es que se logrará un desacople en



los polos reales, y también de los polos complejos conjugados, pero estos últimos no estarán desacoplados como se muestra a continuación.

Suponga entonces

$$\chi_A(s) = \prod_{i=1}^{K_1}(s-\lambda_i)\prod_{j=1}^{K_2}\left[(s+\alpha_j)^2+\beta_j^2\right]$$

donde K_2 es par y $K_1 + K_2 = n$.

Considere la función de transferencia

$$g(s) = \frac{1}{(s+\alpha_j)^2+\beta_j^2}$$

entonces se puede demostrar que el diagrama de estados mostrado en la figura (1.0.1) es una realización de $g(s)$ con coeficientes reales únicamente.

Del diagrama se observa

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\alpha x_1(t) - \beta x_2(t) + u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \beta x_1(t) - \alpha x_2(t) \\
y(t) &= \frac{1}{\beta}x_2(t)
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

no está diagonalizado.

En el caso

$$
G(s) = \frac{N_p(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\left[(s+\alpha)^2+\beta^2\right]}
$$

con $\partial[N_p] < 4$, se obtendría entonces la realización

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}
$$

Noten que los polos λ_1, λ_2 y $\lambda_{3,4} = \alpha \pm j\beta$ están desacoplados, aunque los polos $\lambda_3 = \alpha + j\beta$ y $\lambda_4 = \alpha - j\beta$ no están desacoplados.

¿Cómo proceder en el proceso de diagonalización del sistema si esta tiene polos repetidos? Si una raíz o polo λ aparece con multiplicidad k, se espera encontrar términos de la forma

$$
\frac{1}{(s+\lambda)^k}
$$

en la expansión en fracciones parciales y para implementar dicho término se necesitaría k bloques en serie cada uno con función de transferencia $\frac{1}{s-\lambda}$.

Para concretar, suponga que se tiene una planta P descrita por

$$
P \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{n,x}
$$

y su función de transferencia es

$$
\begin{aligned}
G_p(s) &= C(sI_n - A)^{-1} B + D \\
&= \frac{N_p(s)}{\chi_A(s)}
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
N_p(s) &= C Adj(sI_n - A) B + D\chi_A(s) \\
\chi_A(s) &= \det(sI_n - A) = \prod_{i=1}^{K} (s-\lambda_i)^{m_i}
\end{aligned}
$$

donde m_i es la multiplicidad del polo λ_i, y se tiene que $\sum_{i=1}^{L} m_i = n$.

Ejemplo 30 *Suponga que se tiene una planta* $P\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{n,x}$ *donde*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \chi_A(s) &= \det(sI_4 - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 2 & 0 & -2 & s \end{bmatrix} = s^4 - 2s^2 \\ &= s^2\left(s-\sqrt{2}\right)\left(s+\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sigma(A) = \left\{0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$$

Aquí $\lambda_1 = 0,\ m_1 = 2; \lambda_2 = \sqrt{2}, m_2 = 1; \lambda_3 = -\sqrt{2}, m_3 = 1.$

Para ilustrar el método suponga que

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{s+1}{(s+5)^2(s+4)}$$

y expandiendo en fracciones parciales

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+1}{(s+5)^2(s+4)} = \frac{4}{(s+5)^2} + \frac{3}{s+5} - \frac{3}{s+4} \tag{11}$$

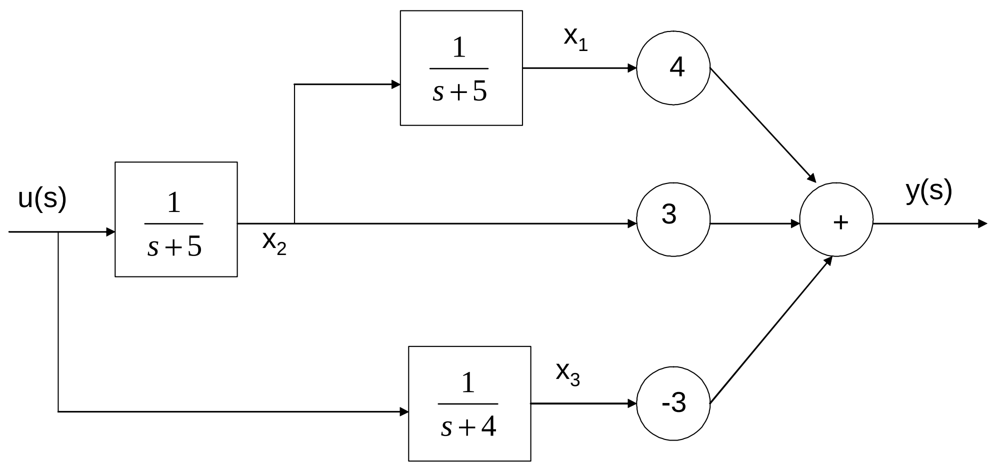
y para encontrar una realización $P\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{n,x}$ de $G(s)$ con el menor número posible de variables de estados (una realización mínima) exprese $G_p(s)$ como

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{(s+5)}\left\{\frac{1}{(s+5)}4 + 3\right\} + \frac{1}{s+4}(-3)$$

cuya realización se muestra en la figura (1.0.1) como fácilmente se verifica.

De inmediato se encuentra la siguiente realización mínima de $G(s)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -5x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -5x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -4x_4(t) + u(t) \\ y(t) &= 4x_1(t) + 3x_2(t) - 3x_3(t) \end{aligned}$$



o sea,

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{A_J} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_J} u(t) \\
y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}}_{C_J} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Noten que debido a la raíz repetida en $\lambda = -5$ no se obtiene una representación con la matriz A_J diagonal. La presencia del 1 en la entrada $(1,2)$ de A_J se debe al acoplamiento entre $x_1(t)$ y $x_2(t)$, y es debido a este acoplamiento que los modos del sistema son de la forma e^{-5t}, te^{-5t} y e^{-4t}.

La matriz A_J obtenida es de la forma

$$
A_J = \begin{bmatrix} J_2(-5) & 0 \\ 0 & J_1(-4) \end{bmatrix}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
J_2(-5) &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \\
J_1(-4) &= [-4]
\end{aligned}
$$

son los denominados bloques de Jordan de orden 2 y 1 respectivamente correspondientes a los polos $\lambda = -5$ y $\lambda = -4$ con multiplicidades 2 y 1 respectivamente. La matriz B_j es de la forma

$$
B_J = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}
$$

donde $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B_2 = [1]$ son columnas de ceros excepto en la última entrada cuyo valor es 1, de longitudes 2 y 1 respectivamente (las multiplicidades de $\lambda = -5$ y $\lambda = -4$). Finalmente la matriz de salida C_J es de la forma

$$C_J = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

donde $C_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$ y $C_2 = [-3]$ cada uno representa los valores de los residuos asociados al polo $\lambda = -5$ y $\lambda = -4$ respectivamente (ver (11)).

Empleando esta metodología para la selección del vector de estados, a cada polo múltiple $\frac{1}{(s-\lambda)^k}$ le corresponde un bloque de Jordan de dimensión $(k \times k)$

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{k \times k}$$

Por lo tanto si $G(s)$ tiene una expansión en fracciones parciales

$$\begin{aligned} G(s) \quad = \quad & \frac{h_{11}}{(s-\lambda_1)^{k_1}} + \frac{h_{12}}{(s-\lambda_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{h_{1,k_1}}{(s-\lambda_1)} \\ & + \frac{h_{21}}{(s-\lambda_2)^{k_2}} + \frac{h_{22}}{(s-\lambda_2)^{k_2-1}} + \cdots + \frac{h_{2,k_2}}{(s-\lambda_2)} + \cdots \\ & + \frac{h_{r1}}{(s-\lambda_r)^{k_r}} + \frac{h_{r2}}{(s-\lambda_r)^{k_2-1}} + \cdots + \frac{h_{r,k_r}}{(s-\lambda_r)} \end{aligned}$$

correspondientes a los polos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ con multiplicidades $m_1, m_2, \cdots, m_r$, entonces se obtiene la siguiente realización mínima de $G(s)$

$$P \begin{bmatrix} A_J & B_J \\ C_J & D_J \end{bmatrix}_{n,x_J}$$

donde las matrices de la ecuación de estados tienen la forma

$$\begin{aligned} A_J \quad &= \quad \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_r}(\lambda_r) \end{bmatrix} \\ B_J \quad &= \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con

$$B_j = \left.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right\} k_j$$

para $j = 1, 2, \cdots, r$. Mientras que la matriz

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_r \end{bmatrix}$$

con

$$C_\alpha = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{\alpha 1} & h_{\alpha 2} & \dots & h_{\alpha, k_\alpha} \end{bmatrix}}_{k_\alpha}$$

para $\alpha = 1, 2, \cdots, r$, y el correspondiente vector de estado será

$$x_J = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(r)} \end{bmatrix}$$

donde para cada $\beta = 1, 2, \cdots, r$

$$x^{(\beta)} = \begin{bmatrix} x_{1,\beta} \\ x_{2,\beta} \\ \vdots \\ x_{k_\beta,\beta} \end{bmatrix}$$

Lo anterior puede resumirse y extenderse como (la demostración completa se omite por ser demasiada técnica y de no utilidad para los objetivos de estas notas).

Teorema 31 *Considere un sistema P de tiempo continuo e invariante en el tiempo, descrito por*

$$P \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{n,x}$$

con

$$\chi_A(s) = \prod_{i=1}^{r} (s - \lambda_i)^{k_i}$$

donde k_j es la multiplicidad del polo λ_j y se cumple

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$$

Entonces existe una matriz de equivalencia $Q_J \in GL_n(R)$ tal que

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \overset{x = Q_J x_J}{\longrightarrow} P : \begin{pmatrix} A_J & B_J \\ C_J & D_J \end{pmatrix}_{x_J}^n$$

donde

$$\begin{aligned} A_J &= Q_J A Q_J^{-1} \\ B_J &= Q_J B \\ C_J &= C_J Q^{-1} \\ D_J &= D \end{aligned}$$

y donde Q_J puede particionarse como

$$Q_J = [T_1, T_2, \cdots, T_r]^{-1}$$

con cada bloque T_j tiene k_j columnas y son tales que

$$A_J = Q_J A Q_J^{-1}$$

donde

$$A_J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B_J &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_3 \end{bmatrix} \\ C_J &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} B_j &= \left.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right\} k_j \\ C_\alpha &= \underbrace{\begin{bmatrix} h_{\alpha 1} & h_{\alpha 2} & \dots & h_{\alpha, k_\alpha} \end{bmatrix}}_{k_\alpha} \end{aligned}$$

El bloque J_i tiene dimensión $(k_i \times k_i)$, $i = 1, 2, \cdots, r$, y la partición de A_J es conformable con la partición de $Q_J^{-1} = T = [T_1, T_2, \cdots, T_K]$. Cada bloque T_j consta de k_i columnas. Los bloques J_i pueden subparticionarse como

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{i,l_i} \end{bmatrix} \tag{12}$$

y cada bloque J_{ij} es de la forma

$$J_{ij}\left(\lambda_i\right)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}_{N_{ij}\times N_{ij}}$$

La representación $P:\begin{pmatrix} A_J & B_J \\ C_J & D_J \end{pmatrix}_{x_J}^{n}$ se denomina la forma canónica de Jordan de $P:\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{x}^{n}$.

Una matriz que está en forma canónica de Jordan es

$$A_J=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ J_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es posible generar otro procedimiento para la determinación de la representación en forma canónica de Jordan que no requiere la función de transferencia de la planta. Esto se logra observando que de la relación $A_J=Q_JAQ_J^{-1}$ se tiene

$$\begin{aligned} AQ_J^{-1} &= Q_J^{-1}A_J \\ AT &= TA_J \end{aligned}$$

Denote por $q^{(1)},q^{(2)},\cdots,q^{(n)}$ las columnas elementales de T, entonces de la forma de A_J se concluye que

$$Aq^{(i)}=\lambda q^{(i)}+\gamma_i q^{(i-1)} \tag{13}$$

donde $\gamma_i\in\{0,1\}$, dependiendo de A_J, y λ es un autovalor de A. Particione el bloque T_i de T de acuerdo a la partición de la matriz J_i (vea ()12) como $T_{i1},T_{i2},\cdots,T_{i,k_i}$. Entonces el número γ_i es cero siempre que la correspondiente columna $q^{(i)}$ de T es la primera columna del subbloque. Ya que $\gamma_i = 0$, entonces el vector $q^{(i)}$ es un autovector de A. En consecuencia, las primeras columnas de cada subbloque pueden tomarse cómo los autovectores de A. Las columnas restantes de cada subbloque se generan usando (13) con $\gamma_i = 1$. Estas columnas restantes de los subloques se denominan autovectores generalizados de A. En el proceso de construcción de los vectores generalizados se detiene cuando se falla en encontrar una solución a la ecuación correspondiente.

Ejemplo 32 *Considere un sistema dinámico representado por* $P : \left(\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right)_x^4$ *donde*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el polinomio característico del sistema está dado por

$$\begin{aligned} \chi_A(s) &= \det(sI_4 - A) \\ &= s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4 \\ &= (s+1)^2 (s+2)^2 \end{aligned}$$

y en consecuencia, el conjunto de polos o espectro de A *es*

$$\sigma(A) = \{-1, -1, -2, -2, \}$$

Por lo tanto, $\lambda_1 = -1$ *con multiplicidad* $k_1 = 2$ *y* $\lambda_2 = -2$ *con multiplicidad* $k_1 = 2$. *Se puede verificar que* A *tiene dos autovectores linealmente independientes,*

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = -1 \\ q^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -2 \end{aligned}$$

En consecuencia, debe resolverse primeramente la ecuación

$$Aq^{(2)} = \lambda_1 q^{(2)} + q^{(1)}$$

o sea

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} -a+\frac{1}{2}b \\ -2a+b \\ -c+\frac{1}{2}d \\ -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y resolviendo se tiene la siguiente posible solución

$$q^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En segundo lugar resuelva

$$\begin{aligned} Aq^{(4)} &= \lambda_2 q^{(4)} + q^{(3)} \\ \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} &= (-2) \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}f \\ -2e+2f \\ \frac{1}{2}h \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, una posible solución es

$$q^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} q^{(1)} & q^{(2)} & q^{(3)} & q^{(4)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
A_J &= Q_J A Q_J^{-1} = T^{-1}AT \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

la cual está evidentemente en forma canónica de Jordan.

Una vez que el sistema $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$ se ha transformado en su forma canónica de Jordan $P : \begin{pmatrix} A_J & B_J \\ C_J & D_J \end{pmatrix}_{x_J}^n$, la matriz transición de estados e^{At} se encuentra fácilmente usando el siguiente resultado que se presenta sin demostración (no es difícil pero larga y tediosa).

Teorema 33 *Dado un sistema representado en variables de estados por* $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$. *Sea* $P : \begin{pmatrix} A_J & B_J \\ C_J & D_J \end{pmatrix}_z^n$ *la representación correspondiente en forma canónica de Jordan, entonces, se cumplen las siguientes aseveraciones:*

1. *Para todo entero positivo* n, $A^n = Q_J^{-1} A_J^n Q_J$,

2. *Las correspondientes matrices transición de estados están relacionadas mediante*
$$e^{At} = Q_J e^{A_J t} Q_J^{-1}$$

3. *Para todo* $n \in Z_+$,
$$A_J^n = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} J_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r^n \end{bmatrix}$$
y para cada i
$$J_i^n = \begin{bmatrix} J_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{i,l_i} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} J_{i1}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{i2}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{i,l_i}^n \end{bmatrix}$$

y

$$J_{ij}^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & \cdots & \binom{n}{N_{ij}-1}\lambda_i^{N_{ij}-1} \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \cdots & \binom{n}{N_{ij}-2}\lambda_i^{N_{ij}-2} \\ 0 & 0 & \lambda_i^n & \cdots & \binom{n}{N_{ij}-3}\lambda_i^{N_{ij}-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^n \end{bmatrix}$$

donde $\binom{n}{j}$ *denota el coeficiente binomial*

$$\binom{n}{j} = \begin{cases} \frac{n!}{j!(n-j)!}, & j = 0, 1, \cdots, n \\ 0, & \textit{de lo contrario} \end{cases}$$

4. Para todo $t \in R$,

$$e^{A_J t} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_r t} \end{bmatrix}$$

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{J_{i1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_{i2} t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_{i,k_i} t} \end{bmatrix}$$

y

$$e^{J_{ij} t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{N_{ij}-1}}{(N_{ij}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{N_{ij}-2}}{(N_{ij}-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

El cálculo de las potencias de A y de su matriz transición de estados e^{At} se reduce al cálculo de las potencias y de las matrices exponenciales de los subbloque J_{ij} de su forma canónica de Jordan para los cuales fórmulas muy sencillas existen. Es importante resaltar que si bien los cálculos no son difíciles, la importancia de este resultado se verá en el estudio de estabilidad, controlabilidad y observabilidad de las representaciones en variables de estados de una planta dada.

Ejemplo 34 *Considere la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$\chi_A(s) = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 = (s+1)^4$$

Se puede demostrar que la correspondiente forma canónica de Jordan es

$$A_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} Q_J^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ Q_J &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Usando las propiedades establecidas en el teorema (33), y recordando que $\binom{n}{n-1} = n$ *se tiene*

$$J^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & n(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & n(-1)^n \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$$

para todo $n \in Z_+$.

La matriz transición de estados

$$e^{A_J t} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} e^{At} &= Q_j^{-1} e^{A_j t} Q_J \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} - te^{-t} & \frac{1}{2}te^{-t} & 0 & 0 \\ -2te^{-t} & e^{-t} + te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} - te^{-t} & \frac{1}{2}te^{-t} \\ 0 & 0 & -2te^{-t} & e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente,

Teorema 35 *Dado un sistema P de tiempo continuo e invariante en el tiempo, descrito por*

$$P\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{n,x}$$

con

$$\chi_A(s) = \prod_{i=1}^{r} (s-\lambda_i)^{k_i}$$

donde k_j es la multiplicidad del polo λ_j y se cumple

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$$

denote por $P : \begin{pmatrix} A_J & B_J \\ C_J & D_J \end{pmatrix}_z^n$ la correspondiente forma canónica de Jordan con

$$A_J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B_J &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_3 \end{bmatrix} \\ C_J &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} B_j &= \left.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right\} k_j \\ C_\alpha &= \underbrace{\begin{bmatrix} h_{\alpha 1} & h_{\alpha 2} & \dots & h_{\alpha, k_\alpha} \end{bmatrix}}_{k_\alpha} \end{aligned}$$

Si se representa a la matriz de transformación Q_J y a su inversa como Q_J^{-1}

$$\begin{aligned} Q_J^{-1} &= [T_1, T_2, \cdots, T_r] \\ Q_J &= \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^{r} T_i e^{J_i t} U_i x(0) + \sum_{i=1}^{r} \int_0^t T_i e^{J_i(t-\tau)} B_j u(\tau)\, d\tau \\ y(t) &= \sum_{i=1}^{r} C_J T_i e^{J_i t} U_i x(0) + \sum_{i=1}^{r} \int_0^t C_J T_i e^{J_i(t-\tau)} B_j u(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

Se define a cada término $T_i e^{J_i t} U_i$ como el modo del sistema asociado al autovalor a λ_i o mejor dicho al bloque J_i.

Exercicio 36 *Considere una planta P descrita por $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$ donde*

$$A = \begin{pmatrix} 38 & 7 & 66 \\ 30 & 7 & 54 \\ 23\frac{1}{2} & -4\frac{1}{2} & -41 \end{pmatrix}$$

a) Halle la al matriz A_J en forma canóica de Jordan
b) Encuentre una fórmula para A_J^n para cada n, y luego calucle $e^{A_J t}$.
c)Halle e^{At} a partir de $e^{A_J t}$.
d) repita (c) usando la matriz resolvente.

References

1. Grantham,W. y T. Vincent. "Sistemas de Control Moderno: Análisis y Diseño". Limusa. Noriega Editores. Mexico. 1998.

2. Arrowsmith, D.K. y C.M. Place, "Ordinary Differential Equations". Chapman and Hall. Londres. 1982.