# 6.- FILTRO DE KALMAN

# 6.1.- MOTIVACIÓN

Los sistemas de navegación se han convertido en un estándar, ya que se venden más y más, sobre todo con los coches nuevos. La mayoría de estos sistemas de navegación ya no usa sólo el Sistema de Posicionamiento Global (GPS), sino también un sistema de navegación inercial (INS) para ayudar al conductor a encontrar el camino. Juntos, los dos sistemas se complementan y permiten una mejor navegación de precisión y fiabilidad, especialmente cuando el GPS se degrada o se interrumpe por ejemplo, en la entrada en edificios o túneles.

Y para esta aplicación, el filtro de Kalman proporciona la base. Constituye una herramienta para la corrección de la trayectoria prevista del INS con mediciones GPS. También la determinación de una órbita de referencia para estos satélites GPS y la corrección de estos con los datos de las estaciones de control de GPS es una aplicación muy importante del filtro de Kalman.

Pero estos son sólo dos ejemplos de la amplia variedad de ámbitos en los que el Filtro de Kalman juega un papel importante. Las áreas de aplicación abarcan desde el sector aeroespacial, a la navegación marítima, la modelización demográfica, la ciencia meteorológica, la fabricación y muchos otros. Debido a que el filtro de Kalman es muy eficaz y útil para una gran clase de problemas, ha sido objeto de numerosas investigaciones.

Nosotros lo vamos a usar en el proyecto para predecir el movimiento de la Roomba, junto con las medidas de distancias que proporcionan los motes de Jennic.

## 6.2.-INFORMACIÓN GENERAL DEL FILTRO DE KALMAN

# 6.2.1.- INTRODUCCIÓN

Rudolf Emil Kalman nació en Budapest, Hungría, el 19 de mayo de 1930. Él tuvo la idea de que el filtro de Kalman, por primera vez en el año 1958. En 1960 y 1961 publicó sus trabajos en el filtro de Kalman y con ello revolucionó el campo de la estimación.

El filtro de Kalman es un filtro recursivo de predicción que se basa en el uso de técnicas de espacio de estado y los algoritmos recursivos. Se estima que el estado de un sistema dinámico. Este sistema dinámico puede ser perturbado por algún ruido, en su mayoría asume como ruido blanco. Para mejorar el estado que estima el filtro de Kalman se utilizan mediciones que se relacionan con el Estado, sino perturbados también.

Así, el filtro de Kalman consiste en dos pasos:

- 1. la predicción
- 2. la corrección

En el primer paso el estado predicho por el modelo dinámico. En el segundo paso se corrige con el modelo de observación, de modo que la covarianza del estimador de error se minimiza. En este sentido, es un estimador óptimo.

Este procedimiento se repite para cada intervalo de tiempo con el estado del paso de tiempo anterior como valor inicial. Por lo tanto el filtro de Kalman se llama un filtro recursivo.

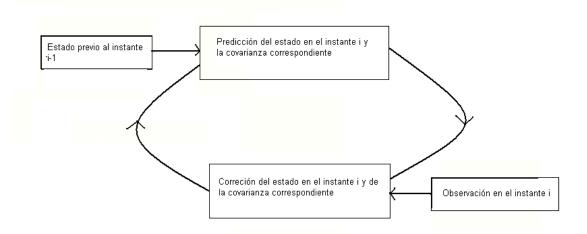


Figura 35. Circuito del filtro de Kalman

Los componentes básicos del filtro de Kalman son el vector de estado, el modelo dinámico y el modelo de observación, que se describen a continuación.

#### 6.2.2.- VECTRO DE ESTADO

El vector de estado contiene las variables de interés. En él se describe el estado del sistema dinámico y representa sus grados de libertad. Las variables en el vector de estado no se puede medir directamente, sino que se puede deducir de los valores que se pueden medir.

Elementos del vector de estado puede ser por ejemplo, posición, velocidad, ángulos de orientación, etc Un ejemplo muy simple es un tren que está conduciendo a una velocidad constante en un elemento recto. En este caso, el tren tiene dos grados de libertad, la distancia s y la velocidad =v. Así, el vector de estado es

$$x = \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix}$$

El vector de estado tiene dos valores al mismo tiempo, que es el valor a priori, el valor previsto antes de la actualización, y el valor a posteriori, el valor corregido después de la actualización. En adelante, el valor a priori se caracteriza por x<sup>-</sup> y el valor a posteriori por x<sup>+</sup>.

# 6.2.3.- MODELO DINÁMICO

El modelo dinámico describe la transformación del vector de estado en el tiempo. Por lo general, puede ser representado por un sistema de ecuaciones diferenciales.

$$x(t) = \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), m(t))$$

 $\times$ 

En el caso lineal puede ser fácilmente reescrita como

$$x(t) = F \cdot x(t) + n(t)$$

donde F es la matriz dinámica y es constante, x (t) es el vector de estado y N (t) es el ruido dinámico, que generalmente se supone como ruido blanco y tiene la matriz de covarianza Q(t).

Hay sistemas que no pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales, pero estos sistemas no se tratan en este proyecto.

# 6.2.4.- MODELO DE OBSERVACIÓN

El modelo de observación representa la relación entre el Estado y las mediciones. En el caso lineal de las mediciones pueden ser descritas por un sistema de ecuaciones lineales, que dependen de las variables de estado. Por lo general, las observaciones se realizan en tiempo discreto pasos  $t_{\rm i}$ .

$$l(t_i) = h(x(t_i), v(t_i))$$

La forma vectorial de este sistema es

$$l(t_i) = H \cdot x(t_i) + w(t_i)$$

donde  $l(t_i)$  es el vector de las observaciones en el instante  $t_i$  época, H es la observación de la matriz y  $w(t_i)$  es el ruido del proceso de medición con la matriz de covarianza  $R(t_i)$ . Al igual que la dinámica de la matriz, en un sistema lineal de la observación de la matriz H es una matriz constante también.

### 6.3.- ALGORITMO DEL FILTRO DE KALMAN

## 6.3.1.- PREDICCIÓN

Como se mencionó antes, la predicción es el primer paso del filtro de Kalman. El estado previsto, o mejor, a priori, se calcula al despreciar el ruido dinámico y resolviendo las ecuaciones diferenciales que describen el modelo dinámico.

$$\underline{\dot{x}^{-}}(t) = F \cdot \underline{x}^{-}(t)$$

El vector de estado en el tiempo t puede expresarse por una serie de Taylor con respecto a un estado aproximado  $\underline{x}^-(t_0)$ .

$$\underline{x}^{-}(t) = \underline{x}^{-}(t_0) + \underline{\dot{x}}^{-}(t_0)(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \, \underline{\ddot{x}}^{-}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots$$

usando la ecuación (3.1)

$$\underline{x}^{-}(t) = \underline{x}^{-}(t_0) + F\underline{x}^{-}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} F^2\underline{x}^{-}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots$$

Así, la solución  $\underline{x}^-(t)$  de las ecuaciones diferenciales, es decir, el estado real de predecir es una combinación lineal del estado inicial  $\underline{x}^-(t_0)$ .

$$\underline{x}^{-}(t) = \Phi_0^t \cdot \underline{x}^{-}(t_0)$$

 $\Phi_0^t$  es llamado la matriz de transición de estado, la cual transforma cualquier estado inicial  $\underline{x}(t_0)$  a su correspondiente vector de estado  $\underline{x}(t)$  en el instante t.

De las ecuaciones (3.1) y (3.2)

$$\underline{\dot{x}}^{-}(t) = F \cdot \underline{x}^{-}(t) = F \cdot \Phi_0^t \cdot \underline{x}^{-}(t_0)$$

Y usando 3.2 de nuevo

$$\underline{\dot{x}}^{-}(t) = \frac{d}{dt}\underline{x}^{-}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \Phi_0^t \cdot \underline{x}^{-}(t_0) \right] = \frac{d}{dt} \left[ \Phi_0^t \right] \cdot \underline{x}^{-}(t_0)$$

Por comparación de (3.3) y (3.4)

$$\frac{d}{dt}\Phi_0^t = F \cdot \Phi_0^t$$

Con la matriz inicial  $\Phi_0^0=I$  , porque  $\underline{x}(t_0)=I$   $\underline{\cdot x}(t_0)$ 

Y ahora la matriz de covarianza  $P^-(t_i)$  del vector de estado predicho se obtiene con la ley de propagación de errores.

$$P^{-}(t_{i}) = \Phi_{t_{i-1}}^{t_{i}} \cdot P(t_{i-1}) \cdot (\Phi_{t_{i-1}}^{t_{i}})^{T} + Q$$

De forma más generalizada, donde también la matriz de covarianza del ruido Q es una función del tiempo, la matriz de covarianza es

$$P^{-}(t_{i}) = \Phi_{t_{i-1}}^{t_{i}} \cdot P(t_{i-1}) \cdot (\Phi_{t_{i-1}}^{t_{i}})^{T} + \int_{t_{i-1}}^{t_{i}} Q(t)dt$$

### 6.3.2.- CORRECIÓN

En el paso de la corrección del vector de estado predicho  $\underline{x}^-(t_i)$ , se mejora con las observaciones hechas en el instante  $t_i$ , con lo que el estado a posteriori tiene la forma.

$$x^+(t_i) = x^-(t_i) + \Delta x(t_i)$$

Con la matriz de covarianza

$$P^+(t_i) = P^-(t_i) + \Delta P(t_i)$$

Como se dijo antes el filtro de Kalman es un filtro óptimo, esto significa que las variaciones del estado en el estado de la matriz de covarianza  $P^+$  se mínimizan. Como  $P^-$  es conocido del paso de predicción, se sigue que  $\Delta P$  se mínimiza.

$$\Delta P(t_i) = E \left[ \Delta \underline{x}(t_i) \Delta \underline{x}(t_i)^T \right]$$

Esta condición se cumple con

$$\Delta \underline{x}(t_i) = P^- \mathbf{H}^T (HP^- \mathbf{H}^T + R(t_i))^{-1} \cdot (\underline{l}(t_i) - H\underline{x}^-(t_i))$$
$$\Rightarrow \Delta \underline{x}(t_i) = K(t_i) \cdot (\underline{l}(t_i) - \underline{l}^-(t_i))$$

Con

$$K(t) = P^{-}H^{T}(HP^{-}H^{T} + R(t_{i}))^{-1}$$

K es la llamada matriz de ganancia. La diferencia  $(\underline{l}(t_i) - \underline{l}^-(t_i))$  es la medida residual. Refleja la diferencia entre la medida prevista  $\underline{l}^-(t_i) = H\underline{x}^-(t_i)$  y la medida real  $l(t_i)$ .

Por último el estado corregido se obtiene por

$$x^+(t_i) = x^-(t_i) + K(t_i) \cdot (l(t_i) - l^-(t_i))$$

En esta ecuación, el estado estimado y las mediciones son ponderados para calcular el estado corregido. Eso significa que, si la medición de la covarianza es mucho menor que la del estado predicho, el peso de la medida será alta y el estado predicho será baja. Y así la incertidumbre se puede reducir.

La matriz de covarianza del estado a posteriori viene dada por la ley de propagación de error.

$$P^{+}(t_{i}) = P^{-}(t_{i}) - K(t_{i})HP^{-}(t_{i}) = (I - K(t_{i})H)P^{-}(t_{i})$$

### 6.4.- FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO

### 6.4.1.- SISTEMAS NO LINEALES

Hasta ahora, sólo los sistemas lineales han sido consideradas. Pero en la práctica la dinámica o el modelo de observación puede ser no lineal. Un enfoque para el filtro de Kalman para este tipo de problemas no lineales es el llamado filtro de Kalman extendido, que fue descubierto por Stanley F. Schmidt. Después de Kalman presentó sus resultados sobre filtros de Kalman, Schmidt comenzó inmediatamente a su aplicación al problema de la navegación espacial para el próximo proyecto Apolo de exploración tripulada de la luna. En este proceso, él inventó el filtro de Kalman extendido.

Este filtro de Kalman linealiza sobre el estado actual estimado. Así, el sistema debe estar representado de forma continua las funciones diferenciables. Una desventaja de esta versión del filtro de Kalman para sistemas no lineales es que necesita más cálculos que requieren mucho tiempo. La aplicación de sistemas lineales se puede aumentar la eficiencia de pre-cálculo de la dinámica de la matriz F, la transición de estado matriz F y la observación de la matriz H. Sin embargo, para sistemas no lineales, son funciones del Estado y, en consecuencia el cambio con el paso cada vez y no puede ser pre-calculada.

## 6.4.2.- PREDICCIÓN

En el caso no lineal la matriz dinámica F es una función del estado a estimar. Así que el estado predicho se calcula mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales en forma

$$\underline{\dot{x}}^{-}(t) = f\left(\underline{x}^{-}(t)\right)$$

Al representar esta ecuación por una serie de Taylor con respecto a x en el estado previsto

 $\underline{x}^-(t_i)$  y suponiendo que los términos de orden superior se pueden despreciar, la matriz  $F(t_i)$  dinámica se puede calcular con

$$F(t_i) = \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \left| F(t_i) = \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x} = \underline{x}^-(t_i)}$$

Y ahora los otros pasos de la predicción se pueden calcular como se muestra en el capítulo 3.1 con las ecuaciones (3,5) y (3,6), pero cabe señalar que, ahora las matrices utilizadas no son constantes como en el caso lineal, sino que dependen del tiempo.

$$\frac{d}{dt}\Phi_{t_{i-1}}^{t_i} = F(t_i) \cdot \Phi_{t_{i-1}}^{t_i}$$

$$P^-(t_i) = \Phi^{t_i}_{t_{i-1}} \cdot P(t_{i-1}) \cdot \left(\Phi^{t_i}_{t_{i-1}}\right)^T + \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(t) dt$$

# 6.4.3.- CORRECCIÓN

Al igual que las ecuaciones diferenciales en el paso de la predicción, las correspondientes ecuaciones no lineales observadas se linealizan con la serie de Taylor sobre el estado predicho  $\underline{x}^-(t_i)$  y términos de orden superior se descuidan. Así, la observación aproximada de la matriz es

$$H(t_i) = \frac{\partial \Box(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \bigg|_{\underline{x} = \underline{x}^-(t_i)}$$

En este caso la medida predicha  $\underline{l}^-(t_i)$  para calcular la medida residual  $(\underline{l}(t_i) - \underline{l}^-(t_i))$  es

$$\underline{l}^{-}(t_i) = \Box(\underline{x}^{-}(t_i))$$

Más adelante, se utilizarán las mismas fórmulas para calcular el estado corregido y su matriz de covarianza como en el caso lineal, pero con matrices dependientes del tiempo.

$$x^+(t_i) = x^-(t_i) + K \cdot (l(t_i) - l^-(t_i))$$

Υ

$$P^{+}(t_{i}) = (I - K(t_{i})H(t_{i}))P^{-}(t_{i})$$

Con

$$K(t_i) = P^- \mathbf{H}(t_i)^T (H(t_i)P^- \mathbf{H}(t_i)^T + R(t_i))^{-1}$$

### 6.5.- EL FILTRO DE KALMAN: VENTAJAS Y DESVENTAJAS

En este punto es relevante realizar la diferencia de este filtro en relación con el filtro de Hodrick-Prescott y el de Baxter-King. Estos últimos constituyen una herramienta útil para el análisis de los ciclos económicos y de extracción de tendencia. En Flores (1998) y Muñoz et al (1994) se expone la técnica del filtro de Baxter-King y la de Hodrick-Prescott, respectivamente. Por su parte, el filtro de Kalman consiste en un conjunto de ecuaciones que proveen una solución recursiva óptima, por el método de mínimos cuadrados, para un sistema dinámico lineal.

### **6.4.1.- VENTAJAS**

Evita la influencia de posibles cambios estructurales en la estimación. La estimación recursiva parte de una muestra inicial y actualiza las estimaciones incorporando sucesivamente una nueva observación hasta cubrir la totalidad de los datos. Lo anterior lleva a que la estimación más reciente de los coeficientes esté afectada por la historia lejana de la serie, lo cual en presencia de cambios estructurales podría sesgarla. Este sesgo se puede corregir con las estimaciones secuenciales15 pero al costo de un mayor error estándar. Así el filtro de Kalman, como los métodos recursivos, utiliza toda la historia de la serie pero con la ventaja de que intenta estimar una trayectoria estocástica de los coeficientes en lugar de una determinística16, con lo cual soluciona el posible sesgo de la estimación ante la presencia de cambios estructurales.

El filtro de Kalman utiliza el método de mínimos cuadrados para generar recursivamente un estimador del estado al momento k , que es lineal, insesgado y de varianza mínima. El filtro está en línea con el teorema de Gauss-Markov y esto le da al filtro de Kalman su enorme poder, para resolver un amplio rango de problemas en inferencia estadística.

El filtro se distingue por su habilidad para predecir el estado de un modelo en el pasado, presente y futuro, aún cuando la naturaleza precisa del sistema modelado es desconocida. La modelación dinámica de un sistema es una de las características claves que distingue el método de Kalman. Los modelos lineales dinámicos son modelos con una transición lineal desde un periodo al próximo, los cuales pueden describir la mayoría de los modelos comúnmente utilizados en trabajos de series de tiempo.

### 6.4.2.- DESVENTAJAS

Entre las desventajas del filtro se menciona que requiere condiciones iniciales de la media y varianza del vector estado para iniciar el algoritmo recursivo. Sobre la forma de determinar estas condiciones iniciales no existe consenso. Por ejemplo, en un enfoque bayesiano este filtro requiere que se especifiquen a priori valores de los coeficientes iniciales y de sus respectivas varianzas. Una forma puede ser obtener esa información a partir de la estimación de un modelo similar al deseado pero con coeficientes fijos para un subperiodo muestral. Por otra parte, es necesario especificar las varianzas para lo cual Doan, Litterman y Sims (1984) sugieren varianzas muy pequeñas y proporcionales en relación con las obtenidas para los coeficientes iniciales.

El desarrollo del filtro de Kalman, tal como se encuentra en el documento original, supone un conocimiento amplio en teoría de probabilidades, específicamente con el tema de la condicionalidad gaussina en las variables aleatorias, lo cual puede originar una limitante para su estudio y aplicación.

Cuando se desarrolla para modelos autorregresivos los resultados están condicionados a la información pasada de la variable en cuestión. En este sentido el pronóstico con series de tiempo representa la fuerza o inercia que actualmente presenta el sistema y son eficientes únicamente en el corto plazo.