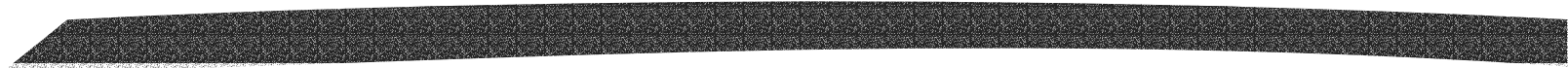


# Bases del filtro de Kalman



Rafael Molina Soriano  
Depto Ciencias de la Computación e IA  
Universidad de Granada

# Contenidos

- Introducción.
- El filtro de Kalman
  - Modelo del sistema
  - Modelo de medida
  - Formulación de la teoría de estimación lineal óptima del filtro de Kalman
  - Algoritmo de Kalman
  - Ejemplo
- Bibliografía

# I. Introducción

En muchas situaciones se dispone de una secuencia de imágenes y no sólo de dos. Esta situación permite mejorar el acoplamiento (matching) de los rasgos.

Si el movimiento (de un objeto) en una escena es continuo es, obviamente, posible hacer predicciones sobre él en cada instante basado en las trayectorias previas.

Si tenemos las disparidades entre  $I_{i-1}$  e  $I_{i-2}$  e  $I_{i-2}$  e  $I_{i-3}$  etc, es obvio que podemos predecir  $I_k - I_{k-1}$ .

El seguimiento de rasgos consiste en acoplar rasgos de imagen en imagen en largas secuencias de imágenes.

## II. El filtro de Kalman

Rudolf E. Kalman nació en Budapest en 1930, emigró a Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial y se doctoró en el M.I.T. en Ingeniería Eléctrica en 1954.



En 1958 cuando viajaba en tren de Princeton a Baltimore el tren se detuvo durante una hora a las 11 pm en las afueras de Baltimore, entonces se le ocurrió aplicar el concepto de variables de estado al filtro de Wiener.

Greg Welch y Gary Bishop, miembros del Department of Computer Science de University of North Carolina at Chapel Hill mantienen una excelente página sobre Kalman y su filtro (<http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/>).

Nuestro objetivo será la obtención de un estimador óptimo de un sistema dinámico, basado en observaciones ruidosas y en un modelo de la incertidumbre de la dinámica del sistema.

Haremos uso de dos ingredientes fundamentales: los conceptos de modelo del sistema y modelo de medida o de observación.

Para ir entendiendo la formulación vamos a considerar paralelamente la estimación de una constante (por ejemplo un voltaje) cuya medida lleva asociado un ruido con una desviación típica de 0.1 voltios. El voltaje será una constante y tenemos observaciones secuenciales ruidosas.

Ver "[An Introduction to the Kalman Filter](#)" de [Greg Welch](#) y [Gary Bishop](#). Una copia local de este trabajo se encuentra en el material del curso.

## II.1 Modelo del sistema

El sistema físico se modeliza por un vector de estados  $\mathbf{x}$ , llamado simplemente el estado, y un conjunto de ecuaciones llamado el modelo del sistema.

El modelo del sistema es una ecuación de vectores que describe la evolución del estado con el tiempo.

El tiempo de observación tiene la forma  $t_k = t_0 + k\Delta T$ ,  $k=0,1,\dots$ ,  $\Delta T$  es el intervalo de muestreo y  $\mathbf{x}_k$  el estado  $\mathbf{x}(t_k)$ .

Vamos a suponer que  $\Delta T$  es pequeño y que por tanto podemos utilizar un modelo del sistema lineal, es decir,

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \xi_{k-1}$$

donde  $\xi_{k-1}$  es un vector aleatorio que modeliza el ruido aditivo. El subíndice  $k-1$  en  $\phi$  indica que la matriz de transición  $\phi$  es (puede ser) una función del tiempo.

Volvamos ahora a nuestro ejemplo. Como el voltaje es una constante podemos utilizar como modelo del sistema

$$X_k = X_{k-1} + \xi_{k-1}$$

Observemos que cuanto mayor sea  $k$ , en principio, más fiabilidad tendrá la estimación. Es importante analizar las características de  $\xi_{k-1}$  pero esto lo haremos con posterioridad. Casi siempre el ruido  $\xi_{k-1}$  se supone normal de media cero.

## II.2 Modelo de medida

El segundo ingrediente en la teoría de la estimación es el modelo de medida.

Suponemos que en cada instante  $t_k$  tenemos una observación ruidosa del vector de estados o al menos alguna de sus componentes mediante la siguiente relación

$$z_k = H_k x_k + \mu_k$$

$z_k$  es el vector de medidas tomadas en el instante  $t_k$ .  $H_k$  es la llamada matriz de medidas y  $\mu_k$  es un vector aleatorio que modeliza la incertidumbre asociada a las medidas.

En nuestro ejemplo tendríamos

$$z_k = x_k + \mu_k$$

con  $\mu_k$  normales independientes de media 0 y desviación 0.1



## II.3 Formulación de la teoría de estimación lineal óptima del filtro de Kalman

Esta sección es una recopilación de las dos anteriores.

El estado de un sistema dinámico en el instante  $t_k$  está descrito por un vector  $n$ -dimensional  $x_k$  llamado vector de estados. La evolución del sistema se modeliza mediante

$$x_k = \phi_{k-1} x_{k-1} + \xi_{k-1}$$

donde  $\phi_{k-1}$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  llamada matriz de transición de estados y  $\xi_k$  es un  $n$ -vector que modeliza el ruido asociado al modelo del sistema.

En cualquier instante  $t_k$  se obtiene un vector  $m$ -dimensional de medidas  $z_k$ . La relación entre el estado y las medidas es lineal y se modeliza mediante

$$z_k = H_k x_k + \mu_k$$

$H_k$  es una matriz dependiente del tiempo de tamaño  $m \times n$  y  $\mu_k$  es un  $m$ -vector aleatorio que modeliza la incertidumbre asociada a las medidas.

Muy importante (hay que recordar la notación)

Los términos  $\xi_k$  y  $\mu_k$  son vectores aleatorios gaussianos blancos de media cero y matrices de covarianza  $Q_k$  y  $R_k$  respectivamente.

En los casos que se comentan en clase dichas matrices de covarianza son diagonales aunque en general pueden no serlo, además el modelo de ruido puede no ser gaussiano.

Para el problema del voltaje  $R_k = (0.1)^2$  y la varianza del modelo de estados la fijamos nosotros. En el ejemplo al final de esta sección hemos supuesto  $Q_k = (0.0001)^2$ .

## Objetivo

Calcular el mejor estimador del sistema en el instante  $t_k$  que notaremos  $\underline{x}_k$  teniendo en cuenta el estimador del estado predicho por el sistema en el instante  $t_{k-1}$ , que obviamente notamos  $\underline{x}_{k-1}$ , y la medida realizada en el instante  $t_k$ , que como sabemos hemos notado  $z_k$ .

Volviendo a nuestro problema de medida de voltaje es importante tener claro que  $m=n=1$ .

## II.4 Algoritmo del filtro de Kalman

Supongamos que tenemos  $\underline{x}_{k-1}$  y  $P_{k-1}$ . En el primer instante hemos de tener  $\underline{x}_0$  y  $P_0$ .

¿Cómo calculamos los nuevos estimadores iterativamente?

Los valores iniciales  $\underline{x}_0$  y  $P_0$  los proporciona el usuario.

Tenemos un estimador  $\underline{x}_{k-1}$  y su matriz de covarianzas  $P_{k-1}$ .

Primero calculamos, antes de que llegue la observación  $z_k$ ,

$$P_k' = \phi_{k-1} P_{k-1} \phi_{k-1}^t + Q_{k-1}$$

después la ganancia

$$K_k = P_k' H_k^t (H_k^t P_k' H_k + R_k)^{-1}$$

a continuación el estimador del estado  $k$  óptimo (aquí metemos la observación)

$$\underline{x}_k = \phi_{k-1} \underline{x}_{k-1} + P_k' H_k^t (H_k^t P_k' H_k + R_k)^{-1} (z_k - H_k \phi_{k-1} \underline{x}_{k-1})$$

y por último la matriz de covarianzas de este estimador

$$\begin{aligned} P_k &= P_k' - P_k' H_k^t (H_k^t P_k' H_k + R_k)^{-1} H_k P_k' = P_k' - K_k H_k P_k' \\ &= (I - K_k H_k) P_k' = (I - K_k) P_k' (I - K_k)^t - K_k R_k K_k^t \end{aligned}$$

## II.5 Ejemplo

El siguiente código de Matlab implementa la estimación del voltaje en el problema que hemos ido describiendo en el apéndice.

El fichero .m se encuentra en el material complementario de la asignatura

```
% Filtro de Kalman para la estimación de una constante
% El modelo de estados es  $x_k = x_{(k-1)} + N(0, \text{var\_estados})$ 
% El de observaciones es  $y_k = x_k + N(0, \text{var\_obs})$ 
% Se introduce el número de datos y el valor a estimar
% Se introduce un estimador inicial y su desviación típica
% A continuación al desviación típica en la observación y estados
% Se dibuja el estimador, las observaciones y la varianza de la estimación
```

```
N=input('numero de datos ');
x0=input('valor a estimar\ ');
est_inicial=input('valor inicial del estimador ');
incertidumbre_inicial=input('desviación estimador inicial ');
desv_observacion=input('desviacion tipica en la observacion ');
desv_estados=input('desviacion tipica en modelo de estados ');

var_obs=desv_observacion*desv_observacion;
var_estados=desv_estados*desv_estados;
X=zeros(N+1,1); % contendra las estimaciones
X_antes=zeros(N+1,1);
Ganancia=zeros(N+1,1);
Y=zeros(N+1,1); % contendra las observaciones
P_antes=zeros(N+1,1); % contendra la varianza de estimadore sin observacion
P_despues=zeros(N+1,1); % contendra la varianza de la estimacion
```

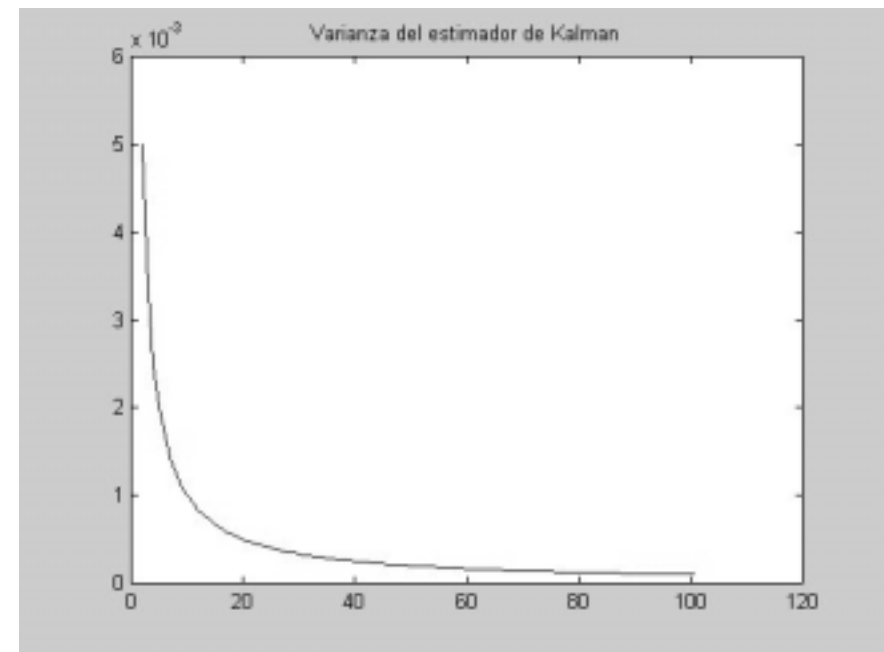
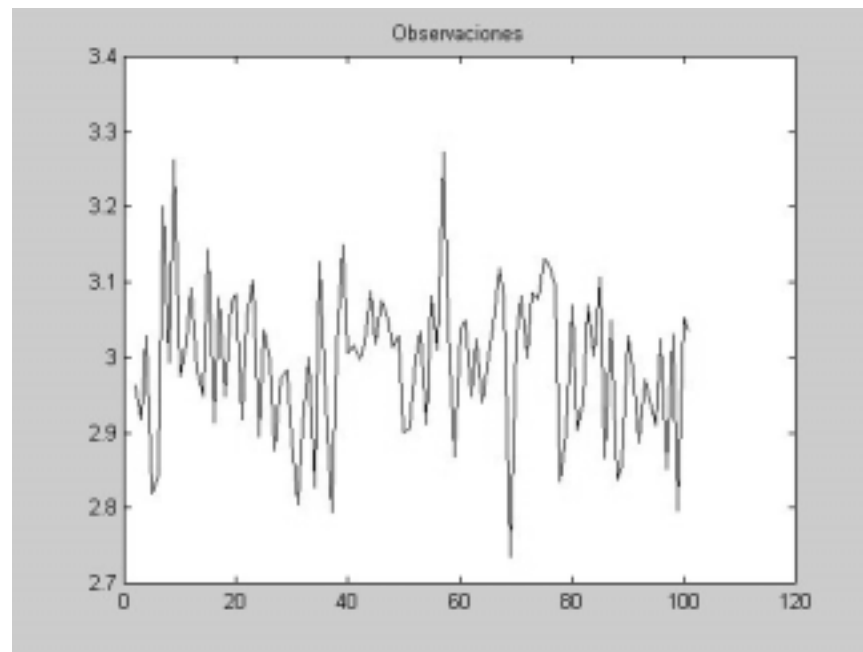
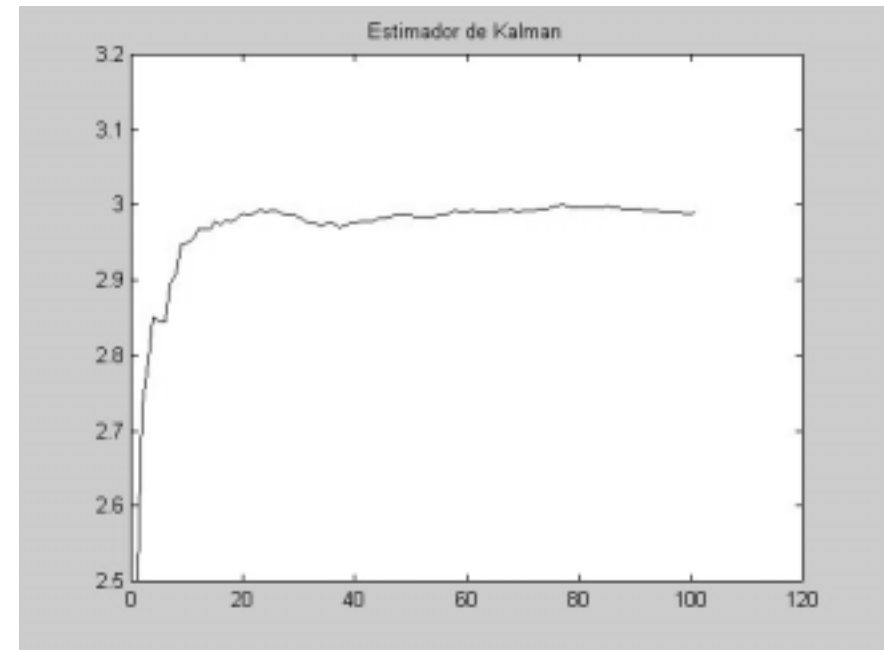


```

X(1)=estado_inicial;
P_despues(1)=incertidumbre_inicial*incertidumbre_inicial;
for k=2:N+1
    X_antes(k)=X(k-1);
    P_antes(k)=P_despues(k-1)+var_estados;
    Ganancia(k)=P_antes(k)/(P_antes(k)+var_obs);
    Y(k)=x0+desv_observacion*randn(1);
    X(k)=X_antes(k)+Ganancia(k)*(Y(k)-X_antes(k));
    P_despues(k)=(1-Ganancia(k))*P_antes(k);
end
close all
plot([1:N+1],X), title('Estimador de Kalman');
figure
plot([2:N+1],Y(2:N+1)), title('Observaciones');
figure
plot([2:N+1],P_despues(2:N+1)), title('Varianza del estimador de Kalman');

```

número de datos 100  
valor a estimar 3  
valor inicial del estimador 2.5  
desviación estimador inicial 0.1  
desviación típica en la  
observación 0.1  
desviación típica en modelo de  
estados 0.0001



## IV. Bibliografía

- Trucco, E. y Verri, A., (1998), '*Introductory Techniques for 3-D Computer Vision*', Prentice Hall.

### Complementario

- Material adicional del tema
- Greg Welch y Gary Bishop, "An Introduction to the Kalman Filter", 2002.