GID-38. Grupo de Mecatronica
Universidad Simón Bolívar

MECATRÓNICA
Universidad Simón Bolívar

Consideraciones en el problema de control de inclinacion de una plataforma con patas (cuadrupedo / hexapodo)

por

José Cappelletto, Gerardo Fernandez

28 de mayo de 2009

Reporte Tecnico
 # 2009-5/1

Consideraciones en el problema de control de inclinacion de una plataforma con patas (cuadrupedo / hexapodo)

José Cappelletto, Gerardo Fernandez

Reporte Tecnico # 2009-5/1

GID-38. Grupo de Mecatronica
Decanato de Investigacion y Desarrollo
Universidad Simón Bolívar

Resumen: En el presente reporte se detallan las consideraciones en el problema de control de inclinacion en un robot con patas. Para ello se efectua un analisis geometrico para relacionar las mediciones de inclinacion en estado estatico, y la configuracion cinematica. Con esto, se pretende describir un estimador de la orientacion completa del cuerpo del robot, usando la convencion Roll-Pitch y Yaw. Se describe una accion de control geometrica, que actua directamente en el espacio R^3 de las patas. Se propone el uso de un control proporcional de posicion, a fin de mantener la inclinacion deseada de la plataforma base del robot.

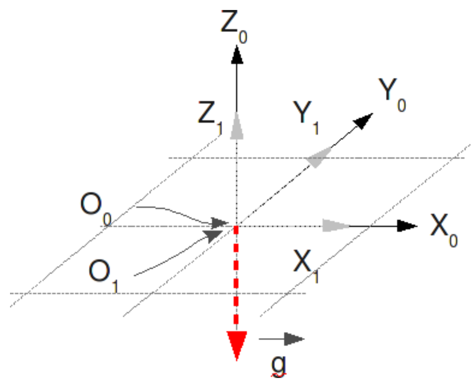
Palabras clave: Control de Inclinacion, Cuadrupedo, Hexapodo, Cinematica

1. Consideraciones en Control de Inclinacion

Se considera inicialmente el problema de control de inclinacion en regimen estatico. Esta aproximacion es valida para modos de caminado de bajas velocidades, sobre ambientes donde no existan componentes de aceleracion externa importantes. Dado esto, aplican los criterios de estabilidad, metricas y restricciones de equilibrio estatico. A continuacion se indican algunas de estas consideraciones:

- Deben de existir al menos 3 puntos de contacto (pata-superficie) no alineados que definan un poligono de apoyo minimo (triangulo)
- Se define como poligono de apoyo efectivo al poligono convexo cuyos vertices estan dados por laspatas que provean de soporte efectivo al robot. Todos los puntos de apoyo que esten contenidos en el interior de dicho poligono son redundantes. (**figura**
- Se asume que no hay deslizamiento en la interfaz de contacto pata-superficie. Esto se modela como un contacto puntual, tipo juntura esferica.
- Para cumplir con los criterios de estabilidad estatica, la proyeccion del vector peso del cuerpo ($m \cdot \vec{g}$) debe de intersectar al poligono de apoyo en su interior.
- El centro de masa del robot se calcula como el centro de gravedad del mismo. Para ello basta con representar el cuerpo del robot como una coleccion de masas puntutales conocidas.
- El margen de estabilidad se define utilizando el criterio de McGhee[ref], siendo la distancia minima desde el punto interseccion del peso y el poligono, con cada uno de los bordes de dicho poligono de apoyo. Para el calculo de la inclinacion del robot se puede usar la convencion **roll-pitch-yaw**, considerando $yaw = 0$ ya que dicha rotacion no afecta en nada el equilibrio de la plataforma. La inclinacion del cuerpo es invariante a $R_{z,\alpha}$

En la Figura 1 se muestran los sistemas de coordenaas de referencia, asi como el vector de aceleracion producto de la gravedad ($\vec{g}$):



(X_0, Y_0, Z_0) Sistema de referencia base
(X_1, Y_1, Z_1) Sistema de referencia movil
O_0: Origen del sistema de referencia base
O_1: Origen del sistema de referencia movil
$\vec{g}$: vector gravedad $= -g \cdot \vec{k}_0$
El sistema 1 y el sistema 0 estan relacionados mediante una matriz de transformacion homogenea 4x4: $\vec{P}_0 = \vec{A}_0^1 \cdot \vec{P}_1$

Debido a que la rotacion de cualquier punto (y por ende su inclinacion) no depende de la traslacion, entonces solo interesa la parte rotacional:$\vec{P}_0 = R_0^1 \cdot \vec{P}_1$, donde R_0^1 es una matriz de rotacion 3 x 3 sobre un eje arbitrario. La matriz de rotacion general sobre un eje arbitrario R_0^1 puede ser representada como $R_{\vec{r},\theta}$, donde el vector $\vec{r}$ es el vector eje arbitrario de rotacion y θ el angulo rotado sobre dicho eje. Tambien se puede describir como 3 rotaciones elementales sobre el sistema base (Roll, Pitch y Yaw) o como 3 rotacion sobre el sistema movil (Euler ZYZ).

$$R_0^1 = R_{Z_0.\gamma} R_{Y_0.\beta} R_{X_0.\alpha} \quad \text{Rotaciones sobre s.base (RPY)}$$
$$R_0^1 = R_{Z_1.\alpha} R_{Y_1.\beta} R_{Z_1.\gamma} \quad \text{Rotaciones sobre s.movil (Euler ZYZ)}$$

En robots moviles se prefiere el uso de la convencion RPY donde los angulos son:

$R_{X,\alpha}$: Roll (Rolido) $R_{Y,\beta}$: Pitch (Cabeceo) $R_{Z,\gamma}$: Yaw (Giro)
Las rotaciones elementales son:

$$R_{Z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_{Y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} R_{X,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Dada las rotaciones elementales, la $R_{RPY} = R_0^1$ que relaciona el sistema movil rotado (SR_1) que esta ubicado sobre el cuerpo del robot, y el SR_0 que es el sistema de referencia base estan relacionados por la matriz definida como:

$$R_0^1 = R_{Z_0,\gamma} R_{Y_0,\beta} R_{X_0,\alpha}$$
$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\beta & \cos\gamma\sin\beta\sin\alpha - \sin\gamma\cos\alpha & \cos\gamma\sin\beta\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha \\ \sin\gamma\cos\beta & \sin\gamma\sin\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Debido a que se tiene como referencia al vector $\vec{g} = -g\hat{k_0}$, nos interesa saber como queda el vector $\hat{k_0}$ despues de la rotacion:

$$\begin{bmatrix} \hat{i_0} \\ \hat{j_0} \\ \hat{k_0} \end{bmatrix} = R_0^1 \cdot \begin{bmatrix} \hat{i_1} \\ \hat{j_1} \\ \hat{k_1} \end{bmatrix}, \quad \hat{k_0} = -\sin\beta\hat{i_1} + \cos\beta\sin\alpha\hat{j_1} + \cos\beta\cos\alpha\hat{k_1} \tag{1}$$

Se puede observar que $\hat{k_0}$ no depende de la rotacion $R_{Z,\gamma}$ (YAW). Dado esto no es posible medir todas las rotaciones utilizando un acelerometro 3-axial. Independientemente de donde se coloquen mas acelerometros, asun no sera posible determinar el valor de γ. Se sabe que cualquier traslacion T_{xyz} puede ser ignorada para el problema de control de inclinacion por lo cual se tiene que los valores medidos por el acelerometro pueden ser descritos como:

$$\begin{cases} \vec{a} = a_{x_1}\hat{i_1} + a_{y_1}\hat{j_1} + a_{z_1}\hat{k_1} & y \quad de \quad [EC1] \\ \vec{g} = -g\vec{k_0} & \hat{k_0} = -\sin\beta\hat{i_1} + \cos\beta\sin\alpha\hat{j_1} + \cos\beta\cos\alpha\hat{k_1} \end{cases}$$

Sabemos que $\vec{a} = \vec{g} + \vec{a}_{ext}$, si asumimos regimen estatico ($\dot{X} = \ddot{X} = 0, \forall x \in \mathbf{R}^3$) no hay aceleraciones externas (robot en reposo), $\vec{a}_{ext} = 0$.

$$\begin{aligned} &\vec{a} = \vec{g} \\ &a_{x_1}\hat{i_1} + a_{y_1}\hat{j_1} + a_{z_1}\hat{k_1} = -g(-\sin\beta\hat{i_1} + \cos\beta\sin\alpha\hat{j_1} + \cos\beta\cos\alpha\hat{k_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} (\hat{i_1}) & a_{x_1} = & g\sin\beta & \beta = \arcsin(\frac{a_{x_1}}{g}) \\ (\hat{j_1}) & a_{y_1} = & -g\cos\beta\sin\alpha & \\ (\hat{k_1}) & a_{z_1} = & -g\cos\beta\cos\alpha & \alpha = \arctan(\frac{a_{y_1}}{a_{z_1}}) \end{array}$$

1.1. Estimacion de YAW: $R_{Z,\gamma}$

Partiendo de la matriz de rotación que asocia la aceleración medida sobre el sistema móvil $\vec{a}$, y la definición del vector de gravedad $\vec{g}$, se tiene que:

$$\vec{a}_o = \vec{g} = R_0^1 \cdot \vec{a}_1$$

$$\vec{a}_o = \begin{bmatrix} c\gamma c\beta & c\gamma s\beta s\alpha - s\gamma c\alpha & c\gamma s\beta c\alpha + s\gamma s\alpha \\ s\gamma c\beta & s\gamma s\beta s\alpha + c\gamma c\alpha & s\alpha s\beta c\alpha - c\gamma s\alpha \\ -s\beta & c\beta s\alpha & \cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Luego se pueden escribir dos ecuaciones para los términos $\hat{i}_o$ y $\hat{j}_o$:

$$c\gamma c\beta a_x^1 + (c\gamma s\beta s\alpha - s\gamma c\alpha)a_y^1 + (c\gamma s\beta c\alpha + s\gamma s\alpha)a_z^1 \tag{2}$$

$$s\gamma c\beta a_x^1 + (s\gamma s\beta s\alpha + c\gamma c\alpha)a_y^1 + (s\alpha s\beta c\alpha - c\gamma s\alpha)a_z^1 \tag{3}$$

Si reordenamos los terminos en torno a $\cos\gamma$ y $\sin\gamma$ tenemos:

$$(c\beta a_x^1 + s\beta s\alpha a_y^1 + s\beta c\alpha a_z^1)c\gamma + (s\alpha a_z^1 - c\alpha a_y^1)s\gamma = 0 \tag{4}$$

$$-(-c\alpha a_y^1 + s\alpha a_z^1)c\gamma + (c\beta a_x^1 + s\beta s\alpha a_y^1 + s\beta c\alpha a_z^1)s\gamma = 0 \tag{5}$$

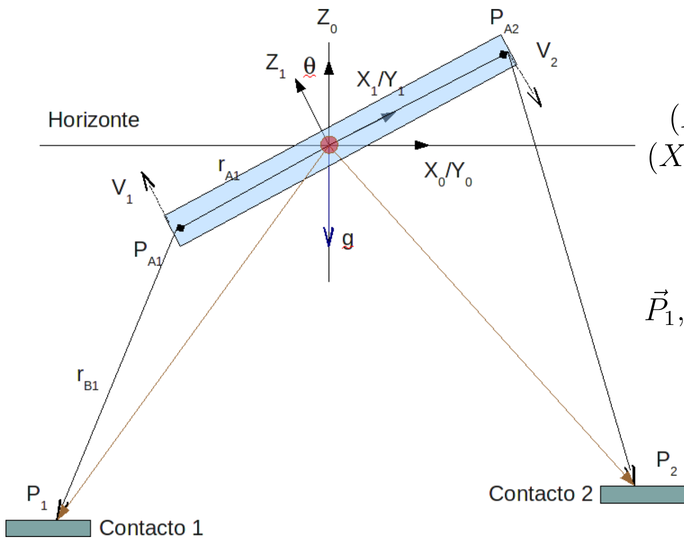
Y llamando $A = (c\beta a_x^1 + s\beta s\alpha a_y^1 + s\beta c\alpha a_z^1)$ y $B = (s\alpha a_z^1 - c\alpha a_y^1)$ resulta el sistema:

$$\begin{array}{rcrcl} A\cos\gamma & + & B\sin\gamma & = & 0 \\ -B\cos\gamma & + & A\sin\gamma & = & 0 \end{array}$$

que es un sistema cuyo determinante $A^2 + B^2$ no es cero!. El sistema es compatible determinado, admitiendo como solución única la trivial.

Ahora bien, si se toman muchas muestras del vector de aceleracion visto desde el sistema móvil [SC1], para diferentes posiciones, con distintos pitch y roll, podríamos tener varias expresiones de A y B, que escritas en un sistema de ecuaciones podrían permitir sacar, por mínimos cuadrados, una estimación del coseno y seno incógnitos. Se usaría la pseudo inversa de la matriz montada con las distintas realizaciones de A y B.

2. Problema de Control de Inclinacion



(X_0, Y_0, Z_0) Sistema de referencia base [SB]
(X_1, Y_1, Z_1) Sistema de referencia movil [SM]
θ: angulo de inclinacion sobre $\vec{r}$
$\vec{r}$: eje instantaneo de rotacion
P_1, P_2: puntos de apoyo pata-suelo
$\vec{P}_1, \vec{P}_2$: posicion pata con respecto a [SB][SM]
$\vec{r}_{ai}$: vector SB-hombro
$\vec{r}_{bi}$: vector hombro-pata
$\vec{a}$: vector de aceleracion
$\vec{V}_1, \vec{V}_2$: vector tangencial de correccion

Se tiene que el eje instantaneo de rotacion $\vec{r}$ puede ser calculado como $\vec{r} = \vec{k}_0 \times \vec{k}_1$, donde la direccion de $\vec{k}_0$ viene dada por $-\vec{a}$, lo cual puede ser expresado en su forma unitaria de la siguiente manera:

$$\hat{r} = \hat{k_1} \times \hat{a} = \hat{k_1} \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{g} \cdot (\hat{k_1} \times \vec{a}) \tag{6}$$

Los vectores tangenciales $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ en cuya direccion han de aplicarse el control para asegurar que el robot gire sin traslacion alrededor de $\vec{r}$, pueden ser determinados por:

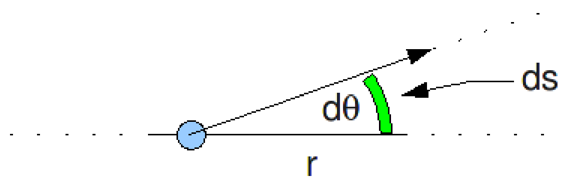
$$\vec{V}_i = \vec{r}_{ai} \times \vec{r} \tag{7}$$

El vector $\vec{r}$ es conocido, falta por determinar los vectores $\vec{r}_{ai}$. Estos se pueden definir como vectores que pertenecen a la recta de minima distancia entre los puntos $\vec{P}_{A1}, \vec{P}_{A2}$ y la recta de direccion $\vec{r}$ que pasa por el origen.
PD: $\vec{r}_{a1}$ y $\vec{r}_{a2}$ estan contenidos en el plano X_1/Y_1, siempre $\vec{Z}_1 = 0$ en estos 2 vectores.

IMPORTANTE: Los vectores de correccion $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ siempre estan en la direccion de $\vec{Z}_1$. Falta por determinar la magnitud de la accion de control.

3. Propuesta de Accion de Control de Inclinacion

Para el calculo del modulo de las acciones de control $\vec{C}_i$ en la direccion de $\vec{V}_i$ se propone usar la aproximacion de un arco diferencial:



$$\begin{aligned} ds &= r \cdot d\theta \\ \vec{ds} &= r \cdot \vec{d\theta} \\ \left|\vec{ds}\right| &= r \cdot \left|\vec{d\theta}\right| \end{aligned}$$

Se propone que $\left|\vec{V}_i\right| = r_i$, con $r_i = \vec{P}_i \cdot \hat{r}_{Ai}$

Se requiere que $\vec{r}_{Ai}$ sea normalizado para que el producto punto (proyeccion) de $\vec{P}i$ de el valor correcto sin facto e escala. Al final nos queda que el vector de correccion puede ser calculado como:

$$\vec{V}_i = \vec{P}_i \cdot \frac{\vec{r}_{Ai}}{|\vec{r}_{Ai}|} \cdot \hat{k}_1 \tag{8}$$

Si se usa el vector $\vec{r}_{Ai}$ como referencia para todos los demas vectores de correccion, entonces el calculo de $\vec{V}_i$ sigue siendo valido. Para el calculo del vector final de correccion $\vec{C}_i$ tenemos:

$$\hat{r} \times \hat{k}_1 = \hat{r}_{A1} \tag{9}$$

sustituyendo en (5), nos queda que el vector de control final es:

$$\vec{C}_i = \delta\theta(\vec{P}_i \cdot \hat{r}_{Ai})(-\hat{k}_1) \tag{10}$$

Si reemplazamos (6) y (4) en (7), finalmente tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{C}_i = &\ \delta\theta(\vec{P}_i \cdot \hat{r}_{Ai})(-\hat{k}_1) \\ = &\ \delta\theta(\vec{P}_i \cdot (\tfrac{1}{g}(\hat{k}_1 \times \vec{a}) \times \hat{k}_1))(-\hat{k}_1) \\ = &\ -\tfrac{\delta\theta}{g}(\vec{P}_i \cdot ((\hat{k}_1 \times \vec{a}) \times \hat{k}_1))(\hat{k}_1) \end{aligned} \tag{11}$$