

# Introducción al Modelaje de Sistemas Dinámicos en Variables de Estados (SCII-1)

Prof. José Ferrer      Prof. José Manuel Andrade  
Prof. Pedro Teppa  
Centro de Teoría Matemática de Sistemas  
Departamento de Procesos y Sistemas  
Universidad Simón Bolívar

Enero-Marzo 2005

## Abstract

En estas notas se presentan de una manera sencilla los conceptos fundamentales de la teoría de representación de sistemas dinámicos en variables de estados. Se presentan metodologías para establecer los modelos en variables de estados de cuatro tipo de sistemas: a) Sistemas eléctricos, b) Sistemas Mecánicos Traslacionales, c) Sistemas Mecánicos Rotacionales, y d) Sistemas Electromecánicos. También se presentan ejemplos de plantas típicas de procesos petroquímicos. La metodología final a emplear será la fundamentada en el concepto de circuitos eléctricos análogos ya que es natural para los estudiantes de ingeniería eléctrica y permite la consolidación de las herramientas de la teoría de redes eléctricas.

## 1 Notación Operacional

Cuando se deducen las ecuaciones dinámicas de un sistema de control, resulta conveniente emplear la notación que se emplea en análisis operacional

$$p^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

para  $n = 1, 2, \dots$ .

El operado  $p$  es un símbolo que representa formalmente la operación de diferenciación con respecto al tiempo. Por ejemplo, si  $f(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  son funciones

de tiempo suficientemente derivables, y  $\alpha \in C$  entonces se tiene

$$\begin{aligned} p(f(t) + g(t)) &= \frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] = \frac{d}{dt}f(t) + \frac{d}{dt}g(t) \\ &= pf(t) + pg(t) \\ p(\alpha f(t)) &= \frac{d}{dt}[\alpha f(t)] = \alpha \frac{d}{dt}f(t) = (\alpha p)f(t) \end{aligned}$$

Esto demuestra que el operador  $p$  es lineal ya que

$$\begin{aligned} p(f(t) + g(t)) &= pf(t) + pg(t) \\ p(\alpha f(t)) &= (\alpha p)f(t) \end{aligned}$$

De igual manera puede demostrarse que si  $\alpha, \beta \in C$ , y  $f(\cdot)$  es una función de tiempo suficientemente derivable, entonces

$$\begin{aligned} (p + \alpha)(p + \beta)f(t) &= (p + \alpha)[(p + \beta)f](t) \\ &= (p + \alpha)\left[\frac{d}{dt}f(t) + \beta f(t)\right] \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}f(t) + \beta f(t)\right] + \alpha\left[\frac{d}{dt}f(t) + \beta f(t)\right] \\ &= \frac{d^2}{dt^2}f(t) + \beta \frac{d}{dt}f(t) + \alpha \frac{d}{dt}f(t) + \alpha\beta f(t) \\ &= \frac{d^2}{dt^2}f(t) + (\alpha + \beta) \frac{d}{dt}f(t) + \alpha\beta f(t) \\ &= [p^2 + (\alpha + \beta)p + \alpha\beta]f(t) \end{aligned}$$

En consecuencia, también se cumple la propiedad conmutativa

$$(p + \alpha)(p + \beta)f(t) = (p + \beta)(p + \alpha)f(t)$$

Considere ahora la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d}{dt}x(t) + ax(t) = f(t) \tag{1}$$

la cual puede representarse en forma operacional como

$$(p + a)x(t) = f(t)$$

Para resolver la ecuación (1), multiplique ambos lados por el factor integrante  $e^{at}$ . O sea,

$$e^{at}\left[\frac{d}{dt}x(t) + ax(t)\right] = e^{at}f(t)$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}[x(t)e^{at}] = e^{at}f(t)$$

e integrando se obtiene

$$e^{at}x(t) = \int_{t_0}^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau + C$$

En otras palabras,

$$x(t) = e^{-at} \left\{ \int_{t_0}^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau + e^{at_0} x(t_0) \right\}$$

para todo  $t \in R$ .

Para verificar que esta es una solución de (1), note que

$$\begin{aligned} px(t) &= p \left\{ e^{-at} \left[ \int_{t_0}^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau + e^{at_0} x(t_0) \right] \right\} \\ &= -ae^{-at} \left[ \int_{t_0}^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau + e^{at_0} x(t_0) \right] + e^{-at} \frac{d}{dt} \left[ \int_{t_0}^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau + e^{at_0} x(t_0) \right] \\ &= -ae^{-at} \left[ \int_{t_0}^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau + e^{at_0} x(t_0) \right] + e^{-at} [e^{at} f(t)] \\ &= -ae^{-at} \left[ \int_{t_0}^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau + x(t_0) \right] + f(t) \end{aligned}$$

y por otro lado

$$ax(t) = ae^{-at} \left\{ \int_{t_0}^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau + e^{at_0} x(t_0) \right\}$$

En consecuencia

$$(p + \alpha)x(t) = px(t) + \alpha x(t) = f(t)$$

y formalmente puede escribirse

$$x(t) = \frac{1}{(p + \alpha)} f(t)$$

siempre que se tenga en mente que lo que significa en realidad es

$$\frac{1}{p + \alpha} f(t) = e^{-at} \left\{ \int_{t_0}^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau + e^{at_0} x(t_0) \right\} \quad (2)$$

Recuerde que se ha demostrado que  $(p + \alpha)x(t) = f(t)$  y por lo tanto

$$f(t) = f(t)$$

esto es

$$\frac{(p + \alpha)}{(p + \alpha)} = 1$$

donde 1 es el operador identidad, esto es  $1f(t) = f(t)$ .

En general,

$$(p + \alpha)^m \frac{1}{(p + \alpha)^n} = (p + \alpha)^{m-n}$$

para todo  $m, n \in Z_+$ . Donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p + \alpha)^n} f(t) &= \frac{1}{(p + \alpha)^{n-1}} \left\{ \frac{1}{p + \alpha} f(t) \right\} \\ &= \frac{1}{(p + \alpha)^{n-1}} \left\{ e^{-\alpha t} \left\{ \int_{t_0}^t e^{\alpha \tau} f(\tau) d\tau + e^{\alpha t_0} x(t_0) \right\} \right\} \end{aligned}$$

para  $n \in Z_+$ .

En particular si  $\alpha = 0$  y  $n = 1$ , entonces

$$p^{-1} f(t) = \frac{1}{p} f(t) = \int f(\tau) d\tau + C$$

Esto es,  $p^{-1}$  representa el operador de integración y  $C$  es una constante a determinar de las condiciones iniciales.

Cuando se trabaja con notación operacional debe tenerse mucho cuidado ya que de lo contrario se cometerán errores. Esto es importante, ya por ejemplo

$$\begin{aligned} p \left[ \frac{1}{p} f(t) \right] &= p \left\{ \int f(\tau) d\tau + C \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \int f(\tau) d\tau + C \right\} = f(t) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} [pf(t)] &= \frac{1}{p} \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} = \int \left[ \frac{d}{dt} f \right](\tau) d\tau + C \\ &= f(t) + C \end{aligned}$$

Si se define

$$y(t) = \int [pf(\tau)] d\tau = \int f^{(1)}(\tau) d\tau = f(t) + C$$

es importante observar que

$$y(t_0) = f(t_0) + C$$

y en consecuencia

$$y(t) = \int f^{(1)}(\tau) d\tau = f(t) + y(t_0) - f(t_0)$$

En otras palabras de cancelarse los operadores en

$$y(t) = p^{-1} [pf(t)]$$

lo conduciría al error de concluir que  $y(t) = f(t)$ . Esta igualdad será cierto cuando todas las condiciones iniciales sean cero o cuando  $y(t_0) = f(t_0)$

Finalmente, puede demostrarse que

$$y(t) = \frac{1}{p^m} p^n f(t) = p^{n-m} f(t)$$

es válida si las condiciones iniciales son tales que a) si  $n > m$ ,  $y(t_0) = p^{n-m} f(t_0)$ , b) si  $n = m$ ,  $y(t_0) = f(t_0)$ , c) si  $n < m$ , entonces  $f(t_0) = p^{m-n} y(t_0)$ . Por el contrario

$$y(t) = p^n \frac{1}{p^m} f(t) = p^{n-m} f(t)$$

para todo  $n, m \in Z_+$  ya que todas las condiciones iniciales serán canceladas cuando se deriven las integrales.

**Ejemplo 1** Para la expresión operacional

$$y(t) = \frac{1}{p} p^2 f(t)$$

**Solución 2** La forma resultante después de la cancelación es

$$y(t) = \frac{1}{p} p^2 f(t) = p f(t) = \frac{d}{dt} [t^2 + 3t + 5] = 2t + 3$$

Evaluando en  $t = 0$ , se genera la condición inicial

$$y(0) = f'(0) = [2t + 3]_{t=0} = 3$$

Y esto se constata realizando las operaciones indicadas

$$y(t) = \frac{1}{p} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right\} = \frac{1}{p} f^{(2)}(t) = f^{(1)}(t) + C$$

y evaluando en  $t = 0$ , se encuentra que  $C = y(0) - f^{(1)}(0)$ . Si se desea que  $y(t) = f^{(1)}(t)$ , es necesario que  $y(0) = f'(0) = [2t + 3]_{t=0} = 3$ , tal que  $C = 0$ .

**Ejemplo 3** Para la relación operacional

$$y(t) = \frac{1}{p^2} p f(t)$$

encuentre las condiciones iniciales requeridas para que la cancelación de los operadores sea cierta. Para  $f(t)$  use la señal

$$f(t) = 3t^2 + 2t + 1$$

$t \in R$ .

**Solución 4** La forma resultante después de la cancelación es

$$y(t) = \frac{1}{p} f(t)$$

o sea

$$f(t) = py(t)$$

Evaluando en  $t = 0$  se obtiene

$$y^{(1)}(0) = f(0) = [3t^2 + 2t + 1]_{t=0} = 1$$

Para verificar este resultado, es recomendable realizar las operaciones indicadas

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{p^2} p f(t) = \frac{1}{p} \left\{ \int f^{(1)}(\tau) d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{p} [f(t) + C] \end{aligned}$$

o sea

$$y^{(1)}(t) = f(t) + C$$

Evaluando en  $t = 0$ , se demuestra que  $C = .$  Para que  $y'(t) = f(t)$ , es necesario que  $y^{(1)}(0) = f(0)$ : o sea,  $C = 0$ .

El operador  $\frac{1}{p+\alpha}$  tiene propiedades similares al operador de integración  $p^{-1}$ . Para demostrar esto, considere la forma operacional

$$y(t) = \frac{1}{p+\alpha} (p+\alpha) f(t) = \frac{1}{p+\alpha} f^{(1)}(t) + \frac{1}{p+\alpha} \alpha f(t)$$

Ahora aplique (2) para obtener

$$y(t) = e^{-\alpha t} \left[ \int f^{(1)}(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau + C_1 \right] + \alpha e^{-\alpha t} \left[ \int f(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau + C_2 \right]$$

Integrando por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

donde  $u = e^{\alpha t}$ ,  $du = \alpha e^{\alpha t}$ , y  $v = f(t)$ ,  $dv = f^{(1)}(\tau) d\tau$  para obtener

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\alpha t} \left[ f(t) e^{\alpha t} - \alpha \int f(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau + C_1 \right] + \\ &\quad \alpha e^{-\alpha t} \left[ \int f(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau + C_2 \right] \\ &= f(t) + C e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

donde  $C = C_1 + \alpha C_2$ . Evaluando en  $t = t_0$ , se obtiene que

$$C = [y(t_0) - f(t_0)] e^{\alpha t_0}$$

y por lo tanto

$$y(t) = f(t) + [y(t_0) - f(t_0)] e^{-\alpha(t-t_0)}$$

El término  $1/(p + \alpha)$  denota integración. Al igual que para el caso del operador  $p^{-1}$ , los operadores no pueden cancelarse cuando la integración es la última operación a ser realizada al menos que la constante de integración sea nula. La constante de integración desaparece cuando las condiciones iniciales son tales que se cumple la forma resultante después de la cancelación. En el ejemplo dado, esto ocurre cuando  $y(t_0) = f(t_0)$ , entonces

$$C = [y(t_0) - f(t_0)] e^{\alpha t_0} = 0$$

En general puede demostrarse que

$$y(t) = \frac{1}{(p + \alpha)^m} (p + \alpha)^n f(t) = (p + \alpha)^{n-m} f(t)$$

es válida si las condiciones iniciales son tales que satisfacen la relación resultante luego de la cancelación

En resumen, los operadores  $p$  y  $p + \alpha$  tienen propiedades similares, y la cancelación de operadores es válida siempre que la operación de diferenciación sea la última a realizar. Sin embargo, cuando integración es la última operación a realizar, la cancelación será válida siempre que las condiciones iniciales sean tales que satisfagan la expresión resultante después de la cancelación. En este último caso, las cancelaciones son válidas si las condiciones iniciales son todas cero.

## 2 Modelaje de Sistemas Lineales en Variables de Estados

Sea  $P$  una planta descrita por el operador

$$P : U \rightarrow T : u \rightarrow y = Pu \quad (3)$$

donde

$$y(t) = P(u(t)), \forall t \in T$$

Suponga además que la planta es no-lineal, causal, de parámetros concentrados y de tiempo continuo con  $T = [0, \infty)$

**Definición 5** Considere una planta  $P$  dada por  $\mathcal{P}$ , y sean  $x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$ , un conjunto de  $n$  variables asociadas a  $P$ . Diremos que dichas variables son variables de estados de la planta dada si, y solo si, para un cierto  $t_0 \in T$  se tiene que conociendo los valores iniciales  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ , y el vector de entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$ , se puede determinar unívocamente la trayectoria futura de estado del sistema  $x(t), t \geq t_0$  conjuntamente con el vector respuesta del sistema  $y(t)$  para todo  $t \geq t_0$ .

Una vez asignadas  $n$  variables como las componentes o variables de estados de la planta  $P$ , se define como vector de estado del sistema a  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^{Tr}$ , (la operación  $Tr$  es transposición matricial). Mas aún, al entero positivo  $n$  que representa el número de variables de estados se le denomina **orden o dimensión** del sistema  $P$ .

Lo que se asigna como vector de estado a un sistema dado puede corresponder al uso de cantidades físicas bien definidas (voltajes, corrientes, velocidades, posiciones, etc) o consecuencia de otras consideraciones (además de las físicas) tales como las consideradas en el cálculo o solución de las ecuaciones dinámicas del sistema. Por ejemplo para sistemas mecánicos se sabe que al conocer las velocidades de las masas y las posiciones de los resortes en una red mecánica en un instante de tiempo dado, es posible predecir el comportamiento futuro del sistema mecánico dado sin recurrir a información mas anterior de la considerada. Las velocidades de las masas y las posiciones de los resortes constituyen el estado del sistema bajo estudio. Las leyes de Newton permiten determinar la evolución del estado. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 6** (*ver<sup>(1)</sup>*). Considere la planta  $P$  : "Satélite en órbita con la Tierra" mostrada en la figura (1). Se supone que la masa del satélite,  $m$ , será constante bajo la acción de la fuerza de gravedad de la tierra. El planeta es una esfera homogénea que gira a una velocidad angular constante  $\omega$ , y su centro es un punto fijo en el espacio. El problema de control consiste en mantener al satélite en una órbita circular sobre una posición deseada, definida por la distancia del centro de la tierra al satélite  $r$ , sujeta a todas las perturbaciones que tienden a mover al satélite fuera de la trayectoria establecida. Esto es se buscan torques  $T_r$  y  $T_\theta$  tal que el radio  $r(t)$  del satélite sea constante y  $\theta(t) \rightarrow \omega t$  donde  $\omega$  representa la velocidad angular de la tierra y  $\theta$  es el ángulo del satélite a partir de la dirección de una dirección de una línea base fija (la línea horizontal punteada de la figura).

En la figura se muestran los vectores unitarios  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  y  $\vec{e}_z$  (este último en dirección saliendo del papel que coincide con el polo norte de la tierra) que definen los ejes de coordenadas

El vector de posición para el satélite está dada por

$$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r$$

y la velocidad angular del sistema giratorio es

$$\vec{W}(t) = \left( \frac{d}{dt} \theta \right) \vec{e}_r$$

Es posible demostrar aplicando las leyes de Newton en las direcciones  $r$  y  $\theta$  que las ecuaciones de movimiento del satélite son

$$\begin{aligned} m \left[ \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - r(t) \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \right] &= T_r(t) - \frac{\mu M m}{r^2(t)} \\ m \left[ r(t) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + 2 \frac{dr(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} \right] &= T_\theta(t) \end{aligned}$$



donde  $\mu$  es la constante de gravitación universal.

Defina como variables de estados

$$x_1(t) = r(t); \quad x_2(t) = \frac{dr(t)}{dt}; \quad x_3(t) = \theta(t) - \omega t; \quad x_4(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (4)$$

las entradas al sistema se tomarán como

$$u_1(t) = \frac{T_r(t)}{m}; \quad u_2(t) = \frac{T_\theta(t)}{m}$$

En consecuencia las ecuaciones de estados de la planta serán

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) &= f_1(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)x_4^2(t) + \frac{\mu M m}{x_1^2(t)} + u_1(t) &= f_2(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) - \omega &= f_3(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_4(t) &= -\frac{2x_2(t)x_4(t)}{x_1(t)} + \frac{u_2(t)}{x_1(t)} &= f_4(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

Ahora supóngase que se utiliza un radar para hacer las mediciones. En general, se podrá medir solamente una parte del estado a algunas funciones que involucren solo parte del estado. Suponga que solo se puede medir  $r$  y  $\theta - \omega t$  y que las mediciones son exactas; entonces, las ecuaciones de salida del sistema son

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) = g_1(x(t), u(t)) \\ y_2(t) &= x_3(t) = g_2(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

En general se supone que el conjunto de entradas que se aplicarán a la planta es

$$\Omega_u = \left\{ u \in L_2[0, \infty) : \|u\|_2 \leq \frac{T_{\max}}{m} \right\}$$

donde  $T_{\max}$  es magnitud máxima que puede soportar el satélite.

En este caso, las variables de estados  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  y  $x_4(t)$  empleadas (ver (4)) tienen un significado físico definido, ya que cada una de ellas representa una variable física relevante a la representación dinámica de la planta considerada.

Si para una planta dada  $P$  se encuentra un vector de estados  $x(t)$  el cual cumple con las hipótesis arriba exigidas, entonces uno de los modelos en variables de estados para representar sistemas no-lineales es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad (5)$$

donde

- $T = R_+ = [0, \infty)$
- $\forall t \in R_+, x(t) \in R^n$  es el estado de la planta en el instante  $t$ .
- $\forall t \in R_+, u(t) \in R^{n_u}$  es la entrada o ley de control de la planta en el instante  $t$ .

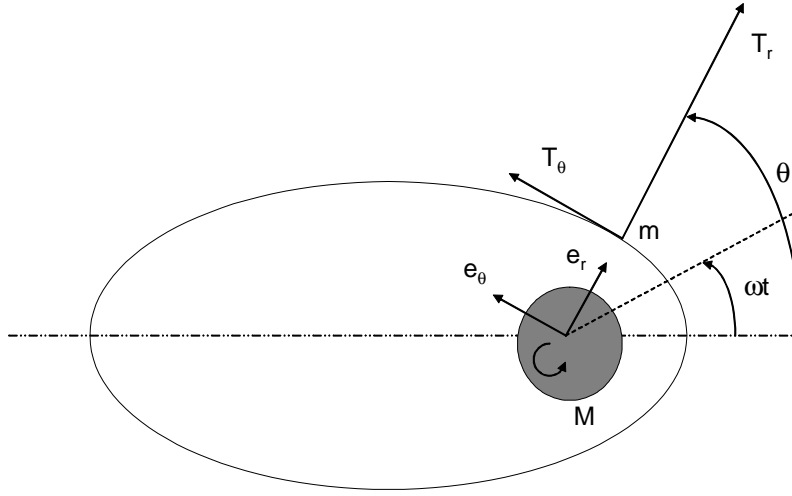


Figure 1: Satélite en órbita con la Tierra

- $\forall t \in R_+, y(t) \in R^{n_y}$  es la salida o variable controlada de la planta en el instante  $t$ .
- $f : R^n \times R^{n_u} \times R_+ \rightarrow R^n$
- $g : R^n \times R^{n_u} \times R_+ \rightarrow R^{n_y}$

La relación  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  se le denomina **ecuación de estado**, mientras que a  $y(t) = G(x(t), u(t), t)$  se le conoce como **ecuación de salida** de la planta..

Es interesante observar que las ecuaciones de estados de un sistema dado  $P$ , 5, representan un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. Este tipo de modelo no es nada restrictivo, ya que si sucede que la planta  $P$  está descrita por una ecuación diferencial escalar de orden  $n$  como la que se muestra a continuación

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \Psi \left( y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}, u(t), t \right) \quad (6)$$

entonces, manipulando dicha relación es posible transformarla en la forma 5. Para eso defina

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \frac{d}{dt}y(t), \quad \dots, \quad x_n(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)$$

y se tiene que 6 es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= \Psi(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \end{aligned}$$

Y observe que dichas relaciones coincide con 5 si se toma

$$\begin{aligned} x(t) &= [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^{Tr} \\ f(x(t), u(t), t) &= [x_2(t), \dots, x_n(t), \Psi(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t)]^{Tr} \end{aligned}$$

**Ejemplo 7** (Sistemas Robóticos) Las ecuaciones dinámicas que describen un robot rígido es

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (7)$$

donde  $M(q)$  es una matriz de inercia  $n \times n$ ,  $q$  y sus derivadas son vectores de dimensión  $n \times 1$  de coordenadas generalizadas, y  $V(q, \dot{q})$ ,  $G(q)$  y  $\tau$  son vectores de dimensión  $n \times 1$  que contienen los torques dependientes de velocidades, los torques de gravedad, y los torques de entrada respectivamente.

Suponga que se define como vector de estados

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \in R^{2n}, \\ x^{(1)}(t) &\in R^n, x^{(2)}(t) \in R^n \end{aligned} \quad (8)$$

y que el vector de entrada es  $u(t) = \tau(t)$ , y que la salida de este sistema es  $y(t) = q(t)$ . Ahora bien, es posible demostrar que todos los sistemas robóticos son tales que la matriz de inercias  $M(q(t))$  es invertible para todo  $t$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ -M^{-1}(q(t)) [V(q(t), \dot{q}(t)) + G(q(t))] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q(t)) \end{bmatrix} \tau(t) \\ y(t) &= [I_n, 0] \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Finalmente, usando la definición 8 se puede expresar 9 como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(2)} \\ -M^{-1}(x^{(1)}) [V(x^{(1)}, x^{(2)}) + Gx^{(1)}] + M^{-1}(x^{(1)})u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), u(t)) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (10)$$

donde

$$\bullet f_1(x(t), u(t)) = x^{(2)} \text{ y}$$

- $f_1(x(t), u(t)) = -M^{-1}(x^{(1)}) [V(x^{(1)}, x^{(2)}) + Gx^{(1)}] + M^{-1}(x^{(1)}) u$

Mientras que la ecuación de salida será

$$y(t) = [I_n, 0]x(t) = g(x(t), u(t)) \quad (11)$$

Por lo tanto, mediante las relaciones 10 y 11 hemos obtenido un modelo de 7 de la forma mostrada en 5

**Teorema 8** Sea  $P$  una planta continua, de dimensión finita y causal descrita por las ecuaciones de estados 5. Si  $P$  es lineal, entonces el mencionado modelo se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

donde para todo  $t \in R_+$ ,  $A(t) \in R^{n \times n}$ ,  $B(t) \in R^{n \times n_u}$ ,  $C(t) \in R^{n_y \times n}$ ,  $D(t) \in R^{n_y \times n_u}$ , con  $n$  la dimensión del sistema.

A continuación presentamos un ejemplo sencillo que permite ilustrar la manera en que se seleccionan las variables de estados.

**Ejemplo 9** Sea  $P$  una planta continua, escalar, de parámetros concentrados, con entrada  $u \in U = \{u \in L_2[0, +\infty) : \frac{d^i}{dt^i}u \text{ existen para } i = 1, 2, \dots, m\}$ . Descrito por la ecuación diferencial Entrada/Salida siguiente:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_{m+1} \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t)$$

Ahora, recuerde que para resolver esta ecuación diferencial de orden  $n$ , o sea, calcular  $y(t)$  para todo  $t \geq t_0$ , dado  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$ , se requiere  $n$ -condiciones iniciales (CI's). Generalmente dichas CI's son

$$y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0) \quad (12)$$

Por lo tanto, si se definen

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= y(t_0) \\ x_2(t_0) &= y'(t_0) \\ &\vdots \\ x_n(t_0) &= y^{(n-1)}(t_0) \end{aligned}$$

se observa de inmediato, que conociendo  $x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0))'$  (las CI's, ?? conjuntamente con el segmento de entrada  $\{u(t) : t \geq t_0\}$ , es suficiente para determinar  $x(t)$  e  $y(t)$  para todo  $t \geq t_0$ . En otras palabras,  $x(t) = (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t))'$  califica como vector de estado de la planta  $P$  dada. Mas aún, las variables de estados seleccionadas de esta manera se conocen con el nombre de variables de fase.

Sea  $P$  una planta continua, de dimensión finita, causal e invariante en el tiempo descrita por las ecuaciones de estados 5. Si  $P$  es lineal, entonces el mencionado modelo se convierte en

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{13}$$

donde para todo  $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times n_u}, C \in R^{n_y \times n}, D \in R^{n_y \times n_u}$ , con  $n$  la dimensión del sistema. En cuyo caso expresaremos 13 usando la siguiente estructura de datos:

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{n,x}$$

### 3 Formulación de las Ecuaciones de Estados para un Sistema Físico

Existen diversas maneras para formular las ecuaciones de estados de una planta dada  $P$ . En esta sección se presentará un método bastante sistemático para plantear dichas ecuaciones.

Lo primero que hay que suponer es que toda planta física  $P$  puede representarse en términos de las interacciones entre un número finito de elementos agrupados. Sin embargo, el propósito no es ser exhaustivo en el tratamiento, sino ilustrar el procedimiento para los siguientes tipos de plantas:

- Sistemas Eléctricos,
- Sistemas Mecánicos Traslacionales,
- Sistemas Mecánicos Rotacionales,
- Sistemas Electromecánicos.

#### 3.1 Modelaje en Variables de Estados de Redes Eléctricas Lineales

A continuación se establecerá una regla general para la derivación de las ecuaciones de estados de una planta  $P$  constituida solo por elementos eléctricos pasivos, y luego se presentarán ejemplos para ilustrar el uso de la técnica. Estos ejemplos servirán también para demostrar la dificultades que se pueden encontrar con la aplicación del procedimiento de modelaje.

El procedimiento para establecer las ecuaciones de estados de una red eléctrica  $P$  mediante la asignación de variables físicas correspondientes a variables asociadas a los elementos acumuladores de energía, se muestra a continuación:

1. Identifique cada la corriente de cada inductor y el voltaje de cada condensador con una componente del vector de estado  $x$ . Naturalmente, corrientes de diferentes inductores y diferentes condensadores le corresponderán diferentes entradas (a pesar de que los valores nominales de los inductores o condensadores sean idénticos).
2. Use la ley de corrientes o la ley de voltajes de Kirchhoff para escribir una ecuación que solo involucre una de las componentes de  $\frac{dx}{dt}$ , pero que no involucre cualquier componente del vector de salida  $y$  o cualquier otra variable distinta a las componentes del estado  $x$  o del vector de entrada  $u$ .
3. Use la ley de corrientes o la ley de voltajes de Kirchhoff para escribir una ecuación que solo involucre una de las componentes de  $y$ , pero que no involucre cualquier componente del vector  $\frac{dx}{dt}$  o cualquier otra variable distinta a las componentes del estado  $x$  o del vector de entrada  $u$ .
4. Organice las ecuaciones derivadas en el paso (2) como

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

y a aquellas derivadas en el paso (3) como

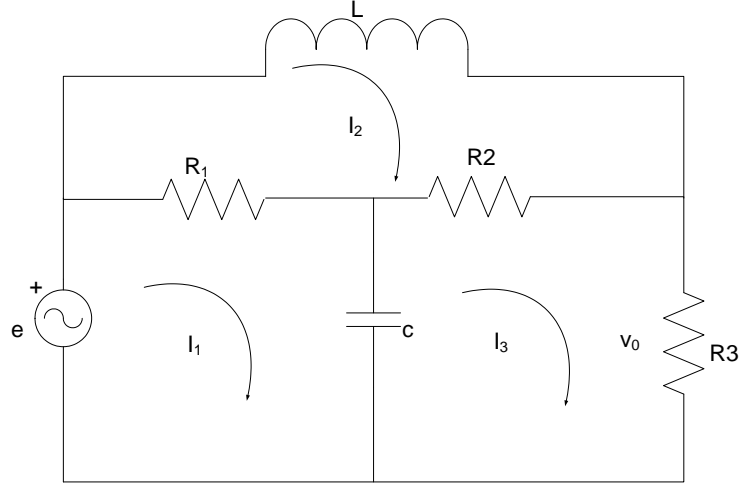
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Es posible sistematizar aún más la deducción de las ecuaciones dinámicas de la planta (pasos (1) y (2)) mediante los llamados métodos de lazos y de nodos. Con el objeto de ilustrar la aplicación de dichos métodos considere la el sistema eléctrico con varias mallas mostrado en la figura (3.1)

y el mismo circuito pero ahora visto como una *red* con múltiples nodos (ver figura (3.1)).

**Método de Lazo** Considere en este caso el sistema mostrado en la figura (3.1), y considere como objetivo expresar las corrientes de lazo en términos de las fuentes de tensión aplicadas a la red. Dibuje una corriente de lazo alrededor de cada lazo cerrado de la red en sentido horario, y luego escriba la ecuación de voltaje Kirchhoff para cada lazo. En este caso se tienen tres lazos, y en consecuencia se obtienen tres ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(R_1 + \frac{1}{C_p}\right) i_1(t) - R_1 i_2(t) - \frac{1}{C_p} i_3(t) &= e(t) \\ -R_1 i_1(t) + (R_1 + R_2 + Lp) i_2(t) - R_2 i_3(t) &= 0 \\ -\frac{1}{C_p} i_1(t) - R_2 i_2(t) + \left(R_1 + R_3 + \frac{1}{C_p}\right) i_3(t) &= 0 \end{aligned}$$



o en forma matricial

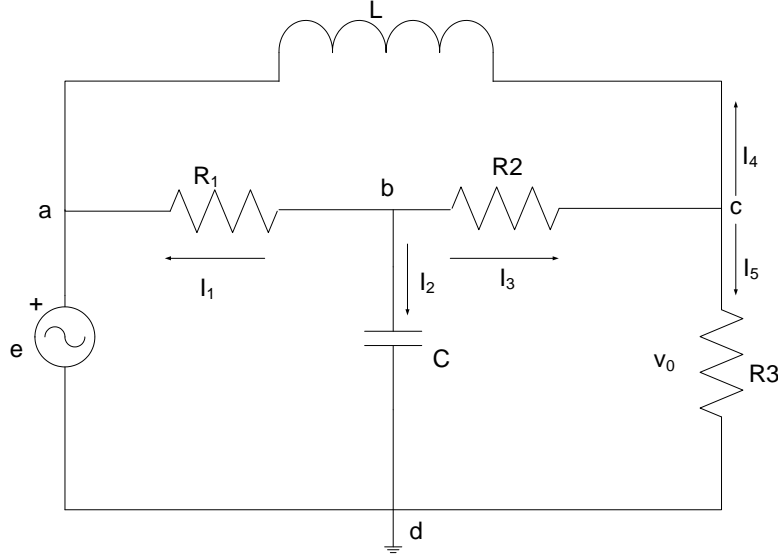
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(R_1 + \frac{1}{Cp}\right) & -R_1 & -\frac{1}{Cp} \\ -R_1 & (R_1 + R_2 + Lp) & -R_2 \\ -\frac{1}{Cp} & -R_2 & \left(R_1 + R_3 + \frac{1}{Cp}\right) \end{bmatrix}}_{Q(p)} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Noten que la matriz de operadores  $Q(p)$  es simétrica, y sus elementos son funciones racionales reales en el operador  $p$ .

**Método de Nodos** Los nodos de la red eléctrica se identifican con letras tal como se muestra en la figura (3.1). Ahora se aplica la ley de corrientes de Kirchhoff en cada uno de los nodos en términos de los voltajes de nodos, donde el nodo  $d$  se ha tomado como referencia o tierra. Por ejemplo, el voltaje  $v_{bd}$  es el voltaje en el nodo  $b$  con referencia al voltaje en el nodo  $d$ . Por simplicidad, el voltaje  $v_{bd}$  se representa por  $v_b$ . El objetivo principal de un análisis de nodos de una red consiste en expresar los voltajes de nodos en términos de las fuentes de corrientes aplicadas a la red.

En este caso, ya que el voltaje en el nodo  $a$  se conoce,  $v_a(t) = e(t)$ , solo se desconocen los voltajes de nodos  $v_b$  y  $v_c$ , y en consecuencia, solo se requieren dos ecuaciones

$$\begin{aligned} i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) &= 0 \\ -i_3(t) + i_4(t) + i_5(t) &= 0 \end{aligned}$$



y en términos de los voltajes de nodos se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{v_b(t) - v_a(t)}{R_1} + Cp v_b(t) + \frac{v_b(t) - v_c(t)}{R_2} &= 0 \\ \frac{v_c(t) - v_b(t)}{R_2} + \frac{v_c(t)}{R_3} + \frac{1}{Lp} (v_c - e(t)) &= 0 \end{aligned}$$

Reorganizando lo términos para luego sistematizar la forma final

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{R_1} + Cp + \frac{1}{R_2} \right) v_b(t) - \frac{1}{R_2} v_c(t) &= \frac{e(t)}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} v_b(t) + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{Lp} \right) v_c(t) &= \frac{1}{Lp} e(t) \end{aligned}$$

o en forma matricial

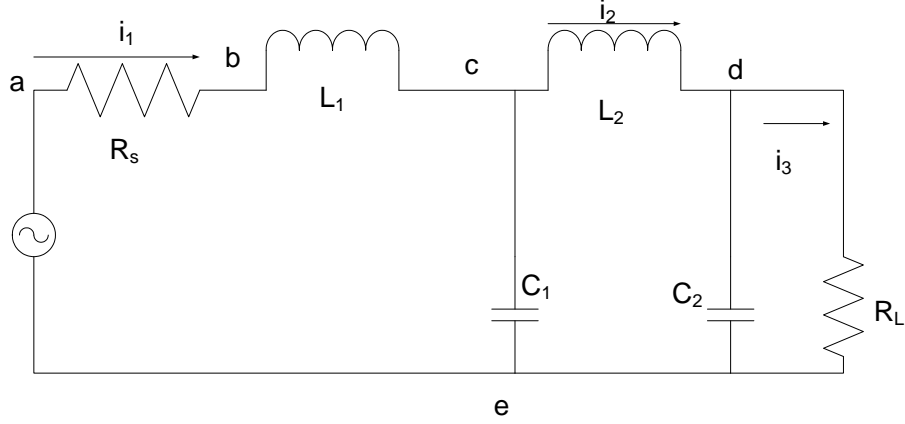
$$\begin{bmatrix} \left( \frac{1}{R_1} + Cp + \frac{1}{R_2} \right) & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{Lp} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e(t)}{R_1} \\ \frac{1}{Lp} e(t) \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, solo se requieren dos ecuaciones nodales para calcular los potenciales  $v_b$  y  $v_c$ . Sin embargo, una ecuación adicional debe establecerse si se desea calcular la corriente en la resistencia  $R_3$ .

Las reglas para escribir las ecuaciones nodales se re resumen a continuación:

1. El número de ecuaciones requeridas es igual al número de voltajes nodales desconocidos.





2. Se escribe una ecuación nodal por cada nodo.
3. Cada ecuación incluye:
  - (a) El voltaje nodal multiplicado por la suma de todas las admitancias que están conectadas a ese nodo. El término es positivo.
  - (b) El voltaje nodal al otro extremo de cada rama esta multiplicado por la admitancia conectada entre los nodos. Ese término es negativo.

**Ejemplo 10** Considere la red mostrada en la figura (3.1). En esta red se tiene cuatro nodos y se conoce el voltaje de uno de ellos, por lo tanto un análisis nodal requerirá plantear tres ecuaciones nodales. Por otro lado, la red presenta tres mallas y todas sus corrientes son desconocidas. En consecuencia es irrelevante desde el punto de vista de número de ecuaciones a resolver cual método se aplica, sin embargo, debido a que las fuentes de alimentación es en realidad una y de voltaje es preferible hacer un análisis de malla.

Aplicando el método se obtienen las siguientes ecuaciones fundamentales

$$\begin{bmatrix} \left(R_s + L_1 p + \frac{1}{C_1 p}\right) & -\frac{1}{C_1 p} & 0 \\ -\frac{1}{C_1 p} & \left(L_2 p + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p}\right) & -\frac{1}{C_2 p} \\ 0 & -\frac{1}{C_2 p} & \left(R_L + \frac{1}{C_2 p}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde la tensión de entrada es  $v_a(t)$ .

Defina como variables de estados a las corrientes de los inductores y los voltajes de los condensadores, esto es

$$\begin{aligned} x_1(t) &= i_1(t) \\ x_2(t) &= i_2(t) \\ x_3(t) &= v_c(t) \\ x_4(t) &= v_d(t) \end{aligned} \tag{14}$$

y note que

$$\begin{aligned}v_c(t) &= \frac{1}{C_1 p} [i_1(t) - i_2(t)] \\v_d(t) &= \frac{1}{C_2 p} [i_2(t) - i_3(t)]\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la primera ecuación fundamental se obtiene

$$R_s x_1(t) + L_1 p x_1(t) + \frac{1}{C_2} x_2(t) = v_a(t)$$

o sea,

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = -\frac{R_s}{L_1} x_1(t) - \frac{1}{L_1 C_2} x_2(t) + \frac{1}{L_1} v_a(t)$$

De la segunda ecuación fundamental se encuentra

$$L_2 p i_2(t) - \frac{1}{C_1 p} [i_1(t) - i_2(t)] + \frac{1}{C_2 p} [i_2(t) - i_3(t)] = 0$$

o sea

$$L_2 \frac{d}{dt} x_2(t) - x_3(t) + x_4(t) = 0$$

En consecuencia

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = \frac{1}{L} x_3(t) - \frac{1}{L} x_4(t)$$

De la definición de la tercera componente de la ecuación de estado y aplicando las reglas del cálculo operacional se encuentra que

$$\frac{d}{dt} x_3(t) = \frac{1}{C_1} x_1(t) - \frac{1}{C_1} x_2(t)$$

Finalmente, de la tercera ecuación fundamental se tiene

$$-\frac{1}{C_2 p} [i_2(t) - i_3(t)] + R_L i_3(t) = 0$$

esto es

$$-x_4(t) + R_L i_3(t) = 0$$

pero de la definición de la cuarta componente del vector de estado se deduce

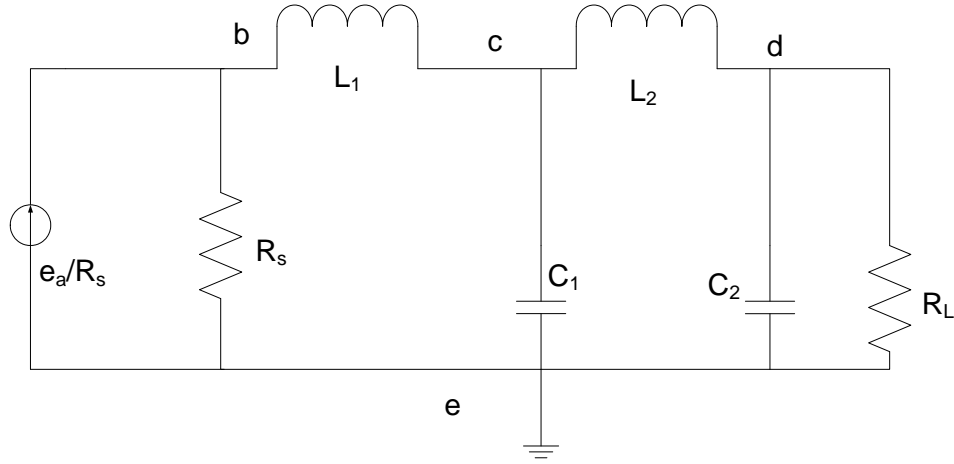
$$C_2 p x_4(t) = x_2(t) - i_3(t)$$

y eliminando la corriente  $i_3(t)$  usando la relación  $i_3(t) = \frac{1}{R_L} x_4(t)$  se llega a

$$C_2 \frac{d}{dt} x_4(t) = x_2(t) - \frac{1}{R_L} x_4(t)$$

En consecuencia

$$\frac{d}{dt} x_4(t) = \frac{1}{C_2} x_2(t) - \frac{1}{C_2 R_L} x_4(t)$$



Defina como señal de entrada a  $u(t) = e_a(t)$ ; mientras que la salida del sistema será  $y(t) = R_L i_3(t)$ , para arribar a las siguientes ecuaciones de estados para la planta eléctrica dada

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_1} & -\frac{1}{L_1 C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{C_2 R_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + [0] u(t)$$

Si se quiere realizar un análisis nodal es recomendable transformar la fuente de tensión en una fuente d corriente equivalente como se muestra en la figura (3.1). Aplicando el método se obtienen las siguientes ecuaciones fundamentales

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{L_1 p}\right) & -\frac{1}{L_1 p} & 0 \\ -\frac{1}{L_1 p} & \left(\frac{1}{L_1 p} + \frac{1}{L_2 p} + C_2 p\right) & -\frac{1}{L_2 p} \\ 0 & -\frac{1}{L_2 p} & \left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{L_2 p} + C_2 p\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_b(t) \\ v_c(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_a(t)}{R_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se deja como útil ejercicio la deducción las ecuaciones de estados para este sistema empleando las definiciones de las componentes del vector de estado dadas en (14) y las ecuaciones fundamentales encontradas por el análisis nodal.

**Ejemplo 11** Considere el circuito eléctrico unipuerto mostrado en la figura (3.1). Se identifica la corriente  $I$  con la entrada  $u(t)$ , y el voltaje  $V$  en los

terminales de la fuente de corriente como la salida  $y(t)$ . Además, siguiendo el paso 1, se tiene

$$x(t) = \begin{bmatrix} V_{C1}(t) \\ V_{C2}(t) \end{bmatrix}$$

Aplicando análisis nodal (y observando que la resistencia  $R_1$  está en serie con la fuente de corriente) se tiene

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_2} + C_1 p\right) & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_2} + C_2 p\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1}(t) \\ V_{C2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sea,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_2} x_1(t) + C_1 \frac{d}{dt} x_1(t) - \frac{1}{R_2} x_2(t) &= u(t) \\ -\frac{1}{R_2} x_1(t) + \frac{1}{R_2} x_2(t) + C_2 \frac{d}{dt} x_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Esto es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1(t) &= -\frac{1}{R_2 C_1} x_1(t) + \frac{1}{R_2 C_1} x_2(t) + \frac{1}{C_1} u(t) \\ \frac{d}{dt} x_2(t) &= \frac{1}{R_2 C_2} x_1(t) - \frac{1}{R_2 C_2} x_2(t) \end{aligned}$$

mientras que la ecuación de salida es

$$\begin{aligned} y(t) &= R_1 u(t) + V_{C1}(t) \\ &= x_1(t) + R_1 u(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto las ecuaciones de estados del sistema son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [R_1] u(t) \end{aligned}$$

**Ejemplo 12** Considere la red eléctrica multipuerto mostrada en la figura (3.1), con variable de entrada  $u(t) = V(t)$  y señal de salida  $y(t) = I_{R_2}(t)$ . El vector de estado  $x$  puede tomarse como

$$x(t) = \begin{bmatrix} V_{C1} \\ I_{L1} \\ V_{C2} \\ \vdots \\ V_{Cn} \end{bmatrix}$$

Aplicando análisis nodal se obtiene las ecuaciones fundamentales del sistema dado

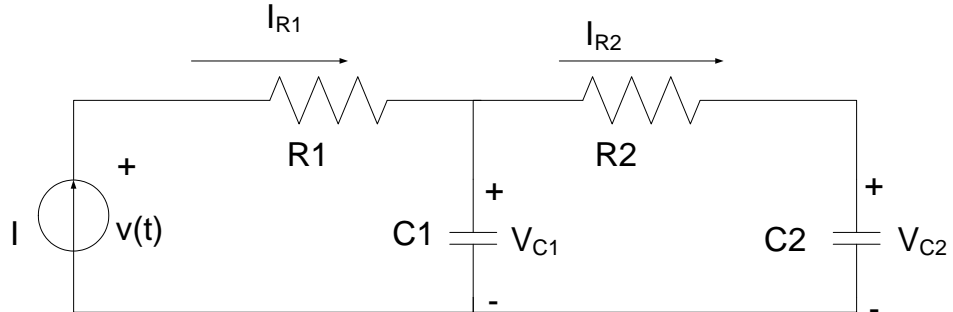
$$= \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_{n-1}p} + C_n p \right) & -\frac{1}{L_{n-1}p} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{L_{n-1}p} & \left( \frac{1}{L_{n-1}p} + \frac{1}{L_{n-2}p} + C_{n-1}p \right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{L_1 p} + C_1 p \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C_n} \\ V_{C_{n-1}} \\ \vdots \\ V_{C_1} \end{bmatrix}$$

Solo resta notar que se tiene que

$$\begin{aligned} V_{C_n}(t) - V_{C_{n-1}}(t) &= L_{n-1}p I_{L_{n-1}}(t) \\ V_{C_{n-1}}(t) - V_{C_{n-2}}(t) &= L_{n-2}p I_{L_{n-2}}(t) \\ &\vdots \\ V_{C_2}(t) - V_{C_1}(t) &= L_1p I_{L_1}(t) \end{aligned}$$

En consecuencia se obtienen las siguientes ecuaciones de estados

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$



donde

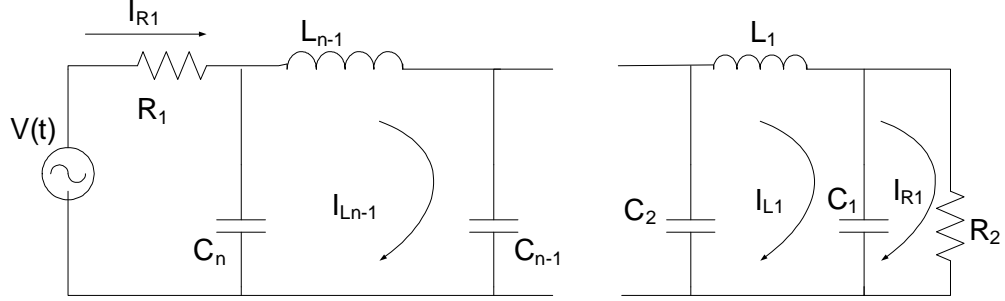
$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_2} & \frac{1}{C_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{C_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{L_{n-1}} & 0 & \frac{1}{L_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{C_n} & -\frac{1}{C_n R_1} \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_n R_1} \end{bmatrix} \\
 C &= \left[ \frac{1}{R_2} \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]
 \end{aligned}$$

Sin embargo, las ecuaciones de estados no son únicas; otro conjunto de ecuaciones se logra con la transformación

$$Z = \begin{bmatrix} \sqrt{C_1} x_1(t) \\ \sqrt{L_1} x_2(t) \\ \sqrt{C_2} x_3(t) \\ \vdots \\ \sqrt{C_n} x_n(t) \end{bmatrix}$$

y se obtienen de las ecuaciones fundamentales las nuevas ecuaciones de estados

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} x(t) &= \bar{A} z(t) + \bar{B} u(t) \\
 y(t) &= \bar{C} z(t)
 \end{aligned}$$



donde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_2} & \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{L_{n-1} C_{n-1}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{L_{n-1} C_{n-1}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{L_{n-1} C_n}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{L_{n-1} C_n}} & -\frac{1}{C_n R_1} \end{bmatrix}$$

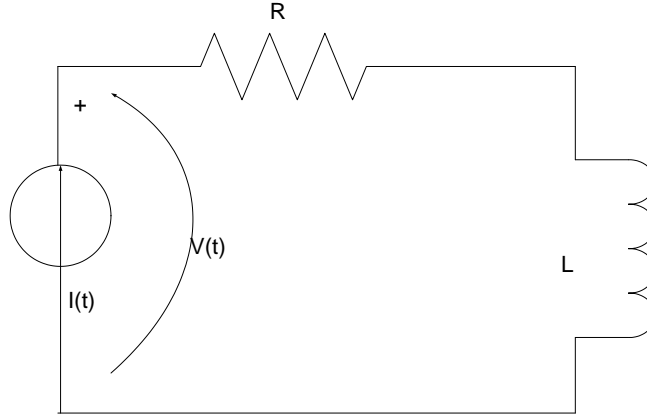
$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{C_n R_1}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{C_1 R_1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La relación existente entre la representaciones  $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{n,x}$  y  $P : \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix}_{n,z}$  se estudiarán más adelante

La deducción de un modelo de estados para una red lineal mediante la asignación de las componentes del vector de estados  $x$ , de variables físicas no es sencilla en general, y como se ilustra en los ejemplos que se presentan a continuación.

**Ejemplo 13** Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura (3.1), Es evidente que el comportamiento dinámico de este sistema está descrita por la



ecuación

$$V(t) = RI(t) + L \frac{d}{dt} I(t)$$

Si se supone que la entrada al sistema es  $u(t) = I(t)$ , y la señal de salida o respuesta es  $y(t) = V(t)$ , no manera inmediata de establecer las ecuaciones de estados en la forma standard. En este caso, la variable física que correspondería al estado del sistema sería la corriente del inductor, o sea,  $x(t) = I(t)$ , y ahí radica el problema, ya que el estado coincide con la señal de entrada. Cualquier intento de hallar una expresión para  $\dot{x}(t)$  necesariamente involucra la derivada de la señal de entrada  $u(t)$ , haciendo de esta manera que sea imposible encontrar la ecuación de estado en la forma deseada. Sin embargo, si  $u(t) = V(t)$  e  $y(t) = I(t)$ , entonces de inmediato se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= -\frac{R}{L}x(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ y(t) &= 1.x(t) + 0.u(t) \end{aligned}$$

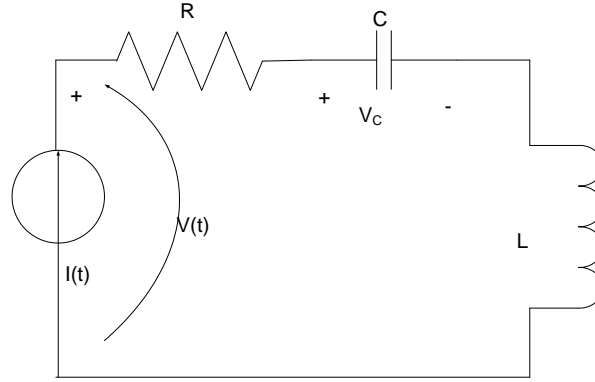
y cuyas ecuaciones de estado están en la forma standard.

Con el objeto de ilustrar aún más el problema de escritura de las ecuaciones de estados planteado, considere el sistema eléctrico mostrado en la figura (3.1). En este caso se tiene dos elementos almacenadores de energía, en consecuencia se postula que el vector de estados tiene dos componentes definidas por las variables físicas: el voltaje en el capacitor y la corriente a través de inductor; esto es,

$$x(t) = \begin{bmatrix} V_C(t) \\ I(t) \end{bmatrix}$$

Sin embargo, es interesante resaltar:





- el sistema tiene solo una variable de estado  $V_C(t)$  ya que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_C(t) &= \frac{1}{C}I(t) \\ V(t) &= V_C(t) + RI(t) + L\frac{d}{dt}I(t)\end{aligned}$$

siendo  $u(t) = I(t)$ ,  $y(t) = V(t)$ . Dichas ecuaciones solo se pueden expresar como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + E\frac{d}{dt}u(t)\end{aligned}$$

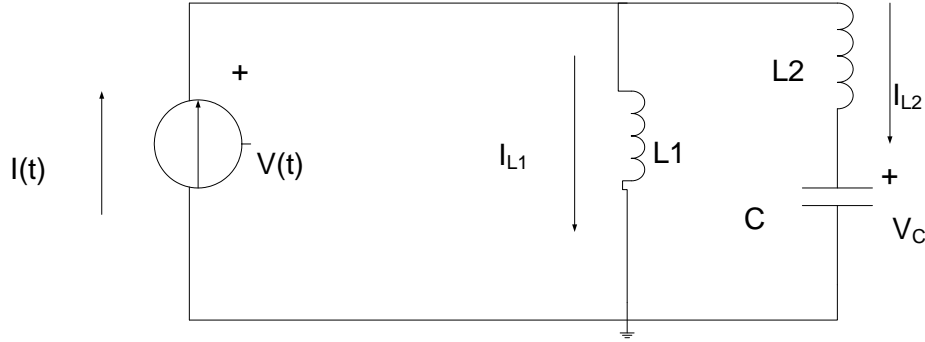
la cual nuevamente no está en forma standard.

- A pesar de que el estado es unidimensional, se requiere conocer  $V_C(0)$  y  $I(0-)$  para calcular la salida  $V(t)$ ; o sea,  $I(t)$  es como si fuera también una variable de estados.

Además de la dificultad que ilustra el ejemplo anterior, se concluye que existen sistemas dinámicos donde la dimensión del vector de estado es menor que el número de elementos almacenadores de energía (se puede demostrar que la diferencia es el rango de la matriz  $E$ ).

**Ejemplo 14** Considere la red mostrada en la figura (3.1). Para este sistema eléctrico se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}C\frac{d}{dt}V_C(t) &= I_{L2}(t) \\ L_1\frac{d}{dt}I_{L1}(t) &= L_2\frac{d}{dt}I_{L2}(t) + V_C(t) \\ I(t) &= I_{L1}(t) + I_{L2}(t) \\ V(t) &= L_1\frac{d}{dt}I_{L1}(t)\end{aligned}$$



No existen ecuaciones adicionales a estas que sean independientes, en consecuencia, cualquier ecuación de estado deberá construirse empleando esas relaciones. Después de varios intentos, se puede demostrar que con entrada  $u(t) = I(t)$ , salida  $y(t) = V_C(t)$  y

$$x(t) = \begin{bmatrix} I_{L1}(t) \\ I_{L2}(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix}$$

resulta imposible encontrar matrices  $A$  y  $B$  tal que

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

y lo mejor que puede hacerse es

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{L1}(t) \\ I_{L2}(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{(L_2+L_1)} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(L_2+L_1)} \\ 0 & C^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{L1}(t) \\ I_{L2}(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2}{(L_2+L_1)} \\ \frac{L_1}{(L_2+L_1)} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt}u(t)$$

La dificultad que se encuentra en ejemplos como el anterior consiste en la insistencia de fijar las entradas del estado como variables físicas asignadas a los elementos almacenadores de energía, o sea, corrientes en los inductores y voltajes en los condensadores. De flexibilizar esta exigencia, será posible encontrar modelos en variables de estados en la forma standard para redes eléctricas lineales.

Particular atención hay que prestarle a sistemas eléctricos donde se encuentra a un transformador o un girador como uno de sus componentes.

Recuerde que un transformador  $Tr$  ideal es una red de dos puertos cuyo símbolo se muestra en la figura (2)

y en el cual se cumple las relaciones

$$\begin{aligned} V_1(t) &= mV_2(t) \\ I_1(t) &= \frac{1}{m}I_2(t) \end{aligned}$$

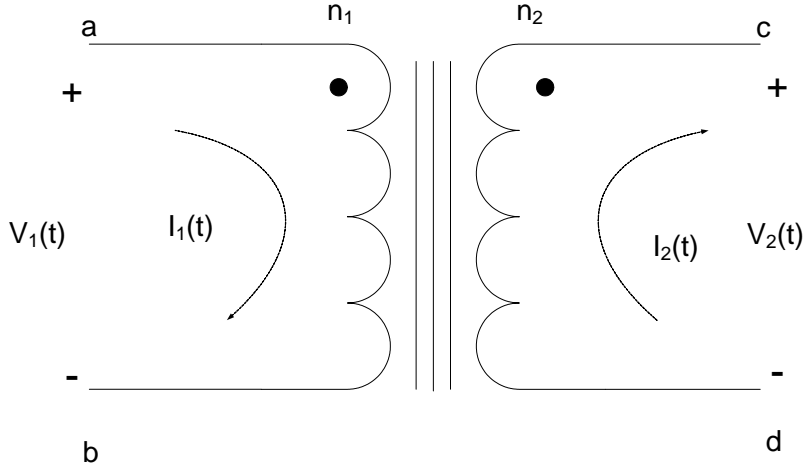


Figure 2: Transformador Eléctrico Ideal

donde

$$m = \frac{n_1}{n_2}$$

representa la relación de vueltas del transformador,  $n_1$  es el número de vueltas del enrollado en el terminal primario  $a - b$ , mientras  $n_2$  es el número de vueltas del enrollado en el terminal secundario del transformador.

Es importante observar que la potencia suministrada al primario está dada por

$$pot_1 = V_1(t) I_1(t)$$

mientras que la potencia de salida está dada por

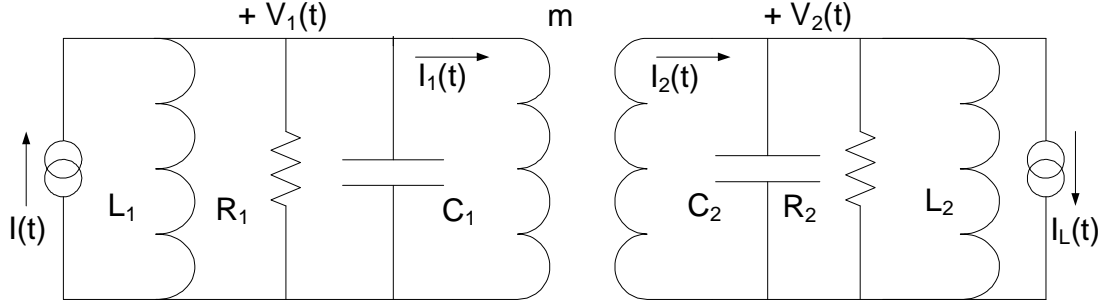
$$pot_2 = V_2(t) I_2(t)$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} pot_1 &= V_1(t) I_1(t) = (m V_2(t)) \left( \frac{1}{m} I_2(t) \right) \\ &= V_2(t) I_2(t) = pot_2 \end{aligned}$$

En conclusión, en un transformador ideal no hay almacenamiento o disipación de potencia.

También es interesante recordar como se refleja la impedancia de un terminal a otro, suponga que se tiene el circuito eléctrico mostrado en la figura (3.1)



Aplicando análisis nodal a la red dada se obtiene

$$\begin{aligned} \left( C_1 p + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_1 p} \right) V_1(t) + I_1(t) &= I(t) \\ I_L(t) + \left( C_2 p + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{L_2 p} \right) V_2(t) &= I_2(t) \end{aligned}$$

y según las relaciones constitutivas del transformador  $V_1(t) = m V_2(t)$  y  $I_1(t) = \frac{1}{m} I_2(t)$ , se tiene

$$\left( C_1 p + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_1 p} \right) V_1(t) + \frac{1}{m} \left[ I_L(t) + \left( C_2 p + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{L_2 p} \right) V_2(t) \right] = I(t)$$

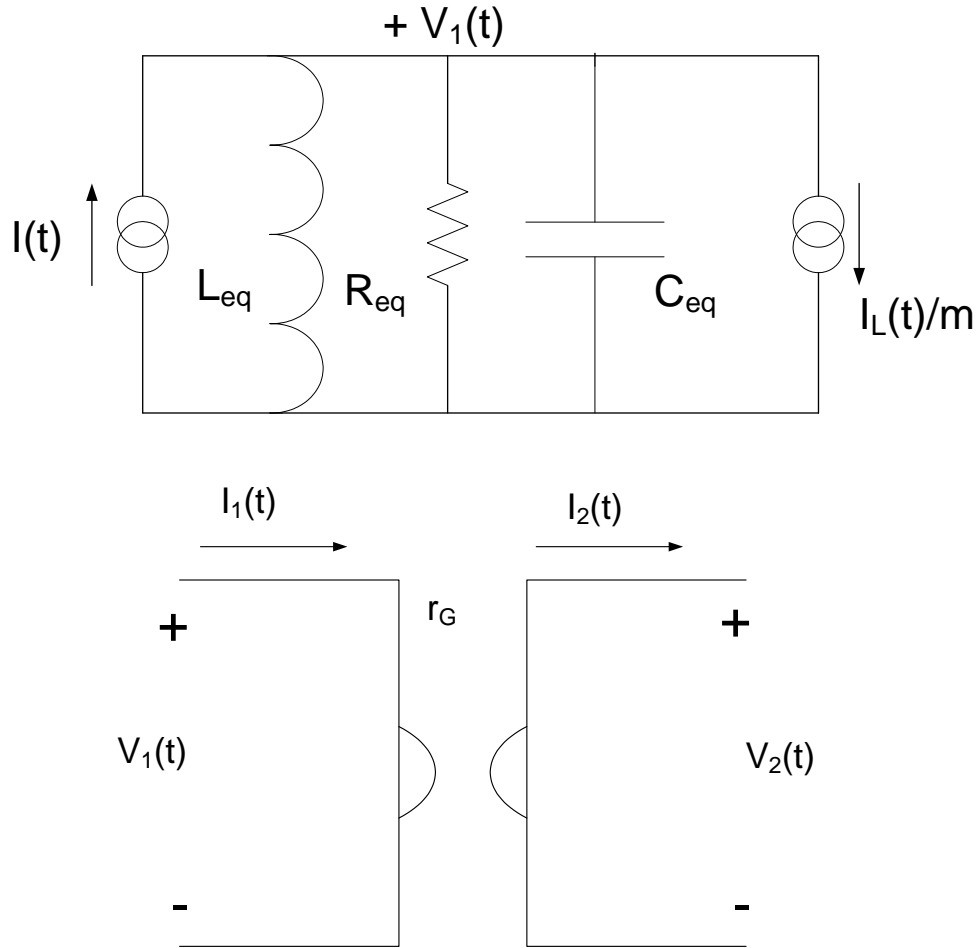
esto es

$$\begin{aligned} \left( C_1 p + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_1 p} \right) V_1(t) + \frac{1}{m} \left[ I_L(t) + \left( C_2 p + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{L_2 p} \right) \frac{1}{m} V_1(t) \right] &= I(t) \\ \left[ \left( C_1 + \frac{1}{m^2} C_2 \right) p + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{R_2} \right) + \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{L_2} \right) \frac{1}{p} \right] V_1(t) + \frac{1}{m} I_L(t) &= I(t) \\ \left( C_{eq} p + \frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{L_{eq}} p^{-1} \right) V_1(t) + \frac{1}{m} I_L(t) &= I(t) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C_{eq} &= C_1 + \frac{1}{m^2} C_2 \\ \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{L_{eq}} &= \frac{1}{L_1} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{L_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, al reflejar todos los elementos en el secundario del transformador al sector primario de este se obtiene el sistema equivalente mostrado en la figura (3.1)



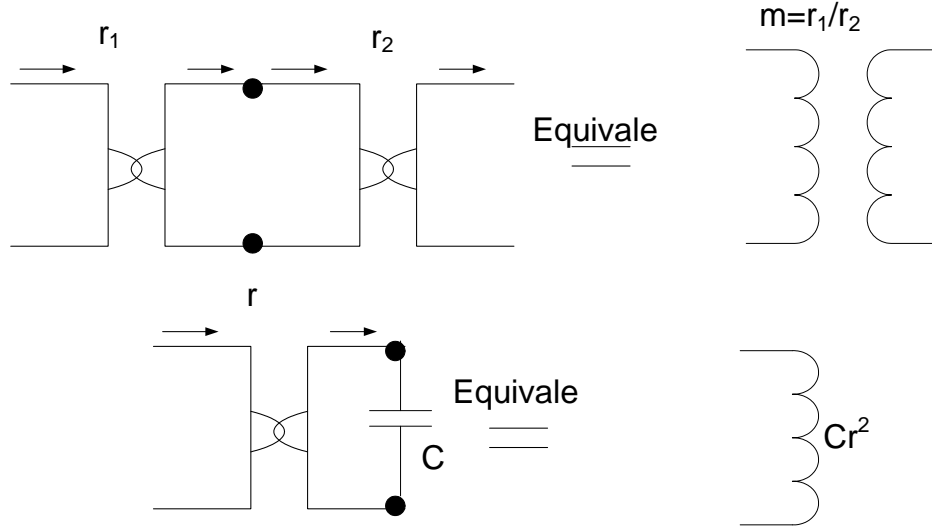
De igual manera la reflexión también puede hacia el secundario empleando la relación  $V_1(t) = mV_2(t)$  en el caso donde el voltaje  $V_2(t)$  sea la variable de interés como respuesta del sistema.

También es de interés el elemento giratorio cuya representación simbólica se muestra en la figura (3.1)

cuyas relaciones constitutivas son

$$\begin{aligned} V_1(t) &= r_G I_2(t) \\ I_1(t) &= \frac{1}{r_G} V_2(t) \end{aligned}$$

donde  $r_G$  es la relación del elemento giratorio. También es importante observar



que este es un elemento que no almacena o disipa potencia ya que

$$\begin{aligned} pot_1 &= V_1(t) I_1(t) = (r_G I_2(t)) \left( \frac{1}{r_G} V_2(t) \right) \\ &= V_2(t) I_2(t) = pot_2 \end{aligned}$$

Algunas propiedades interesantes de los giratorios se muestran en la figura (3.1)

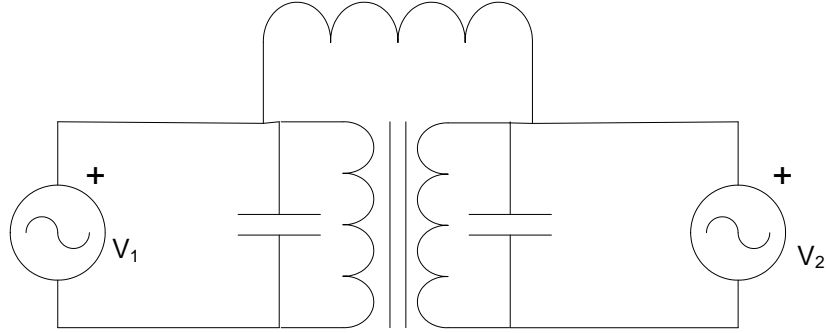
En el proceso de obtención de un modelo en variables de estados para un sistema que tenga como elementos a un transformador y/o un elemento giratorio, es posible que las señales de entradas no necesariamente están bien definidas como se ilustrará a continuación, y en consecuencia, puede ser muy difícil o imposible deducir modelo en variable de estados alguno.

**Ejemplo 15** Considere la red mostrada en la figura (3.1). Debido a la presencia del transformador, las señales de entradas  $V_1(t)$  y  $V_2(t)$  no pueden seleccionarse independientemente. Por lo tanto, es imposible escribir las ecuaciones de estados de dicho sistema cuando

$$u(t) = \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix}$$

No hay manera posible de evitar esta dificultad.

En términos generales, el uso del transformador también implica dependencia lineal entre muchas variables de estados. En consecuencia, el vector de estado tendrá una dimensión inferior al número de elementos almacenadores de energía.



### 3.2 Modelaje en Variables de Estados de Sistemas Mecánicos Traslacionales

Los sistemas mecánicos que involucran masas, resortes y elementos de fricción son muy similares a los sistemas eléctricos. Sin embargo, para describir el movimiento de cada parte de un sistema mecánico se requiere tanto como seis componentes de velocidad; tres de traslación y tres de rotación.

Es posible centrarse en sistemas mecánicos traslacionales o sea aquellos que presentan desplazamientos solo en líneas rectas en un espacio tridimensional con eje de coordenadas. Por convención, los movimientos positivos se tomarán a aquellos que salen del origen de coordenadas en las direcciones positivas de los ejes  $1_x$ ,  $1_y$  y  $1_z$ .

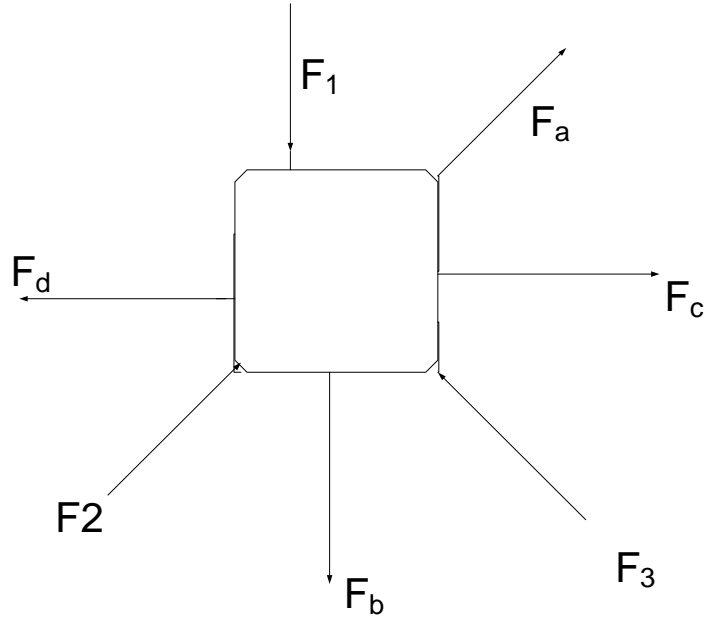
Para simplificar aún más el análisis, suponga que los sistemas mecánicos traslacionales a estudiar son tales que los movimientos ocurren solo en una de las dimensiones del eje de coordenadas; por lo tanto, la interconexión de los elementos básicos (átomos) como la masa, el resorte y amortiguador, y las limitaciones sobre el movimiento puede describirse adecuadamente en una dimensión. Esto hace relativamente el proceso de modelado matemático mediante variables de estados de este tipo de sistemas, ya que el análisis vectoriales no es necesario.

Los sistemas mecánicos cumplen con la ley segunda de Newton: "La suma de todas las fuerzas aplicadas a un cuerpo dado es igual a la suma de todas las fuerzas reactivas". En referencia a la figura (3.2)

la ley de Newton puede establecerse como

$$F_1 + F_2 + F_3 = F_a + F_b + F_c + F_d$$

El análisis que se realizará en esta sección solo incluirá funciones lineales. Efectos tales como la fricción estática, la fricción de Coulomb y otros efectos de fricción no lineales no serán considerados.



### 3.2.1 La masa de traslación

Toda materia tiene cierta masa, incluso los componentes de la mayoría de los sistemas de ingeniería. Se acostumbra a representar un elemento mecánico como una masa si el comportamiento del componente provocado por la inercia es significativo con respecto a las demás características. ES posible describir la inercia como la resistencia de un cuerpo a modificar su estado actual de movimiento. Un objeto en reposo comienza a moverse solo cuando se le aplica una fuerza. Del mismo modo, una masa que se mueve a una velocidad constante y en línea recta cambiará de dicha dirección y/o velocidad solo si se le aplica una nueva fuerza.

La masa  $M$  es el elemento inercial. Una fuerza aplicada (causa) a una masa genera una aceleración (efecto) de la masa. La fuerza de reacción  $F_M$  es igual al producto de la masa  $M$  y la aceleración, y es opuesta a la dirección de la fuerza aplicada. En términos del desplazamiento  $z(t)$ , la velocidad  $v(t) = \frac{d}{dt}z(t)$  y la aceleración  $a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$ , la ecuación de fuerzas según la ley de Newton para este elemento será

$$F_M(t) = Ma(t) = Mpv(t) = Mp^2z(t) = \sum F_e$$

y donde  $\sum F_e$  es la suma de todas las fuerzas externas aplicadas a la masa  $M$ .

La representación de la masa como un elemento de red se muestra en la figura (3)-(i). Un terminal,  $a$ , representa el movimiento de la masa; mientras que el



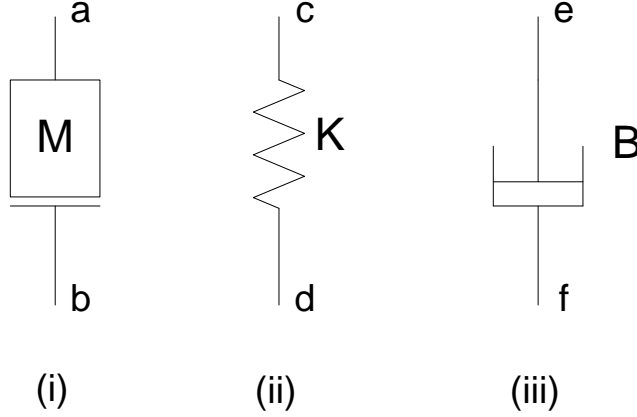


Figure 3: Elementos de una Red Mecánica Traslacional

otro terminal,  $b$ , se considera tener el movimiento de la referencia (¿Tierra?). La fuerza de reacción  $F_M$  es una función temporal y se considera que fluye "a través" de la masa  $M$ .

### 3.2.2 El resorte de traslación

La elastancia o rigidez,  $K$  de un elemento mecánico suministrará una fuerza restauradora similar a la de un resorte traslacional. En consecuencia, si se comprime, el resorte tratará de estirarse; mientras que si se estira, este tratará expandirse para regresar a su posición de equilibrio. La fuerza de reacción  $F_K(t)$  sobre cada terminal de un resorte traslacional es la misma e igual al producto de la constante de elastancia  $K$  y la cantidad de deformación espacial del resorte. La representación de un resorte como elemento de red se muestra en la figura (3)-(ii). El desplazamiento de cada terminal o extremo del resorte se mide a partir de la correspondiente posición original o de equilibrio. El terminal  $c$  tiene una posición  $x_c$ , y el terminal  $d$  tiene una posición  $x_d$ , medidas ambas desde sus respectivas posiciones de equilibrio. En consecuencia, la ecuación de fuerza cumple con la ley de Hooke la cual establece

$$F_K(t) = K(x_c(t) - x_d(t)) = Kp^{-1}[v_c(t) - v_d(t)]$$

Si el terminal  $d$  está fijo, entonces  $x_d(t) = 0$ , y la ecuación anterior se reduce a

$$F_K(t) = Kx_c(t) = Kp^{-1}v_c(t)$$

El gráfico de  $F_K$  vs  $x_c$  para un resorte real no es generalmente una línea recta (ver figura(4)), debido a la característica no lineal del resorte. Sin embargo, sobre una región limitada de operación, la aproximación lineal, da una aproximación satisfactoria.

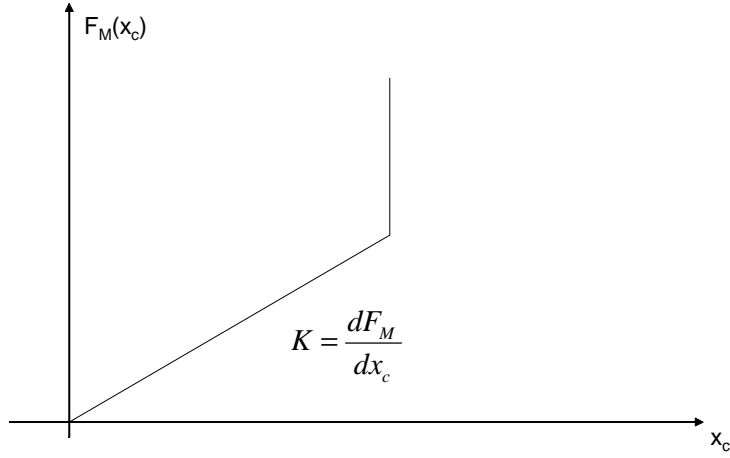


Figure 4: Características de un Resorte Real

### 3.2.3 El amortiguador traslacional

En los sistemas mecánicos, el amortiguamiento se refiere generalmente a cualquier resistencia al movimiento que provoca la atenuación de éste último. A diferencia de las masas y resortes que almacenan la energía, los elementos que provocan el amortiguamiento disipan la energía (y son elementos estáticos).

La amortiguación o fricción viscosa  $B$  caracteriza entonces a aquellos elementos mecánicos que absorben energía. La fuerza amortiguadora es proporcional a la diferencia en velocidad de los dos cuerpos. La suposición que la fricción viscosa es lineal con respecto a la variación en velocidad simplifica el análisis del comportamiento dinámico del sistema mecánico bajo estudio. La representación del efecto de disipación o amortiguamiento como elemento de red se presenta en la figura (3)-(iii) como un amortiguador. La amortiguación presente en un sistema puede ser natural como consecuencia de la construcción física o intencional (ya que tiende a estabilizar los sistemas). La fuerza reactiva de amortiguamiento  $F_B(t)$  se aproxima mediante el producto de la constante de amortiguamiento  $B$  y la velocidad relativa de los dos terminales del amortiguador. Esto es

$$F_B(t) = B[v_e(t) - v_f(t)] = B[px_e(t) - px_f(t)]$$

El procedimiento para establecer las ecuaciones de estados de un sistema mecánico traslacional  $P$  mediante la asignación de variables físicas correspondientes a variables asociadas a los elementos acumuladores de energía, se muestra a continuación:

1. Identifique cada posición de cada resorte traslacional y la velocidad de cada masa con una componente del vector de estado  $x$ . Naturalmente, posiciones de diferentes resortes y diferentes masas le corresponderán difer-

entes entradas (a pesar de que los valores nominales de los resortes o masas sean idénticos).

2. Use la ley de fuerzas de Newton y las leyes constitutivas de cada elemento del sistema, para escribir una ecuación que solo involucre una de las componentes de  $\frac{dx}{dt}$ , pero que no involucre cualquier componente del vector de salida  $y$  o cualquier otra variable distinta a las componentes del estado  $x$  o del vector de entrada  $u$ .
3. Use la ley de fuerzas de Newton y las leyes constitutivas de cada elemento del sistema, para escribir una ecuación que solo involucre una de las componentes de  $y$ , pero que no involucre cualquier componente del vector  $\frac{dx}{dt}$  o cualquier otra variable distinta a las componentes del estado  $x$  o del vector de entrada  $u$ .
4. Organice las ecuaciones derivadas en el paso (2) como

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

y a aquellas derivadas en el paso (3) como

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

**Ejemplo 16** *Supóngase que se tiene un sistema como el que se muestra en la figura (5). Se desea conocer el desplazamiento de la masa cuando se aplica una fuerza  $u(t) = f(t)$  a partir de  $t = t_0$ . Los desplazamientos  $z_a$  y  $z_b$  representan las desviaciones posicionales con respecto a las posiciones de equilibrio del sistema. Finalmente, la salida del sistema será la posición de la masa  $z_b(t)$*

*De acuerdo a las leyes de Newton y las leyes que gobiernan cada uno de los elementos del sistema, las ecuaciones fundamentales del sistema son*

$$\begin{aligned} f(t) &= f_K(t) = K(z_a(t) - z_b(t)) \\ f_K(t) &= f_M(t) + f_B(t) = Mp^2z_b(t) + Bpz_b(t) \end{aligned}$$

*Defina como vector de estado a*

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_b(t) \\ v_b(t) \end{bmatrix}$$

*De inmediato se tiene que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) &= v_b(t) = x_2(t) \\ M\frac{d}{dt}x_2(t) + Bx_2(t) &= u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

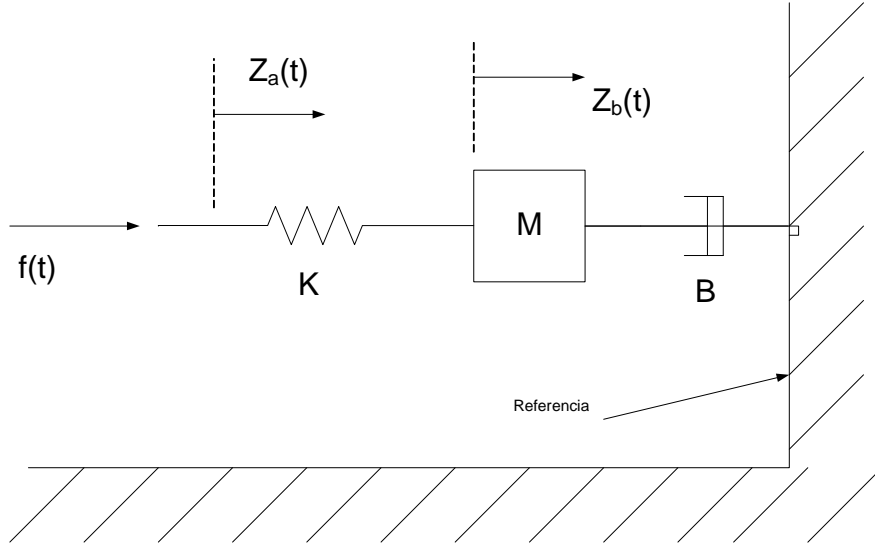


Figure 5: Sistema Mecánico Traslacional Simple

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

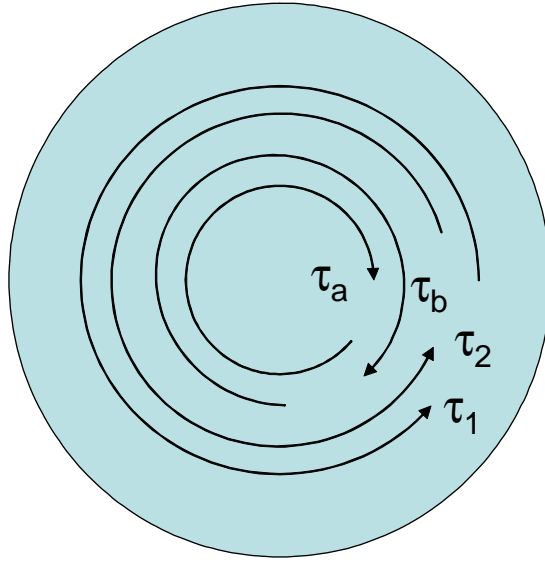
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0] u(t)$$

a

### 3.3 Modelaje en Variables de Estados de Sistemas Mecánicos Rotacionales

Aquellos sistemas que involucran movimientos rotacionales alrededor de una dirección fija de coordenadas puede representarse mediante un sistema mecánico rotacional.

Los sistemas mecánicos rotacionales que involucran inercias, resortes rotacionales y elementos de fricción son muy similares a los sistemas mecánicos traslacionales. En consecuencia para describir el movimiento de cada una de sus partes, se requiere tanto como seis componentes de velocidad; tres de traslación y tres de rotación. Sin embargo, es posible centrarse en sistemas mecánicos rotacionales cuyos desplazamientos rotacionales puedan descomponerse en componentes de la velocidad de rotación alrededor de tres ejes de rotación. Por convención, las rotaciones positivas son aquellas medidas en dirección antihoraria cuando se ve hacia el origen. La velocidad de rotación puede representarse



mediante un vector de rotación de longitud proporcional a la velocidad angular y con dirección a lo largo de un eje de rotación tal que si la mano derecha toma la masa rotante con los dedos apuntando en dirección de rotación, el pulgar apunta la dirección del eje de rotación.

En los sistemas rotacionales las variables de flujo y de esfuerzo son el torque o par y la velocidad angular respectivamente.

Los sistemas mecánicos rotacionales cumplen con la ley segunda de Newton: "La suma de todas los torques o pares aplicadas a un cuerpo dado es igual a la suma de todos los torques reactivos". En referencia a la figura (3.2)

la ley de Newton puede establecerse como

$$\tau_1(t) + \tau_2(t) = \tau_a(t) + \tau_b(t)$$

El análisis que se realizará en esta sección solo incluirá funciones lineales. Efectos tales como la fricción estática, la fricción de Coulomb y otros efectos de fricción no lineales no serán considerados.

### 3.3.1 La inercia de rotación

El torque o par resultante con respecto a un punto fijo (referencia inercial) debido a todas la fuerzas con resultante  $\vec{F}$  sobre un cuerpo es

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

donde  $\vec{r}$  es el vector de posición desde el punto fijo al punto de aplicación de la fuerza resultante  $\vec{F}$ . Pero ya que

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

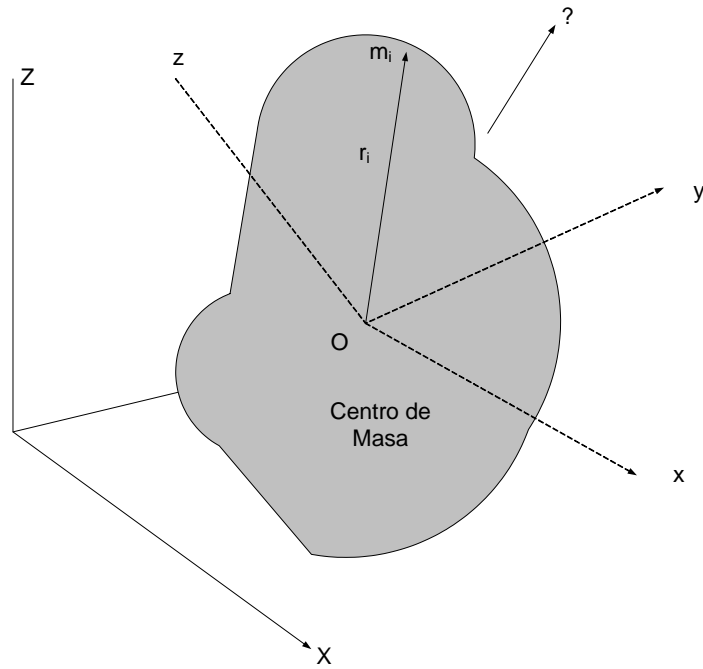


Figure 6: Definición de Momento Angular

se obtiene

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \left[ \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \right] = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v})$$

ya que

$$\left( \frac{d}{dt} \vec{r} \right) \times m\vec{v} = 0$$

Si se define el momento angular como

$$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

entonces la segunda ley de Newton correspondiente al movimiento angular es

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt} \vec{H} \quad (15)$$

Para un cuerpo rígido que gira en torno a un punto fijo en el mismo cuerpo, o bien en torno a su centro de masa, con una velocidad angular  $\omega$ , la velocidad instantánea de una partícula de masa  $m_i$  con respecto al punto fijo o centro de masa (ver figura(6)) es

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

donde el vector de posición  $\vec{r}_i$  se mide con respecto al punto fijo o centro de masa del cuerpo.

En vista de las ecuaciones deducidas e integrando sobre todas las partículas que constituyen el cuerpo se tiene el momento angular par aun cuerpo rígido

$$\vec{H} = \int [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] dm$$

La expansión de la relación anterior en sus componentes en el marco referencial  $x - y - z$  que se anexa al cuerpo en el centro de masa o en el punto fijo se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{1}_x \left[ \omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int (xy) dm - \omega_z \int (xz) dm \right] \\ &+ \vec{1}_y \left[ -\omega_x \int (yx) dm + \omega_y \int (z^2 + x^2) dm - \omega_z \int (yz) dm \right] \\ &+ \vec{1}_z \left[ -\omega_x \int (zx) dm - \omega_y \int (zy) dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm \right] \end{aligned}$$

o definiendo los momentos de inercia  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  y los productos de inercia  $J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{1}_x (J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z) \\ &+ \vec{1}_y [-\omega_x J_{xy} + \omega_y J_{yy} - \omega_z J_{yz}] \\ &+ \vec{1}_z [-\omega_x J_{xz} - \omega_y J_{yz} + \omega_z J_{zz}] \\ &= \vec{1}_x H_x + \vec{1}_y H_y + \vec{1}_z H_z \end{aligned}$$

En el caso general en donde el eje de coordenadas  $x - y - z$  gira con una velocidad  $\Omega$  que puede ser distinta de la velocidad de rotación del cuerpo  $\omega$ , la razón de cambio del momento angular está dada por

$$\frac{d}{dt} \vec{H} = \left( \frac{d}{dt} \vec{H} \right)_{x-y-z} + \Omega \times \vec{H}$$

y en consecuencia la ecuación para el cuerpo rígido (15) se convierte en

$$\vec{\tau} = \left( \frac{d}{dt} \vec{H} \right)_{x-y-z} + \Omega \times \vec{H}$$

Dicha relación puede expresarse en términos de las distintas componentes del torque  $\vec{\tau}$ , para llegar a

$$\begin{aligned} \tau_x &= \dot{H}_x - H_y \Omega_z + H_z \Omega_y \\ \tau_y &= \dot{H}_y - H_z \Omega_x + H_x \Omega_z \\ \tau_z &= \dot{H}_z - H_x \Omega_y + H_y \Omega_x \end{aligned} \tag{16}$$

y note que estas son la suma de todos pares de torsión que se aplican en una dirección dada.

Para cualquier punto fijo de rotación existe un conjunto de direcciones de eje unidas al cuerpo en ese punto; éstos son los denominados ejes principales, para los cuales los productos de inercia son cero. Si los ejes  $x - y - z$  coinciden con los ejes principales, entonces la ecuación (16) se transforma en

$$\begin{aligned}\tau_x &= J_{xx}\dot{\omega}_x - J_{yy}\Omega_z\omega_y + J_{zz}\Omega_y\omega_z \\ \tau_y &= J_{yy}\dot{\omega}_y - J_{zz}\Omega_x\omega_z + J_{xx}\Omega_z\omega_x \\ \tau_z &= J_{zz}\dot{\omega}_z - J_{xx}\Omega_y\omega_x + J_{yy}\Omega_x\omega_y\end{aligned}$$

Además, si el movimiento ocurre sólo sobre un conjunto de ejes, por ejemplo, el eje  $z - y$ , y se elige  $\Omega = \omega$ , entonces  $\omega_x = \Omega_x = 0$ , y  $\omega_y = \Omega_y = 0$ , y la ecuación anterior se reduce a

$$\tau_z = J_{zz}\dot{\omega}_z$$

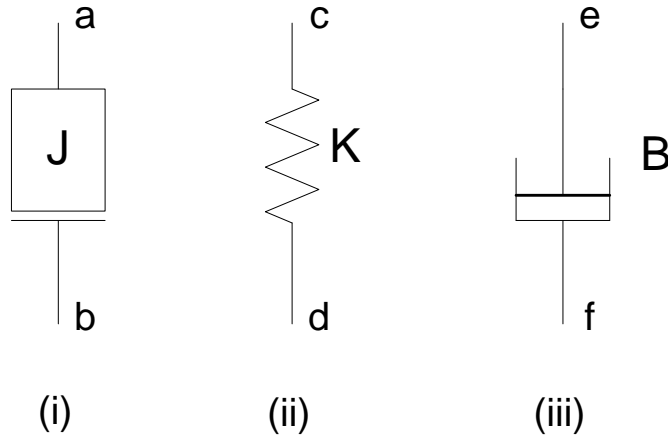
o

$$\tau_J = Jp\omega = Jp^2\theta$$

donde  $\omega = \frac{d}{dt}\theta$ .

En otras palabras, el torque de reacción  $\tau_J$  se opone en dirección a la del torque aplicado y es igual al producto del momento de inercia  $J$  y la aceleración angular  $\frac{d}{dt}\omega$ .

La representación de la inercia como un elemento de red se muestra en la figura (3.3.1)-(i). Un terminal,  $a$ , representa el movimiento de la inercia; mientras que el otro terminal,  $b$ , se considera tener el movimiento de la referencia (centro de gravedad). El torque de reacción  $\tau_J$  es una función temporal y se considera que fluye "a través" de la inercia  $J$ .





### 3.3.2 El resorte de rotación o torsión

La elastancia o rigidez,  $K$  de un elemento mecánico rotacional suministrará un torque restaurador similar a la de un resorte traslacional o resorte de torsión. En consecuencia, si se comprime, el resorte tratará de estirarse; mientras que si se estira, este tratará expandirse para regresar a su posición de equilibrio. El torque de reacción  $\tau_K(t)$  sobre cada terminal de un resorte rotacional es la misma e igual al producto de la constante de elastancia  $K$  y la cantidad de deformación espacial del resorte. La representación de un resorte rotacional como elemento de red se muestra en la figura (3.3.1)-(ii). El desplazamiento de cada terminal o extremo del resorte se mide a partir de la correspondiente posición original o de equilibrio. El terminal  $c$  tiene una posición angular  $\theta_c$ , y el terminal  $d$  tiene una posición angular  $\theta_d$ , medidas ambas desde sus respectivas posiciones de equilibrio. En consecuencia, la ecuación de torque cumple con

$$\tau_K(t) = K(\theta_c(t) - \theta_d(t)) = Kp^{-1}[\omega_c(t) - \omega_d(t)]$$

Si el terminal  $d$  está fijo, entonces  $\theta_d(t) = 0$ , y la ecuación anterior se reduce a

$$\tau_K(t) = K\theta_c(t) = Kp^{-1}\omega_c(t)$$

y en consecuencia

$$\frac{d}{dt}\tau_K(t) = K\omega_c(t)$$

### 3.3.3 El amortiguador rotacional

En los sistemas mecánicos rotacionales, el amortiguamiento se refiere generalmente a cualquier resistencia al movimiento rotacional que provoca la atenuación de éste último. A diferencia de las masas y resortes que almacenan la energía, los elementos que provocan el amortiguamiento disipan la energía (y son elementos estáticos).

La amortiguación o fricción viscosa  $B$  caracteriza entonces a aquellos elementos mecánicos que absorben energía. El torque amortiguador es proporcional a la diferencia en velocidad angular de los dos cuerpos. Al igual que para el amortiguador traslacional, se supone que la fricción viscosa es lineal con respecto a la variación en velocidad. Esto simplificará el análisis del comportamiento dinámico del sistema mecánico rotacional bajo estudio. La representación del efecto de disipación o amortiguamiento como elemento de red se presenta en la figura (3.3.1)-(iii) como un amortiguador. El torque reactivo de amortiguamiento  $\tau_B(t)$  se aproxima mediante el producto de la constante de amortiguamiento  $B$  y la velocidad angular relativa de los dos terminales del amortiguador. Esto es

$$\tau_B(t) = B[\omega_e(t) - \omega_f(t)] = B[p\theta_e(t) - p\theta_f(t)]$$

El procedimiento para establecer las ecuaciones de estados de un sistema mecánico rotacional  $P$  mediante la asignación de variables físicas correspondientes a variables asociadas a los elementos acumuladores de energía, se muestra a continuación:

1. Identifique cada posición angular de cada resorte rotacional y la velocidad angular de cada inercia con una componente del vector de estado  $x$ . Naturalmente, posiciones de diferentes resortes y diferentes inercias le corresponderán diferentes entradas (a pesar de que los valores nominales de los resortes o masas sean idénticos).
2. Use la ley de fuerzas de Newton y las leyes constitutivas de cada elemento del sistema, para escribir una ecuación que solo involucre una de las componentes de  $\frac{dx}{dt}$ , pero que no involucre cualquier componente del vector de salida  $y$  o cualquier otra variable distinta a las componentes del estado  $x$  o del vector de entrada  $u$ .
3. Use la ley de fuerzas de Newton y las leyes constitutivas de cada elemento del sistema, para escribir una ecuación que solo involucre una de las componentes de  $y$ , pero que no involucre cualquier componente del vector  $\frac{dx}{dt}$  o cualquier otra variable distinta a las componentes del estado  $x$  o del vector de entrada  $u$ .
4. Organice las ecuaciones derivadas en el paso (2) como

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

y a aquellas derivadas en el paso (3) como

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

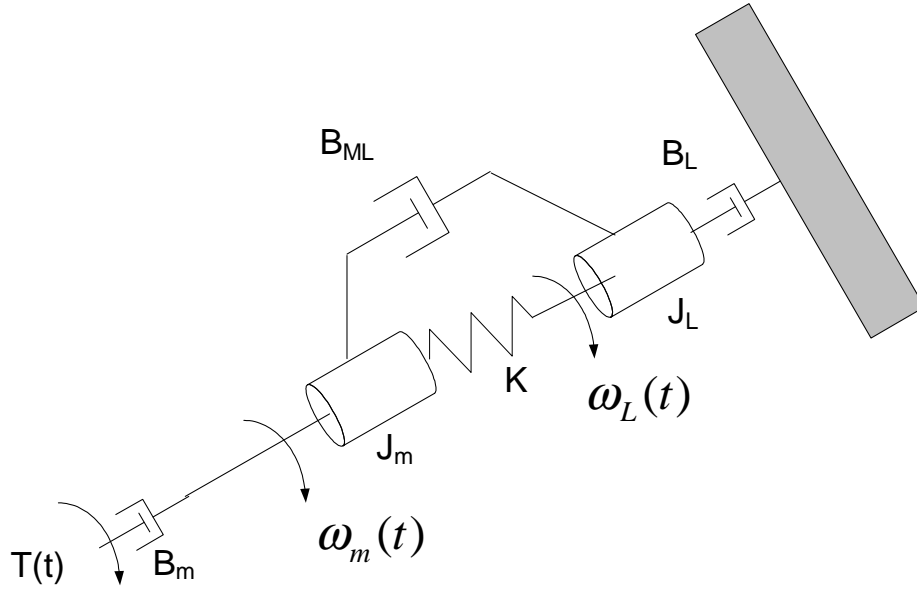
**Ejemplo 17** Considere el sistema mostrado en la figura (3.3.3). La inercia  $J_m$  representa la parte rotatoria de un motor eléctrico o hidráulico que aplica un torque  $T(t)$ , mientras que  $J_L$  es la inercia de la carga. En servos de bajo nivel de potencia, los ejes pueden considerarse inflexibles; sin embargo, en servos de alto nivel de potencia requieren en general el modelaje de la elasticidad del eje mediante la elastancia  $K$ . La amortiguación  $B_{ML}$  representa las pérdidas por fricción en el eje. Los amortiguadores  $B_m$  y  $B_L$  pueden considerarse en modelos más completos, pero en este ejemplo se despreciarán. La salida de interés del sistema es  $y(t) = \omega_L(t)$ .

La aplicación de las leyes de Newton en cada inercia genera las siguientes ecuaciones fundamentales

$$\begin{aligned} J_m p \omega_m(t) + B_{ML}(\omega_m(t) - \omega_L(t)) + K p^{-1}[\omega_m(t) - \omega_L(t)] &= T(t) \\ J_L p \omega_L(t) - B_{ML}(\omega_m(t) - \omega_L(t)) - K p^{-1}[\omega_m(t) - \omega_L(t)] &= 0 \end{aligned}$$

Defina como variables de estados

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) - \theta_L(t) \\ \omega_m(t) \\ \omega_L(t) \end{bmatrix}$$



mediante la asignación de variables físicas asociadas a los elementos almacenadores de energía, De inmediato se tienen las siguientes ecuaciones de estados

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) - x_3(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= \frac{K}{J_m} x_1(t) - \frac{B_{ML}}{J_m} x_2(t) + \frac{B_{ML}}{J_m} x_3(t) + \frac{1}{J_m} u(t) \\
 \dot{x}_3(t) &= \frac{K}{J_L} x_1(t) + \frac{B_{ML}}{J_L} x_2(t) - \frac{B_{ML}}{J_L} x_3(t) \\
 y(t) &= x_3(t)
 \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} x(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{K}{J_m} & -\frac{B_{ML}}{J_m} & \frac{B_{ML}}{J_m} \\ \frac{K}{J_L} & \frac{B_{ML}}{J_L} & -\frac{B_{ML}}{J_L} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
 y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 18** Considere el sistema mecánico rotacional mostrado en la figura (3.3.3). Se desea conocer la velocidad angular  $\omega_2$  de la inercia  $J_2$  cuando se aplica un par torsional  $T$  a la inercia  $J_1$ . Supóngase que los ejes que conectan dichos elementos son flexibles con coeficientes de elastancia  $K_1$  y  $K_2$ , y que hay efectos de pérdida de energía por fricción y que se modela mediante una amortiguador con coeficiente de amortiguamiento  $B$ .

Es posible entonces demostrar que las ecuaciones fundamentales de dicho sistema son

$$\begin{aligned} T(t) &= J_1 p \omega_1(t) + K_1 p^{-1} \omega_1(t) + B \omega_1(t) + K_2 p^{-1} [\omega_1(t) - \omega_2(t)] \\ 0 &= J_2 p \omega_2(t) + K_2 p^{-1} [\omega_2(t) - \omega_1(t)] \end{aligned}$$

y expresándolo en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} (J_1 p + (K_1 + K_2) p^{-1} + B) & -K_2 p^{-1} \\ -K_2 p^{-1} & (J_2 p + K_2 p^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} (J_1 p^2 + B p + (K_1 + K_2)) & -K_2 \\ -K_2 & (J_2 p^2 + K_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siguiendo el método de variables físicas para asignar el vector de estados, defina como variables de estados a

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ p\theta_1(t) \\ \theta_1(t) - \theta_2(t) \\ p\theta_2(t) \end{bmatrix}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= p\theta_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= p\theta_1(t) - p\theta_2(t) = x_2(t) - x_4(t) \end{aligned}$$

Use ahora las ecuaciones fundamentales para encontrar las expresiones para  $\dot{x}_2(t)$  y  $\dot{x}_3(t)$ . De la primera ecuación fundamental se obtiene

$$J_1 \dot{x}_2(t) + B x_2(t) + (K_1 + K_2) x_1(t) - K_2 (x_1(t) - x_3(t)) = T(t)$$

donde se ha usado el hecho que  $\theta_2(t) = x_1(t) - x_3(t)$ . Por lo tanto

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K_1}{J_1} x_1(t) - \frac{B}{J_1} x_2(t) + \frac{K_2}{J_1} x_3(t) + \frac{1}{J_1} u(t)$$

Use ahora la segunda ecuación fundamental para encontrar

$$J_2 \dot{x}_4(t) - K_2 x_3(t) = 0$$

o sea

$$\dot{x}_4(t) = \frac{K_2}{J_2} x_3(t)$$

En forma matricial se expresa entonces las ecuaciones de estados como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{J_1} & -\frac{B}{J_1} & \frac{K_2}{J_1} & \frac{1}{J_1} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{K_2}{J_2} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

**Ejemplo 19** Repita el ejemplo anterior pero ahora tome como vector de estados  $a$

$$z(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ p\theta_1(t) \\ T_2(t) \\ p\theta_2(t) \end{bmatrix}$$

donde  $T_1(t)$  y  $T_2(t)$  son los pares torsionales en los extremos de los resortes rotacionales.

De la relación constitutiva del resorte se tiene que

$$\begin{aligned} T_1(t) &= K_1 p^{-1} \omega_1 \\ T_2(t) &= K_2 p^{-1} [\omega_2(t) - \omega_1(t)] \end{aligned}$$

y de inmediato

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= K_1 z_2(t) \\ \dot{z}_3(t) &= K_2 z_4(t) - K_2 z_2(t) \end{aligned}$$

y use ahora las ecuaciones fundamentales

$$\begin{bmatrix} (J_1 p + (K_1 + K_2) p^{-1} + B) & -K_2 p^{-1} \\ -K_2 p^{-1} & (J_2 p + K_2 p^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

para obtener

$$\begin{aligned} J_1 \dot{z}_2(t) + z_1(t) - z_3(t) + B z_2(t) &= u(t) \\ z_2(t) + J_2 \dot{z}_4(t) &= 0 \end{aligned}$$

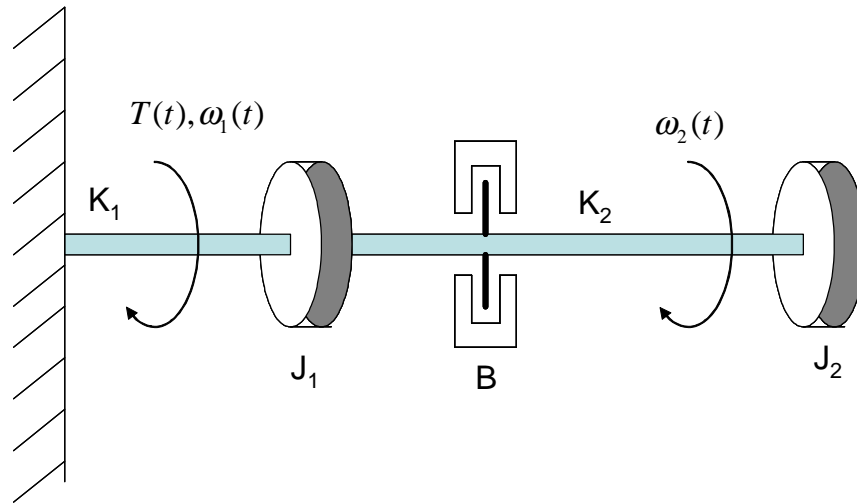
Por lo tanto las ecuaciones de estados serán

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & K_1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_1} & -\frac{B}{J_1} & \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & -K_2 & 0 & K_2 \\ 0 & -\frac{1}{J_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \ 0 \ 0 \ 1] z(t) + [0] u(t) \end{aligned}$$

Lo interesante de los ejemplos (18) y (19), es la ilustración del hecho que no existe tal cosa como la representación en espacio de estados de un sistema  $P$  dado. Las representaciones en variables de estados no son únicas inclusive cuando se emplea el método de asignación por variables físicas o almacenadoras de energía.

## 4 Analogías

Existen diversas maneras de sistematizar el proceso de encontrar las ecuaciones de estados de una planta dada una vez que se ha definido el vector de estados.



Sin embargo, en estas notas se utilizará el método de analogía eléctrica ya que es más natural para la audiencia a cual está dirigida estas notas y permite consolidar tantos los conceptos como los principales resultados de la teoría de redes eléctricas.

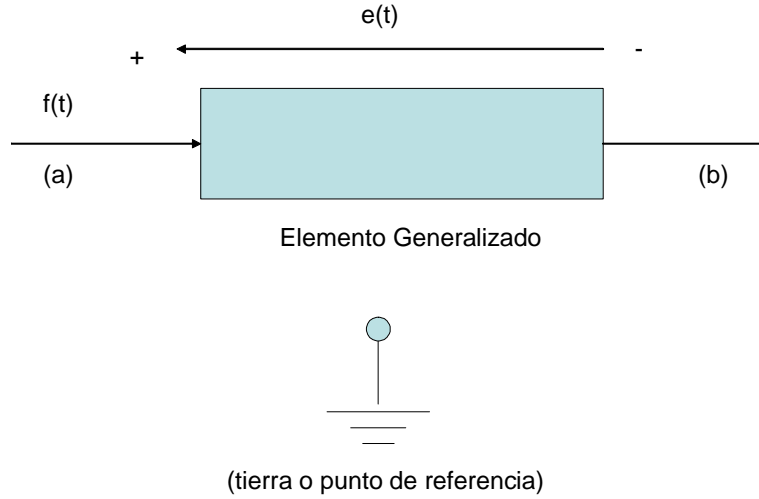
El método se basa en el concepto de circuitos eléctricos análogos y que se emplean para representar sistemas (de diferente naturaleza física) para los cuales las ecuaciones diferenciales que definen el conjunto de ecuaciones fundamentales del sistema tienen la misma forma.

Para entender y justificar el método a presentar es necesario recordar varios conceptos básicos. En todo sistema físico existen dos tipos de variables: a) las variables de flujo, y b) las variables de esfuerzo.

Se definen como **variables de flujo** o variables "a lo largo" como aquellas variables que tienen el mismo valor a todo lo largo del elemento, o sea, la variable fluye a través del elemento sin sufrir variaciones, y para su medición es necesario insertar un instrumento de medición en serie con el elemento. Una variable de flujo  $f$  de un sistema eléctrico es naturalmente la corriente, y esta se mide colocando un voltímetro en paralelo con el elemento en el cual ocurre la caída o diferencia de potencial.

Se definen como **variables de esfuerzo** o variables "a través" como aquellas variables que dependen de una diferencia a través de un elemento, y para su medición es necesario colocar un instrumento de medición en paralelo con el elemento. Una variable de esfuerzo  $e$  de un sistema eléctrico es naturalmente el voltaje, y esta se mide insertando un amperímetro en serie con el elemento por el cual fluye la corriente a medir.

No es difícil demostrar que la energía o trabajo suministrado (o utilizado) por un elemento por el cual fluye una variable  $f$  y en sus terminales está presente una variable de esfuerzo  $e$ , de acuerdo a la polaridad establecida en la figura



(4)), sobre el intervalo  $[0, T]$

está dada por

$$Energía = \int_0^T e(t) f(t) dt$$

Con la convención dada, la energía es una cantidad escalar y, bajo la polaridad mostrada, se considera que si la energía es positiva si el elemento absorbe o disipa energía (como en una resistencia), y negativa si es emitida (como en una fuente).

En consecuencia la potencia asociada a un elemento generalizado como el mostrado en la figura (4) está dada por

$$pot = e(t) f(t)$$

y las unidades siempre serán en watts, independientemente de la naturaleza física de las variables de esfuerzo y flujo.

En base a estos conceptos básicos y convenciones se tiene los siguientes elementos "generalizados":

1. **Resistencia o elemento disipativo:** El comportamiento de un elemento  $R$  es de una resistencia si esa determinado por la relación constitutiva

$$e(t) = R f(t) \quad (17)$$

o

$$f(t) = \frac{e(t)}{R}$$

Tal elemento es no lineal si el parámetro depende de  $f$  o  $e$ , y evidentemente es un elemento estático.

La correspondiente expresión para la potencia disipada por tal elemento es

$$\begin{aligned} pot(t) &= e(t) f(t) \\ &= \frac{e^2(t)}{R} = \frac{f^2(t)}{R} \end{aligned}$$

y note que la potencia siempre será positiva.

2. **Capacitancia:** El comportamiento de un elemento  $C$  es de una capacitancia si está determinado por la relación constitutiva

$$e(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{C} i(\tau) d\tau + e(t_0) \quad (18)$$

con  $t_0 \in R$ , y donde  $e(t_0)$  es el esfuerzo acumulado en el elemento en el instante  $t_0$ .

La anterior relación puede expresarse como

$$f(t) = \frac{d}{dt}(Ce(t)) = p(Ce(t))$$

La relación (18) se aplica tanto a elementos lineales como no lineales, y demuestra que la capacitancia es un elemento dinámico.

Si  $C$  es constante, la relación constitutiva del elemento se reduce a

$$f(t) = C \frac{d}{dt} e(t)$$

y si la capacitancia es variante en el tiempo, entonces

$$f(t) = C(t) \frac{d}{dt} e(t) + e(t) \frac{d}{dt} C(t)$$

Finalmente si la capacitancia es no lineal (depende de  $f$  o  $e$ ), suponga que  $C = C(e)$ , entonces

$$\frac{d}{dt} C = \frac{dC}{de} \frac{de}{dt}$$

y en consecuencia la relación constitutiva del capacitor será

$$\begin{aligned} f(t) &= C(t) \frac{d}{dt} e(t) + e(t) \frac{d}{dt} C(t) \\ &= C \frac{d}{dt} e(t) + e \frac{dC}{de} \frac{de}{dt} \\ &= \left[ C + e \frac{dC}{de} \right] \frac{de}{dt} \end{aligned}$$



Suponga que la capacitancia  $C$  es invariante en el tiempo y lineal, entonces la potencia instantánea suministrada al (almacenada por) condensador es

$$pot(t) = e(t) f(t) = C e(t) \frac{d}{dt} e(t)$$

y en consecuencia, la energía suministrada al capacitor entre  $t = t_0$  y  $t = T$  es

$$\begin{aligned} \text{energía} &= \int_{t_0}^T pot(t) dt = \int_{t_0}^T C e(t) \frac{d}{dt} e(t) dt \\ &= \frac{1}{2} C [e^2(T) - e^2(t_0)] \end{aligned}$$

Suponga que  $t_0 = 0$ , y  $e(0) = 0$ , entonces

$$\text{energía} = \frac{1}{2} C e^2(T)$$

Dicha expresión puede interpretarse como que la energía es almacenada en el capacitor generalizado a través de la variable de esfuerzo  $e$ , en consecuencia,  $e$  califica como la variable de estado relacionada con el elemento almacenador de energía  $C$ .

3. **Inductancia o Inertancia:** El comportamiento de un elemento  $L$  es de una inductancia si está determinado por

$$f(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{L} e(\tau) d\tau + f(t_0) \quad (19)$$

con  $t_0 \in R$ , y donde  $f(t_0)$  es el flujo acumulado en el elemento en el instante  $t_0$ .

Al igual que en el elemento capacitancia, la relación (19) se aplica tanto a elementos lineales como no lineales. Para este elemento puede hacerse un análisis similar al de la capacitancia para los casos cuando es el elemento es variante en tiempo o no lineal.

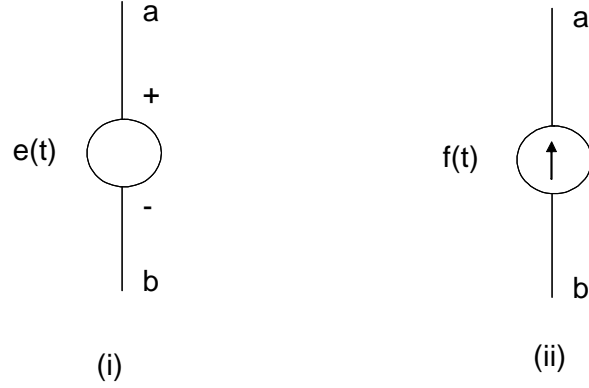
La energía almacenada por una inductancia  $L$  constante en el tiempo sobre un intervalo  $[t_0, T]$  está dada por

$$\text{energía} = \frac{1}{2} L [f^2(T) - f^2(t_0)]$$

Suponga que  $t_0 = 0$ , y  $f(0) = 0$ , entonces

$$\text{energía} = \frac{1}{2} L f^2(T)$$

Dicha expresión puede interpretarse como que la energía es almacenada en el inductor generalizado vía la variable de flujo  $f$ , en consecuencia,  $f$  califica como la variable de estado relacionada con el elemento almacenador de energía  $L$ .



4. **Fuentes de esfuerzo y flujo:** El comportamiento de las fuentes de esfuerzo y flujo, respectivamente, es

$$\begin{aligned} e &= e(t) \\ f &= f(t) \end{aligned}$$

independientes de  $f$  y  $e$  respectivamente. La simbología correspondiente se muestra en la figura (4)

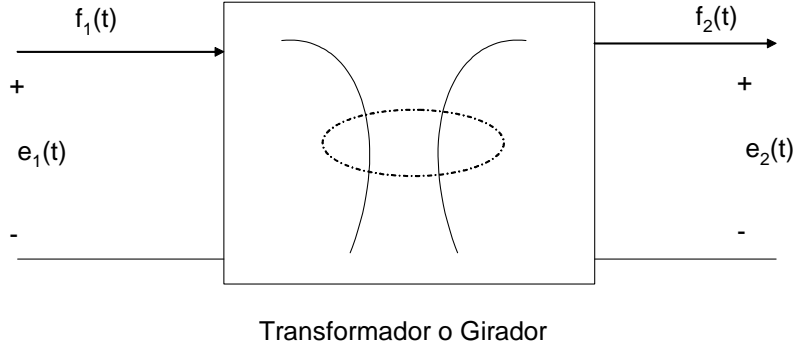
5. **Transformadores y elementos giratorios:** En los transformadores y elementos giratorios transmiten el mismo tipo de energía en los dos puertos. Solo se presenta un cambio en la relación entre las variables de flujos y esfuerzos en ambos puertos. Para el transformador, la relación está entre el esfuerzo en un puerto y el esfuerzo en el otro, y entre flujo y otro. Sin embargo, para el elemento giratorio, las variables están cruzadas, es decir la relación es entre el esfuerzo y el flujo en cada puerto. Este tipo de transmisor de potencia se representará simbólicamente como se muestra en la figura (5) y se diferenciará mediante la relación constitutiva correspondiente.

El elemento transformador está definido por la relación constitutiva siguiente

$$\begin{aligned} e_1(t) &= me_2(t) \\ f_1(t) &= \frac{1}{m}f_2(t) \end{aligned} \tag{20}$$

El segundo factor es  $1/m$  para lograr que la potencia de entrada al transformador ideal sea igual a la potencia de salida, y en consecuencia, no existe almacenamiento o disipación de energía. Esto es evidente ya que

$$\begin{aligned} pot_1(t) &= e_1(t)f_1(t) = (me_2(t))\left(\frac{1}{m}f_2(t)\right) \\ &= e_2(t)f_2(t) = pot_2(t) \end{aligned}$$



$e_1(t)$ .

Por otro lado, la relación constitutiva para un elemento giratorio es

$$\begin{aligned} e_1(t) &= r_G f_2(t) \\ f_1(t) &= \frac{1}{r_G} e_2(t) \end{aligned} \quad (21)$$

Las ecuaciones (21) suponen también un equilibrio de potencia para el elemento giratorio ideal. Debido a la forma cruzada de la relación entre las variables en (21), pueden obtenerse, en principio, distintas formas de comportamiento cuando los elementos giratorios se combinan con otros elementos similares o no. Esto último se ilustró con el elemento giratorio eléctrico que se discutió previamente.

**Ejemplo 20** *Transformador mecánico traslacional: Considere la palanca mecánica con pivote mostrada en la figura (4). Considerando la rotación en torno al pivote  $O$ , se observa que*

$$\frac{V_1(t)}{a} = \frac{V_2(t)}{b}$$

de modo que

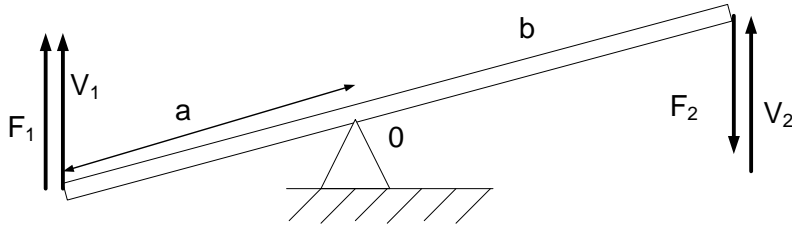
$$V_1(t) = \frac{a}{b} V_2(t)$$

*Asimismo, puesto que se supone que la palanca carece de masa (es ligera), el torque total sobre el sistema debe ser nulo, y en consecuencia*

$$F_1(t) a = F_2(t) b$$

o sea

$$F_1(t) = \frac{b}{a} F_2(t)$$



Defina como la constante del transformador a  $m = \frac{a}{b}$ , o sea  $m$  representa la relación de palanca, y obtenga entonces la siguiente relación constitutiva

$$\begin{aligned} V_1(t) &= mV_2(t) \\ F_1(t) &= \frac{1}{m}F_2(t) \end{aligned}$$

que coincide con la del transformador generalizado

b

**Ejemplo 21** Transformador mecánico rotacional: Considere el juego de engranajes mostrado en la figura (4). Aquí se denotara por  $N_i$  al número de dientes del engranaje  $i$ ,  $\omega_i = p\dot{\theta}_i$  es la velocidad de cada engranaje  $i$ ,  $\theta_i$  es la posición angular de cada engranaje  $i$ , con  $i = 1, 2$ . Generalmente, el acoplamiento entre los dientes de los engranajes no es perfecto, y puede existir entre ellos un espacio. Este efecto no-lineal se conoce como zona muerta. Cuando la zona muerta es pequeña, esta se desprecia y hace al juego de engranajes como un elemento lineal. Se supone también que los ejes conductores de los engranajes no tienen inercia, son inflexible y no están sujetos a pérdidas por fricción.

La relación constitutiva del juego de engranajes es

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \frac{N_2}{N_1}\omega_2(t) \\ T_1(t) &= \frac{N_1}{N_2}T_2(t) \end{aligned}$$

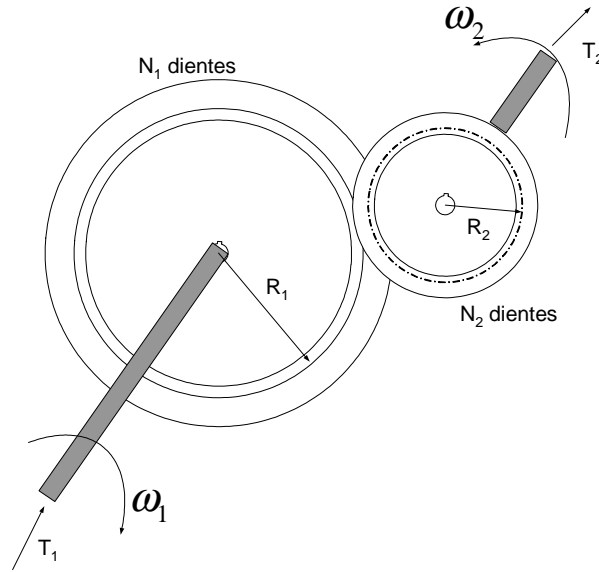
Defina

$$m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

como la relación de engranaje o relación de velocidad. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= m\omega_2(t) \\ T_1(t) &= \frac{1}{m}T_2(t) \end{aligned}$$

y esta coincide con la relación constitutiva del transformador generalizado.



Resulta evidente en base a las similitudes o analogías mostradas de los sistemas eléctricos, mecánicos traslacionales y mecánico rotacional que:

1. La corriente eléctrica, la fuerza mecánica y el torque o par rotativo son **variables de flujo**.
2. El voltaje o diferencia de potencial eléctrico, la velocidad lineal y la velocidad angular son **variables de esfuerzo**.

Por lo tanto:

- La resistencia eléctrica, el amortiguador traslacional y el amortiguador rotacional son **elementos disipativos o resistencias generalizadas**.
- La capacitancia eléctrica, la masa y la inercia son **elementos capacitivos**.
- La inductancia eléctrica, el resorte traslacional y el resorte rotacional son **inertancias o inductancias generalizadas**.

En consecuencia se puede establecer una analogía eléctrica (no es la única) para los elementos mecánicos traslacionales que se muestra en la figura (4)

y de igual manera se puede establecer una analogía eléctrica para los elementos mecánicos rotacionales que se muestra en la figura (4).

Ahora se plantea el siguiente procedimiento para construir el circuito eléctrico análogo a un sistema mecánico (traslacional o rotacional) dado:

Elemento Mecánico Traslacional		Elemento Eléctrico	
F	Fuerza	I	Corriente
$V=px$	Velocidad	V	Voltaje
M	Masa	C	Capacitancia
K	Elastancia	1/L	Inductancia recíproca
B	Coeficiente de Amortiguamiento	1/R	Conductancia

Elemento Mecánico Rotacional		Elemento Eléctrico	
T	Torque o Par	I	Corriente
$\omega=p\theta$	Velocidad angular	V	Voltaje
J	Inercia	C	Capacitancia
K	Elastancia	1/L	Inductancia recíproca
B	Coeficiente de Amortiguamiento	1/R	Conductancia

1. Identifique cada uno de los elementos capacitivos del sistema y asígnele la correspondiente variable de esfuerzo en uno. Represente cada elemento como un condensador  $C$  con uno de sus terminales a un nodo común o tierra y asigne la variable de esfuerzo correspondiente como el voltaje del otro terminal del capacitor.
2. identifique los elementos del sistema que están conectados a un elemento capacitivo  $y$  represéntelo como una resistencia o una inductancia de acuerdo a las tablas de analogías presentadas.
3. Identifique los transformadores mecánicos y represéntelos como un transformador eléctrico. Determine la relación de flujo de cada transformador y sea consistente con las polaridades, en el sentido que las polarizaciones del sistema mecánico dado deben coincidir con las correspondientes polarizaciones en el sistema eléctrico.
4. Coloque las fuentes de esfuerzo y de flujo como fuentes de tensión o corriente de acuerdo a la aplicación de estos en el sistema real. La polaridad

de las fuentes estarán de acuerdo a las polaridades de cada uno de los elementos mecánicos que constituyen el sistema.

5. Aplique métodos nodales o mallas para determinar las ecuaciones fundamentales.
6. Asigne como variables de estados de acuerdo al **método de variables físicas** relacionadas con los elementos almacenadores de energía, para construir el vector  $x$ . También puede usar el llamado método de fase para asignar las variables de estados, el cual consiste en seleccionar como posibles variables de estado a aquellas que aparecen derivadas en alguna de las ecuaciones fundamentales obtenidas.
7. Verifíquese que las variables de estados seleccionadas sean independientes, esto es, que no estén ligadas por una relación meramente algebraica (o sea, relaciones que no involucren derivadas o integrales).
8. Identifique la señal de entrada  $u$  y de salida  $y$ , y determine el modelo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

si el sistema es no-lineal, o el modelo matricial

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

para sistemas lineales.

**Ejemplo 22** Considere el sistema mecánico traslacional mostrado en la figura (4). Aplicando el método arriba sugerido se construye el circuito eléctrico equivalente (ver figura(4)). En dicho circuito los voltajes nodales corresponden a las velocidades de las masas traslacionales del sistema mecánico, esto es

$$V_a(t) = pz_a(t); \quad V_b(t) = pz_b(t); \quad V_c(t) = pz_c(t);$$

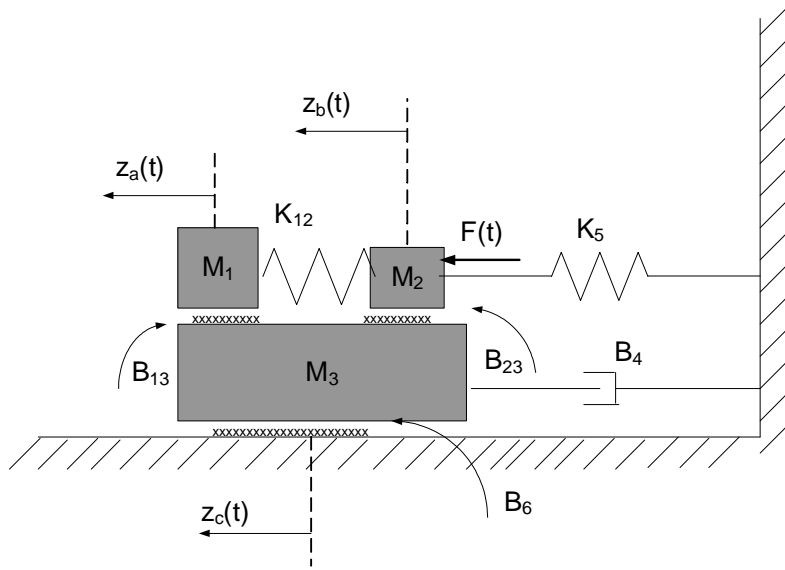
La señal de entrada al sistema es  $u(t) = F(t)$ , la fuerza aplicada en la masa  $M_2$ ; mientras que la salidas de interés son  $y_1(t) = z_a(t)$  e  $y_2(t) = z_b(t)$ .

Es importante notar que todos los condensadores equivalentes están conectados a un nodo común o tierra. Aplicando el método de nodos se obtienen de inmediato las ecuaciones fundamentales del sistema

$$\begin{bmatrix} M_1p + B_{13} + \frac{K_{12}}{p} & -\frac{K_{12}}{p} & -B_{13} \\ -\frac{K_{12}}{p} & M_2p + B_{23} + \frac{(K_5 + K_{12})}{p} & -B_{23} \\ -B_{13} & -B_{23} & M_3p + B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pz_a(t) \\ pz_b(t) \\ pz_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$B_c = B_{13} + B_{23} + B_4 + B_6$$



En un sistema mecánico traslacional, según el método de variables físicas o acumuladores de energía, las variables de estados son los desplazamientos de los resortes y las velocidades de las masas. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= z_b(t) - z_a(t) \\
 x_2(t) &= pz_a(t) \\
 x_3(t) &= z_b(t) \\
 x_4(t) &= pz_b(t) \\
 x_5(t) &= pz_c(t)
 \end{aligned}$$

De las definiciones de las variables de estados, se obtiene de inmediato

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_4(t) - x_2(t) \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t)
 \end{aligned}$$

y solo resta hallar,  $\dot{x}_2(t)$ ,  $\dot{x}_4$  y  $\dot{x}_5(t)$ , y las cuales deberán deducirse de las ecuaciones fundamentales.

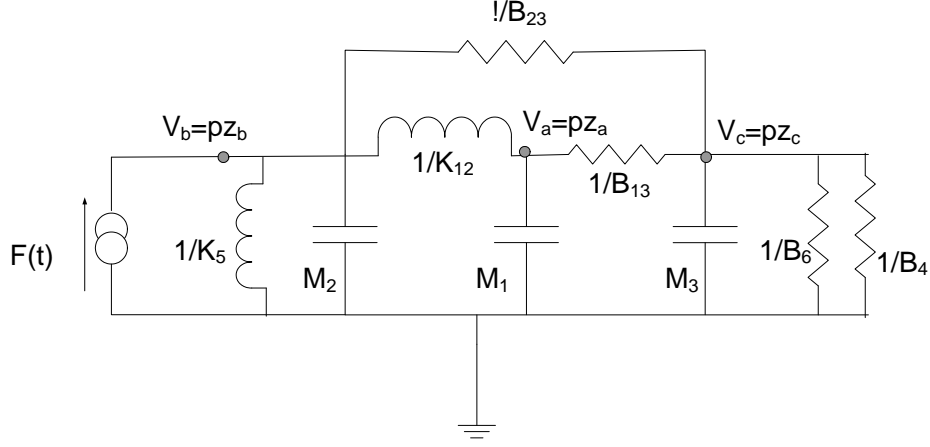
De la primera ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}
 M_1 \dot{x}_2 + B_{13}x_2 + K_{12}z_a - K_{12}z_b - B_{13}x_5 &= 0 \\
 M_1 \dot{x}_2 + K_{12}(z_a - z_b) + B_{13}x_2 - B_{13}x_5 &= 0 \\
 M_1 \dot{x}_2 + K_{12}x_1 + B_{13}x_2 - B_{13}x_5 &= 0
 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K_{12}}{M_1}x_1(t) - \frac{B_{13}}{M_1}x_2(t) - \frac{B_{13}}{M_1}x_5(t)$$





De la segunda ecuación fundamental se deduce que

$$\dot{x}_4(t) = -\frac{K_{12}}{M_2}x_1(t) - \frac{K_5}{M_2}x_3(t) - \frac{B_{23}}{M_2}x_4(t) + \frac{B_{23}}{M_2}x_5(t) + \frac{1}{M_2}u(t)$$

y de la tercera ecuación fundamental se llega a

$$\dot{x}_5(t) = \frac{B_{13}}{M_3}x_2(t) + \frac{B_{23}}{M_3}x_4(t) - \frac{B_c}{M_3}x_5(t)$$

Por otro lado, las ecuaciones de salida se convierten en

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -x_1(t) + x_3(t) \\ y_2(t) &= x_3(t) \end{aligned}$$

Como resultado, el modelo en variable de estados para la planta mecánica traslacional dada será

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_{12}}{M_1} & -\frac{B_{13}}{M_1} & 0 & 0 & -\frac{B_{13}}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_{12}}{M_2} & 0 & -\frac{K_5}{M_2} & -\frac{B_{23}}{M_2} & \frac{B_{23}}{M_2} \\ 0 & \frac{B_{13}}{M_3} & 0 & \frac{B_{23}}{M_3} & -\frac{B_c}{M_3} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + [0] u(t) \end{aligned}$$

**Ejemplo 23** Considere el sistema mecánico rotacional mostrado en la figura (4), el cual consta de dos cilindros (modelados por las inercias  $J_1$  y  $J_2$ ) que hacen contacto entre ellos y presentan pérdidas por fricción. Esto último se representa por el coeficiente de fricción  $B_3$ . Los cilindros también rozan con la

carcasa en los cuales ellos se encuentra, esto se representa por los coeficientes  $B_1$  y  $B_2$ . Es de interés la posición angular,  $\theta_3(t)$ , del cilindro  $J_2$ . Tómesese como entrada al sistema el par o torsión  $T(t)$  aplicado en el resorte  $K_1$ .

Empleando el procedimiento sugerido se construye el circuito eléctrico equivalente mostrado en la figura (4). Aplicando el método nodal se obtienen las siguientes ecuaciones fundamentales

$$\begin{bmatrix} \frac{K_1}{p} & -\frac{K_1}{p} & 0 \\ -\frac{K_1}{p} & J_1 p + (B_1 + B_3) + \frac{K_1}{p} & -B_3 \\ 0 & -B_3 & J_2 p + (B_2 + B_3) + \frac{K_2}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\theta_1(t) \\ p\theta_2(t) \\ p\theta_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, supóngase que se desea asignar las variables de estados asociadas al sistema mediante el método de variables físicas acumuladoras de energía. Inicialmente se tienen cuatro elementos almacenadores; sin embargo, como puede verse en circuito eléctrico equivalente, el resorte  $K_1$  está en serie con la fuente de corriente  $T(t)$ , y por lo tanto, éste puede eliminarse ya que no afecta el comportamiento dinámico del resto de la red y las salidas no dependen de  $\theta_1(t)$ . En términos del sistema original, el resorte  $K$  no existe efectivamente en la red ya que el torque se transmite completamente a través de él. Por lo tanto, sólo existen tres elementos efectivos que son acumuladores de energía  $J_1, J_2$  y  $K_2$ , y los cuales definen el vector de estados

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_3(t) \\ p\theta_3(t) \\ p\theta_2(t) \end{bmatrix}$$

De la definición anterior, se tiene de inmediato

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

y por lo mencionado las ecuaciones fundamentales se reducen a

$$\begin{bmatrix} J_1 p + (B_1 + B_3) & -B_3 \\ -B_3 & J_2 p + (B_2 + B_3) + \frac{K_2}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\theta_2(t) \\ p\theta_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y se obtiene entonces de la primera ecuación

$$J_1 \dot{x}_3(t) + (B_1 + B_3) x_3(t) - B_3 x_2(t) = T(t)$$

o sea

$$\dot{x}_3(t) = \frac{B_3}{J_1} x_2(t) - \frac{(B_1 + B_3)}{J_1} x_3(t) + \frac{1}{J_1} T(t)$$

mientras que de la última ecuación se tiene

$$-B_3 x_3(t) + J_2 \dot{x}_2(t) + (B_2 + B_3) x_2(t) + K_2 x_1(t) = 0$$

o sea

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K_2}{J_2} x_1(t) - \frac{(B_2 + B_3)}{J_2} x_2(t) + \frac{B_3}{J_2} x_3(t)$$



## 4.1 Modelaje en Variables de Estados de Sistemas Electromecánicos

Los sistemas electromecánicos son un tipo muy especial de sistemas que procesan energía, en los que las dos formas predominantes de energía o potencia son la eléctrica y la mecánica. Este tipo de sistemas que pueden operar como convertidores de energía o transductores son ampliamente empleados en la ingeniería de control.

En esta sección se presentarán los modelos básicos de cierto tipo de sistemas electromecánicos como son los motores y generadores DC. La mayoría de los motores que se emplean en los sistemas de control son de corriente directa (DC). Esto se debe a la facilidad de controlar la velocidad de un motor de corriente directa. Asimismo, se puede invertir la dirección de rotación con solo modificar la polaridad del voltaje aplicado. También, las máquinas DC son capaces de suministrar grandes amplificaciones de potencia.

### 4.1.1 Generador DC

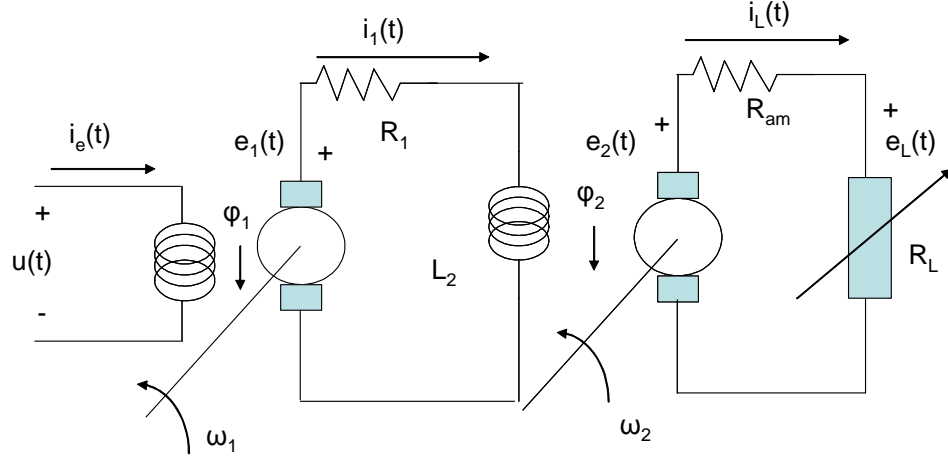
Un motor DC puede emplearse como un amplificador de potencia (elemento final de control), en el cual la potencia requerida para excitar el circuito de campo es inferior a la potencia de salida en el circuito de armadura.

Considere el generador DC mostrado en la figura (4.1.1). En este sistema, la variable controlada puede ser, dependiendo del problema, la corriente, el voltaje o la potencia en el generador de salida.

En la mayoría de los casos, es el voltaje en los terminales del generador que debe permanecer constante. Por lo tanto, el voltaje en la carga es la salida, esto es,  $y(t) = e_L(t)$ .

El generador es controlado mediante la bobina de campo o excitación. Si el generador principal (2) tiene un excitador auxiliar (un generador (1) preliminar), entonces la señal de control  $u(t)$  es la corriente de excitación o de campo  $i_e(t)$ . Las acciones externas para el generador son: a) los cambios en la velocidad de rotación del eje del generador,  $\omega_2$ , y del eje del excitador,  $\omega_1$ ; b) las variaciones en la resistencia de carga  $R_L$  o de la corriente de carga  $i_L$ ; c) el desplazamiento de las escobillas con respecto a los polos del generador; d) el desgaste del colector, e) las variaciones en las características magnéticas del acero y de las brechas de aire, etc. Algunas de las acciones o entradas tales como las de la corriente de carga  $i_L(t)$  o de las velocidades de rotación  $\omega_1(t)$  y  $\omega_2(t)$  son medibles y por lo tanto pueden ser clasificadas como perturbaciones; mientras que las otras pueden clasificarse como incertidumbres paramétricas o paramétricas.

Suponga que la variable de perturbación es la corriente de carga, o sea,  $d(t) = i_L(t)$ . Ahora el modelo matemático del sistema será:



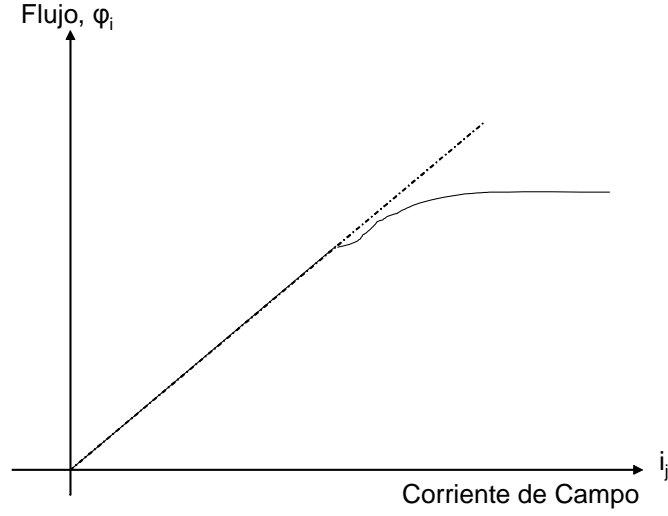
$$\begin{aligned}
 u(t) &= i_e(t) \\
 \varphi_1(t) &= \varphi_1(i_e(t)) \\
 e_1(t) &= C_1 \omega_1 \varphi_1(t) \\
 e_1(t) &= R_1 i_1(t) + L_2 \frac{di_1(t)}{dt} \\
 \varphi_2(t) &= \varphi_2(i_1(t)) \\
 e_2(t) &= C_2 \omega_2 \varphi_2(t) \\
 e_2(t) &= R_{am} i_L(t) + u_L(t)
 \end{aligned}$$

donde  $e_1$  y  $e_2$  son las fuerzas electromotriz en las armaduras de los generadores auxiliar y principal respectivamente;  $\varphi_1(i_e(t))$  y  $\varphi_2(i_1(t))$  son las funciones características de excitación de los generadores.

Estas ecuaciones no toman en cuenta la respuesta de la armadura, la disipación magnética, y las corrientes de fuga en el sistema magnético, u otro número de variables no muy importantes. En el establecimiento de dicho modelo se ha aplicado el principio de obtener un modelo lo suficientemente preciso para describir el comportamiento dinámico del sistema, pero lo suficientemente sencillo para que su manipulación matemática sea rápida y efectiva.

Los coeficientes de proporcionalidad  $C_1$  y  $C_2$  son parámetros de la planta y dependen de las características de las bobinas o enrollados de la armadura y de la posición de las escobillas relativas a los polos del generador.

Noten que los flujos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son funciones de las corrientes de campo y el tipo de hierro que se emplee en el campo. Una curva característica o de magnetización típica se muestra en la figura (4.1.1). Hasta la saturación, la relación es aproximadamente lineal, y el flujo es directamente proporcional a la



corriente de campo

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \kappa_1 i_e(t) \\ \varphi_2(t) &= \kappa_2 i_1(t)\end{aligned}$$

En consecuencia, se obtienen las siguientes expresiones para las fuerzas electromotrices generadas en los bornes de las armaduras de los respectivos generadores

$$\begin{aligned}e_1(t) &= K_g^{(1)} i_e(t) \\ e_2(t) &= K_g^{(2)} i_1(t)\end{aligned}$$

donde  $K_g^{(j)} = C_j \omega_j \kappa_j$ , denominadas las constantes del generador  $(j)$ ,  $j = 1, 2$ . y las ecuaciones fundamentales del generador considerado son

$$\begin{aligned}e_1(t) &= K_g^{(1)} i_e(t) \\ e_1(t) &= R_1 i_1(t) + L_2 \frac{di_1(t)}{dt} \\ e_2(t) &= K_g^{(2)} i_1(t) \\ e_2(t) &= R_{am} i_L(t) + u_L(t)\end{aligned}$$

Defina como variable de estado a

$$x(t) = i_1(t)$$

para obtener

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= -\frac{R_1}{L_2}x(t) + \frac{K_g^{(1)}}{L_2}u(t) + [0]d(t) \\ y(t) &= \frac{K_g^{(2)}}{R_{am}}x(t) + [0]u(t) - \frac{1}{R_{am}}d(t)\end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_d d(t) = Ax(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} B_u & B_d \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= Cx(t) + D_u u(t) + D_d d(t) = Cx(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} D_u & D_d \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_2} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_u & B_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_g^{(1)}}{L_2} & 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} \frac{K_g^{(2)}}{R_{am}} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} D_u & D_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_{am}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Este ejemplo es interesante ya que ilustra la manera en que debe manipularse y representarse las ecuaciones de estados cuando el sistema está sujeto a entradas de control y perturbaciones. Al mismo tiempo, demuestra que la representación de un sistema o planta

$$P : \left( \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right)_x^n$$

es lo suficientemente general para abarcar casos donde la planta está sujeta a varios tipos de señales (control, perturbación y ruido).

**Ejercicio 24** *Deducir un modelo en variables de estados para el generador DC mostrado en la figura (4.1.1) si ahora el generador de excitación (1) tiene una resistencia  $R_1$  en serie con la inductancia  $L_1$  y la señal de entrada es la tensión  $u(t)$ .*

#### 4.1.2 Motor DC controlado por armadura

Considere la planta electromecánica "Motor DC controlado por Armadura" mostrado en la figura (7). La velocidad de rotación  $\omega(t)$  de una carga con momento de inercia  $J$  puede controlarse mediante la tensión  $u(t)$  aplicada en la armadura del motor o por la tensión  $u_f(t)$  aplicada en el campo del motor. En este ejemplo, el control se realizará por la armadura mientras que se mantiene constante  $u_f(t)$ . se supone que el eje del motor es inflexible. Por lo tanto,  $u(t)$  es la entrada a la planta, mientras que la salida  $y(t)$  es  $\omega(t)$ .

El comportamiento dinámico del motor puede describirse matemáticamente por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\Phi_M &= \Phi_M(i_f) \\ u(t) &= R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + v_{emf}(t) \\ v_{emf}(t) &= C \Phi_M \omega(t) \\ T_m(t) &= \kappa \Phi_M i_a(t) \\ T_m(t) &= J \frac{d}{dt} \omega(t) + T_f\end{aligned}$$

Aquí  $\Phi_M(i_f)$  y  $T_f = T_f(\omega)$  son generalmente funciones no-lineales,  $J$  es el momento de inercia de la carga reducida al eje del motor. Para simplificar el análisis puede suponerse que el torque de fricción sobre el eje del motor está dado por

$$T_f = B\omega(t).$$

donde  $B$  es el coeficiente de fricción.

Los coeficientes de proporcionalidad  $C$  y  $\kappa$  son parámetros del motor y depende de su diseño. Aquí se han despreciado la respuesta de la armadura, la disipación magnética y el efecto de las corrientes de fuga.

Defina como variables de estados a  $x_1(t) = i_a(t)$ ;  $x_2(t) = \theta(t)$ ;  $x_3(t) = \omega(t)$  para encontrar que

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{R_a}{L_a} x_1(t) - \frac{K_v}{L_a} x_3(t) - \frac{1}{L_a} u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{K_T}{J} x_1(t) - \frac{B}{J} x_3(t) \\ y(t) &= x_3(t)\end{aligned}$$

donde  $K_T = \kappa \Phi_M$  es la denominada constante de torque del motor, mientras  $K_v = C \Phi_M$  es la constante de fuerza electromotriz del motor. En consecuencia

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_v}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_T}{J} & 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)\end{aligned}$$

Dichas ecuaciones tienen la forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

donde  $A \in R^{3 \times 3}$ ,  $B \in R^{3 \times 1}$ ,  $C \in R^{1 \times 3}$ ,  $D \in R$ .



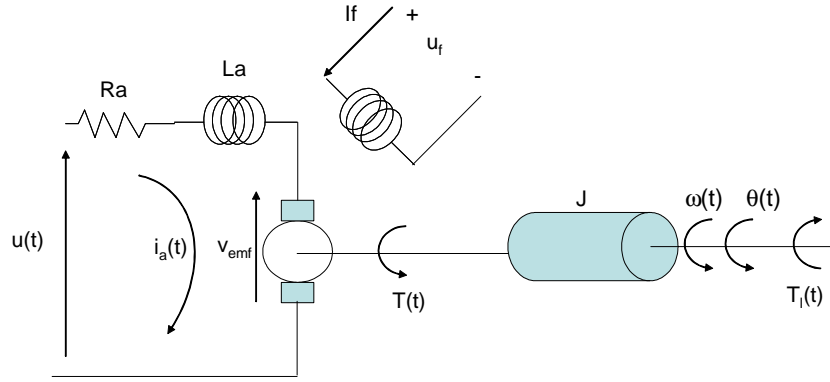


Figure 7: Motor DC controlado por Armadura

En este caso, las variables de estados  $x_1(t) = i_a(t)$ ;  $x_2(t) = \theta(t)$ ;  $x_3(t) = \omega(t)$  tienen un significado físico definido, ya que cada una de ellas representa una variable física relevante a la representación dinámica de la planta considerada.

#### 4.1.3 Motor DC controlado por campo

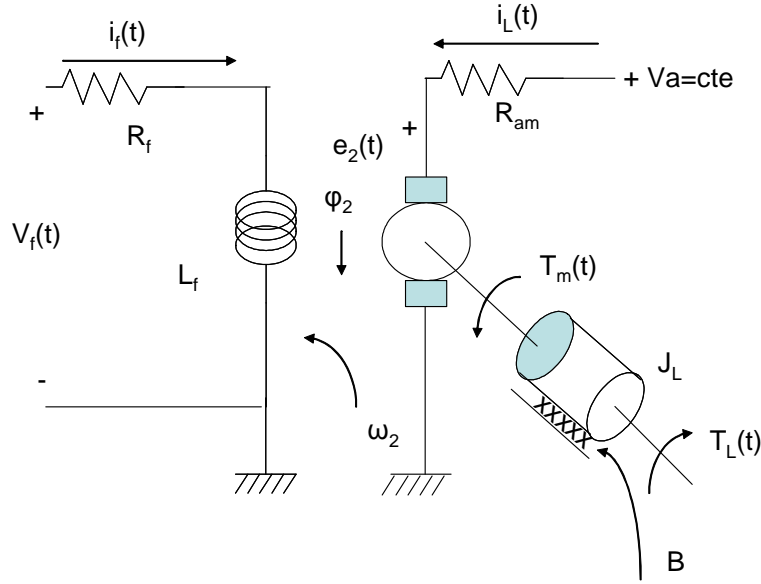
Considere ahora el sistema electromecánico: "motor DC controlado por campo" mostrado en la figura (4.1.3). Un motor DC donde la corriente de armadura (o el voltaje de armadura  $V_a$ ) se mantiene constante puede controlarse mediante la manipulación del voltaje aplicado en el campo o la excitación del motor. La corriente de armadura puede ser suministrada por un generador DC o de una línea de corriente alterna. Este último método requiere del uso de transformadores y rectificadores para obtener las rectificaciones adecuadas de la señal.

En este sistema la señal de entrada o de control es el voltaje de excitación o de campo,  $u(t) = V_f(t)$ . El voltaje  $V_f(t)$  aplicado al campo se obtiene como

la salida de un amplificador de baja potencia o de un generador DC, como el considerado previamente, cuando se requiere un nivel de potencia mayor. En el circuito de campo, la resistencia del enrollado es  $R_f$ , y la inductancia es  $L_f$ . El torque  $T_m(t)$  desarrollado por el motor es proporcional al producto de la corriente de armadura  $i_L(t)$  y el flujo magnético  $\varphi_2$  no aumenta linealmente con la corriente.

$$\begin{aligned} T_m(t) &= C_1 \varphi_2(t) i_L(t) \\ &= C_1 \varphi_2(t) I_L \end{aligned}$$

donde  $C_1$  es una constante para el motor y depende de el número total de conductores de la armadura, el número de polos en el campo, etc. La mayoría



de los motores que se emplean en sistemas de control operan en la región lineal, por lo tanto

$$\varphi_2 = \kappa i_f$$

donde  $\kappa$  es la pendiente de la curva característica en la región lineal de (4.1.1). En consecuencia,

$$\begin{aligned} T_m(t) &= C_1 \kappa I_L i_f(t) \\ &= K_T i_f(t) \end{aligned}$$

y  $K_T = C_1 \kappa I_L$  es la denominada constante de torque del motor.

El torque de carga se considera como variable no controlada observable, en consecuencia, se considera como perturbación a  $d(t) = T_L(t)$ .

Si el momento de inercia de la armadura es  $J$ , el coeficiente de fricción viscosa es  $B$ , y el torque de carga es  $T_L(t)$ , entonces las ecuaciones fundamentales del sistema son

$$\begin{aligned} V_f(t) &= R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} \\ T_m(t) &= K_T i_f(t) \\ T_m(t) &= J_L \frac{d}{dt} \omega(t) + B \omega(t) + T_L(t) \end{aligned} \tag{22}$$

donde  $\omega(t) = p\theta(t)$  con  $\theta(t)$  como la posición de la carga.

Defina como vector de estado a

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ p\theta(t) \\ i_f(t) \end{bmatrix}$$

para obtener como modelo en variables de estados a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{J_L} & \frac{K_T}{J_f} \\ 0 & 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_L} \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + [0] u(t) + [0] d(t) \end{aligned}$$

y nuevamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_d d(t) = Ax(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} B_u & B_d \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= Cx(t) + D_u u(t) + D_d d(t) = Cx(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} D_u & D_d \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{J_L} & \frac{K_T}{J_f} \\ 0 & 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_u & B_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_L} \\ \frac{1}{L_f} & 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} D_u & D_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.1.4 Tacómetro

Un tacómetro DC es un generador en el cual el flujo magnético es suministrado por un magneto permanente. debido a que el flujo se mantiene constante, la ecuación que describe la operación de un tacómetro es

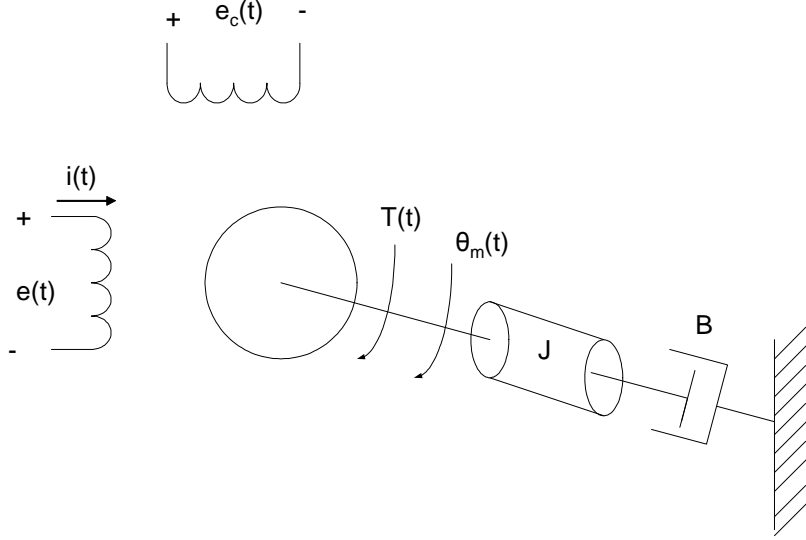
$$e_g(t) = \kappa\varphi \frac{d}{dt}\theta(t) = K_T p\theta(t)$$

donde  $K_T = \kappa\varphi$  es una constante y  $e_g(t)$  es el voltaje generado.

En consecuencia, un tacómetro suministra un voltaje  $e_g(t)$  el cual es proporcional a la velocidad a la cual se conduce el generador.

#### 4.1.5 Servomotor AC

Un motor AC de dos fases se emplea para aplicaciones de bajos niveles de potencia. Una de las fases es suministrada con un voltaje AC fijo y el cual actúa como voltaje de referencia. La otra fase se conecta con el voltaje controlado.



Una representación esquemática de un motor AV se muestra en la figura (4.1.5). Debido a que el voltaje de referencia  $e_c(t)$  es constante,  $e_c(t) = E_c = cte$ , la velocidad depende del voltaje de control  $e(t)$ . La dirección de rotación se revierte mediante el cambio de polaridad del voltaje de control.

Como se observa del diagrama, las bobinas de referencia y de control están desplazadas en  $90^\circ$  en el estator del motor. En consecuencia, aunque el voltaje aplicado en cada bobina tiene la misma frecuencia, hay una diferencia de fase de  $90^\circ$  de uno con respecto al otro.

Las curvas típicas que relacionan el torque desarrollado en el eje del motor  $T(t)$  y la velocidad angular  $\dot{\theta}(t)$  para valores constantes de la corriente de control  $i(t)$  se muestran en la figura (4.1.5).

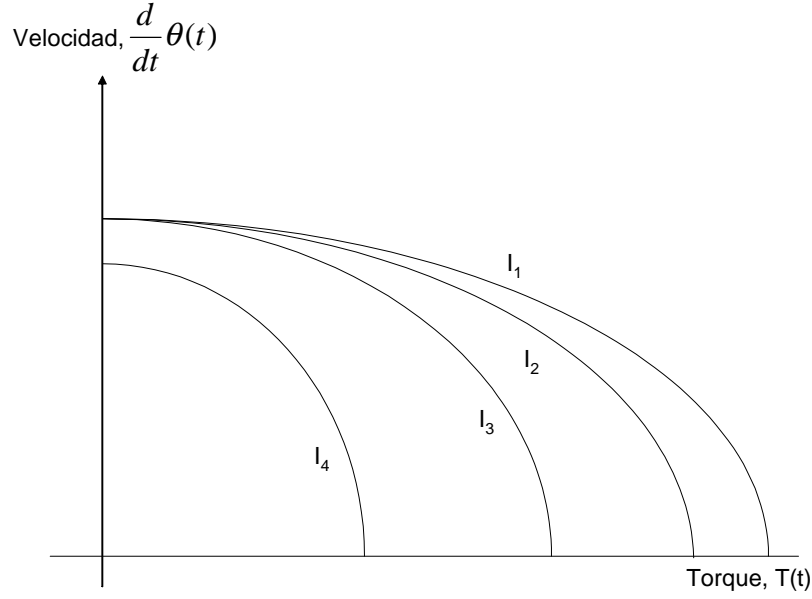
La ecuación que describe la operación del motor AC de dos fases alrededor de algún punto de operación se deriva a continuación: De la figura (4.1.5) se observa que la velocidad de rotación es una función de  $T(t)$  e  $i(t)$ :

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = F(T, i)$$

La linealización alrededor del punto de operación genera

$$\delta\dot{\theta}(t) = \left. \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial T} \right|_i (\delta T) + \left. \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial i} \right|_T (\delta i) = -C_1 (\delta T) + C_2 (\delta i)$$

donde  $\delta\dot{\theta}(t)$  representa al cambio incremental en la velocidad de rotación del eje del motor desde un valor de referencia (determinado por el punto de operación),



y

$$C_1 = - \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial T} \right|_i$$

$$C_2 = \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial i} \right|_T$$

El término  $|_i$  es la pendiente de las curvas de magnetización u operación del motor en las condiciones de operación de referencia, la cual es negativa. El signo menos convierte  $C_1$  en una constante positiva. Para un par o torque dado  $T(t)$ , la velocidad aumenta cuando la corriente aumenta, así que  $C_2 = \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial i} \right|_T$  es positiva. En consecuencia, se tiene que

$$\delta T = \frac{1}{C_1} [C_2 \delta i - \delta \dot{\theta}] = C_3 [C_2 \delta i - \delta \dot{\theta}]$$

donde  $C_3 = \frac{1}{C_1} = - \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right|_i$ . El balance de torque para la armadura genera la ecuación

$$T(t) - T_L(t) = (B_v + Jp)(p\theta(t))$$

y para pequeñas desviaciones del punto de operación

$$\delta T - T_L = (B_v + Jp)(\delta \dot{\theta}(t))$$

El comportamiento del circuito eléctrico está dado por

$$e(t) = (R + Lp) i(t) = R(1 + \tau p) i(t)$$

donde  $\tau = \frac{R}{L}$ . Para pequeñas desviaciones, se tiene entonces que

$$\delta e(t) = R(1 + \tau p) \delta i(t)$$

y el vector de estados será

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta i(t) \\ \delta \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

Las correspondientes ecuaciones fundamentales son

$$\frac{d}{dt} \delta x_1(t) = -\frac{1}{\tau} \delta x_1(t) + \frac{1}{R\tau} \delta e(t)$$

mientras que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x_2(t) &= -\frac{B_v}{J} \delta x_2(t) + \frac{1}{J} [\delta T - T_L] \\ &= -\frac{B_v}{J} \delta x_2(t) + \frac{1}{J} [C_3 [C_2 \delta x_1(t) - \delta x_2(t) - T_L(t)]] \\ &= \frac{1}{J} C_3 C_2 \delta x_1(t) - \frac{1}{J} [B_v - C_3] \delta x_2(t) - \frac{C_3}{J} T_L(t) \end{aligned}$$

y las ecuaciones de salida

$$\delta y(t) = \delta \dot{\theta}(t) = \delta x_2(t)$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 \\ \frac{1}{J} C_3 C_2 & -\frac{1}{J} [B_v - C_3] \end{bmatrix} \delta x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{R\tau} \\ 0 \end{bmatrix} \delta u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{C_3}{J} \end{bmatrix} d(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \delta x(t) + [0] \delta u(t) + [0] d(t) \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 \\ \frac{1}{J} C_3 C_2 & -\frac{1}{J} [B_v - C_3] \end{bmatrix} \delta x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{R\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{C_3}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \\ \delta y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \delta x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 5 Ecuación de Lagrange

Los sistemas electromecánicos son modelados también mediante el bien conocido método de Lagrange. Este es un método unificado que permite modelar una amplia sistemas físicos independientemente de su estructura física.

La ecuación de Lagrange puede expresarse como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_n} \right) - \left( \frac{\partial K}{\partial q_n} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial P}{\partial q_n} = Q_n$$

para  $n = 1, 2, \dots$ , donde

- $K$  representa la energía cinética total del sistema,
- $D$  es la función de disipación del sistema,
- $P$  es la energía potencial total del sistema la cual no depende de las velocidades generalizadas.
- $Q_n$  es la fuerza generalizada aplicada en la coordenada  $n$
- $q_n$  representa la  $n$  – ésima coordenada generalizada
- $\dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt}$  es la velocidad generalizada en la  $n$  – ésima coordenada.
- $n = 1, 2, \dots$  denota el número de coordenadas o grados de libertad que existen en el sistema.

A la cantidad

$$L = K - P$$

se denomina Lagrangiano del sistema. y en términos de ellas la ecuación de Lagrange puede expresarse como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_n} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n} = Q_n \quad (23)$$

La energía cinética total  $T$  incluye todos los términos de energía, independientemente de que sean eléctricos o mecánicos. La función de disipación  $D$  representa la mitad de la tasa de energía a la cual la energía es disipada como calor, la disipación es generada por fricción en un sistema mecánico y por una resistencia en un sistema eléctrico. La energía potencial total almacenada en el sistema se denota por  $V$ . Las señales de entrada, de alimentación o control se representan por  $Q_n$ .

**Ejemplo 25** Considere el sistema mecánico  $P$ : "Brazo polar con dos enlaces". (Ver figura (5)). Aquí se supone que las masas de los brazos están concentrado en los terminales de los enlaces.

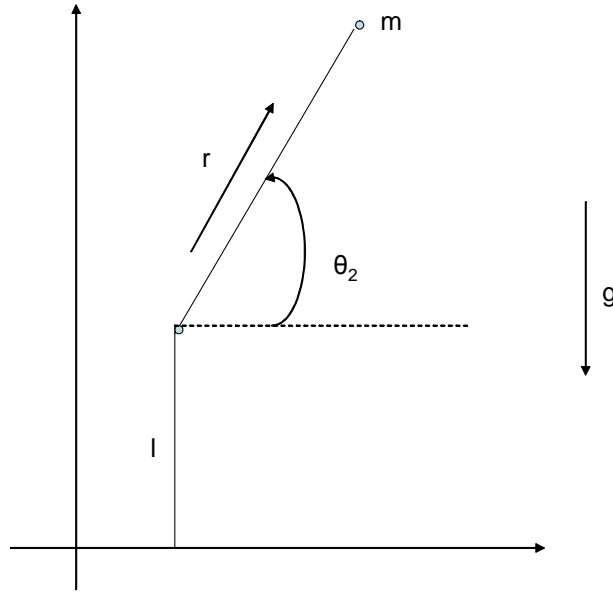
Para determinar las ecuaciones dinámicas de esta planta defina

$$q(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ r(t) \end{pmatrix} \quad \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{r}(t) \end{pmatrix}$$

como los vectores de coordenadas generalizadas del sistema. Más aún defina

$$\tau(t) = \begin{pmatrix} n(t) \\ f(t) \end{pmatrix}$$

como el vector de fuerza generalizado, donde el torque  $n$  y la fuerza  $f$  pueden suministrarse mediante motores y/o actuadores hidráulicos.



Para este sistema la energía cinética total se debe al movimiento angular  $\dot{\theta}$ , y al movimiento lineal o radial  $\dot{r}$  :

$$K = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

y la energía potencial es

$$P = mgr \sin(\theta)$$

Por lo tanto, el Lagrangiano del sistema es

$$L = K - P = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mgr \sin(\theta)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mr^2\dot{\theta} \\ m\dot{r} \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= \begin{bmatrix} mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \\ m\ddot{r} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= \begin{bmatrix} -mgr \cos(\theta) \\ mr\dot{\theta}^2 - mg \sin(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ya que la función de disipación  $D$  es cero.

Por lo tanto, aplicando 23, se obtienen las ecuaciones dinámicas del sistema:

$$\begin{aligned} mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr \cos(\theta) &= n \\ m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \sin(\theta) &= f \end{aligned}$$



Si se define

$$\begin{aligned}u_1(t) &= n(t) \\u_2(t) &= f(t) \\x_1(t) &= y_1(t) = \theta(t) \\x_2(t) &= p\theta(t) \\x_3(t) &= y_2(t) = r(t) \\x_4(t) &= pr(t)\end{aligned}$$

(note que se han tomado como variables de estados a aquellas variables cuyas derivadas aparecen en las ecuaciones fundamentales), se obtiene las siguientes ecuaciones de estados para el sistema

$$\begin{aligned}mx_3^2(t)\dot{x}_2(t) + 2mx_3(t)x_4(t)x_2(t) + mgx_3(t)\cos(x_1(t)) &= u_1(t) \\m\dot{x}_4(t) - mx_3(t)x_2^2(t) + mg\sin(x_1(t)) &= u_2(t)\end{aligned}$$

Y el modelo en variables de estados será: en primer lugar se presentan las ecuaciones de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\\dot{x}_2(t) &= -g\frac{\cos(x_1(t))}{x_3(t)} - 2\frac{x_4(t)x_2(t)}{x_3(t)} + \frac{u_1(t)}{mx_3^2(t)} \\\dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\\dot{x}_4(t) &= -g\sin(x_1(t)) + x_3(t)x_2^2(t) + \frac{u_2(t)}{m}\end{aligned}$$

las cuales pueden expresarse como

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u(t))$$

y finalmente, se tienen las ecuaciones de salida

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = g(x(t), u(t))$$

El método de modelaje por la Ecuación de Lagrange se aplica generalmente en la descripción dinámica de:

- Sistemas no-lineales
- Sistemas Electromecánicos
- Robótica

y se refiere a <sup>(7)</sup> para profundizar en esta poderosa técnica de modelaje y análisis de sistemas dinámicos.

## 6 Representación de Sistemas mediante las Variables de Fase

En algunos ejemplos mostrados en estas notas se ha demostrado que la selección de las variables de estados para una planta  $P$  dada. Ahora bien, el objetivo de esta sección es la de mostrar otra manera de definir el vector de estado de una planta. Específicamente, esto se hará mediante el método de variables de fase (método original empleado en mecánica racional y mecánica cuántica y que motivó el concepto de estado en el estudio de sistemas dinámicos).

Si bien el método de variables físicas tiene la ventaja de darle al estado un significado muy práctico y concreto. Las variables de fase son una clase particular de variables de estados que consisten en una variable y sus derivadas.

Suponga que se tiene una planta escalar  $P$  con entrada  $u(\cdot)$  y salida  $y(\cdot)$ , descrito por la ecuación entrada salida

$$D(p)y(t) = N(p)u(t)$$

donde

$$\begin{aligned} D(p) &= p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0 \\ N(p) &= 1 \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} [p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0]y(t) &= u(t) \\ \frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1\frac{d}{dt}y(t) &= u(t) \end{aligned}$$

Para expresar dicha ecuación entrada/salida en variables de fase defina las componentes del vector de estado como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= p^0y(t) = y(t) \\ x_2(t) &= py(t) = \dot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &= p^{n-2}y(t) = y^{(n-2)}(t) \\ x_n(t) &= p^{n-1}y(t) = y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= -a_1x_1(t) - a_2x_2(t) - \cdots - a_{n-1}x_n(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

En términos matriciales, las ecuaciones de estados en variables de fase se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] x(t) + [0] u(t)\end{aligned}$$

Considere ahora el caso mas general; o sea,

$$D(p)y(t) = N(p)u(t)$$

$$\begin{aligned}D(p) &= p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0 \\ N(p) &= \beta_n p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0\end{aligned}$$

donde  $\beta_n \neq 0$ .

En primer lugar, mediante división de polinomios exprese

$$\begin{aligned}\frac{N(p)}{D(p)} &= \beta_n + \frac{c_{n-1}p^{n-1} + \dots + c_1p + c_0}{D(p)} \\ &= \beta_n + \frac{N_r(p)}{D(p)}\end{aligned}$$

Introduciendo una variable intermedia (denominada pseudo estado)  $\zeta(t)$  tal que

$$\begin{aligned}D(p)\zeta(t) &= u(t) \\ y(t) &= N_r(p)\zeta(t) + \beta_n u(t)\end{aligned} \tag{24}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}y(t) &= N_r(p)\zeta(t) + \beta_n u(t) \\ &= N_r(p)D^{-1}(p)u(t) + \beta_n u(t) \\ &= [N_r(p)D^{-1}(p) + \beta_n]u(t) \\ &= \frac{N(p)}{D(p)}u(t)\end{aligned}$$

En otras palabras, las relaciones (24) son equivalentes a la ecuación entrada/salida de la planta  $P$ .

Por otro lado, la ecuación  $D(p)\zeta(t) = u(t)$  puede expresarse en variables de estados de fase como

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ya que es precisamente el caso que se consideró inicialmente, donde  $\zeta(t) = x_1(t)$ ,  $p\zeta(t) = x_2(t)$ ,  $\dots$ ,  $x_n(t) = p^{n-1}\zeta(t)$ .

En consecuencia, la ecuación de salida

$$\begin{aligned} y(t) &= N_r(p)\zeta(t) + \beta_n u(t) \\ &= (c_{n-1}p^{n-1} + \dots + c_1p + c_0)\zeta(t) + \beta_n u(t) \end{aligned}$$

puede representarse en término de las variables de estados de fase como

$$\begin{aligned} y(t) &= c_0x_1(t) + c_1x_2(t) + \dots + c_{n-1}x_n(t) + \beta_n u(t) \\ &= [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1}] x(t) + [\beta_n] u(t) \end{aligned}$$

Por o tanto, la representación en variables de fase del sistema descrito por  $D(p)y(t) = N(p)u(t)$ , es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1}] x(t) + [\beta_n] u(t) \end{aligned} \quad (25)$$

**Ejemplo 26** Considere el sistema electromecánico "motor DC controlado por campo" cuyas ecuaciones fundamentales (ver (22)) son

$$\begin{aligned} V_f(t) &= R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} \\ T_m(t) &= K_T i_f(t) \\ T_m(t) &= J_L \frac{d}{dt} \omega(t) + M\omega(t) + T_L(t) \end{aligned}$$

Suponga que no existe torque de carga,  $T_L(t) = 0$ . Entonces, el comportamiento dinámico del motor está determinado por las ecuaciones fundamentales

$$\begin{aligned} [R_f + L_f p] i_f(t) &= V_f(t) \\ T_m(t) &= K_T i_f(t) \\ [J_L p^2 + Mp] \theta(t) &= T_m(t) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{1}{[J_L p^2 + Mp]} T_m(t) \\ &= \frac{1}{[J_L p^2 + Mp]} K_T i_f(t) \\ &= \frac{1}{[J_L p^2 + Mp]} K_T \frac{1}{[R_f + L_f p]} V_f(t) \end{aligned}$$

Esto es

$$(J_L p^2 + Mp)(R_f + L_f p)\theta(t) = K_T V_f(t)$$

Ya que  $u(t) = V_f(t)$  e  $y(t) = \theta(t)$ , se tiene que la ecuación entrada/salida de dicho sistema es

$$[J_L L_f p^3 + (L_f M + R_f J_L) p^2 + R_f M p] y(t) = K_T u(t)$$

y normalizando (dividiendo ambos lados por  $J_L L$ ) se obtiene

$$\underbrace{\left[ p^3 + \frac{(L_f M + R_f J_L)}{J_L L_f} p^2 + \frac{R_f M}{J_L L_f} p \right]}_{D(p)} y(t) = \underbrace{\frac{K_T}{J_L L_f}}_{N(p)} u(t)$$

Finalmente la representación en variable de fase para dicho sistema será

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R_f M}{J_L L_f} & -\frac{(L_f M + R_f J_L)}{J_L L_f} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \frac{K_T}{J_L L_f} & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + [0] u(t) \end{aligned}$$

## 7 Representaciones Similares o Algebraicamente equivalentes

Dada una planta  $P$  de tiempo continuo, con entrada  $u \in U$  y salida  $y \in Y$ , entonces se sabe que dicho sistema puede representarse internamente mediante un modelo en variables de estados dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

pero la selección del un vector de estado  $x$  es bastante arbitrario siendo la única condición impuesta hasta ahora la exigida por la definición misma de estado.

Específicamente, se sabe que existen diversas maneras de asociar variables de estados a un sistema o planta dada  $P$ . Uno de ellos es la asignación de variables de estados mediante el método de variables físicas, o sea, a cada elemento almacenados de energía que constituye el sistema se le asocia una variable. Mas concretamente, por cada elemento almacenador de esfuerzo o elemento capacitivo se define como variable de estado a la variable de esfuerzo asociada a él; mientras que a cada elemento almacenador de flujo, elemento inductivo, se define como variable de estados a la variable de flujo asociada. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dim(x) &= \text{nro. de variables de estados} \\ &\simeq \text{nro. de elementos almacenadores de energía} \end{aligned}$$

Sin embargo, debe aclararse que esto es solo una guía (en la práctica pueden ser de un mayor o menor número dependiendo de la topología de la planta bajo estudio).

Por otro lado, existe otro método de asignación de variables de estados mediante las llamadas variables de fase, y las cuales en el caso de plantas escalares generan representaciones o modelos de estructura muy particular, denominadas representaciones canónicas. Como ejemplo de dichas representaciones canónicas se tienen las formas de controlabilidad, observabilidad y de Jordan que se estudiarán más adelante.

De lo anterior debe tenerse en claro que no existe una selección única de las variables de estados para una planta dada.

Lo anterior motiva la siguiente pregunta: ¿Qué relación existe entre dos representaciones en variables de estados cualesquiera de una misma planta?. Una respuesta satisfactoria a tal pregunta no es fácil en general, y trae interesantes consecuencias en la teoría y práctica de los sistemas de control.

Sin embargo, suponga que la planta bajo estudio es lineal, contante en el tiempo y continua, y que está descrita por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

donde  $\dim x = n$

Cuando una matriz real,  $Q$ , de dimensión  $n \times n$  es invertible ( $\det(Q) \neq 0$ ), entonces se escribirá

$$Q \in GL_n(R)$$

Defina un nuevo vector  $\zeta(t) = Qx(t) \in R^n$ . Es evidente que los vectores  $x$  y  $\zeta$  tienen idéntico contenido informacional debido al hecho que  $Q \in GL_n(R)$ , lo que implica que  $\zeta$  califica como un vector de estado para la planta  $P$ . Como consecuencia, debe existir una representación de la planta  $P$  dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\zeta(t) &= \hat{A}\zeta(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}\zeta(t) + \hat{D}u(t)\end{aligned}$$

Mas concretamente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\zeta(t) &= Q \frac{d}{dt}x(t) = Q(Ax(t) + Bu(t)) \\ &= \underbrace{QAQ^{-1}}_{\hat{A}}\zeta(t) + \underbrace{QB}_{\hat{B}}u(t)\end{aligned}$$

Mientras que la ecuación de salida surge de:

$$\begin{aligned}y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ &= \underbrace{CQ^{-1}}_{\hat{C}}\zeta(t) + \underbrace{D}_{\hat{D}}u(t)\end{aligned}$$

Por la tanto se motiva el siguiente concepto.

**Definición 27** Dada una planta  $P$  con entrada  $u \in U = (L_2[0, \infty))^{n_u}$ , con salida  $y \in Y = (L_2[0, \infty))^{n_y}$ , lineal, invariante en el tiempo, de tiempo continuo,

$n$ -dimensional y la cual tiene las siguientes dos representaciones en variables de estados

$$\begin{aligned} P: & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \\ \hat{P}: & \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_{\hat{x}}^{\hat{n}} \end{aligned}$$

$A, \hat{A} \in R^{n \times n}, B, \hat{B} \in R^{n \times n_u}, C, \hat{C} \in R^{n_y \times n}, D, \hat{D} \in R^{n_y \times n_u}$ .

Se dice que las dos representaciones son **similares o algebraicamente equivalentes** si existe una matriz  $Q \in GL_n(R)$ , llamada **matriz de similitud o transformación de equivalencia**, tal que

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QAQ^{-1} & QB \\ CQ & D \end{pmatrix}$$

y en cuyo caso se denotará por

$$P: \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \xrightarrow{\zeta=Qx} \hat{P}: \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_{\hat{x}}^{\hat{n}}$$

Más adelante, cuando se tenga un dominio mas completo de conceptos de sistemas, se demostrará que en realidad no hay diferencia entre dos representaciones equivalentes de una planta, y solo cambia el "nombre" de las variables de estados.

Un problema típico que es necesario resolver, es el siguiente: Dadas dos representaciones equivalentes de una misma planta  $P$ ,

$$\begin{aligned} P: & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \\ \hat{P}: & \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_{\hat{x}}^{\hat{n}} \end{aligned}$$

¿Cómo encontrar la matriz de transformación  $Q \in GL_n(R)$  que establece la similitud entre ellas?

Una manera ortodoxa de solucionar dicho problema consiste en resolver las siguientes ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} Q\hat{A} &= QA \\ Q\hat{B} &= B \\ \hat{C} &= CQ \end{aligned}$$

Este método para calcular la matriz de transformación  $Q$  siempre funciona pero los cálculos son largos y aburridos. Existen otros métodos mas eficientes y que se verán mas adelante.

**Ejemplo 28** *Habíamos visto que cuando el torque de carga  $T_l = 0$ , la planta  $P$  : "motor DC controlado por campo" puede ser modelado en variables de estados por*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{J_L} & \frac{K_T}{J_f} \\ 0 & 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + [0] u(t)\end{aligned}$$

con

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ p\theta(t) \\ i_f(t) \end{bmatrix}$$

usando el método de variables físicas, o por

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R_f M}{J_L L_f} & -\frac{(L_f M + R_f J_L)}{J_L L_f} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \frac{K_T}{J_L L_f} & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + [0] u(t)\end{aligned}$$

con

$$z(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ p\theta(t) \\ p^2\theta(t) \end{bmatrix}$$

empleando el método de variables de fase.

Ahora bien, note que

$$\begin{aligned}x_1(t) &= z_1(t) \\ x_2(t) &= z_2(t)\end{aligned}$$

y por otro lado

$$z_3(t) = p^2\theta(t) = \dot{x}_2(t) = -\frac{M}{J_L}x_2(t) + \frac{K_T}{J_L}x_3(t)$$

o

$$x_3(t) = \frac{M}{K_T}z_2(t) + \frac{J_L}{K_T}z_3(t)$$

y por lo tanto

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{M}{K_T} & \frac{J_L}{K_T} \end{bmatrix} z(t)$$

o lo que es lo mismo

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{J_L} & \frac{K_T}{J_L} \end{bmatrix} x(t) = Qx(t)$$



Note que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{M}{K_T} & \frac{J_L}{K_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{J_L} & \frac{K_T}{J_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{M}{K_T} & \frac{J_L}{K_T} \end{bmatrix}$$

En resumen, las dos representaciones están relacionadas vía una transformación lineal  $z(t) = Qx(t)$  donde  $Q \in GL_3(r)$

Los siguientes conceptos serán de suma importancia en el análisis y diseño de sistemas de control.

**Definición 29** Sea  $P$  una planta  $n$ -dimensional, constante, continua descrita por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Se define como

1. la matriz de controlabilidad,  $W_c$ , de la representación dada a la matriz

$$W_c(P) = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \in R^{n \times (nn_u)}$$

2. la matriz de observabilidad  $W_o$ , de la representación dada a la matriz

$$W_o(P) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \in R^{(nn_y) \times n}$$

El proceso de cálculo de las matrices de controlabilidad y de observabilidad de una planta  $P$  representada en variables de estados

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$$

se ilustra a continuación.

**Ejemplo 30** Considere un sistema  $P$  descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Entonces la matriz de controlabilidad asociada a este sistema será

$$W_c(P) = [B, AB; A^2B]$$

ya que  $n = 3$ .

Realizando las multiplicaciones matriciales

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y

### Ejercicio 31

$$A^2B = A(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

se obtiene que matriz de controlabilidad es

$$W_c(P) = [B, AB; A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mientras que la matriz de observabilidad del sistema es

$$W_o(P) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

En este punto resulta natural preguntarse ¿Qué sentido tiene introducir cambios en el vector de estados para obtener representaciones similares de un mismo sistema?. La razón de inducir el concepto de representaciones similares es básicamente que seleccionando adecuadamente una matriz  $Q$  la representación equivalente puede tener una estructura más sencilla que la original. Dicho punto se demuestra en las secciones anteriores.

Sin embargo, es importante presentar dos últimos resultados que serán de utilidad más adelante.

De inmediato se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 32 (Controlabilidad)** Sea  $P$  una planta  $n$ -dimensional, constante, descrita por las representaciones en variables de estados

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \quad \hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^n$$

que son algebraicamente equivalentes. O sea, existe una  $Q \in GL_n(R)$  tal : que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \xrightarrow{\zeta=Qx} \hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^n$$

Entonces, las siguientes aseveraciones son ciertas

1. Las correspondientes matrices de controlabilidad están relacionadas por

$$W_c(\hat{P}) = QW_c(P)$$

2. Las matrices de controlabilidad  $W_c(\hat{P})$  y  $W_c(P)$  tienen el mismo rango.

3. Si el sistema  $P$  tiene una sola entrada,  $n_u = 1$ , y  $W_c(\hat{P})$  es invertible, entonces la matriz de transformación  $Q$  puede determinarse mediante

$$Q = W_c(\hat{P}) [W_c(P)]^{-1}$$

**Proof.** (1) Por hipótesis, las representaciones son algebraicamente equivalentes con  $\zeta = Qx$ , y  $Q \in GL_n(R)$ , entonces

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QAQ^{-1} & QB \end{pmatrix}$$

Por otro lado, de la definición de la matriz de controlabilidad,

$$W_c(\hat{P}) = (\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{B}) \in R^{n \times n_u}$$

Pero note que

$$\begin{aligned} \hat{A}^i \hat{B} &= \underbrace{\hat{A}\hat{A} \cdots \hat{A}}_i B_c = (QAQ^{-1})(QAQ^{-1}) \cdots (QAQ^{-1}) QB \\ &= QAA \cdots AB = QA^i B \end{aligned}$$

para todo  $i = 1, 2, \dots$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} W_c(\hat{P}) &= (\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{B}) = (QB, QAB, \dots, QA^{n-1}B) \\ &= Q(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = QW_c(P) \end{aligned}$$

Para demostrar (2), es necesario recordar el teorema de Sylvester que establece que

$$rk(FH) \leq \min[rkF, rkH]$$

y en consecuencia

$$rk(W_c(\hat{P})) = rk[QW_c(P)] \leq \min\{rk(Q), rk(W_c(P))\}$$

En particular

$$rk(W_c(\hat{P})) \leq rk(W_c(P)) \quad (26)$$

Por otro lado, recuerde que  $Q \in GL_n(R)$ , o sea,  $Q^{-1}$  existe. Entonces se tiene que

$$W_c(P) = Q^{-1}W_c(\hat{P})$$

y argumentando de la misma manera se llega que se cumple la desigualdad

$$rk(W_c(P)) \leq rk(W_c(\hat{P})) \quad (27)$$

Por lo tanto, combinando (26) y (27), se demuestra

$$rk(W_c(P)) = rk(W_c(\hat{P}))$$

Finalmente para demostrar (3), note que

a) si  $P$  tiene una señal de entrada escalar, entonces la matriz de controlabilidad  $W_c(\hat{P}) \in R^{n \times n}$ ,

b) si  $W_c(\hat{P})$  es invertible, entonces  $\det[W_c(\hat{P})] \neq 0$ .

Empleando la relación

$$\det(FG) = \det(F) \det(G)$$

y el hecho que  $\det(Q) \neq 0$ , se obtiene que  $\det W_c(P) \neq 0$ , y  $W_c(P)$  es invertible.

Por lo tanto

$$Q = W_c(\hat{P}) [W_c(P)]^{-1}$$

Demostrándose de esta manera el teorema. ■

**Ejercicio 33** Considere la planta

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

la cual también puede ser representada por

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \zeta \end{aligned}$$

y ambas representaciones son equivalentes.

Entonces

$$W_c(P) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

es la matriz de controlabilidad de la primera representación

Mientras que

$$\begin{aligned} W_c(\hat{P}) &= [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}; \hat{A}^2\hat{B}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y ya que  $\det(W_c(\hat{P})) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$ , se obtiene que la matriz de transformación  $Q$  tal que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \xrightarrow{\zeta=Qx} \hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^n$$

está dada por

$$\begin{aligned} Q &= W_c(\hat{P}) [W_c(P)]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De manera muy similar (se invita al lector a descubrir las similitudes), se plantea un resultado que involucra la matriz de observabilidad.

**Teorema 34 (Observabilidad)** Sea  $P$  una planta  $n$ -dimensional, constante, descrita por las representaciones en variables de estados

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n ; \quad \hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^n$$

que son algebraicamente equivalentes. O sea, existe una  $Q \in GL_n(R)$  tal que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \xrightarrow{\zeta=Qx} \hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^n$$

Entonces, las siguientes aseveraciones son ciertas

1. Las correspondientes matrices de observabilidad están relacionadas por

$$W_o(\hat{P}) = W_o(P) Q^{-1}$$

2. Las matrices de controlabilidad  $W_o(\hat{P})$  y  $W_o(P)$  tienen el mismo rango.

3. Si el sistema  $P$  tiene una sola salida,  $n_y = 1$ , y  $W_o(\hat{P})$  es invertible, entonces la matriz de transformación  $Q$  puede determinarse mediante

$$Q = [W_o(\hat{P})]^{-1} W_o(P)$$

**Proof.** Se deja como ejercicio. ■

## 8 Polos y Ceros de Representaciones en V.E.'s de Sistemas Lineales

A continuación presentaremos las definiciones formales de polos y ceros relacionados con sistemas lineales descritos por modelos en variables de estados. A dichos conceptos se les asignarán posteriormente un significado físico bien definido.

Pero antes se requiere recordar una serie de conceptos de álgebra lineal.

**Definición 35** 1. Un **autovalor** de una matriz  $A$  ( $n \times n$ ) es un escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que permite encontrar una solución no trivial ( $v \neq 0$ ) a la ecuación

$$Av = \lambda v$$

El conjunto de todos los autovalores de  $A$  se denota por  $\sigma(A)$  y se denomina **espectro** de  $A$ .

2. El polinomio característico de  $A$  es  $\chi_A(s) = \det(sI_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$

Note que la ecuación que define los autovalores de la matriz  $A$  puede representarse como

$$(\lambda I_n - A)v = 0$$

Las soluciones no triviales  $v$  existen solo si  $\det(\lambda I_n - A) = 0$ , de lo contrario  $(\lambda I_n - A)^{-1}$  existiría para determinar que  $v = 0$ . En consecuencia:

- Los autovalores de una matriz  $A$  son las raíces de su polinomio característico.
- Ya que  $\chi_A(s) = \det(\lambda I_n - A)$  es un polinomio de grado  $n$ , entonces la ecuación característica  $\chi_A(s) = 0$  tiene  $n$  raíces. Por lo tanto,

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

**Ejemplo 36** Encuentre los autovalores de  $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ . La ecuación de autovalores es

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sea

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica será

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

En consecuencia

$$\sigma(A) = \{1, 5\}$$

**Definición 37** Asociado a cada autovalor  $\lambda_i \in \sigma(A)$ , existe una solución no nula  $v_i$  a la ecuación de autovalores  $Av = \lambda_i v_i$ . A esta solución vectorial  $v_i$  se le denomina **autovector** asociado a  $\lambda_i$ .

**Ejemplo 38** En el ejemplo anterior, un autovector asociado al autovalor  $\lambda = 1$  se encuentra de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}_{\lambda=1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sea, hay que resolver

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sea, se obtienen dos ecuaciones equivalentes

$$\begin{aligned} -2v_1 - 4v_2 &= 0 \\ -v_1 - 2v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, todo autovalor  $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$  asociado a  $\lambda = 1$  debe ser tal que  $v_1 = -2v_2$ . Por lo tanto,

$$v = \begin{bmatrix} -2v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

con  $v_2 \neq 0$ .

Y debe concluirse que existe un número infinito de autovectores asociados a un autovalor. En el caso estudiado, un posible autovector es

$$v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Definición 39** Considere una planta  $P$  con entrada  $u \in U = (L_2[0, \infty))^{n_u}$ , con salida  $y \in Y = (L_2[0, \infty))^{n_y}$ , lineal, invariante en el tiempo, continua y  $n$ -dimensional cuyo comportamiento dinámico está descrito por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

donde  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times n_u}$ ,  $C \in R^{n_y \times n}$ ,  $D \in R^{n_y \times n_u}$ .

Se define como el polinomio característico de la representación  $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$  al polinomio característico de la matriz  $n$ -dimensional  $A$ . O sea,

$$\chi_A(s) = \det[sI_n - A]$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de dimensión  $n \times n$ .

**Ejemplo 40** Sea  $P$  una planta escalar descrita por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

donde  $a_1, a_2, a_3 \in R$ . Entonces el polinomio característico de  $P$  está dado por

$$\begin{aligned} \chi_A(s) &= \det[sI_3 - A] = \det \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \det \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ a_3 & a_2 & s + a_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\chi_A(s) = s^2(s + a_1) + a_3 + a_2s = s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 \in R[s]$$

donde  $R[s]$  representa al conjunto de todos los polinomios de coeficientes reales en la variable indeterminada  $s$ .

**Comentarios** Es fácil comprobar las siguientes propiedades de los polinomios característicos de los sistemas:

- Si la matriz  $A$  tiene la estructura de Frobenius, o sea,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

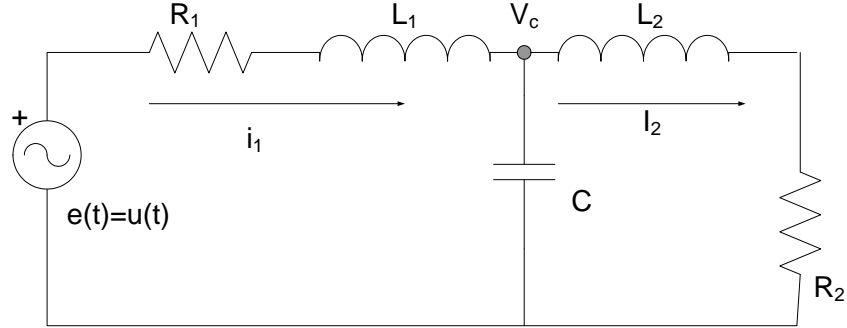
entonces su polinomio característico es

$$\chi_A(s) = \det[sI_n - A] = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

- Recordando el hecho que  $\det(A) = \det(A')$  ( $(\cdot)'$  = operación de transposición de matrices), entonces es evidente que

$$\chi_A(s) = \chi_{A'}(s)$$





- Si la matriz  $A$  es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\chi_A(s) = \det[sI_n - A] = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

**Definición 41** Considere una planta  $P$  con entrada  $u \in U = (L_2[0, \infty))^{n_u}$ , con salida  $y \in Y = (L_2[0, \infty))^{n_y}$ , lineal, invariante en el tiempo, de tiempo continuo y  $n$ -dimensional cuyas ecuaciones dinámicas son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

donde  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times n_u}$ ,  $C \in R^{n_y \times n}$ ,  $D \in R^{n_y \times n_u}$ .

Se denominan polos de la representación  $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$  a las raíces del polinomio característico  $\chi_A(s)$ . O sea,  $\lambda \in C$ , es un polo si y solo si  $\chi_A(s)_{s=\lambda} = 0$ .

Los polos de un sistema son los parámetros de este que determinan su comportamiento o evolución dinámica en el tiempo. Por lo tanto, es sumamente importante entender su significado físico, y el cual se postpone hasta el momento en que se estudie la estabilidad de sistemas dinámicos.

**Ejemplo 42** Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura (8)

La entrada  $u(t)$  es el voltaje aplicado; mientras que la salida es  $y(t)$  es el voltaje en la resistencia  $R_2$ .

Aplicando la técnica de variables físicas o de elementos almacenadores de energía, se definen las siguientes variables de estados:

Elementos almacenadores de energía	Variables de estado asociada
$L_1$	$x_1 = i_1(t)$
$L_2$	$x_2 = i_2(t)$
$C$	$x_3 = v_c(t)$

Aplicando las leyes de Kirchhoff

$$\begin{aligned} R_1 x_1(t) + L_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_3(t) &= e(t) \\ -x_3(t) + L_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + R_2 x_2(t) &= 0 \\ -x_1(t) + x_2(t) + C \frac{dx_3(t)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, las ecuaciones de estados son

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{-R_1}{L_1} x_1(t) + 0x_2(t) - \frac{1}{L_1} x_3(t) + \frac{1}{L_1} u(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0x_1(t) - \frac{R_2}{L_2} x_2(t) + \frac{1}{L_2} x_3(t) + 0u(t) \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{C} x_2 + 0x_3 + 0u(t) \end{aligned}$$

Mientras que la ecuación de salida es

$$y(t) = R_2 x_2 + 0u(t)$$

Por lo tanto, la representación de la planta en variables de estados son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + 0u(t) \end{aligned}$$

y el polinomio característico del sistema será

$$\begin{aligned} \chi_A(s) &= \det[sI_3 - A] = \det \begin{pmatrix} s + \frac{R_1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & s + \frac{R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} & s \end{pmatrix} \\ &= s \left( s + \frac{R_1}{L_1} \right) \left( s + \frac{R_2}{L_2} \right) + \frac{1}{L_1 C} \left( s + \frac{R_2}{L_2} \right) + \frac{1}{L_2 C} \left( s + \frac{R_1}{L_1} \right) \end{aligned}$$

Expandiendo y agrupando se obtiene

$$\chi_A(s) = \chi_A(s, q) = s^3 + \left( \frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \right) s^2 + \left( \frac{1}{CL_1} + \frac{1}{CL_2} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right) s + \left( \frac{R_1}{CL_1 L_2} + \frac{R_2}{CL_1 L_2} \right)$$

con  $q = (R_1, R_2, L_1, L_2, C)^{Tr}$ , donde generalmente

$$\begin{aligned} R_{1,\min} &\leq R_1 \leq R_{1,\max} \\ R_{2,\min} &\leq R_2 \leq R_{2,\max} \\ L_{1,\min} &\leq L_1 \leq L_{1,\max} \\ L_{2,\min} &\leq L_2 \leq L_{2,\max} \\ C_{\min} &\leq C \leq C_{\max} \end{aligned}$$

y por lo tanto, los polos del sistemas (las raíces del polinomio característicos) cumplen con

$$p_i = p_i(q) : i = 1, 2, 3.$$

Esto es, los polos del sistema son funciones de los parámetros que caracterizan a los elementos de la planta.

**Definición 43** Considere una planta  $P$  con entrada  $u \in U = (L_2[0, \infty))^{n_u}$ , con salida  $y \in Y = (L_2[0, \infty))^{n_y}$ , lineal, invariante en el tiempo, de tiempo continuo y  $n$ -dimensional cuyas ecuaciones dinámicas son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

donde  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times n_u}$ ,  $C \in R^{n_y \times n}$ ,  $D \in R^{n_y \times n_u}$ .

Se denominan ceros de la representación  $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$  a todo  $z \in C$  tal que

$$\text{rank} \begin{pmatrix} zI_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} < n + \min\{n_u, n_y\}$$

En el caso escalar,  $n_u = n_y = 1$ , entonces es evidente que  $z \in C$  es un cero de

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \text{ si y solo si}$$

$$\det \begin{pmatrix} zI_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} = 0$$

**Ejemplo 44** Sea  $P$  un sistema descrito por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + 0 \cdot u(t) \end{aligned}$$

Entonces

$$zI_n - A = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & z + 2 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\det \begin{pmatrix} zI_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z & -1 & 0 \\ 1 & z + 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 + z$$

cuya única raíz es  $z = -2$  el cual por definición es el cero de la representación

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^2.$$

Las representaciones similares de una planta son interesantes por que contienen la misma información sobre el comportamiento dinámico de esta, como se muestra a continuación.

**Teorema 45** Sea  $P$  una planta con entrada  $u \in U = (L_2[0, \infty))^{n_u}$ , con salida  $y \in Y = (L_2[0, \infty))^{n_y}$ , lineal, invariante en el tiempo, continua y  $n$ -dimensional. Suponga además que la siguientes dos representaciones en variables de estados

$$\begin{aligned} P &: \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \\ \hat{P} &: \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_z^{\hat{n}} \end{aligned}$$

$A, \hat{A} \in R^{n \times n}, B, \hat{B} \in R^{n \times n_u}, C, \hat{C} \in R^{n_y \times n}, D, \hat{D} \in R^{n_y \times n_u}$  de la planta son similares. Entonces:

1. Los polinomios característicos de ambas representaciones son iguales, o sea

$$\chi_A(s) = \chi_{\hat{A}}(s)$$

2. Los polos de  $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$  coinciden con los polos de  $\hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_z^{\hat{n}}$

3. Los ceros de  $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$  coinciden con los ceros de  $\hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_z^{\hat{n}}$

**Proof.** Como las representaciones son similares, existe una matriz  $Q \in GL_n(R)$  tal que

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QAQ^{-1} & QB \\ CQ & D \end{pmatrix}$$

a) Por definición

$$\begin{aligned} \chi_{\hat{A}}(s) &= \det(sI_n - \hat{A}) = \det(sI_n - QAQ^{-1}) \\ &= \det(sQQ^{-1} - QAQ^{-1}) = \det[Q(sI_n - A)Q^{-1}] \end{aligned}$$

y recordando de álgebra lineal que

$$\begin{aligned} \det(PQ) &= \det P \cdot \det Q \\ \det(Q^{-1}) &= \frac{1}{\det(Q)} \text{ si } \det(Q) \neq 0 \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\chi_{\hat{A}}(s) &= \det [Q(sI_n - A)Q^{-1}] \\ &= \det(Q) \det(sI_n - A) \det(Q^{-1}) = \det(sI_n - A) = \chi_A(s)\end{aligned}$$

b) Inmediata consecuencia de (a)

c) La parte correspondiente a los ceros es un poco más delicada; solo note que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} zI_n - \hat{A} & -\hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} zI_n - QAQ^{-1} & -QB \\ CQ^{-1} & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} zQQ^{-1} - QAQ^{-1} & -QB \\ CQ^{-1} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(zI_n - A)Q^{-1} & -QB \\ CQ^{-1} & D \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por otro lado observe que

$$\begin{pmatrix} Q(zI_n - A)Q^{-1} & -QB \\ CQ^{-1} & D \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{invertible} \begin{pmatrix} zI_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{invertible}$$

y recordando que

$$\text{rank}(QP) = \text{rank}(P) \text{ si } Q^{-1} \text{ existe}$$

entonces es claro que

$$\text{rank} \begin{pmatrix} zI_n - \hat{A} & -\hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} zI_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$$

y como consecuencia los ceros de ambas representaciones coinciden. ■

## 9 Representaciones Canónicas de Sistemas Lineales

Mediante la selección adecuada de la matriz de similaridad es posible encontrar representaciones equivalentes de un mismo sistema que son de estructura muy sencilla y adecuada para resolver ciertos tipos de problemas de control. A continuación se presentan ciertas representaciones canónicas que son útiles en el estudio y diseño de sistemas dinámicos escalares.

### 9.1 Forma canónica de Controlabilidad

Esta forma particular de las representaciones en variables de un sistema es de suma utilidad teórica, y de vital importancia para entender el problema y la solución del problema de reubicación de polos de sistemas lineales.

**Definición 46** Se dice que una planta dada,  $P$ , escalar, invariante en el tiempo,  $n$ -dimensional y continua con entrada  $u(\cdot)$  y salida  $y(\cdot)$  está descrita en variables de estados en forma canónica de controlabilidad si su comportamiento dinámico representarse por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t)\end{aligned}$$

donde

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y las matrices  $C_c, D_c$  no tienen estructura particular, o sea,

$$\begin{aligned}C_c &= (c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{n-1}) \\ D_c &= d\end{aligned}$$

De inmediato se concluye que la representación en forma canónica en forma de controlabilidad en variables de estados está muy relacionado con la representación de un sistema mediante las variables de fase. Es importante resaltar la palabra "relacionada" y no se puede decir que son idénticas como se ilustra a continuación en siguientes ejemplos.

Pero antes, recuerde que dos polinomios  $\pi(s)$  y  $\varpi(s)$  se dicen ser coprimos entre sí, si no tienen factores comunes. En consecuencia, la función racional

$$\frac{\pi(s)}{\varpi(s)}$$

se dice ser irreducible.

**Ejemplo 47** La planta  $P$  descrita por la ecuación entrada salida

$$(p^3 + 4p^2 + p - 6) y(t) = (2p^2 + 4p - 3) u(t)$$

entonces la representación en variables de fase de este sistema será (ver (25)) será

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

y la cual cumple con la definición de forma canónica de controlabilidad. En este caso ya que los polinomios

$$\begin{aligned}D(p) &= (p^3 + 4p^2 + p - 6) \\ N(p) &= (2p^2 + 4p - 3)\end{aligned}$$

son coprimos entre sí, se tiene que la forma canónica de controlabilidad coincide con la representación en variables de fase.

**Ejemplo 48** Considere ahora la planta  $P$  descrita por la ecuación entrada /salida

$$\underbrace{(p^2 + 4p + 2)}_{D(p)} y(t) = \underbrace{(p + 2)}_{N(p)} u(t)$$

la correspondiente descripción de en variables de fase será

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Sin embargo, como

$$D(p) = N(p) u(t)$$

es equivalente a

$$(p + 2) y(t) = u(t) \quad (28)$$

Se tiene que la correspondiente representación en forma canónica de controlabilidad es

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -2z(t) + u(t) \\ y(t) &= z(t) \end{aligned}$$

Noten que son diferentes. Esto se debe a la cancelación que se realizó en la deducción de la ecuación (28).

Por lo tanto:

"Para hallar la representación en forma canónica de controlabilidad de una planta descrita por

$$D(p) y(t) = N(p) u(t)$$

es necesario que  $\frac{N(p)}{D(p)}$  sea irreducible."

Suponga ahora que se conoce la forma canónica de controlabilidad de una planta  $P$  (en cuyo proceso de deducción no se ha incurrido en cancelación alguna)

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c z(t) + D_c u(t) \end{aligned}$$

y cuya representación original está dada por el siguiente modelo  $n$ -dimensional

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned}$$

La pregunta natural es entonces ¿Cuál es la matriz de similaridad  $Q_c \in GL_n(R)$

tal que  $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \xrightarrow{z=Q_c x} \hat{P} : \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}_z^n$ ?, ¿Existe tal matriz?.

Si

$$\hat{P} : \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}_x^n$$

entonces la matriz de controlabilidad está dada por

$$W_c(\hat{P}) = [B_c, B_c A_c, \dots, B_c A_c^{n-1}]$$

o sea

$$(W_c(\hat{P})) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \cdots & * & * \\ 1 & -a_{n-1} & a_{n-1}^2 - a_{n-2} & \cdots & * & * \end{bmatrix}$$

y en consecuencia  $\det(W_c(\hat{P})) \neq 0$ . Por lo tanto, para un sistema en forma canónica de controlabilidad, la matriz de controlabilidad  $W_c(\hat{P})$  siempre es invertible independientemente de los valores de la fila

$$[-a_0 \quad -a_1 \quad -a_2 \quad \dots \quad -a_{n-2} \quad -a_{n-1}]$$

Empleando el teorema (32), se concluye que la matriz de equivalencia que transforma a la representación de un sistema a la forma canónica de controlabilidad es

$$Q_c = W_c(\hat{P}) [W_c(P)]^{-1}$$

## 9.2 Forma canónica de Observabilidad

Esta forma particular de las representaciones en variables de un sistema, es de suma utilidad teórica y de vital importancia para entender y resolver el problema de construcción de observadores o estimadores de estados para sistemas lineales.

**Definición 49** Se dice que una planta dada,  $P$ , escalar, invariante en el tiempo,  $n$ -dimensional y continua con entrada  $u(\cdot)$  y salida  $y(\cdot)$  está descrita en variables de estados en forma canónica de observabilidad si su comportamiento dinámico está representado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_o x(t) + B_o u(t) \\ y(t) &= C_o x(t) + D_o u(t) \end{aligned}$$



donde

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, B_o = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_o = d$$

las matrices  $B_o, D_o$  no tienen estructura particular.

**Ejemplo 50** Una planta  $P$  está descrita por

$$[2p^3 + 12p^2 + 20p + 16] y(t) = [4p^3 + 25p^2 + 45p + 34] u(t)$$

con los polinomios  $D(p) = 2p^3 + 12p^2 + 20p + 16$  y  $N(p) = 4p^3 + 25p^2 + 45p + 34$ , coprimos entre si.

Entonces

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{0.5p^2 + 2.5p + 1}{p^3 + 6p^2 + 10p + 8} + 2$$

y la representación en forma canónica de controlabilidad es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_c(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -10 & -6 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2.5 & 0.5 \end{bmatrix} x_c(t) + 2u(t) \end{aligned}$$

Mientras la representación en forma canónica de observabilidad es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_o(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x_o(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_o(t) + 2u(t) \end{aligned}$$

Supongamos que conocemos la forma canónica de observabilidad de una planta  $P$  cuya representación original está dada por el siguiente modelo  $n$ -dimensional

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z(t) &= Az(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cz(t) + Du(t) \end{aligned}$$

La pregunta natural es entonces ¿Cuál es la matriz de similaridad  $Q_o \in GL_n(R)$

tal que  $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n \xrightarrow{x=Q_o z} \hat{P} : \begin{pmatrix} A_o & B_o \\ C_o & D_o \end{pmatrix}_x^n$ ?

Si

$$\hat{P} : \begin{pmatrix} A_o & B_o \\ C_o & D_o \end{pmatrix}_x^n$$

entonces la matriz de observabilidad está dada por

$$W_o(\hat{P}) = \begin{bmatrix} C_o \\ C_o A_o \\ C_o A_o^2 \\ \vdots \\ C_o A_o^{n-1} \end{bmatrix}$$

o sea

$$(W_o(\hat{P})) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \cdots & * & * \\ 1 & -a_{n-1} & a_{n-1}^2 - a_{n-2} & \cdots & * & * \end{bmatrix}$$

y en consecuencia  $\det(W_o(\hat{P})) \neq 0$ . Por lo tanto, para un sistema en forma canónica de observabilidad, la matriz de observabilidad  $W_o(\hat{P})$  siempre es invertible independientemente de los valores de la columna

$$\begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_{n-2} \\ -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Empleando el teorema (34), se concluye que la matriz de equivalencia que transforma a la representación de un sistema a la forma canónica de observabilidad es

$$Q_o = [W_o(\hat{P})]^{-1} W_o(P)$$

### 9.3 Diagonalización de Sistemas o Forma Canónica de Jordan

La siguiente forma canónica es de suma utilidad para motivar el concepto de polo de un sistema dinámico y para realizar análisis de estabilidad.

**Definición 51** *Se dice que una planta dada,  $P$ , escalar, invariante en el tiempo,  $n$ -dimensional, continua, con todos sus polos diferentes entre sí, con entrada  $u(\cdot)$  y salida  $y(\cdot)$  está descrita en variables de estados en forma canónica de*

*Jordan (también se dice que está diagonalizada) si su comportamiento dinámico está representado por*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A_d x(t) + B_d u(t) \\ y(t) &= C_d x(t) + D_d u(t)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}A_o &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, B_c = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \\ C_c &= \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_n \end{pmatrix} \\ D_c &= d\end{aligned}$$

Estos es, la matriz  $A_d$  es diagonal.

Siguiendo la misma línea de razonamiento que en casos anteriores, debe responderse la pregunta. ¿Cuál es la matriz de similaridad  $Q \in GL_n(R)$  tal que

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n \xrightarrow{x=Qz} \hat{P} : \begin{pmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{pmatrix}_x^n$$

Suponga que los polos de  $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n$  son diferentes entre si, o sea, el espectro de  $A$  (el conjunto de polos de  $P$ ) :

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset C$$

es tal que  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ .

Por definición, a cada polo  $\lambda_i \in \sigma(A)$ , le corresponde un autovector  $v_i \in C^n$  tal que:

$$Av_i = \lambda_i v_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

Entonces la matriz de similaridad  $Q$  que diagonaliza el sistema está dada por

$$Q^{-1} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (29)$$

Esto es fácil de constatar, ya que si  $Q$  está definida por (29) e introduciendo el cambio de vector de estado

$$x(t) = Qz(t)$$

entonces sabemos que

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n \xrightarrow{x=Qz} \bar{P} : \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix}_x^n$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{A} &= Q A Q^{-1} \\ \bar{B} &= Q B \\ \bar{C} &= C Q^{-1} \\ \bar{D} &= D\end{aligned}$$

Y entonces

$$\bar{A} = \underbrace{[v_1, v_2, \dots, v_n]^{-1}}_Q A \underbrace{[v_1, v_2, \dots, v_n]}_{Q^{-1}}$$

Pero

$$\begin{aligned}A[v_1, v_2, \dots, v_n] &= [Av_1, Av_2, \dots, Av_n] = [\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n] \\ &= [v_1, v_2, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\hat{A} = Q A Q^{-1} &= [v_1, v_2, \dots, v_n]^{-1} [v_1, v_2, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\end{aligned}$$

Por lo que las nuevas ecuaciones de estados se convierten en

$$\begin{aligned}\frac{dz(t)}{dt} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] z(t)\end{aligned}$$

la cual es la forma canónica de Jordan para la planta  $P$ .

**Ejemplo 52** Considere una planta descrita por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} x(t) + 2u(t)\end{aligned}$$

En este caso, los polos del sistema son  $\sigma(A) = \{1, 5\}$ .

Mientras que los autovectores son a)  $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  asociado al polo  $\lambda = 1$ , b)

$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  asociado al polo  $\lambda = 5$ . Por lo tanto

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

En consecuencia

$$\hat{A} = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\hat{B} = QB = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CQ^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D} = D = 2$$

Y la forma canónica de Jordan del sistema dado es

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -7 & 5 \end{bmatrix} z(t) + 2u(t)$$

**Ejercicio 53** Considere el sistema mecánico traslacional mostrado en la figura (9.3). a) Dibuje la red eléctrica equivalente para el sistema mecánico considerado. b) Escriba las ecuaciones fundamentales del sistema dado. c) Determine la representación en variables de estados empleando el método de variables físicas, si la señal de entrada  $u(t)$  es la fuerza  $f(t)$  aplicada en la masa  $M_1$ , y se tiene interés solo en la posición de la masa  $M_3$ . d) Encuentre la representación en variables de fase del sistema.

**Ejercicio 54** Un modelo simplificado para la suspensión vertical de un automóvil se muestra en la figura (9.3). a) Dibuje una red eléctrica equivalente, b) Determine las ecuaciones fundamentales del sistema, c) Derive un modelo en variables de estados para este sistema, d) Determine la ecuación diferencial entrada-salida

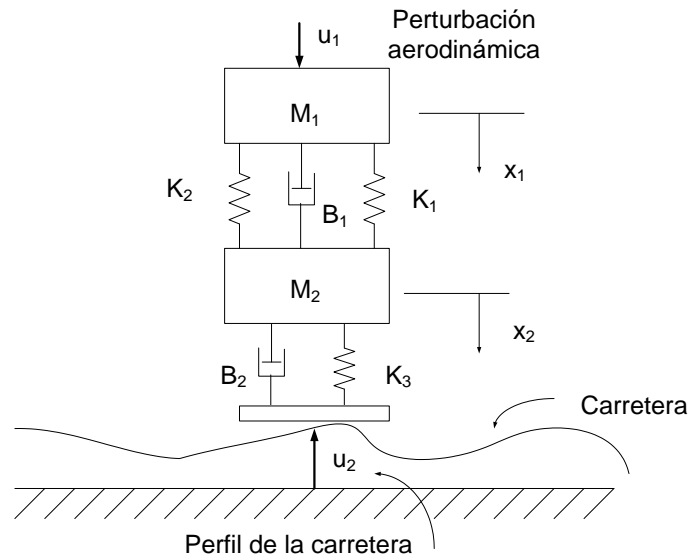
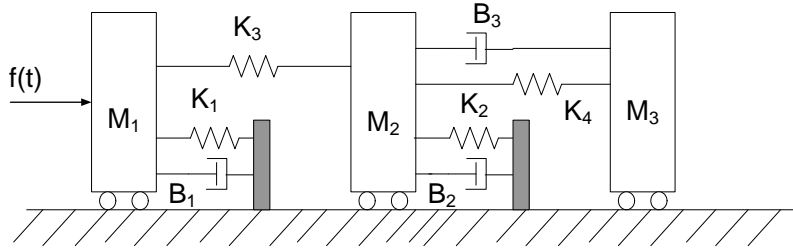
$$P(p)y(t) = Q(p)\hat{u}_2(t)$$

donde

$$\hat{u}_2(t) = [B_2p + K_2]u_2(t)$$

e

$$y(t) = x_1(t)$$



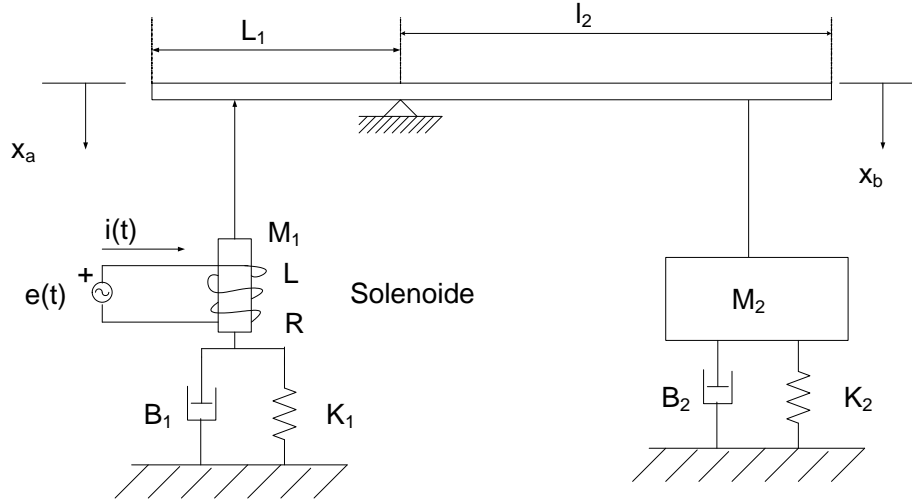
**Ejercicio 55** Un actuador electromagnético se muestra en la figura (9.3). El actuador contiene un solenoide que produce una fuerza magnética que es proporcional a la corriente que circula a través de la bobina, o sea,

$$f(t) = K_I i(t)$$

donde  $K_I$  es una constante. La bobina tiene una resistencia y una inductancia de valores  $R$  y  $L$  respectivamente. a) Encuentre el circuito eléctrico equivalente, b) Determine las ecuaciones fundamentales del sistema, c) Escriba al menos dos modelos en variables de estados para este sistema.

Nota: la fuerza electromagnética  $f(t)$  se aplica directamente a la masa  $M_1$ .

**Ejercicio 56** En el sistema mecánico mostrado en la figura (9.3),  $r$  es el radio del cilindro. a) Encuentre el circuito eléctrico equivalente, b) Determine las ecuaciones fundamentales del sistema, c) Escriba al menos dos modelos en variables de estados para este sistema si la entrada al sistema es  $u(t) = T(t)$



y la salida es  $y(t) = z_2(t)$ , d) Determine la ecuación diferencial que relaciona  $u(t)$  e  $y(t)$ .

**Ejercicio 57** En el modelaje de sistemas empleando una metodología "bottom-up" se requiere hallar las descripciones en variables de estados de sistemas en serie o paralelo como se muestra en la figura (9.3). Suponga que  $P_1$  está descrita por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x^{(1)}(t) &= A_1x^{(1)}(t) + B_1u^{(1)}(t) \\ y^{(1)}(t) &= C_1x^{(1)}(t)\end{aligned}$$

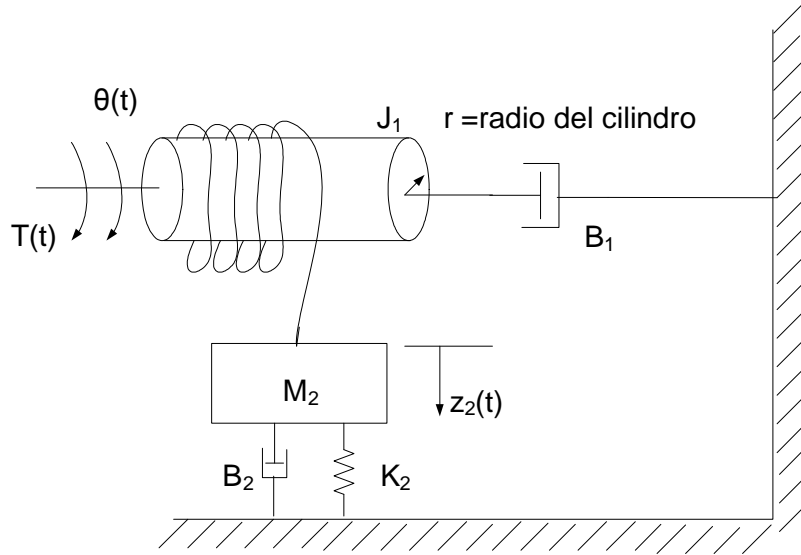
mientras que la planta  $P_2$  está representada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x^{(2)}(t) &= A_2x^{(2)}(t) + B_2u^{(2)}(t) \\ y^{(2)}(t) &= C_2x^{(2)}(t)\end{aligned}$$

1. Determine la descripción en variables de estados de la conexión en serie de estos dos sistemas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A_sx(t) + B_su(t) \\ y(t) &= C_sx(t)\end{aligned}$$

$$\text{donde } x(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \end{bmatrix}.$$



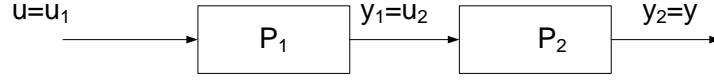
2. Determine la descripción en variables de estados de la conexión en paralelo de estos dos sistemas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A_p x(t) + B_p u(t) \\ y(t) &= C_p x(t)\end{aligned}$$

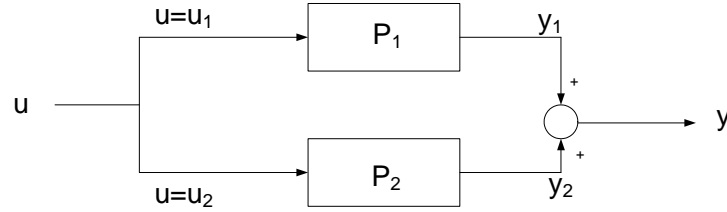
$$\text{donde } x(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 58** Frecuentemente en los edificios de concreto armado surge dinámica debido a la flexibilidad y al doblamiento de muchos de sus elementos que se suponen rígidos. Un caso extremo de sumo interés es el comportamiento de edificios sujetos a movimientos sísmicos y/o a fuertes ráfagas de vientos. La ingeniería de control está estudiando este tipo de sistemas para controlar la flexibilidad de los edificios durante terremotos. En este ejercicio se examine el modelo de un edificio de un piso como el que se muestra en la figura (9.3). El edificio se modela como una fundación conectada mediante paredes a la masa del primer piso,  $m_1$ . Denote por  $z_1$  el desplazamiento del primer piso con respecto al centro del mismo debido al doblamiento de la estructura debido al viento a un terremoto. Las paredes entre los dos pisos generan fuerzas restaurativas y también se produce un amortiguamiento debido a la resistencia del aire que rodea al edificio. Una gran masa  $m_2$ , con un resorte, un amortiguador y un motor se interconectan con el objeto de controlar las oscilaciones del edificio. Denote por  $z_2$  la desviación de la masa  $m_2$  con respecto al mismo punto de referencia





(a)



(b)

empleado para medir  $z_1$ . Las ecuaciones del movimiento del edificio son

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} z_1(t) = -B_1 \frac{d}{dt} z_1(t) - K_1 z_1(t) + K_2 [z_2(t) - z_1(t)]$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} z_2(t) = -B_2 \frac{d}{dt} z_2(t) - K_2 [z_2(t) - z_1(t)] + u(t)$$

donde  $u(t)$  es la fuerza generada por el motor sobre la masa  $m_2$ .

Valores representativos (nominales) para los parámetros son  $m_1 = 100$ ,  $m_2 = 1$ ,  $K_1 = 100$ ,  $K_2 = 10000$ ,  $B_1 = 1$ , y  $B_2 = 200$ . Use estos valores para resolver cada una de las partes de este ejercicio.

1. Use los valores numéricos dados para los parámetros excepto para  $K_2$ , determine el modelo en variables de estados para este sistema empleando el siguiente vector de estado

$$x = \begin{pmatrix} z_1 & \dot{z}_1 & z_2 & \dot{z}_2 \end{pmatrix}^{Tr}$$

la salida es  $y = z_1$ , y la entrada es la fuerza generada por el motor  $u$ .

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^4$$

Las matrices correspondientes aparecerán como función de  $K_2$ . Encuentre los polos y ceros del sistema para el caso  $K_2 = 0$ . El par de polos complejos conjugados con una pequeña parte real indica que si el edificio se deja solo, éste entrará en oscilaciones peligrosas. Confirme esta apreciación mediante la simulación de la ecuación

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} z_1(t) = -B_1 \frac{d}{dt} z_1(t) - K_1 z_1(t)$$

(correspondiente al edificio sin compensación) con  $z_1(0)$  un valor cualquiera no nulo.

Encuentre nuevamente los polos y los ceros del sistema cuando  $K_2 = 10000$ . El hecho que ahora todos los polos son reales indican que la oscilación ha sido eliminada mediante el contrapeso  $m_2$  aún cuando el motor está inactivo. Mediante un control adecuado (por ejemplo, realimentación lineal de las variables de estados) es posible mejorar la respuesta del edificio. Para el resto del problema suponga que  $K_2 = 10000$ .

2. Un conjunto de variables de estados más fáciles de medir son

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1 & w_2 &= \dot{z}_1 \\ w_3 &= z_2 - z_1 & w_4 &= \dot{z}_2 - \dot{z}_1 \end{aligned}$$

Use una transformación lineal para encontrar la representación en variables de estados equivalentes

$$\hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_w^4$$

3. Empleando la representación anterior, determine la ecuación diferencial entrada-salida de la planta

$$P(p)y(t) = Q(p)u(t)$$

y luego encuentre la representación en variables de fase de esta planta.

$$P : \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}_\zeta^4$$

4. Encuentre la matriz de transformación de equivalencia  $Q_c$  tal que

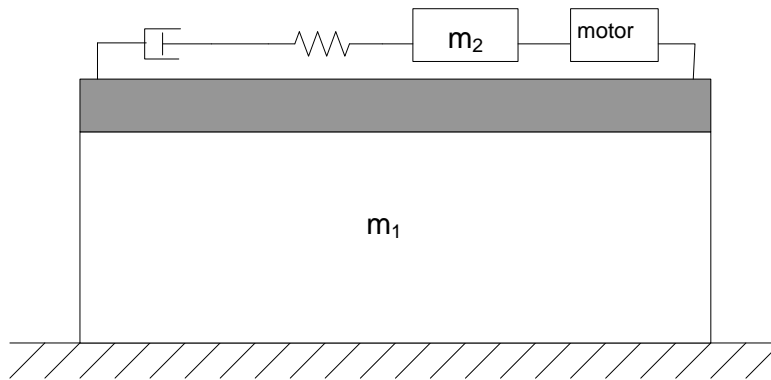
$$\hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_w^4 \xrightarrow{\zeta=Q_c w} P : \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}_\zeta^4$$

y la matriz de transformación  $Q_e$  tal que

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^4 \xrightarrow{x=Q_e w} P : \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}_\zeta^4$$

**Ejercicio 59** Considere la planta  $P$  descrita por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 4u(t) \end{aligned}$$



1. Determine el polinomio característico del sistema.
2. Determine los polos y ceros de la representación en variables de estados dada.
3. a) Halle la matriz de controlabilidad del sistema, b) Determine la forma canónica de controlabilidad (FCC) del sistema y la correspondiente matriz de transformación  $Q_c$  que transforma el sistema original en la representación en FCC.
4. a) Halle la matriz de observabilidad del sistema, b) Determine la forma canónica de observabilidad (FCO) del sistema y la correspondiente matriz de transformación  $Q_o$  que transforma el sistema original en la representación en FCO.
5. Halle una matriz que diagonalice al sistema.

## References

1. Grantham, W. y T. Vincent. "Sistemas de Control Moderno: Análisis y Diseño". Limusa. Noriega Editores. Mexico. 1998.
2. Raven, F. "Automatic Control Engineering". McGraw-Hill, New York. 1978.
3. D'azzo, J.J y C.J. Houpis, "Linear Control System Analysis and Design". McGraw-Hill, New York. 1995.
4. Lewis, F.L, C. Abdallah y D.M. Dawson, "Control of robot Manipulators ". MacMillan Publishing Company, New York. 1993.
5. Umez-Eronini, E. "2 Dinámica de Sistemas y Control". Thomson Learning. México. 2001.
6. Netushil, A. (Ed). "Theory of Automatic Control". Mir Publishers. Moscú. 1973.
7. Meisel, J. "Principios de Conversión de Energía Electromecánica". McGraw-Hill, New York. 1969.