

CAPÍTULO CUATRO

ANÁLISIS DE FOURIER

TIEMPO DISCRETO

4.1 Introducción

Las técnicas del análisis de Fourier en tiempo continuo desarrolladas en el capítulo anterior tienen mucho valor en el análisis de las propiedades de señales y sistemas de tiempo continuo. En esta parte nos dedicamos al estudio del análisis de Fourier en tiempo discreto, dando primero un leve tratamiento de las señales discretas. Éstas, como su nombre lo indica, son señales que están definidas solamente en instantes discretos del tiempo. El enfoque sigue muy de cerca el tratamiento que se hizo del caso en tiempo continuo y los resultados son muy semejantes a los obtenidos en el Capítulo 3.

4.2 Señales Periódicas

Como ya se vio para los sistemas de tiempo continuo, estamos interesados en la respuesta de sistemas lineales a excitaciones periódicas. Ya se estudió que una secuencia (señal de tiempo discreto) $x[n]$ es *periódica con período N* si existe un entero positivo N para el cual

$$x[n + N] = x[n] \quad \text{para toda } n \quad (4.1)$$

En la Fig. 4.1 se muestra un ejemplo de una secuencia de este tipo.

De la Fig. 4.1 y la Ec. (4.1) se deduce que

$$x[n + mN] = x[n] \quad (4.2)$$

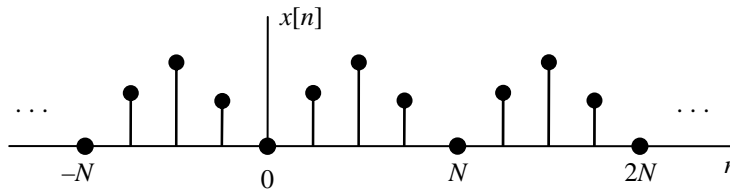


Figura 4.1

para toda n y cualquier entero m . El período fundamental N_0 de $x[n]$ es el menor entero positivo N para el cual se cumple la Ec. (4.1). Una secuencia que no es periódica se denomina una secuencia *no periódica* (o *aperiódica*).

Para una señal de tiempo discreto $x[n]$, el contenido de energía normalizada E de $x[n]$ se define como

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (4.3)$$

La potencia promedio normalizada P de $x[n]$ se define como

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (4.4)$$

Con base en estas definiciones, se definen las siguientes clases de señales:

1. Se dice que $x[n]$ es una señal (secuencia) de *energía* si y sólo si $0 < E < \infty$ (y, en consecuencia, $P = 0$).
2. Se dice que $x[n]$ es una señal (secuencia) de *potencia* si y sólo si $0 < P < \infty$, implicando con ello que $E = \infty$.
3. A las señales que no satisfacen ninguna de estas propiedades no se les refiere ni como señales de energía ni de potencia.

Observe que una señal periódica es una señal de potencia si su contenido de energía por período es finito, y entonces la potencia promedio de esta señal sólo tiene que evaluarse durante un período.

4.3 Serie de Fourier Discreta

4.3.1 Secuencias Periódicas

En la Sec. 1.3 se definió a una señal (secuencia) de tiempo discreto como periódica si existía un entero positivo N para el cual

$$x[n+N] = x[n] \quad \text{para toda } n \quad (4.5)$$

El período fundamental N_0 de $x[n]$ es el menor entero positivo N para el cual se satisface la Ec. (4.5).

Ya vimos en el Cap. 2, que la secuencia exponencial compleja

$$x[n] = e^{j(2\pi/N_0)n} = e^{j\Omega_0 n} \quad (4.6)$$

donde $\Omega_0 = 2\pi/N_0$, es una secuencia periódica con período fundamental N_0 . Como ya se analizó anteriormente, una diferencia muy importante entre la función exponencial compleja de tiempo discreto y la de tiempo continuo es que las señales $e^{j\omega_0 t}$ son diferentes para valores diferentes de ω_0 , pero las secuencias $e^{j\Omega_0 n}$ que difieren en frecuencia por un múltiplo de 2π , son idénticas; es decir,

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi n} = e^{j\Omega_0 n} \quad (4.7)$$

Sea

$$\Psi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.8)$$

Entonces por la Ec. (4.7) tenemos

$$\Psi_0[n] = \Psi_{N_0}[n], \quad \Psi_1[n] = \Psi_{N_0+1}[n], \dots, \Psi_k[n] = \Psi_{N_0+k}[n], \dots \quad (4.9)$$

De modo que las secuencias $\Psi_k[n]$ son diferentes sólo en un intervalo de N_0 valores sucesivos de k . Es decir, cuando k es cambiado por cualquier múltiplo entero de N_0 , se genera la secuencia idéntica.

4.3.2 Representación en Serie de Fourier Discreta

En analogía con la representación de señales periódicas en tiempo continuo, se busca una representación en serie de Fourier discreta de una secuencia periódica $x[n]$ con período fundamental N_0 , en función de los armónicos correspondientes a la frecuencia fundamental $2\pi/N_0$. Es decir, buscamos una representación para $x[n]$ de la forma

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a_k e^{j\Omega_0 nk}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (4.10)$$

donde los valores a_k son los coeficientes de Fourier y están dados por

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (4.11)$$

La validez de la relación dada por la Ec. (4.11) se demuestra en la forma siguiente: Usando la condición de ortogonalidad (la demostración de ésta se deja como ejercicio)

$$\begin{aligned} \sum_{n=\langle N \rangle} \Psi_m[n] \Psi_k^*[n] &= \sum_{n=\langle N \rangle} e^{jm(2\pi/N)n} e^{-jk(2\pi/N)n} \\ &= \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(m-k)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases} \quad m, k < N \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde las secuencias $\{\Psi_k[n]\}$ son ortogonales en cualquier intervalo de longitud N . Por ejemplo, el conjunto de exponenciales complejas

$$\Psi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.13)$$

es ortogonal en cualquier intervalo de longitud N .

Reemplazando la variable k de la sumatoria por m en la Ec. (4.10), tenemos

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{jm(2\pi/N_0)n} \quad (4.14)$$

Usando la Ec. (4.13) con $N = N_0$, la Ec. (4.14) puede escribirse como

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} a_m \Psi_m[n] \quad (4.15)$$

Multiplicando ambos lados de la Ec. (4.15) por $\Psi_k^*[n]$ y sumando desde $n = 0$ hasta $N_0 - 1$, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \Psi_k^*[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} a_m \left(\sum_{n=0}^{N_0-1} \Psi_m[n] \Psi_k^*[n] \right)$$

Intercambiando el orden de las sumatorias y usando la Ec. (4.12), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \Psi_k^*[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} a_m \left(\sum_{n=0}^{N_0-1} \Psi_m[n] \Psi_k^*[n] \right) = N_0 a_k$$

y de aquí se obtiene la Ec. (4.11).

Usando la Ec. (4.9), las Ecs. (4.10) y (4.11) pueden escribirse como

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (4.16)$$

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (4.17)$$

donde $\sum_{k=\langle N_0 \rangle}$ denota la sumatoria en k conforme k varía en un intervalo de N_0 enteros sucesivos. Así, conforme n toma los $n = 0, 1, \dots, N_0 - 1$, las muestras $x[n]$ de $x(t)$ son aproximadas por la Ec. (4.16). La Ec. (4.16) representa la ecuación de *síntesis* y la Ec. (4.17) la ecuación de *análisis*. Haciendo $k = 0$ en la Ec. (4.17), se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] \quad (4.18)$$

la cual indica que a_0 es igual al valor promedio de $x[n]$ en un período.

A los coeficientes de Fourier a_k con frecuencia se les refiere como los *coeficientes espectrales* de $x[n]$. Es fácil demostrar que $a_k = a_{k+N_0}$ (¡hágalo!). Es decir, si consideramos más de N_0 valores secuenciales de k , los valores a_k se repetirán periódicamente con período N_0 . Este hecho debe interpretarse con cuidado. En particular, como solamente hay N_0 exponenciales complejas distintas que son periódicas con período N_0 , la representación en serie de Fourier de tiempo discreto es una serie finita con N_0 términos. Por consiguiente, si fijamos los N_0 valores consecutivos de k para los cuales definimos la serie de Fourier en la Ec.(4.16), obtendremos un conjunto de exactamente N_0 coeficientes a partir de la Ec. (4.17). Por otra parte, algunas veces será conveniente usar diferentes conjuntos de N_0 valores de k y, en consecuencia, es útil considerar la Ec. (4.16) como una suma para cualquier *conjunto arbitrario* de N_0 valores sucesivos de k .

Ejemplo 1. En este ejemplo consideramos la onda cuadrada periódica en tiempo discreto mostrada en la Fig. 4.2. Podemos evaluar la serie de Fourier de esta función usando la Ec. (4.17).

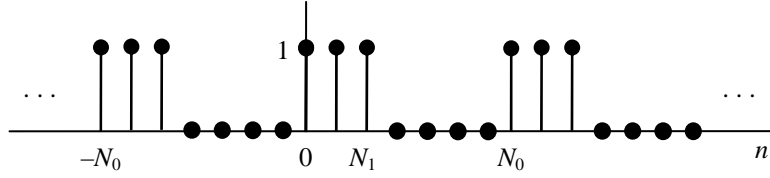


Figura 4.2

Debido a la simetría de esta secuencia con respecto a $n = 0$, es conveniente seleccionar un intervalo simétrico en el cual evaluar la sumatoria en la Ec. (4.17). Por ello, expresamos la Ec. (4.17) como

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N_0)n}$$

Haciendo $m = n + N_1$, la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N_0} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N_0)(m-N_1)} \\ &= \frac{1}{N_0} e^{jk(2\pi/N_0)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N_0)m} \end{aligned}$$

cuya sumatoria consiste de los primeros $(2N_1 + 1)$ términos en una serie geométrica, la cual al ser evaluada produce

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N_0} e^{jk(2\pi/N_0)N_1} \left(\frac{1 - e^{-jk(2\pi/N_0)(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk(2\pi/N_0)}} \right) \\ &= \frac{1}{N_0} \frac{e^{-jk(2\pi/2N_0)} \left[e^{jk(2\pi(N_1+1/2)/N_0)} - e^{-jk(2\pi(N_1+1/2)/N_0)} \right]}{e^{-jk(2\pi/2N_0)} \left[e^{jk(2\pi/2N_0)} - e^{-jk(2\pi/2N_0)} \right]} \\ &= \frac{1}{N_0} \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N_0]}{\sin(2\pi k/2N_0)}, \quad k \neq 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \dots \end{aligned}$$

y

$$a_k = \frac{2N_1}{N_0}, \quad k = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \dots$$

Esta expresión puede escribirse en una forma más compacta si los coeficientes se expresan como muestras de una envolvente:

$$N_0 a_k = \frac{\text{sen}[(2N_1 + 1)\Omega_0/2]}{\text{sen}(\Omega_0/2)} \Big|_{\Omega_0 = 2\pi k/N_0}$$

En la Fig. 4.3 se dibujan los coeficientes $N_0 a_k$ para $2N_1 + 1 = 5$ y $N_0 = 10$.

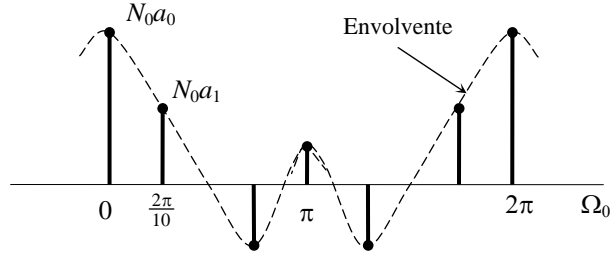


Figura 4.3

Ejemplo 2. Determine la representación en serie de Fourier discreta de la secuencia

$$x[n] = \cos \frac{\pi}{3} n + \text{sen} \frac{\pi}{4} n.$$

Tomemos $x[n] = \cos \frac{\pi}{3} n + \text{sen} \frac{\pi}{4} n = x_1[n] + x_2[n]$, donde

$$x_1[n] = \cos \frac{\pi}{3} n = \cos \Omega_1 n \rightarrow \Omega_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$x_2[n] = \text{sen} \frac{\pi}{4} n = \text{sen} \Omega_2 n \rightarrow \Omega_2 = \frac{\pi}{4}$$

Como $\Omega_1/2\pi = \frac{1}{6}$ (= número racional), $x_1[n]$ es periódica con período fundamental $N_1 = 6$, y como $\Omega_2/2\pi = \frac{1}{8}$ (= número racional), $x_2[n]$ es periódica con período fundamental $N_2 = 8$. Por tanto, $x[n]$ es periódica y su período fundamental está dado por el mínimo común múltiplo de 6 y 8, es decir, $N_0 = 24$ y $\Omega_0 = 2\pi/N_0 = \pi/12$. Por la fórmula de Euler tenemos que

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2} \left[e^{j(\pi/3)n} + e^{-j(\pi/3)n} \right] + \frac{1}{2j} \left[e^{j(\pi/4)n} - e^{-j(\pi/4)n} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-j4\Omega_0 n} + j \frac{1}{2} e^{-j3\Omega_0 n} - j \frac{1}{2} e^{j3\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j4\Omega_0 n} \end{aligned}$$

Así que $c_3 = -j\left(\frac{1}{2}\right)$, $c_4 = \frac{1}{2}$, $c_{-4} = c_{-4+24} = c_{20} = \frac{1}{2}$, $c_{-3} = c_{-3+24} = c_{21} = j\left(\frac{1}{2}\right)$ y todos los otros $c_k = 0$. Por lo tanto, la serie de Fourier discreta de $x[n]$ es

$$x[n] = -j\frac{1}{2}e^{j3\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j4\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j20\Omega_0 n} + j\frac{1}{2}e^{j21\Omega_0 n}, \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{12}$$

4.3.3 Convergencia de la Serie de Fourier Discreta

Puesto que la serie de Fourier discreta de una secuencia $x[n]$ es una serie finita, en contraste con el caso de tiempo continuo, y definida completamente por los valores de la señal en un período, *no hay problemas de convergencia* con la serie de Fourier discreta y *no se presenta el fenómeno de Gibbs*. En otras palabras, el hecho de que cualquier secuencia periódica en tiempo discreto $x[n]$ está completamente especificada por un número *finito* de parámetros, a saber, los valores de la secuencia en un período, es la razón por la cual no hay problemas de convergencia en general con la serie de Fourier en tiempo discreto.

4.4 Propiedades de la Serie de Fourier Discreta

4.4.1 Periodicidad de los Coeficientes de Fourier

De las Ecs. (4.9) y (4.10) vemos que

$$a_{k+N_0} = a_k \quad (4.19)$$

la cual indica que los coeficientes de la serie de Fourier son periódicos con período fundamental N_0 . Es decir, si consideramos más de N_0 valores secuenciales de k , los valores de a_k se repetirán periódicamente con período N_0 .

4.4.2 Dualidad

De la Ec. (4.19) vemos que los coeficientes de Fourier a_k forman una secuencia periódica con período fundamental N_0 . Entonces, escribiendo a_k como $a[k]$, la Ec. (4.17) puede escribirse de nuevo como

$$a[k] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (4.20)$$

Sea $n = -m$ en la Ec. (4.20). Entonces

$$a[k] = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-m] e^{jk\Omega_0 m}$$

Haciendo ahora $k = n$ y $m = k$ en la expresión anterior, obtenemos

$$a[n] = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-k] e^{jk\Omega_0 n} \quad (4.21)$$

Comparando la Ec. (4.21) con la Ec. (4.16), vemos que los valores $(1/N_0)x[-k]$ son los coeficientes de Fourier de $a[n]$. Si adoptamos la notación

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{SFD}} a_k = a[k] \quad (4.22)$$

para denotar el par de series de Fourier discretas (SFD), entonces, por la Ec. (4.21), tenemos

$$a[n] \xleftrightarrow{\text{SFD}} \frac{1}{N_0} x[-k] \quad (4.23)$$

La Ec. (4.23) se conoce como la propiedad de *dualidad* de la serie de Fourier discreta. Dicho de otra forma, puesto que los coeficientes de Fourier a_k de una señal periódica $x[n]$ son a su vez una secuencia periódica, podemos expandir los coeficientes a_k en una serie de Fourier. La propiedad de dualidad descrita implica que los coeficientes de la serie de Fourier para la secuencia periódica a_k son los valores $(1/N_0)x[-k]$.

4.4.3 Otras Propiedades

Cuando $x[n]$ es real, entonces de la Ec. (4.11) [o la Ec. (4.17)] y la Ec. (4.19) se deduce que

$$a_{-k} = a_{N_0-k} = a_k^* \quad (4.24)$$

donde, igual que antes, el asterisco (*) denota el conjugado complejo.

4.4.4 Secuencias Pares e Impares

Cuando $x[n]$ es real, sea

$$x[n] = x_p[n] + x_i[n]$$

donde $x_p[n]$ y $x_i[n]$ son las partes par e impar de $x[n]$, respectivamente y sea

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{SFD}} a_k$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_p[n] &\xleftrightarrow{\text{SFD}} \text{Re}\{a_k\} \\ x_i[n] &\xleftrightarrow{\text{SFD}} \text{Im}\{a_k\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Vemos entonces que si $x[n]$ es real y par, entonces sus coeficientes de Fourier son reales, mientras que si $x[n]$ es real e impar, sus coeficientes son imaginarios.

Ejemplo 3. Sea $x[n]$ una secuencia periódica real con período fundamental N_0 y coeficientes de Fourier $c_k = a_k + jb_k$, donde a_k y b_k son reales.

- (a) Demuestre que $a_{-k} = a_k$ y $b_{-k} = -b_k$.
- (b) Demuestre que $c_{N_0/2}$ es real si N_0 es par.
- (c) Demuestre que $x[n]$ puede también expresarse como una serie de Fourier trigonométrica de la forma

$$x[n] = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} (a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \sin k\Omega_0 n) \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

si N_0 es impar, o

$$x[n] = c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} (a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \sin k\Omega_0 n)$$

si N_0 es par.

Solución:

- (a) Si $x[n]$ es real, entonces de la Ec. (4.11) tenemos

$$c_{-k} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{jk\Omega_0 n} = \left(\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \right)^* = c_k^*$$

Así que

$$c_{-k} = a_{-k} + jb_{-k} = (a_k + jb_k)^* = a_k - jb_k$$

y obtenemos

$$a_{-k} = a_k \quad \text{y} \quad b_{-k} = -b_k$$

- (b) Si N_0 es par, entonces de la Ec. (4.11),

$$\begin{aligned} c_{N_0/2} &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j(N_0/2)(2\pi/N_0)n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\pi n} \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} (-1)^n x[n] \quad \text{real} \end{aligned}$$

- (c) Escribamos de nuevo la Ec. (4.10) como

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} = c_0 + \sum_{k=1}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

Si N_0 es impar, entonces $(N_0 - 1)$ es par y podemos escribir a $x[n]$ como

$$x[n] = c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} \left(c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_{N_0-k} e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} \right)$$

Ahora, de la Ec. (4.24),

$$c_{N_0-k} = c_k^*$$

y

$$e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} = e^{jN_0\Omega_0 n} e^{-jk\Omega_0 n} = e^{j2\pi n} e^{-jk\Omega_0 n} = e^{-jk\Omega_0 n}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} \left(c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_k^* e^{-jk\Omega_0 n} \right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} 2 \operatorname{Re} \left(c_k e^{jk\Omega_0 n} \right) \\ &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} \operatorname{Re} (a_k + jb_k) (\cos k\Omega_0 n + j \sin k\Omega_0 n) \\ &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} (a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \sin k\Omega_0 n) \end{aligned}$$

Si N_0 es par, podemos escribir a $x[n]$ como

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + \sum_{k=1}^{N_0/2-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-2)/2} \left(c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_{N_0-k} e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} \right) + c_{N_0/2} e^{j(N_0/2)\Omega_0 n} \end{aligned}$$

Usando de nuevo la Ec. (4.24), se obtiene

$$c_{N_0-k} = c_k^* \quad \text{y} \quad e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} = e^{-jk\Omega_0 n}$$

y

$$e^{j(N_0/2)\Omega_0 n} = e^{j(N_0/2)(2\pi/N_0)n} = e^{j\pi n} = (-1)^n$$

Entonces

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + \sum_{k=1}^{(N_0-2)/2} 2 \operatorname{Re} \left(c_k e^{jk\Omega_0 n} \right) \\ &= c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-2)/2} (a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \sin k\Omega_0 n) \end{aligned}$$

4.5 Teorema de Parseval

Si $x[n]$ está representada por la serie de Fourier discreta (4.16), entonces se puede demostrar que

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} |a_k|^2 \quad (4.26)$$

La Ec. (4.26) se conoce como la *identidad de Parseval* (o el *teorema de Parseval*) para la serie de Fourier discreta.

Demostración: Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos secuencias periódicas con igual período fundamental N_0 y con series de Fourier discretas dadas por

$$x_1[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} b_k e^{jk\Omega_0 n} \quad x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Entonces la secuencia $x[n] = x_1[n]x_2[n]$ es periódica con el mismo período fundamental N_0 (la demostración se deja para el lector) y se puede expresar como

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

donde a_k está dada por

$$a_k = \sum_{m=0}^{N_0-1} b_m c_{k-m} \quad (4.27)$$

De esta relación se obtiene que

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n] x_2[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \sum_{m=0}^{N_0-1} b_m c_{k-m}$$

Haciendo $k = 0$ en la expresión anterior, se obtiene

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n] x_2[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} b_m c_{-m} = \sum_{k=0}^{N_0-1} b_k c_{-k} \quad (4.28)$$

la cual se conoce como la *relación de Parseval*.

Ahora, sean

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

y

$$x^*[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} b_k e^{-jk\Omega_0 n}$$

Entonces

$$b_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x^*[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \left(\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{jk\Omega_0 n} \right)^* = a_{-k}^* \quad (4.29)$$

La Ec. (4.29) indica que si los coeficientes de Fourier de $x[n]$ son los a_k , entonces los coeficientes de Fourier de $x^*[n]$ son los a_{-k}^* . Haciendo $x_1[n] = x[n]$ y $x_2[n] = x^*[n]$ en la Ec. (4.28), se tiene que $b_k = a_k$ y $e_k = c_{-k}^*$ (o $c_{-k} = a_k^*$) y se obtiene

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] x^*[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a_k a_k^* \quad (4.30)$$

o

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N_0-1} |a_k|^2$$

que es la relación buscada.

4.6 La Transformada de Fourier Discreta

A continuación se considerará la representación en el dominio de la frecuencia de señales de tiempo discreto y de duración finita que no son necesariamente periódicas.

4.6.1 Transformación de la Serie de Fourier Discreta en la Transformada de Fourier

Sea $x[n]$ una secuencia no periódica de duración finita. Es decir, para algún entero positivo N_1 ,

$$x[n] = 0 \quad |n| > N_1$$

Una secuencia así se muestra en la Fig. 4.9a. Sea $x_{N_0}[n]$ una secuencia periódica formada al repetir $x[n]$ con un período fundamental N_0 , como se muestra en la Fig. 4.9b. Si hacemos que $N_0 \rightarrow \infty$, tenemos

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} x_{N_0}[n] = x[n] \quad (4.31)$$

La serie de Fourier discreta para $x_{N_0}[n]$ está dada por

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (4.32)$$

donde

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{N_0}[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (4.33)$$

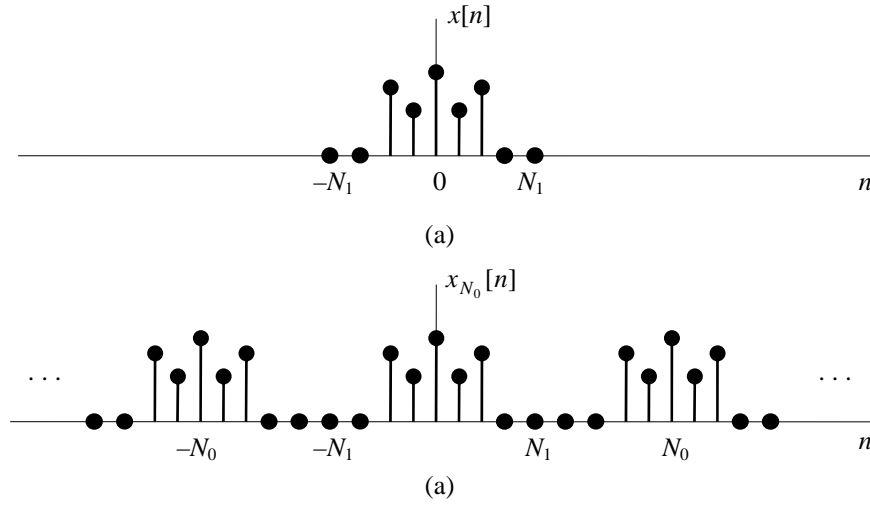


Figura 4.4

Puesto que $x_{N_0}[n] = x[n]$ para $|n| \leq N_1$ y también como $x[n] = 0$ fuera de este intervalo, la Ec. (4.33) puede escribirse de nuevo como

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (4.34)$$

Definamos la envolvente $X(\Omega)$ de $N_0 a_k$ como

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (4.35)$$

Entonces, de la Ec. (4.34), los coeficientes de Fourier pueden expresarse como

$$a_k = \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0) \quad (4.36)$$

donde Ω_0 se usa para denotar el espacio muestral $2\pi/N_0$. Así pues, los coeficientes a_k son proporcionales a muestras igualmente espaciadas de esta función envolvente. Sustituyendo la Ec. (4.36) en la Ec. (4.32), tenemos

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$$

o

$$x_{N_0}[n] = \frac{\Omega_0}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad (4.37)$$

De la Ec. (4.35), $X(\Omega)$ es periódica con período 2π y $e^{j\Omega n}$ también lo es. Por ello, el producto $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ también será periódico con período 2π . Como se muestra en la Fig. 4.5, cada término en la sumatoria de la Ec. (4.37) representa el área de un rectángulo de altura $X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$ y anchura Ω_0 . Conforme $N_0 \rightarrow \infty$, $\Omega_0 = 2\pi/N_0$ se hace infinitesimal ($\Omega_0 \rightarrow 0$) y la Ec. (4.36) se convierte en una integral. También, puesto que la sumatoria en la Ec. (4.37) es sobre N_0 intervalos consecutivos de anchura $\Omega_0 = 2\pi/N_0$, el intervalo total de integración siempre tendrá una anchura de 2π . Así que conforme $N_0 \rightarrow \infty$ y en vista de la Ec. (4.31), la Ec. (4.37) se convierte en

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (4.38)$$

Como $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ es periódica con período 2π , el intervalo de integración en la Ec. (4.38) puede tomarse como cualquier intervalo de longitud 2π .

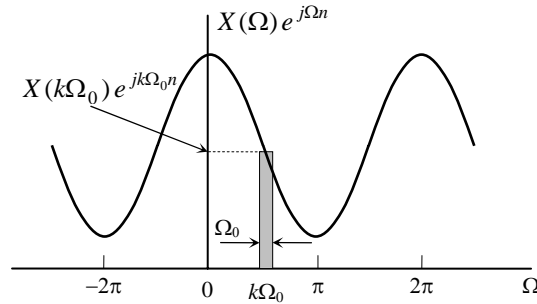


Figura 4.5

4.6.2 Par de Transformadas de Fourier

La función $X(\Omega)$ definida por la Ec. (4.35) se denomina la *transformada de Fourier* de $x[n]$ y la Ec. (4.38) define la *transformada de Fourier inversa* de $X(\Omega)$. Específicamente, ellas se denotan por

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (4.39)$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (4.40)$$

y decimos que $x[n]$ y $X(\Omega)$ forman un par de transformadas de Fourier denotadas por

$$x[n] \leftrightarrow X(\Omega)$$

Las Ecs. (4.39) y (4.40) son las contrapartes discretas de las ecuaciones para las transformadas en tiempo continuo. La derivación de estas ecuaciones indica cómo una secuencia aperiódica puede verse como una combinación lineal de exponenciales complejas. En particular, la ecuación de síntesis es en efecto una representación de $x[n]$ como una combinación lineal de exponenciales complejas infinitesimalmente cercanas en frecuencia y con amplitudes $X(\Omega)(d\Omega/2\pi)$ y proporciona la información de sobre cómo $x[n]$ está compuesta de exponenciales complejas en frecuencias diferentes.

Ejemplo 4. Determine la transformada de Fourier del pulso rectangular (Fig. 4.6)

$$x[n] = u[n] + u[n - N]$$

De la Ec. (4.38), la transformada de Fourier de $x[n]$ está dada por

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} (1) e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j\Omega N/2} (e^{j\Omega N/2} - e^{-j\Omega N/2})}{e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})} \\ &= e^{-j\Omega(N-1)/2} \frac{\text{sen}(\Omega N/2)}{\text{sen}(\Omega/2)} \end{aligned}$$

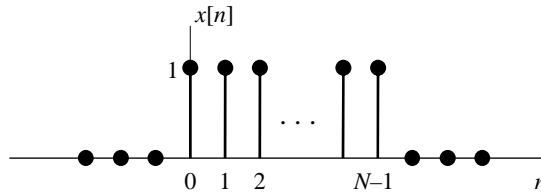


Figura 4.6

4.6.3 Espectros de Fourier

La transformada de Fourier $X(\Omega)$ de $x[n]$ es, en general, compleja y puede expresarse como

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\phi(\Omega)} \quad (4.41)$$

Igual que en tiempo continuo, la transformada de Fourier $X(\Omega)$ de una secuencia no periódica $x[n]$ es la especificación en el dominio de la frecuencia de $x[n]$ y se conoce como el *espectro* (o *espectro de Fourier*) de $x[n]$. La cantidad $|X(\Omega)|$ es el *espectro de magnitud* de $x[n]$ y $\phi(\Omega)$ es el *espectro de fase* de $x[n]$. Además, si $x[n]$ es real, el espectro de amplitud $|X(\Omega)|$ es una función par y el espectro de fase $\phi(\Omega)$ es una función impar de Ω .

Ejemplo 5. Considere la secuencia

$$x[n] = \alpha^n u[n] \quad |\alpha| < 1$$

Para este ejemplo,

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

El espectro de magnitud está dado por

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Omega}}$$

y el de fase por

$$\phi(\Omega) = \tan^{-1} \frac{\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega}$$

4.6.4 Convergencia de $X(\Omega)$

Igual que en el caso de tiempo continuo, la condición suficiente para la convergencia de $X(\Omega)$ es que $x[n]$ sea absolutamente sumable, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (4.42)$$

La demostración de esto se deja para el lector. Por lo tanto, vemos que la transformada de Fourier en tiempo discreto posee muchas semejanzas con el caso de tiempo continuo. Las diferencias principales entre los dos casos son la periodicidad de la transformada de tiempo discreto $X(\Omega)$ y el intervalo finito de integración en la ecuación de síntesis. Ambas provienen de un hecho que ya se ha señalado:

Exponenciales complejas en tiempo discreto que difieren en frecuencia por un múltiplo de 2π son idénticas.

4.7 Propiedades de la Transformada de Fourier

Hay muchas diferencias y semejanzas con el caso continuo. Estas propiedades son útiles en el análisis de señales y sistemas y en la simplificación del trabajo con las transformadas directa e inversa

4.7.1 Periodicidad

Ya se vio que la transformada de Fourier discreta es *siempre* periódica en Ω con período 2π , de modo que

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \quad (4.43)$$

Como una consecuencia de la Ec. (4.43), en el caso de tiempo discreto tenemos que considerar valores de Ω (radianes) solamente en el intervalo $0 \leq \Omega < 2\pi$ o $-\pi \leq \Omega < \pi$, mientras que en el caso continuo tenemos que considerar valores de ω (radianes/segundo) en todo el intervalo $-\infty < \omega < \infty$.

4.7.2 Linealidad

Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos secuencias con transformadas de Fourier $X_1(\Omega)$ y $X_2(\Omega)$, respectivamente. Entonces

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \leftrightarrow a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega) \quad (4.44)$$

para cualesquiera constantes a_1 y a_2 .

4.7.3 Desplazamiento o Corrimiento en el Tiempo

Por sustitución directa en las ecuaciones de definición de la transformada de Fourier, se obtiene que

$$x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \quad (4.45)$$

La demostración de la Ec. (4.45) es la siguiente: Por definición, Ec. (4.39),

$$\mathcal{F}\{x[n - n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] e^{-j\Omega n}$$

Mediante el cambio de variable $m = n - n_0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x[n-n_0]\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\Omega(m+n_0)} \\
&= e^{-j\Omega n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\Omega m} = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x[n] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

Ejemplo 6. Determine (a) la transformada de Fourier $X(\Omega)$ de la secuencia en forma de pulso rectangular mostrada en la Fig. 4.7a; (b) Grafique $X(\Omega)$ para $N_1 = 4$ y $N_1 = 8$.

(a) De la Fig. 4.7 vemos que

$$x[n] = x_1[n + N_1]$$

donde $x_1[n]$ se muestra en la Fig. 4.7b. Haciendo $N = 2N_1 + 1$ en el resultado del Ejemplo 4, tenemos

$$X_1(\Omega) = e^{-j\Omega N_1} \frac{\text{sen}\left[\Omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\text{sen}(\Omega/2)}$$

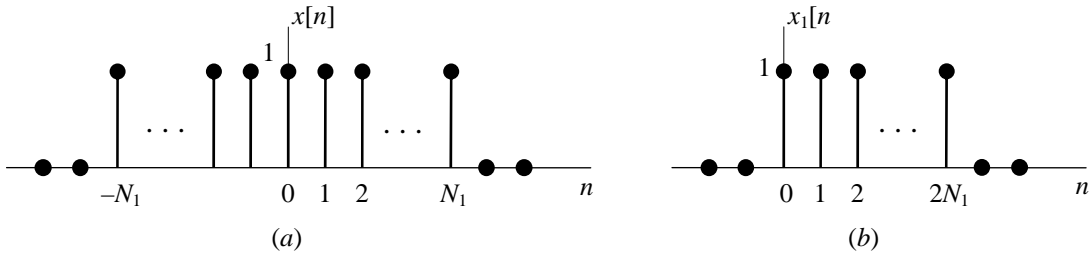


Figura 4.7

Ahora, por la propiedad de desplazamiento en el tiempo, tenemos que

$$X(\Omega) = e^{j\Omega N_1} X_1(\Omega) = \frac{\text{sen}\left[\Omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\text{sen}(\Omega/2)}$$

(b) Haciendo $N_1 = 4$ en la ecuación anterior, se obtiene

$$X(\Omega) = \frac{\text{sen}(4.5\Omega)}{\text{sen}(0.5\Omega)}$$

la cual se grafica en la Fig. 4.8a. En forma similar, para $N_1 = 8$ se obtiene

$$X(\Omega) = \frac{\sin(8.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

la cual se grafica en la Fig. 4.8b.

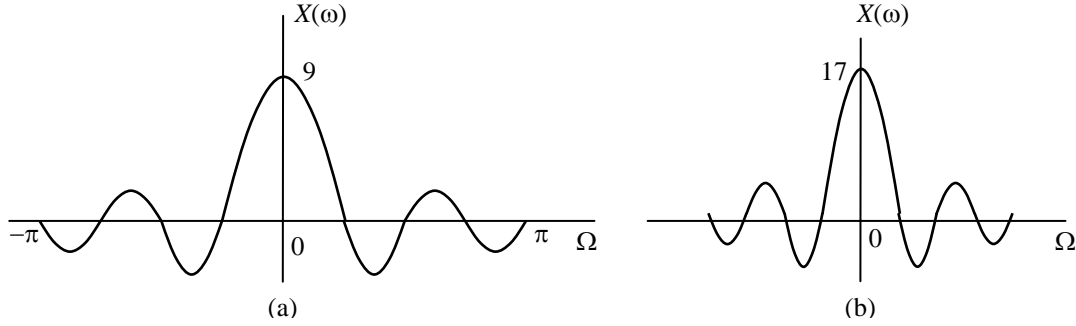


Figura 4.8

4.7.4 Desplazamiento en Frecuencia

Esta propiedad, originada al multiplicar la exponencial $e^{j\Omega_0 n}$ por $x[n]$, produce el par de transformadas dado por

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0) \quad (4.46)$$

La demostración procede en la forma siguiente. Por la Ec. (4.39)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{j\Omega_0 n} x[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 n} x[n] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\Omega - \Omega_0)n} = X(\Omega - \Omega_0) \end{aligned}$$

de donde

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

Ejemplo 7. Determinar la transformada inversa de

$$X(\Omega) = 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0) \quad |\Omega|, |\Omega_0| \leq \pi$$

De la ecuación de definición de la transformada de Fourier inversa, se tiene que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0) e^{j\Omega_0 n} d\Omega = e^{j\Omega_0 n}$$

y de aquí se obtiene el par de transformadas

$$e^{j\Omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

Haciendo $\Omega_0 = 0$ en la relación anterior, se obtiene otro par de transformadas:

$$x[n] = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega), \quad |\Omega| \leq \pi$$

4.7.5 Conjugación

Esta propiedad relaciona el conjugado de la función con su transformada y nos dice que

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega) \quad (4.47)$$

De la Ec. (4.39)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x^*[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{-j\Omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n} \right)^* \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(-\Omega n)} \right)^* = X^*(-\Omega) \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega)$$

Debido a la naturaleza discreta del índice del tiempo para señales de tiempo discreto, los escalamientos en tiempo y en frecuencia resultan en tiempos discretos que toman una forma algo diferente de sus contrapartes en tiempo continuo. Sea $x[n]$ una señal con espectro $X(\Omega)$ y consideremos las dos propiedades siguientes.

4.7.6 Inversión en el Tiempo

$$x[-n] \leftrightarrow X(-\Omega) \quad (4.48)$$

Esta demostración se deja para el lector. Aun cuando la Ec. (4.48) es análoga al caso de tiempo continuo, surgen diferencias cuanto tratamos de escalar tiempo y frecuencia en vez de simplemente invertir el eje del tiempo, como se verá a continuación.

4.7.7 Escalamiento en el Tiempo

La propiedad de escalamiento de la transformada de Fourier en tiempo continuo se expresó como

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (4.49)$$

Sin embargo, en el caso de tiempo discreto, $x[an]$ no es una secuencia si a no es un entero. Por otra parte, si a es un entero, digamos 2, $x[2n]$ consiste solamente de las muestras pares de $x[n]$. Así que el escalamiento en el tiempo en tiempo discreto toma una forma algo diferente de la Ec. (4.49).

Sea m un entero positivo y defina la secuencia

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] = x[k] & \text{si } n = km, k \text{ entero} \\ 0 & \text{si } n \neq km \end{cases} \quad (4.50)$$

Entonces tenemos

$$x_{(m)}[n] \leftrightarrow X(m\Omega) \quad (4.51)$$

La Ec. (4.51) es la contraparte en tiempo discreto de la Ec. (4.49). Expresa de nuevo la relación inversa entre el tiempo y la frecuencia. Es decir, conforme la señal se extiende en el tiempo ($m > 1$), su transformada de Fourier se comprime. Observe que $X(m\Omega)$ es periódica con período $2\pi/m$, ya que $X(\Omega)$ es periódica con período 2π .

De la Ec. (4.39)

$$\mathcal{F}\{x_{(m)}[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(m)}[n] e^{-j\Omega n}$$

Haciendo el cambio de variable $n = km$ en el lado derecho de esta ecuación, obtenemos

$$\mathcal{F}\{x_{(m)}[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{(m)}[km] e^{-j\Omega km} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j(m\Omega)k} = X(m\Omega)$$

De aquí que

$$x_{(m)}[n] \leftrightarrow X(m\Omega)$$

4.7.8 Dualidad

La propiedad de dualidad de una transformada de Fourier de tiempo continuo se expresó como

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \quad (4.52)$$

En el caso discreto no hay una contraparte para esta propiedad. Sin embargo, hay una dualidad entre la transformada de Fourier discreta y la serie de Fourier de tiempo continuo. Sea

$$x[n] \leftrightarrow X(\Omega)$$

De las Ecs. (4.39) y (4.43),

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-k] e^{-j\Omega k} \quad (4.53)$$

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \quad (4.54)$$

Puesto que Ω es una variable continua, haciendo $\Omega = t$ y $n = -k$ en la Ec. (4.53), se obtiene

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k] e^{jkt} \quad (4.55)$$

Como $X(t)$ es periódica con período $T_0 = 2\pi$ y la frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1$, la Ec. (4.55) indica que los coeficientes de la serie de Fourier de $X(t)$ serán iguales a $x[-k]$. Esta relación dual se denota por

$$X(t) \stackrel{\text{SF}}{\leftrightarrow} a_k = x[-k] \quad (4.56)$$

y donde SF denota “la serie de Fourier” y las a_k son los coeficientes de Fourier.

4.7.9 Diferenciación en Frecuencia

De nuevo, suponga que $X(\Omega)$ es la transformada de $x[n]$. Entonces

$$n x[n] \leftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad (4.57)$$

De la definición (4.39) sabemos que

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Diferenciando ambos lados de la expresión anterior con respecto a Ω e intercambiando el orden de la diferenciación y la sumatoria, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} &= \frac{d}{d\Omega} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{d}{d\Omega} (e^{-j\Omega n}) \\ &= -j \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x[n] e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por j , vemos que

$$\mathcal{F}\{n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x[n] e^{-j\Omega n} = j \frac{dX[n]}{d\Omega}$$

y, por tanto,

$$n x[n] \leftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

4.7.10 Diferencias

Para una sola diferencia, se tiene que

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega) \quad (4.58)$$

La secuencia $x[n] - x[n-1]$ ya se definió como la *primera diferencia*. La Ec. (4.58) se obtiene fácilmente a partir de la propiedad de linealidad, Ec. (4.44), y la propiedad de desplazamiento en el tiempo, Ec. (4.45).

Ejemplo 8. Demuestre que

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \quad |\Omega| \leq \pi$$

Sea

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = X(\Omega)$$

Observe ahora que

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

y tomando la transformada de Fourier de ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$1 = (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega)$$

Ahora bien, $(1 - e^{-j\Omega}) = 0$ para $\Omega = 0$ y, por tanto, $X(\Omega)$ debe ser de la forma

$$X(\Omega) = A\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \quad |\Omega| \leq \pi$$

donde A es una constante. Para determinar A , procedemos en la forma siguiente: La componente par de $u[n]$ está dada por

$$u_p[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[n]$$

Así que la componente impar de $u[n]$ está dada por

$$u_i[n] = u[n] - u_p[n] = u[n] - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta[n]$$

y

$$\mathcal{F}\{u_i[n]\} = A\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} - \pi\delta(\Omega) - \frac{1}{2}$$

Pero la transformada de Fourier de una secuencia real impar debe ser puramente imaginaria; así que debemos tener que $A = \pi$ y entonces

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega)$$

4.7.11 Acumulación

Esta propiedad dice que

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \pi X(0) \delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} X(\Omega) \quad |\Omega| \leq \pi \quad (4.59)$$

Observe que la acumulación es la contraparte en tiempo discreto de la integración. El término en impulso en el lado derecho de la Ec. (4.59) refleja el valor promedio o CD que puede resultar de la acumulación.

La demostración de esta propiedad se deja para el lector (use el resultado del Ejemplo 8).

Ejemplo 9. Determinar la transformada de Fourier de $u[n]$ usando la propiedad de acumulación, Ec. (4.59).

Ya sabemos que

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

y también que

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

Haciendo $x[k] = \delta[k]$ en la Ec. (4.59), se obtiene

$$x[n] = \delta[n] \leftrightarrow X(\Omega) = 1 \quad \text{y} \quad X(0) = 1$$

y, por tanto,

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \leftrightarrow \pi \delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} \quad |\Omega| \leq \pi$$

4.7.12 Convolución

Para dos señales discretas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, su convolución y la transformada de ésta cumplen con la relación

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(\Omega) X_2(\Omega) \quad (4.60)$$

Esta propiedad juega un papel muy importante en el estudio de los sistemas LIT de tiempo discreto.

Por las definiciones (4.27) y (4.39), tenemos que

$$\mathcal{F}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] \right) e^{-j\Omega n}$$

Intercambiando el orden de las sumatorias, obtenemos

$$\mathcal{F}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] e^{-j\Omega n} \right)$$

Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo, Ec. (4.45):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega k} X_2(\Omega)$$

y así tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_1[n] * x_2[n]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] e^{-j\Omega k} X_2(\Omega) \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] e^{-j\Omega k} \right) X_2(\Omega) = X_1(\Omega) X_2(\Omega) \end{aligned}$$

y se verifica la relación (4.60).

Ejemplo 10. Determine la transformada de Fourier inversa $x[n]$ de

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1 - a e^{-j\Omega})^2} \quad |a| < 1$$

usando el teorema de convolución.

La transformada inversa de

$$\frac{1}{(1 - a e^{-j\Omega})} \quad |a| < 1$$

es la función $a^n u[n]$ (Ejemplo 5). Ahora bien,

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1 - a e^{-j\Omega})^2} = \left(\frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}} \right) \left(\frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}} \right)$$

Entonces, usando el teorema de convolución, Ec. (4.60), se obtiene

$$\begin{aligned} x[n] &= a^n u[n] * a^n u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] a^{n-k} u[n-k] \\ &= a^n \sum_{k=0}^n 1 = (n+1) a^n u[n] \end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos el par de transformadas

$$(n+1)a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})} \quad |a| < 1$$

4.7.13 Propiedad de Multiplicación o Modulación

En el Cap. 3 se introdujo la propiedad de modulación para señales de tiempo continuo y se indicaron algunas de sus aplicaciones. Existe una propiedad análoga para señales de tiempo discreto y juega un papel similar en aplicaciones. Esta propiedad es

$$x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \oplus X_2(\Omega) \quad (4.61)$$

donde el símbolo \oplus denota la *convolución periódica* definida por

$$X_1(\Omega) \oplus X_2(\Omega) = \int_{2\pi} X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta) d\theta \quad (4.62)$$

La propiedad de multiplicación (4.61) es la propiedad dual de la Ec. (4.60) y su demostración procede en la forma siguiente:

Sea $x[n] = x_1[n]x_2[n]$. Entonces, por la definición (4.39),

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n]$$

Por la Ec. (4.39),

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) e^{j\theta n} d\theta$$

Entonces

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) e^{j\theta n} d\theta \right] x_2[n] e^{-j\Omega n}$$

Intercambiando el orden de la sumatoria y la integración obtenemos

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] e^{-j(\Omega-\theta)n} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \oplus X_2(\Omega) \end{aligned}$$

y así queda demostrada la propiedad.

4.7.14 Propiedades Adicionales

Si $x[n]$ es real, sea

$$x[n] = x_p[n] + x_i[n]$$

donde $x_p[n]$ y $x_i[n]$ son las componentes par e impar de $x[n]$, respectivamente. Sea

$$x[n] \leftrightarrow X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\theta(\Omega)} \quad (4.63)$$

Entonces

$$X(-\Omega) = X^*(\Omega) \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} x_p[n] &\leftrightarrow \operatorname{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega) \\ x_i[n] &\leftrightarrow j\operatorname{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega) \end{aligned} \quad (4.65)$$

La Ec. (4.64) es la condición necesaria y suficiente para que $x[n]$ sea real. De las Ecs. (4.64) y (4.63) obtenemos

$$\begin{aligned} A(-\Omega) &= A(\Omega), \quad B(-\Omega) = -B(\Omega) \\ |X(-\Omega)| &= |X(\Omega)|, \quad \theta(-\Omega) = -\theta(\Omega) \end{aligned} \quad (4.66)$$

De las Ecs. (4.65) y (4.66) se observa que si $x[n]$ es real y par, entonces $X(\Omega)$ es real y par, mientras que si $x[n]$ es real e impar, $X(\Omega)$ es imaginaria e impar.

4.7.15 Relación de Parseval

Si $x[n]$ y $X[\Omega]$ forman un par de transformadas de Fourier, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\Omega)X_2(\Omega)d\Omega \quad (4.67)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (4.68)$$

La Ec. (4.68) se conoce como la *identidad de Parseval* (o el *teorema de Parseval*) para la transformada de Fourier de tiempo discreto. En analogía con el caso de tiempo continuo, el lado izquierdo de la Ec. (4.68) se conoce como la *energía* en $x[n]$ y $|X(\Omega)|^2$ como el *espectro de la densidad de energía*. Como la energía en una secuencia periódica es infinita, la Ec. (4.68) no es de utilidad en ese caso. Para señales periódicas se puede derivar una variante de la identidad de Parseval que relaciona la energía en un período de la secuencia con la energía en un período de los coeficientes de la serie de Fourier, ella es

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} |a_k|^2 \quad (4.69)$$

4.8 La Respuesta de Frecuencia de Sistemas LIT Discretos

Como ya se mostró en el Cap. 2, la salida $y[n]$ de un sistema LIT discreto es igual a la convolución de la entrada $x[n]$ con la respuesta al impulso $h[n]$, suponiendo que las transformadas de Fourier de $x[n]$, $y[n]$ y $h[n]$ existen; es decir,

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (4.70)$$

Entonces la propiedad de convolución implica que

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \quad (4.71)$$

donde $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ y $H(\Omega)$ son las transformadas de Fourier de $x[n]$, $y[n]$ y $h[n]$, respectivamente. De esta relación obtenemos

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \quad (4.72)$$

De la relación (4.71), observe que

$$|Y(\Omega)| = |X(\Omega)| |H(\Omega)| \quad (4.73)$$

$$\angle Y(\Omega) = \angle X(\Omega) + \angle H(\Omega) \quad (4.74)$$

Igual que en el caso de tiempo continuo, la función $|H(\Omega)|$ se conoce como la *respuesta de magnitud* del sistema. Debido a la forma multiplicativa de la Ec. (4.73), a la magnitud de la respuesta de frecuencia de un sistema LIT algunas veces se le refiere como la *ganancia* del sistema. Las relaciones dadas por las Ecs. (4.71) y (4.72) se muestran en la Fig. 4.9.

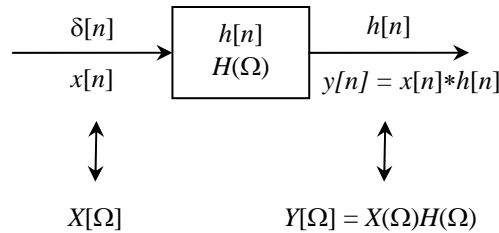


Figura 4.9

Sea

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\theta_H(\Omega)} \quad (4.75)$$

La función $H(\Omega)$ se conoce como la *respuesta de frecuencia* del sistema, $|H(\Omega)|$ como la *respuesta de magnitud* del sistema y $\theta_H(\Omega)$ como la *respuesta de fase* del sistema.

4.8.1 Sistemas LIT Caracterizados por Ecuaciones de Diferencias

Muchos sistemas LIT de tiempo discreto y de interés práctico son descritos por ecuaciones de diferencias con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (4.76)$$

donde $M \leq N$. En esta sección usamos las propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto para obtener una expresión para la respuesta de frecuencia del sistema LIT descrito por la Ec. (4.76).

Tomando la transformada de Fourier de ambos lados de la Ec. (4.76) y usando las propiedades de linealidad y de desplazamiento en el tiempo, obtenemos

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega} Y(\Omega) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega} X(\Omega)$$

o, en forma equivalente,

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}} \quad (4.77)$$

Observe que $H(\Omega)$ es un cociente de polinomios en la variable $e^{-j\Omega}$. Los coeficientes del polinomio del *numerador* son los mismos coeficientes que aparecen en el lado derecho de la Ec. (4.76) y los coeficientes del *denominador* son los mismos coeficientes que aparecen en el lado izquierdo de la Ec. (4.76). Esto implica que la respuesta de frecuencia de un sistema LIT especificado por la Ec. (4.77) puede escribirse por inspección.

Ejemplo 11. Considere un sistema LIT inicialmente en reposo descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = x[n]$$

De la Ec. (4.77), la respuesta de frecuencia es

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\Omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\Omega}}$$

Para determinar la respuesta al impulso, debemos obtener la transformada inversa de $H(\Omega)$, por lo que necesitamos expandir esta última expresión en fracciones parciales. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)} \\ &= \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

La transformada inversa puede obtenerse por inspección y el resultado es

$$h[n] = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u[n]$$

4.8.2 Naturaleza Periódica de la Respuesta de Frecuencia

De la Ec. (4.43) sabemos que

$$H(\Omega) = H(\Omega + 2\pi)$$

Así que, a diferencia de la respuesta de frecuencia de los sistemas de tiempo continuo, la de todos los sistemas LIT de tiempo discreto es periódica con período 2π . Por consiguiente, solamente necesitamos observar la respuesta de un sistema de tiempo discreto en la banda de frecuencias $0 \leq \Omega < 2\pi$ o $-\pi \leq \Omega < \pi$.

4.9 Respuesta del Sistema a Muestras de Sinusoides de Tiempo Continuo

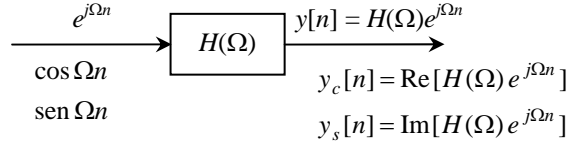
4.9.1 Respuestas del Sistema

Denote por $y_c[n]$, $y_s[n]$ y $y[n]$ las respuestas del sistema a las excitaciones $\cos \Omega n$, $\sin \Omega n$ y $e^{j\Omega n}$, respectivamente (Fig. 4.10). Puesto que $e^{j\Omega n} = \cos \Omega n + j \sin \Omega n$, y la respuesta de un sistema LIT con respuesta al impulso $h[n]$ a una excitación exponencial de la forma z^n es

$$y[n] = H(z) z^n, \quad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} y[n] &= y_c[n] + jy_s[n] = H(\Omega) e^{j\Omega n} \\ y_c[n] &= \operatorname{Re}\{y[n]\} = \operatorname{Re}\{H(\Omega) e^{j\Omega n}\} \\ y_s[n] &= \operatorname{Im}\{y[n]\} = \operatorname{Im}\{H(\Omega) e^{j\Omega n}\} \end{aligned} \tag{4.78}$$

**Figura 4.10**

Cuando una senoide $\cos \Omega n$ se obtiene por muestreo de una senoide de tiempo continuo $\cos \omega t$, con un intervalo de muestreo igual a T_s , es decir

$$\cos \Omega n = \cos \omega t \Big|_{t=nT_s} = \cos \omega T_s n$$

se pueden aplicar todos los resultados obtenidos en esta sección si sustituimos ωT_s por Ω :

$$\Omega = \omega T_s$$

Para una senoide de tiempo continuo $\cos \omega t$ existe una forma de onda única para todo valor de ω en el intervalo de 0 a ∞ . Un aumento en ω resulta en una senoide de frecuencia siempre creciente. En contraste, la senoide de tiempo discreto $\cos \Omega n$ tiene una forma de onda única solamente para valores de Ω en el intervalo de 0 a 2π porque

$$\cos[(\Omega + 2\pi m)n] = \cos(\Omega n + 2\pi mn) = \cos \Omega n \quad m = \text{entero}$$

Este intervalo también está restringido por el hecho de que

$$\begin{aligned} \cos(\pi \pm \Omega)n &= \cos \pi n \cos \Omega n \mp \sin \pi n \sin \Omega n \\ &= (-1)^n \cos \Omega n \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\cos(\pi + \Omega)n = \cos(\pi - \Omega)n \quad (4.79)$$

La Ec. (4.79) muestra que una senoide de frecuencia $(\pi + \Omega)$ tiene la misma forma de onda que una con frecuencia $(\pi - \Omega)$. Por ello, una senoide con cualquier valor de Ω fuera del intervalo 0 a π es idéntica a una senoide con Ω en el intervalo de 0 a π . Concluimos entonces que toda senoide de tiempo discreto con una frecuencia en la banda $0 \leq \Omega < \pi$ tiene una forma de onda única y sólo necesitamos observar la respuesta de frecuencia de un sistema en la banda de frecuencias $0 \leq \Omega < \pi$.

4.10 La Transformada de Fourier Discreta

Una de las razones para el crecimiento en el uso de los métodos de tiempo discreto para el análisis y síntesis de señales y sistemas fue el desarrollo de herramientas muy eficientes para realizar el análisis de Fourier de secuencias de tiempo discreto. En el corazón de estos métodos está una técnica muy cercana a las ideas que hemos presentado en las secciones anteriores y que está idealmente adaptada

para el uso en una computadora digital o para su implementación en hardware digital. Esta técnica es la *transformada de Fourier discreta* (TFD) para señales de duración finita y aun cuando puede considerarse como una extensión lógica de la transformada de Fourier ya estudiada, *no debe ser confundida con la transformada de Fourier de tiempo discreto*. Específicamente, en muchas aplicaciones solamente se pueden verificar los valores de una función en un número finito de puntos igualmente espaciados. Por ejemplo, un conjunto de esos valores podría ser una sucesión obtenida mediante el muestreo instantáneo de una señal continua en un conjunto de puntos con igual separación entre ellos. Entonces debemos hallar una serie de Fourier *finita* cuya suma en cada punto del dominio de la función sea igual al valor correspondiente de la función en ese punto.

4.10.1 Definición

Sea $x[n]$ una secuencia finita de longitud N , es decir,

$$x[n] = 0 \text{ fuera de la banda } 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.80)$$

La TFD de $x[n]$, denotada como $X[k]$, se define por

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.81)$$

donde W_N es la N -ésima raíz de la unidad dada por

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \quad (4.82)$$

La TFD inversa (TFDI) está dada por

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.83)$$

El par de TFD se denota por

$$x[n] \leftrightarrow X[k] \quad (4.84)$$

La TFD tiene las siguientes características importantes:

1. Existe una correspondencia uno a uno entre $x[n]$ y $X[k]$.
2. Para su cálculo está disponible un algoritmo extremadamente rápido llamado la transformada de Fourier rápida (FFT por sus iniciales en inglés).
3. La TFD está íntimamente relacionada con la serie y la transformada de Fourier de tiempo discreto y, por ello, exhibe algunas de sus propiedades importantes.
4. La TFD es la representación de Fourier apropiada para realización en una computadora digital ya que es discreta y de longitud finita tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

Observe que la selección de N en la Ec. (4.81) no es fija, siempre que ella se escoja mayor que la duración de $x[n]$. Si $x[n]$ tiene longitud $N_1 < N$, deseamos suponer que $x[n]$ tiene longitud N mediante la

simple adición de $(N - N_1)$ muestras con un valor de 0. Esta adición de muestras de relleno se conoce como *relleno de ceros*. Entonces la $x[n]$ resultante se llama una *secuencia o sucesión de N puntos*, y a la $X[k]$ definida en la Ec. (4.81) se le refiere como una *TFD de N puntos*. Mediante una selección juiciosa de N , tal como tomarla como una potencia de 2, se puede obtener una buena eficiencia computacional.

Ejemplo 12. Determine la TFD de N puntos de las secuencias siguientes:

(a) $x[n] = \delta[n]$

(b) $x[n] = u[n] - u[n - N]$

(a) De la definición (4.81), tenemos

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = 1 \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

La Fig. 4.11 muestra $x[n]$ y su TFD de N puntos.

(b) De nuevo, de la definición (4.81) y usando la ecuación

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} & \alpha \neq 1 \\ N & \alpha = 1 \end{cases}$$

Obtenemos

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \frac{1 - W_N^{kN}}{1 - W_N^k} = 0 \quad k \neq 0$$

puesto que $W_N^{kN} = e^{-j(2\pi/N)kN} = e^{-jk2\pi} = 1$ y

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^0 = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

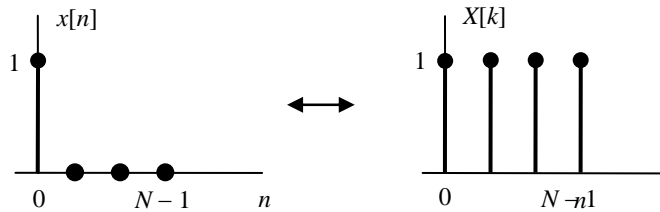


Figura 4.11

La Fig. 4.12 muestra $x[n]$ y su TFD de N puntos $X[k]$.

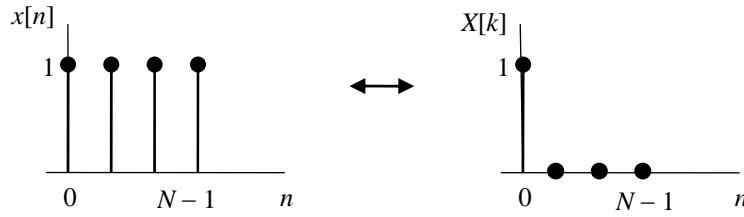


Figura 4.12

4.10.2 Relación entre la TFD y la Serie de Fourier de Tiempo Discreto

Comparando las Ecs. (4.83) y (4.81) con las Ecs. (4.10) y (4.11), vemos que la $X[k]$ de una secuencia finita $x[n]$ puede ser interpretada como los coeficientes c_k en la representación en serie de Fourier discreta de su extensión periódica multiplicada por el período N_0 y $N_0 = N$. Es decir,

$$X[k] = N c_k \quad (4.85)$$

En realidad, las dos pueden hacerse idénticas si incluimos el factor $1/N$ en la TFD y no en la transformada de Fourier de tiempo discreto.

4.10.3 Relación entre la TFD y la Transformada de Fourier

Por la definición (4.38), la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ definida por la Ec. (4.80) puede ser expresada como

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (4.86)$$

Comparando la Ec. (4.86) con la Ec. (4.81), vemos que

$$X[k] = X(\Omega) \Big|_{\Omega=k 2\pi/N} = X\left(\frac{k 2\pi}{N}\right) \quad (4.87)$$

Así pues, la TFD $X[k]$ corresponde a la transformada de Fourier $X(\Omega)$ muestreada uniformemente en las frecuencias $\Omega = k 2\pi/N$ para k entero.

4.10.4 Propiedades de la TFD

Debido a la relación expresada por la Ec. (4.87) entre la TFD y la transformada de Fourier, es de esperar que sus propiedades sean bastante semejantes, excepto que la TFD $X[k]$ es una función de una variable discreta mientras que la transformada de Fourier $X(\Omega)$ es una función de una variable continua. Observe que las variables de la TFD n y k deben estar restringidas al intervalo $0 \leq n, k < N$, por lo que los desplazamientos de la TFD $x[n - n_0]$ o $X[k - k_0]$ implican $x[n - n_0]_{\text{mód } N}$ o $X[k - k_0]_{\text{mód } N}$, donde la notación $[m]_{\text{mód } N}$ significa que

$$0 \leq [m]_{\text{mód } N} = m + iN \quad (4.88)$$

para algún entero i tal que

$$0 \leq [m]_{\text{mód } N} < N \quad (4.89)$$

Por ejemplo, si $x[n] = \delta[n - 3]$, entonces

$$x[n - 4]_{\text{mód } 6} = \delta[n - 7]_{\text{mód } 6} = \delta[n - 7 + 6]_{\text{mód } 6} = \delta[n - 1]$$

El desplazamiento en la TFD también se conoce como un *desplazamiento circular*.

Puesto que la TFD es evaluada en frecuencias en la banda $[0, 2\pi]$, las cuales están separadas por $2\pi/N$, al considerar la TFD de dos señales simultáneamente, las frecuencias correspondientes a la TFD deben ser las mismas para que cualquier operación tenga significado. Esto significa que la longitud de las secuencias consideradas debe ser la misma. Si éste no es el caso, se acostumbra aumentar las señales mediante un número apropiado de ceros, de modo que todas tengan la misma longitud. Algunas propiedades básicas de la TFD son las siguientes:

1. **Linealidad:** Sean $X_1[k]$ y $X_2[k]$ las TFD de dos secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Entonces

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \leftrightarrow a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k] \quad (4.90)$$

para cualesquiera constantes a_1 y a_2 .

2. **Desplazamiento en Tiempo:** Para cualquier entero real n_0 ,

$$x[n - n_0]_{\text{mód } N} \leftrightarrow W_N^{kn_0} X[k] \quad W_N = e^{-j(2\pi/N)} \quad (4.91)$$

donde el desplazamiento es un desplazamiento circular.

3. **Desplazamiento en Frecuencia:**

$$W_N^{-kn_0} x[n] \leftrightarrow X[k - k_0]_{\text{mód } N} \quad (4.92)$$

4. **Conjugación:**

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*[-k]_{\text{mód } N} \quad (4.93)$$

donde el asterisco, igual que antes, denota el conjugado complejo.

5. Inversión del Tiempo:

$$x[-n]_{\text{mód } N} \leftrightarrow X[-k]_{\text{mód } N} \quad (4.94)$$

6. Dualidad:

$$X[n] \leftrightarrow N x[-k]_{\text{mód } N} \quad (4.95)$$

7. Convolución Circular: En nuestras discusiones anteriores de diferentes transformadas vimos que la transformada inversa del producto de dos transformadas correspondía a una convolución de las funciones del tiempo correspondiente. Con esto en mente, tenemos entonces que

$$x_1[n] \oplus x_2[n] \leftrightarrow X_1[k] X_2[k] \quad (4.96)$$

donde

$$x_1[n] \oplus x_2[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i] x_2[n-i]_{\text{mód } N} \quad (4.97)$$

La suma de convolución en la Ec. (4.97) se conoce como la *convolución circular* de $x_1[n]$ y $x_2[n]$. La demostración de esta propiedad se deja como un ejercicio.

Ejemplo 13. Considere dos secuencias $x[n]$ y $h[n]$ de longitud 4 dadas por

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad n = 0, 1, 2, 3$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n = 0, 1, 2, 3$$

(a) Calcule $y[n] = x[n] \oplus h[n]$ usando la convolución circular.

(b) Calcule $y[n]$ usando la TFD.

(a) Las secuencias $x[n]$ y $h[n]$ pueden expresarse como

$$x[n] = \{1, 0, -1, 0\} \quad \text{y} \quad h[n] = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$$

Por la Ec. (4.97),

$$y[n] = x[n] \oplus h[n] = \sum_{i=0}^3 x[i] h[n-i]_{\text{mód } 4}$$

Las secuencias $x[i]$ y $h[n-i]_{\text{mód } 4}$ para $n = 0, 1, 2, 3$ se grafican en la Fig. 4.13a. Entonces, por la Ec. (4.97) obtenemos

$$n = 0 \quad y[0] = 1(1) + (-1)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

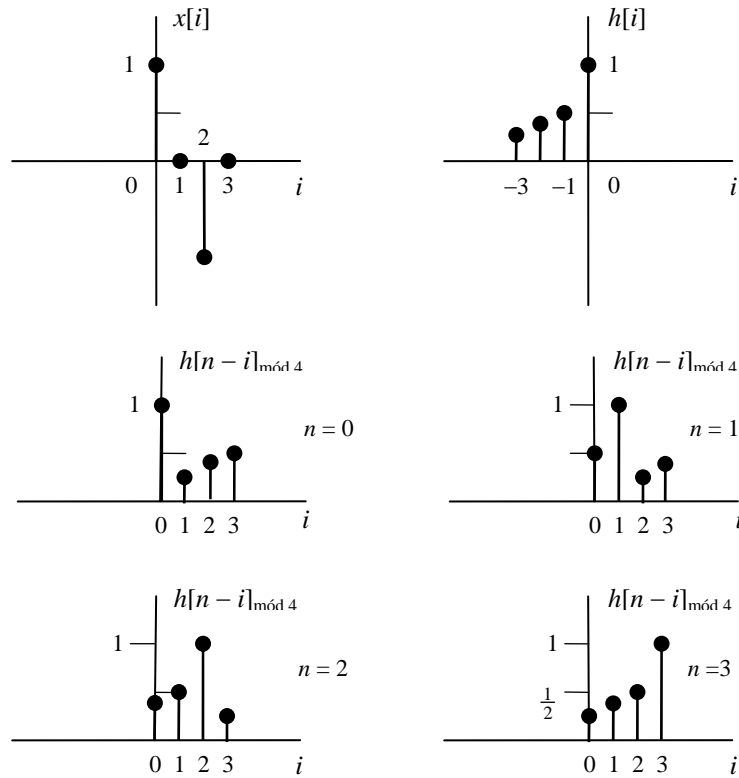
$$n=1 \quad y[1] = 1\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}$$

$$n=2 \quad y[2] = 1\left(\frac{1}{4}\right) + (-1)(1) = -\frac{3}{4}$$

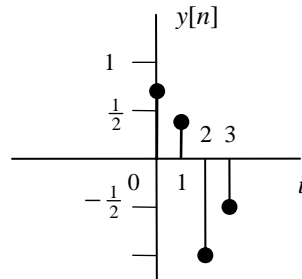
$$n=3 \quad y[3] = 1\left(\frac{1}{8}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

y

$$y[n] = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8} \right\}$$



(a)



(b)

Figura 4.13

(b) Por la Ec. (4.81)

$$X[k] = \sum_{n=0}^3 x[n] W_4^{kn} = 1 - W_4^{2k} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$H[k] = \sum_{n=0}^3 h[n] W_4^{kn} = 1 + \frac{1}{2} W_4^k + \frac{1}{4} W_4^{2k} + \frac{1}{8} W_4^{3k} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Entonces, por la Ec. (4.96), la TFD de $y[n]$ es

$$\begin{aligned} Y[k] &= X[k] H[k] = \left(1 - W_4^{2k}\right) \left(1 + \frac{1}{2} W_4^k + \frac{1}{4} W_4^{2k} + \frac{1}{8} W_4^{3k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} W_4^k - \frac{3}{4} W_4^{2k} - \frac{3}{8} W_4^{3k} - \frac{1}{4} W_4^{4k} - \frac{1}{8} W_4^{5k} \end{aligned}$$

Como $W_4^{4k} = (W_4^4)^k = 1^k$ y $W_4^{5k} = W_4^{(4+1)k} = W_4^k$, se tiene

$$Y[k] = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} W_4^k - \frac{3}{4} W_4^{2k} - \frac{3}{8} W_4^{3k} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

y por la definición de la TFD, Ec. (4.81), obtenemos

$$y[n] = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8} \right\}$$

Ejemplo 14, Demuestre que si $x[n]$ es real, entonces su TFD $X[k]$ satisface la relación

$$X[N-k] = X^*[k]$$

De la Ec. (4.81)

$$X[N-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)(N-k)n}$$

Ahora bien,

$$e^{-j(2\pi/N)(N-k)n} = e^{-j2\pi n} e^{j(2\pi/N)kn} = e^{j(2\pi/N)kn}$$

Por lo tanto, si $x[n]$ es real, entonces $x^*[n] = x[n]$ y

$$X[N-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j(2\pi/N)kn} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \right]^* = X^*[k]$$

8. Multiplicación:

$$x_1[n] x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} X_1[k] \oplus X_2[k] \quad (4.98)$$

donde

$$X_1[k] \oplus X_2[k] = \sum_{i=1}^{N-1} X_1[i] X_2[k-i]_{\text{mód } N}$$

9. *Propiedades Adicionales:*

Cuando $x[n]$ es real, sea

$$x[n] = x_p[n] + x_i[n]$$

donde $x_p[n]$ y $x_i[n]$ son las componentes par e impar de $x[n]$, respectivamente. Sea

$$x[n] \leftrightarrow X[k] = A[k] + jB[k] = |X[k]| e^{j\theta[k]}$$

Entonces

$$X[-k]_{\text{mód } N} = X^*[k] \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} x_p[n] &\leftrightarrow \text{Re}\{X[k]\} = A[k] \\ x_i[n] &\leftrightarrow j \text{Im}\{X[k]\} = jB[k] \end{aligned} \quad (4.100)$$

De la Ec. (4.99) tenemos

$$\begin{aligned} A[-k]_{\text{mód } N} &= A[k] & B[-k]_{\text{mód } N} &= -B[k] \\ |X[-k]|_{\text{mód } N} &= |X[k]| & \theta[-k]_{\text{mód } N} &= -\theta[k] \end{aligned} \quad (4.101)$$

10. *Relación de Parseval:*

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X[k]|^2 \quad (4.102)$$

La Ec. (4.102) se conoce como la *identidad de Parseval* (o el *teorema de Parseval*) para la TFD.

Problemas

- 4.1** Un conjunto de secuencias es $\{\Psi_k[n]\}$ es ortogonal en un intervalo $[N_1, N_2]$ si dos señales cualesquiera $\Psi_m[n]$ y $\Psi_n[n]$ en el conjunto satisfacen la condición

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \Psi_m[n] \Psi_k^*[n] = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \alpha & m = k \end{cases}$$

$\alpha \neq 0$. Demuestre que el conjunto de secuencias exponenciales complejas

$$\Psi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

es ortogonal en cualquier intervalo de longitud N .

- 4.2** Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica $x[n]$ en la Fig. P4.2.

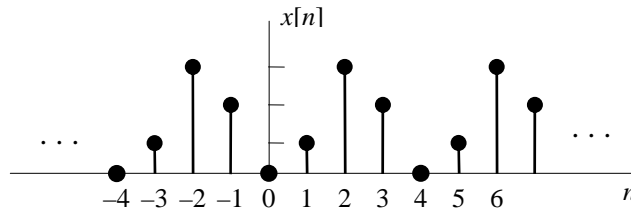


Figura P4.2

- 4.3** Considere una secuencia

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-3k]$$

- (b) Dibuje $x[n]$.
 (c) Determine los coeficientes de Fourier c_k de $x[n]$.

- 4.4** Determine la representación en serie de Fourier discreta para cada de las secuencias siguientes y grafique la magnitud y fase de los coeficientes de Fourier:

(a) $x[n] = \cos \frac{\pi}{4} n$

(b) $x[n] = 2 \sin \frac{3\pi}{4} n \sin \frac{2\pi}{7} n$

- (c) $x[n]$ es periódica con período 4 y

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad 0 \leq n \leq 3$$

$$(d) \quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(n-k) + \text{sen} \frac{3\pi n}{4}$$

4.5 Sea $x[n]$ una secuencia periódica real con período fundamental N_0 y coeficientes de Fourier $c_k = a_k + jb_k$, donde a_k y b_k son ambos reales.

(a) Demuestre que $a_{-k} = a_k$ y $b_{-k} = -b_k$.

(b) Demuestre que $c_{N_0/2}$ es real si N_0 es par.

(c) Demuestre que $x[n]$ también puede expresarse como una serie de Fourier trigonométrica discreta de la forma

$$x[n] = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} (a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \text{sen} k\Omega_0 n) \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

si N_0 es impar o

$$x[n] = c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-2)/2} (a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \text{sen} k\Omega_0 n)$$

si N_0 es par.

4.6 Determine la transformada de Fourier de cada una de las secuencias siguientes:

(a) $x[n] = -a^n u[-n-1] \quad a \text{ real}$

(b) $x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1$

(c) $x[n] = \text{sen}(\Omega_0 n), \quad |\Omega_0| < \pi$

(d) $x[n] = u[-n-1]$

4.7 Sean $x[n]$, $h[n]$ y $y[n]$ secuencias periódicas con el mismo período N_0 , y sean a_k , b_k y c_k los coeficientes de Fourier respectivos.

(a) Sea $y[n] = x[n]h[n]$. Demuestre que

$$c_k = \sum_{\langle N_0 \rangle} a_m b_{k-m} = \sum_{\langle N_0 \rangle} a_{k-m} b_m = a_k * b_k$$

(b) Sea $y[n] = x[n] * h[n]$. Demuestre que

$$c_k = N_0 a_k b_k$$

4.8 Determine la transformada de Fourier de la secuencia en pulso rectangular

$$x\{n\} = u[n] - u[n-N]$$

4.9 Para la secuencia del pulso rectangular mostrado en la Fig. P4.9,

(a) Determine la transformada de Fourier $X(\Omega)$.

(b) Grafique $X(\Omega)$ para $N_1 = 4$ y $N_1 = 10$.

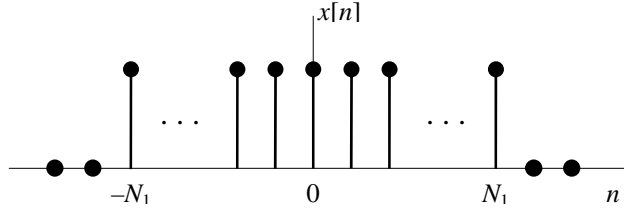


Figura P4.9

4.10 Determine la transformada de Fourier inversa de

(a) $X(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \quad |\Omega|, |\Omega_0| \leq \pi$

(b) $X(\Omega) = \cos(2\Omega)$

(c) $X(\Omega) = j\Omega$

4.11 Determine la transformada de Fourier de la secuencia sinusoidal

$$x[n] = \cos \Omega_0 n \quad |\Omega_0| \leq \pi$$

4.12 Considere la secuencia $x[n]$ definida por

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 2 \\ 0 & \text{otros valores de } n \end{cases}$$

(a) Dibuje $x[n]$ y su transformada de Fourier $X(\Omega)$.

(b) Dibuje la secuencia escalada en el tiempo $x_{(2)}[n]$ y su transformada de Fourier $X_{(2)}(\Omega)$.

(c) Dibuje la secuencia escalada en el tiempo $x_{(3)}[n]$ y su transformada de Fourier $X_{(3)}(\Omega)$.

(d) Determine $y[n] = x[n] * x[n]$.

(e) Expresé $Y(\Omega)$ en función de $X(\Omega)$.

4.13 Considere la secuencia $y[n]$ dada por

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Expresé $Y[\Omega]$ en función de $X[\Omega]$.

4.14 Sea

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & |n| > 2 \end{cases}$$

- (a) Determine $y[n] = x[n] * x[n]$.
- (b) Halle la transformada de Fourier $Y(\Omega)$ de $y[n]$.

4.15 Use el teorema de la convolución para determinar la transformada de Fourier inversa de

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2} \quad |a| < 1$$

4.16 Demuestre que

$$u[n] \leftrightarrow \delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \quad |\Omega| \leq \pi$$

4.17 Verifique la propiedad de acumulación, es decir, demuestre que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \leftrightarrow X(0)\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega)$$

4.18 Demuestre que

$$u[n] \leftrightarrow \pi\delta[n] + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \quad |\Omega| \leq \pi$$

4.19 Verifique el teorema de Parseval para la transformada de Fourier discreta.**4.20** Un sistema LIT causal de tiempo discreto es descrito por

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

donde $x[n]$ y $y[n]$ son la entrada y salida del sistema, respectivamente.

- (a) Determine la respuesta de frecuencia $H(\Omega)$ del sistema.
- (b) Halle la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.
- (c) Halle $y[n]$ si $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

4.21 Considere un sistema LIT causal de tiempo discreto con respuesta de frecuencia

$$H(\Omega) = \operatorname{Re}\{H(\Omega)\} + j\operatorname{Im}\{H(\Omega)\} = A(\Omega) + jB(\Omega)$$

- (a) Demuestre que la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema puede obtener en función de $A(\Omega)$ o de $B(\Omega)$ solamente.
- (b) Halle $H(\Omega)$ y $h[n]$ si

$$\operatorname{Re}\{H(\Omega)\} = A(\Omega) = 1 + \cos \Omega$$

4.22 Determine la TFD de la secuencia $x[n] = a^n$, $0 \leq n \leq N - 1$.

4.23 Evalúe la convolución circular $y[n] = x[n] \oplus h[n]$, donde

$$x[n] = u[n] - u[n - 4]$$

$$h[n] = u[n] - u[n - 3]$$

(a) Suponiendo $N = 4$.

(b) Suponiendo $N = 8$.