BuK Abgabe 5 | Gruppe 17

Malte Meng (354529) , Charel Ernster (318949), Sebastian Witt (354738)

November 23, 2016

1 Aufgabe 5.1

(a). Gegeben ist:
$L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3 \to \exists f_1, f_2$ mit:
$f_{1|2}$ bildet alle Ja/Nein-Instanzen von $L_{1|2}$ auf Ja/Nein-Instanzen von $L_{2|3}$.
Somit gibt es die Bildmenge M_1 der Ja/Nein-Instanzen in L_2 von der Abbildung f_1 ($L_1 \xrightarrow{f_1} L_2$).
$M_1 \subseteq L_2 \Rightarrow$
$\exists M_2$ mit $M_2 = f_2(M_1)$ und $M_2 \subseteq L_3 \Rightarrow$
$\exists f_3$ mit $f_3 = L_1 \xrightarrow{L_1 \to M_1 \to M_2} M_2$ mit $M_2 \subseteq L_3 \Rightarrow$
$f_3 := L_1 \to L_3$ mit f_3 bildet alle Ja/Nein-Instanzen von L_1 auf L_3 ab. Die Korrektheit der Funktionen bleibt wie die Ursprünglichen f_1, f_2. Somit gilt $L_1 \leq L_3$ für beliebige L_1, L_2, L_3 mit $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3$. Das Reduktionskonzept ist also transitiv. $\square$

(b). $L_1 \leq L_2 \Rightarrow \exists f = \begin{cases} L_{ja} \to M_{ja} \\ L_{nein} \to M_{nein} \end{cases}$
$L_{ja} = \overline{L}_{nein}$, $L_{nein} = \overline{L}_{ja}$, $M_{ja} = \overline{M}_{nein}$, $M_{nein} = \overline{M}_{ja} \Rightarrow$
$\exists \overline{f} = \begin{cases} \overline{L}_{nein} \to \overline{M}_{nein} \\ \overline{L}_{ja} \to \overline{M}_{ja} \end{cases} \Rightarrow \overline{L_1} \leq \overline{L_2}$
Somit gilt $L_1 \leq L_2 \Rightarrow \overline{L_1} \leq \overline{L_2}$ $\square$

2 Aufgabe 5.3

(a). Die Sprache A_{62} ist rekursiv aufzählbar aber nicht rekursiv.
Beweis in zwei Schritten durch reduktion von H_ϵ auf A_{62}:

I. A_{62} ist nicht rekursiv:

Es gibt eine berechenbare Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

- $\langle M \rangle$ ist keine gültige Gödelnummer $f(\langle M \rangle) = \overline{w}$ mit $\overline{w} \in \overline{H_\epsilon}$
- Falls w = $\langle M \rangle$ für eine TM M, so sei f(w) die Gödelnummer einer TM M_{neu} mit folgenden Eigenschaften:

  $$M_{neu} \text{ prüft Eingabelänge l} \begin{cases} l > 62 \mid \text{verwerfe} \\ l \leq 62 \mid \text{verwerfe die Eingabe und Simuliere M mit Eingabe } \epsilon \end{cases}$$

f bildet H_ϵ korrekt auf A_{62} ab:
Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt W $\notin H_\epsilon$ und f(w) $\notin A_{62}$
Sei w = $\langle M \rangle$ für eine TM M und sei f(w) = $\langle M_{neu} \rangle$
Es gilt:
$w \in H_\epsilon \Rightarrow$ M hält auf ϵ
$\Rightarrow \langle M_{neu} \rangle$ hält auf jeder Eingabe mit l $\leq$ 62
$\Rightarrow \langle M_{neu} \rangle$ hält auf mindestens zwei Wörtern der Länge höchstens 62
$\Rightarrow \langle M_{neu} \rangle \in A_{62}$
$\Rightarrow f(w) \in A_{62}$

$w \notin H_\epsilon \Rightarrow$ M hält nicht auf ϵ
$\Rightarrow \langle M_{neu} \rangle$ hält auf keiner Eingabe
$\Rightarrow \langle M_{neu} \rangle \notin A_{62}$
$\Rightarrow f(w) \notin A_{62}$
Daher ist $H_\epsilon \leq A_{62} \Rightarrow A_{62}$ ist nicht Rekursiv.

II. A_{62} ist aufzählbar:
Es gibt eine TM M die A_{62} erkennt mit folgenden Eigenschaften:
- M Simuliert alle Gödelnummern parallel. Also jeweils einen Schritt auf allen Nummern pro Iteration.
- Die Simulation funktioniert indem jeweils wieder ein Schritt auf jedem Wort mit l $\leq$ 62 Simuliert wird.
- Werden dabei zwei Wörter Akzeptiert "druckt" M die korrespondierende Gödelnummer.

(b). Beweis dass B_1 nicht rekursiv aufzählbar ist:

$$\overline{B_1} = \{\langle M \rangle \mid \text{M akzeptiert kein Wort}\} \geq \{\langle M \rangle \mid \text{M hält auf keinem Wort}\} = \overline{H_{all}}$$

$$\overline{B_1} \geq \overline{H_{all}}$$

$$\begin{aligned} H_{all}\text{ist nicht rekursiv aufzählbar } &\Rightarrow \overline{H_{all}}\text{ist nicht rekursiv aufzählbar} \\ &\Rightarrow \overline{B_1} \text{ ist nicht rekursiv aufzählbar} \\ &\Rightarrow \overline{B_1} \text{ ist nicht rekursiv aufzählbar} \\ &\Rightarrow B_1 \text{ ist nicht rekursiv aufzählbar } \square \end{aligned}$$