BuK Abgabe 5 | Gruppe 17

Malte Meng (354529) , Charel Ernster (318949), Sebastian Witt (354738)

November 24, 2016

1 Aufgabe 5.1

(a). Gegeben ist:
$L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3 \rightarrow \exists f_1, f_2$ mit:
$f_{1|2}$ bildet alle Ja/Nein-Instanzen von $L_{1|2}$ auf Ja/Nein-Instanzen von $L_{2|3}$.
Somit gibt es die Bildmenge M_1 der Ja/Nein-Instanzen in L_2 von der Abbildung f_1 ($L_1 \xrightarrow{f_1} L_2$).
$M_1 \subseteq L_2 \Rightarrow$
$\exists M_2$ mit $M_2 = f_2(M_1)$ und $M_2 \subseteq L_3 \Rightarrow$
$\exists f_3$ mit $f_3 = L_1 \xrightarrow{L_1 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2} M_2$ mit $M_2 \subseteq L_3 \Rightarrow$
$f_3 := L_1 \rightarrow L_3$ mit f_3 bildet alle Ja/Nein-Instanzen von L_1 auf L_3 ab. Die Korrektheit der Funktionen bleibt wie die Ursprünglichen f_1, f_2. Somit gilt $L_1 \leq L_3$ für beliebige L_1, L_2, L_3 mit $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3$. Das Reduktionskonzept ist also transitiv. $\square$

(b). $L_1 \leq L_2 \Rightarrow \exists f = \begin{cases} L_{ja} \rightarrow M_{ja} \\ L_{nein} \rightarrow M_{nein} \end{cases}$
$L_{ja} = \overline{L}_{nein}$, $L_{nein} = \overline{L}_{ja}$, $M_{ja} = \overline{M}_{nein}$, $M_{nein} = \overline{M}_{ja} \Rightarrow$
$\exists \overline{f} = \begin{cases} \overline{L}_{nein} \rightarrow \overline{M}_{nein} \\ \overline{L}_{ja} \rightarrow \overline{M}_{ja} \end{cases} \Rightarrow \overline{L_1} \leq \overline{L_2}$
Somit gilt $L_1 \leq L_2 \Rightarrow \overline{L_1} \leq \overline{L_2}$ $\square$

2 Aufgabe 5.3

(a). Die Sprache A_{62} ist rekursiv aufzählbar aber nicht rekursiv.
Beweis in zwei Schritten durch reduktion von H_ϵ auf A_{62}:

I. A_{62} ist nicht rekursiv:

Es gibt eine berechenbare Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

- $\langle M \rangle$ ist keine gültige Gödelnummer f($\langle M \rangle$) = $\overline{w}$ mit $\overline{w} \in \overline{H_\epsilon}$
- Falls w = $\langle M \rangle$ für eine TM M, so sei f(w) die Gödelnummer einer TM M_{neu} mit folgenden Eigenschaften:

  M_{neu} prüft Eingabelänge l $\begin{cases} l > 62 \mid \text{verwerfe} \\ l \leq 62 \mid \text{verwerfe die Eingabe und Simuliere M mit Eingabe } \epsilon \end{cases}$

f bildet H_ϵ korrekt auf A_{62} ab:
Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt W $\notin H_\epsilon$ und f(w) $\notin A_{62}$
Sei w = $\langle M \rangle$ für eine TM M und sei f(w) = $\langle M_{neu} \rangle$
Es gilt:
$w \in H_\epsilon \Rightarrow$ M hält auf ϵ
$\Rightarrow \langle M_{neu} \rangle$ hält auf jeder Eingabe mit l $\leq$ 62
$\Rightarrow \langle M_{neu} \rangle$ hält auf mindestens zwei Wörtern der Länge höchstens 62
$\Rightarrow \langle M_{neu} \rangle \in A_{62}$
$\Rightarrow f(w) \in A_{62}$

$w \notin H_\epsilon \Rightarrow$ M hält nicht auf ϵ
$\Rightarrow \langle M_{neu} \rangle$ hält auf keiner Eingabe
$\Rightarrow \langle M_{neu} \rangle \notin A_{62}$
$\Rightarrow f(w) \notin A_{62}$
Daher ist $H_\epsilon \leq A_{62} \Rightarrow A_{62}$ ist nicht Rekursiv.

II. A_{62} ist aufzählbar:
Es gibt eine TM M die A_{62} erkennt mit folgenden Eigenschaften:
   - M Simuliert alle Gödelnummern parallel. Also jeweils einen Schritt auf allen Nummern pro Iteration.
   - Die Simulation funktioniert indem jeweils wieder ein Schritt auf jedem Wort mit l $\leq$ 62 Simuliert wird.
   - Werden dabei zwei Wörter Akzeptiert "druckt" M die korrespondierende Gödelnummer.

(b). Beweis dass B_1 nicht rekursiv aufzählbar ist:

$$\overline{B_1} = \{\langle M \rangle \mid \text{M akzeptiert kein Wort}\} \geq \{\langle M \rangle \mid \text{M hält auf keinem Wort}\} = \overline{H_{all}}$$
$$\overline{B_1} \geq \overline{H_{all}}$$
$$\begin{aligned} H_{all}\text{ist nicht rekursiv aufzählbar } &\Rightarrow \overline{H_{all}}\text{ist nicht rekursiv aufzählbar} \\ &\Rightarrow \overline{B_1} \text{ ist nicht rekursiv aufzählbar} \\ &\Rightarrow \overline{B_1} \text{ ist nicht rekursiv aufzählbar} \\ &\Rightarrow B_1 \text{ ist nicht rekursiv aufzählbar } \square \end{aligned}$$

3 Aufgabe 5.4

Es existiert eine berechenbare Funktion $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$, sodass $x \in \bar{H}_\epsilon \Leftrightarrow f(x) \in L_{101}$ gilt.

Wir definieren die Funktion f:

$$w \mapsto \begin{cases} \langle M' \rangle w = \langle M \rangle \\ \epsilon w \neq \langle M \rangle \end{cases}$$

wobei M' die TM ist, die wie folgt arbeitet:

- M' simuliert die ersten i Schritte von M auf der Eingabe ϵ, erst ab $i = 3$.
- Falls M innerhalb dieser i Schritte hält, dann geht M' in die Endlosschleife, ansonsten hält M'

Berechenbarkeit:
Offensichtlich is die Funktion berechenbar.
Korrektheit:
Fall 1: Wenn $w \neq \langle M \rangle$, dann ist $w \notin \bar{H}_\epsilon$, und damit $f(w) = \epsilon \notin L_{101}$
Fall 2:
$w \in \bar{H}_\epsilon$

$\Rightarrow$ M hält nicht auf der Eingabe ϵ

$\Rightarrow$ Für alle i angefangen bei $i = 3:$ M hält nicht innerhalb von i Schritten auf ϵ.

$\Rightarrow$ Für alle i angefangen bei $i = 3:$ M' hält auf all Eingaben der Länge i.

$\Rightarrow$ M' hält auf jeder Eingabe.

$\Rightarrow$ M' hält auf jeder Eingabe die mit 101 beginnt.

$\Rightarrow$ $f(w) = \langle M' \rangle \in L_{101}$

$w \notin \bar{H}_\epsilon$

$\Rightarrow$ M hält auf der Eingabe ϵ

$\Rightarrow$ Es gibt ein i, beginnend bei$i = 3:$ M hält innerhalb von i Schritten auf ϵ

$\Rightarrow$ Es gibt ein i, beginnend bei$i = 3:$ M' hält auf keiner Eingabe der Länge mindestens i.

$\Rightarrow$ M' hält nicht auf jeder Eingabe die mit 101 anfängt.

$\Rightarrow$ $f(w) \notin L_{101}$

Damit haben wir gezeigt dass $\bar{H}_\epsilon \leq L_{101}$ gilt.