BuK Abgabe 8 | Gruppe 17

Malte Meng (354529) , Charel Ernster (318949), Sebastian Witt (354738)

December 15, 2016

1 Aufgabe 8.1

1. (a) Die TM wird in Phasen geteilt. Man gewinnt dadurch Zeit, dass man 2 Übergänge einfügt pro Speicherzelle und es die Option gibt ohne einen Vergleich von Symbolen von v und w zum nächsten Symbole nach rechts zu laufen. Der Zähler muss ebenfalls klein sein, daher wählen wir eine Binärzahl als Zähler.

   Phase 1:

   Überprüfe, ob das Eingabewort die Form $v\#w$ hat mit $v, w \in \{0, 1\}^*$. Falls nicht, verwerfe. Falls es zutrifft, weiter mit Phase 2.
   Lauftzeit $O(n)$

   Phase 2:

   Setze die Position auf das erste Symbol von v. Sei $v = v_1...v_n$ und $w = w_1...w_m$. Setze eine zweite Spur ein, um den Zähler, der zwingend mitgeschoben wird, für die Position anzugeben, an der man gerade liest. Nun arbeite wie folgt:

   Es gibt mehrere Optionen für die Übergänge

   - Liest man $v_i \in \{0, 1\}$, vergleiche v_i mit der i. Position rechts von #. Falls ein B gelesen wird
     $\Rightarrow$ akzeptiere, ansonsten vergleiche das gelesene Symbol $w_i \in \{0, 1\}$ mit v_i. Falls $v - i \neq w_i$ dann akzeptiere.
   - Liest man $v_i \in \{0, 1\}$, darf der Lesekopf einen Schritt nach rechts bewegt werden. Erhöhe den Zähler um 1 und wähle erneut eine Option
   - Liest man #, gehe $n + 1$ Schritte. Verwerfe, wenn ein B gelesen wird (da dann $v = w$ gilt), ansonsten akzeptiere

Die Optionen sind nicht deterministisch gewählt worden
Laufzeit: $O(n * log(n))$
Laufzeit insgesamt: $O(n * log(n))$

2. (b) Nein so funktioniert das hier nicht, denn man muss jedes Symbol von v und w einzeln überprüfen und kann nicht bei Ungleichheit akzeptieren (der Schritt nach rechts darf so nicht ausgeführt werden).

2 Aufgabe 8.2

(a). Graphen in Adjazenzschreibweise mit Colorierung:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	0	0
3	1	1	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	1
7	0	0	0	1	0	1	0

(1)

Wie in der Matrix dargestellt können die Punkte erfolgreich 2-Coloriert werden.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	1	0	0	0
3	1	1	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	1
7	1	0	0	1	0	1	0

(2)

Es kann keine korrekte 2-Färbung gefunden werden, da der Kreis um {1,3,5,6,7} eine ungerade Anzahl von Elementen hat. Somit lässt sich der gesamte graph nicht 2-Colorieren.

(b). **Algorithmus für 2-Colorability**:
Nimm einen Knoten aus jeder Zusammenhangskomponente und speichere ihn in *Colored*

```
while Colored != V do
        for v in Colored do
                if (Ein Nachbarknoten besitzt die gleiche Farbe) then
                        reject;
                end
                Faerbe alle Nachbarknoten mit
                der anderen Farbe (nicht c(v));
                Colored := Colored Union Nachbarknoten(v);
        end
end
accept;
```

Graphzusammenhangproblem lösbar in $O(n^2)$ für $n = |V|^2$. Die While-Schleife läuft maximal $|V|$ mal und die Forschleife ebenfalls maximal $|V|$ mal. Dabei werden maximal $|E|$ Kanten betrachtet. Insgesamt ergibt sich $O(|V|^2 \cdot |E|)$. Insgesamt ist der Algorithmus also durch $O(n^2 \cdot |E|)$ beschränkt.

Korrektheit:
Falls der Graph in 2 - Colorability liegt

- Der Algorithmus färbt in jeder Zusammenhangskomponente einen Knoten
- Iterativ werden deren Nachbarknoten immer weiter entgegengesetzt gefärbt
- Der Algorithmus akzeptiert den Graphen

Falls der Graph nicht in 2 - Colorability liegt

- Der Algorithmus fäbt in jeder Zusammenhangskomponente einen Knoten
- Iterativ werden deren Nachbarknoten immer weiter entgegengesetzt gefärbt
- Es passiert, dass ein Knoten die gleiche Farbe wie sein Nachbar besitzt.
- Der Algorithmus verwirft den Graphen

3 Aufgabe 8.3

Um zu zeigen, dass 3-Colorability in NP liegt wird 3-Colorability $\leq_p$ SAT gezeigt.

Es gibt eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften welche in polynomieller Zeit berechenbar ist.
Jede Farbkonfiguration aus dem Problem der 3-Colorability wird folgendermaßen im SAT-Problem konfiguriert:

$$\forall v \in V, x_v^1, x_v^2, x_v^3, \text{mit} \begin{cases} i = \text{farbe}(1...3) | x_v^i = 1 \\ i \neq \text{farbe}(1...3) | x_v^i = 0 \end{cases}$$

$$\text{Knotenbedingung:} \bigwedge_{v \in V} (x_v^1 \vee x_v^2 \vee x_v^3)$$

$$\text{Kantenbedingung:} \bigwedge_{\{u,v\} \in E} (\bar{x}_u^1 \vee \bar{x}_v^1) \wedge (\bar{x}_v^2 \vee \bar{x}_u^2) \wedge (\bar{x}_u^3 \vee \bar{x}_v^3)$$

$$\varphi = \text{Knotenbedingung} \wedge \text{Kantenbedingung}$$

$$f konstruiert \varphi$$

$$Anzahl der Literale : O(3 * |V| + 3 * |E|)$$

$$max(|E|) = |V^2|$$

$$Anzahl der Literale : O(|V^3|)$$

Somit ist die Länge der zu berechnenden Formel für f polynomiell beschränkt und kann also in polynomieller Zeit berechnet werden.

Korrektheit:

Graph G ist colorierbar. $\Rightarrow$Es gibt 3-Färbung.
$\Rightarrow$Knotenbedingung ist erfüllt, da jeder Knoten eine Farbe hat.
$\Rightarrow$keine zwei benachbarten Kanten haben die selbe Farbe.
$\Rightarrow$Kantenbedingung ist erfüllt.
$\Rightarrow\Phi$ ist erfüllbar

φ ist erfüllbar. $\Rightarrow$Es gibt eine erfüllende Belegung für φ.
$\Rightarrow$Die Knotenbedingung und die Kantenbedingung sind erfüllt
$\Rightarrow$jeder Knoten hat mindestens eine Farbe
$\Rightarrow$keine zwei adjazenten Knoten sind gleichfarbig
$\Rightarrow$es gibt eine korrekte 3-Färbung für G

Somit lässt sich 3-Colorability auf SAT Reduzieren. Also ist auch 3-Colorability in NP. $\square$