МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский Авиационный Институт»
(Национальный Исследовательский Университет)

Институт: №8 «Компьютерные науки и прикладнаяматематика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Курсовая работа
по курсу
«Фундаментальная информатика»
I семестр
Задание 3
«Вещественный тип. Приближенные вычисления. Табулирование
функций»

Группа	М8О-109Б-22
Студент	Концебалов О.С.
Преподаватель	Сысоев М.А.
Оценка	
Дата	

Москва, 2022

Постановка задачи

Составить программу на Си, которая печатает таблицу значений элементарной функции, вычисленной двумя способами: по формуле Тейлора и с помощью встроенных функций языка программирования. В качестве аргументов таблицы взять точки разбиения отрезка [a, b] на n равных частей (n+1 точка включая концы отрезка), находящихся в рекомендованной области хорошей точности формулы Тейлора.
Вычисления по формуле Тейлора проводить по экономной в сложностном смысле схеме с точностью $\varepsilon * 10^k$, где ε - машинное эпсилон аппаратно реализованного вещественного типа для данной ЭВМ, а k – экспериментально подбираемый коэффициент, обеспечивающий приемлемую сходимость. Число итераций должно ограничиваться сверху числом порядка 100. Программа должна сама определять машинное ε и обеспечивать корректные размеры генерируемой таблицы.

Вариант 7:

Ряд Тэйлора:

$$3x + 8x^2 + \ldots + n \cdot (n+2)x^n$$

Функция:

$$\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$$

Значения a и b: 0.0 и 0.5

Теоретическая часть

Формула Тейлора — формула разложения функции в бесконечную сумму степенных функций. Формула широко используется в приближённых вычислениях, так как позволяет приводить трансцендентных функций к более простым. Сама она является следствием теоремы Лагранжа о среднем значении дифференцируемой функции. В случае a=0 формула называется рядом Маклорена.

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Машинное эпсилон — числовое значение, меньше которого невозможно задавать относительную точность для любого алгоритма, возвращающего вещественные числа. Абсолютное значение для машинного эпсилон зависит от разрядности сетки применяемой ЭВМ и от разрядности используемых при расчёте чисел. Формально это машинное эпсилон определяют как число, удовлетворяющее равенству $1 + \varepsilon = 1$. Фактически, два отличных от нуля числа являются равными с точки зрения машинной арифметики, если их модуль разности меньше или не превосходит машинное эпсилон.

В языке Си машинные эпсилон определено для следующих типов: float – $1.19 * 10^{-7}$, double – $2.20 * 10^{-16}$, long double – $1.08 * 10^{-19}$.

Описание алгоритма

Рассмотрим алгоритм решения. Сперва нужно найти машинное эпсилон, на котором будет основываться точность вычисления. Это можно сделать, просто деля 1 на 2.

Для каждой N+1 строки нужно просуммировать i членов формулы Тейлора, пока $|A_1-A_2|> \varepsilon$. Для этого просто ищем каждый новый член из формулы Тэйлора и суммируем с результатом

Использованные в программе переменные

Название переменной	Тип переменной	Смысл переменной
n	uint64_t	То самое число N, на которое нужно разбить отрезок
LDBL_EPSILON	Long double	То самое машинное эпсилон 1.0842e-19
step	Long double	Разница между текущим и предыдущем значениями переменной
x	Long double	Переменная, для которой производятся вычисления
taylor_series(uint64_t n, long double x)	Long double	Значение ряда Тейлора для функции
function(long double x)	Long double	Значение функции
i	int	Счетчик числа итераций

Исходный код программы:

```
#include <stdio.h>
#include <float.h>
#include <stdint.h>
#include <math.h>

long double taylor_series(uint64_t n, long double x){
    long double result = 0;
    for (int i = 0; i <= n; ++i){
        result += i * (i + 2) * pow((double)x, i);
    }
    return result;
}

long double function(long double x){
    return (x * (3 - x)) / ((1 - x) * (1 - x) * (1 - x));
}

int main(){
    long double a = 0.0;
    long double b = 0.5;

    uint64_t n;

    printf("Input N:");
    scanf_s("%lld", &n);
    printf("N = %lld\n", n);
    printf("Machine epsilon is equal to: %Lg\n\n", LDBL_EPSILON);

    printf("        Table of values of Taylor series and standard func-
tion\n");

printf("_______________________________________________________________________
_____\n");
    printf("|  x  | sum of Taylor series | f(x) function value | number of it-
erations |\n");

printf("_______________________________________________________________________
_____\n");

    long double x = 0;
    long double step = (b - a) / n;
    long double func = 1;
    int i = 0;
    while (fabsl(func) > LDBL_EPSILON && (i < 100) && (i < n)){
         i += 1;
         x += step;
         func = function(x);

         printf("|%.3Lf|%.20Lf|%.19Lf|           %d          |\n", x, tay-
lor_series(i, x), func, i);
    }


printf("_______________________________________________________________________
_____\n");

    return 0;
}
```

Входные данные

Единственная строка содержит одно целое число N (0≤N≤100) – число разбиений отрезка на равные части.

Выходные данные

Программа должна вывести значение машинного эпсилон, а затем N+1 строку.

В каждой строке должно быть значение x, для которого вычисляется функция, число A_1 — значение, вычисленное с помощью формулы Тейлора, A_2 – значение, вычисленное с помощью встроенных функций языка, i – количество итерация, требуемых для вычисления, и Δ – разница значений A_1 и A_2 по модулю. A_1, A_2 и Δ должны быть выведены с точностью K знаков после запятой.

Протокол исполнения и тесты

Тест №1

Ввод:

5

Вывод:

```
N = 5
Machine epsilon is equal to: 1.0842e-19

        Table of values of Taylor series and standard function
---------------------------------------------------------------------------
|  x  | sum of Taylor series | f(x) function value | number of iterations |

---------------------------------------------------------------------------
|0.100|0.30000000000000004441|0.39780521262002743 49|          1          |
|0.200|0.92000000000000015099|1.09374999999999999 9|          2          |
|0.300|2.02499999999999985567|2.36151603498542274 08|          3          |
|0.400|4.05440000000000089209|4.81481481481481481 43|          4          |
|0.500|7.96875000000000000000|10.00000000000000000000|          5          |

---------------------------------------------------------------------------
```

Тест №2

Ввод:

10

Вывод:

```
N = 10
Machine epsilon is equal to: 1.0842e-19

        Table of values of Taylor series and standard function

---------------------------------------------------------------------------
|  x  | sum of Taylor series | f(x) function value | number of iterations |

---------------------------------------------------------------------------
|0.050|0.15000000000000002220|0.1720367400495699082|          1           |
|0.100|0.38000000000000005995|0.3978052126200274349|          2           |
|0.150|0.68062499999999994532|0.6961123549765927132|          3           |
|0.200|1.07840000000000019176|1.0937499999999999999|          4           |
|0.250|1.61230468750000000000|1.6296296296296296296|          5           |
|0.300|2.33944199999999984108|2.3615160349854227408|          6           |
|0.350|3.34587206953124925712|3.3773327264451524813|          7           |
|0.400|4.76505600000000135302|4.8148148148148148160|          8           |
|0.450|6.81029832970898553468|6.8970698722764838488|          9           |
|0.500|9.83398437500000000000|10.00000000000000000043|          10          |

---------------------------------------------------------------------------
```

Тест №3

Ввод:

20

Вывод:

```
N = 20
Machine epsilon is equal to: 1.0842e-19

        Table of values of Taylor series and standard function
---------------------------------------------------------------------------
|  x  | sum of Taylor series | f(x) function value | number of iterations |
---------------------------------------------------------------------------
|0.025|0.07500000000000001110|0.0802441039127429660|          1          |
|0.050|0.17000000000000002609|0.1720367400495699082|          2          |
|0.075|0.27632812499999997568|0.2771800288235642509|          3          |
|0.100|0.39740000000000006396|0.3978052126200274349|          4          |
|0.125|0.53622436523437500000|0.5364431486880466472|          5          |
|0.150|0.69597956249999994461|0.6961123549765927132|          6          |
|0.175|0.88033994927368148728|0.8804296407602192728|          7          |
|0.200|1.09368320000000020123|1.0937500000000000003|          8          |
|0.225|1.34129027619480527332|1.3413447014198919139|          9          |
|0.250|1.62958145141601562500|1.6296296296296296298|          10          |
|0.275|1.96641422528752498299|1.9664602894747632133|          11          |
|0.300|2.36146870729799983855|2.3615160349854227414|          12          |
|0.325|2.82675283720282599447|2.8268048569831834586|          13          |
|0.350|3.37727179731518763607|3.3773327264451524813|          14          |
|0.375|4.03192421390727417929|4.0320000000000000015|          15          |
|0.400|4.81471501250068620445|4.8148148148148148169|          16          |
|0.425|5.75641584130319311843|5.7565546149420563846|          17          |
|0.450|6.89686661364119746147|6.8970698722764838488|          18          |
|0.475|8.28820883007442506599|8.2885217579095130163|          19          |
|0.500|9.99949455261230468750|10.0000000000000000043|          20          |
---------------------------------------------------------------------------
```

Тест №4

Ввод:

25

Вывод:

```
N = 25
Machine epsilon is equal to: 1.0842e-19

        Table of values of Taylor series and standard function
---------------------------------------------------------------------------
|  x  | sum of Taylor series | f(x) function value | number of iterations |
---------------------------------------------------------------------------
|0.020|0.05999999999999999778|0.06332395515473994 68|           1          |
|0.040|0.13279999999999999617|0.13382523148148148 15|           2          |
|0.060|0.21203999999999999237|0.21238068636044036 49|           3          |
|0.080|0.29986303999999999476|0.29999178104709460 01|           4          |
|0.100|0.39775000000000006417|0.39780521262002743 49|           5          |
|0.120|0.50711087923199998212|0.50713749060856498 87|           6          |
|0.140|0.62949005223552007427|0.62950432037430666 47|           7          |
|0.160|0.76664743644364800304|0.76665586869668502 30|           8          |
|0.180|0.92061381062651443654|0.92061925973215710 71|           9          |
|0.200|1.09374617600000020130|1.09374999999999999 98|           10          |
|0.220|1.28879158716134931714|1.28879448406075624 98|           11          |
|0.240|1.50896396482088515005|1.50896632162122758 37|           12          |
|0.260|1.75803794779347667394|1.75803999763093992 43|           13          |
|0.280|2.04046449389614810736|2.04046639231824416 98|           14          |
|0.300|2.36151416941834483860|2.36151603498542273 99|           15          |
|0.320|2.72745582596937585751|2.72745776511296560 14|           16          |
|0.340|3.14578077181561390104|3.14578289784901355 22|           17          |
|0.360|3.62548582882930470628|3.62548828125000000 02|           18          |
|0.380|4.17743316884567668498|4.17743613843106978 60|           19          |
|0.400|4.81481104796942476409|4.81481481481481481 60|           20          |
|0.420|5.55372824431977189221|5.55373324039526016 08|           21          |
|0.440|6.41398725220004257540|6.41399416909620991 54|           22          |
|0.460|7.42009874275599637600|7.42010872326373012 49|           23          |
|0.480|8.60262497567397104586|8.60263996358670915 42|           24          |
|0.500|9.99997660517692565918|10.00000000000000000043|           25          |

---------------------------------------------------------------------------
```

Вывод

В работе описано определение машинного эпсилон, приведены его значения для разных переменных языка Си, описана формула Тейлора и составлен алгоритм реализации вычисления значения функции с заданной точностью для заданного числа точек на отрезке. На основе алгоритма составлена программа на языке Си, проведено её тестирование на различных тестах, составлен протокол исполнения программы. В целом, работа понравилась. Приятно применять знания из других областей для решения какой-либо задачи по программированию.

Список литературы

1. Машинный ноль – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Машинный_ноль
2. Ряд Тейлора – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Ряд_Тейлора