Индивидуальное ДЗ по курсу "Методы оптимизации"
Выполнил студент группы М80-209Б Концебалов О.С.
Вариант №135

Вариант №135 Концебалов

$f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \to extr$

при ограничениях: $x_1 - x_2 \le 2$

$x_1^2 + 2x_2 \le -2$

Этап №2. Тема: Методы решения ЗНП при ограничениях типа неравенства

Задание:

а) Сделать чертёж к задаче: построить ограничение, линии уровня функции, указать точки экстремумов

б) Аналитически отыскать регулярные экстремумы функции при ограничениях типа неравенства, используя аппарат необходимых и достаточных условий

Методы решения задачи нелинейного программирования при ограничениях типа неравенства

Дано: $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \to extr$

$x_1 - x_2 \le 2$

$x_1^2 + 2x_2 \le -2$

Задание 1а)

Сделать чертёж к задаче: построить ограничение, линии уровня функции, указать точки экстремумов

Решение

Построим на чертеже МДР, задаваемое ограничениями:

$x_1 - x_2 \le 2$ (1)

$x_1^2 + 2x_2 \le -2$ (2)

Ограничение (1) в задаче определяется прямой $x_1 - x_2 = 2$, проходящей ч/з точки

x_1	x_2
0	-2
2	0

МДР в задаче будет ограничено этой прямой и будет содержать точку $(0,0)^T$, т.к. при подстановки координат этой точки в ограничение (1) получается верное неравенство: $0-0 \le 2$

Ограничение (2) в задаче задаётся параболой $x_1^2 + 2x_2 = -2 \Rightarrow 2x_2 = -x_1^2 - 2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2 - 1$, с вершиной в точке $(0, -1)$, ветви вниз. Найдём несколько точек для построения параболы

x_1	x_2
-3	-5,5
-2	-3
-1	-1,5
0	-1
1	-1,5
2	-3
3	-5,5

МДР в задаче будет ограничено этой параболой и не будет содержать точку $(0,0)^T$, т.к. при подстановке координат этой точки в ограничение (2) получается неверное неравенство: $0^2+2\cdot 0 \le -2 \Rightarrow 0 \le -2$ – неверно.

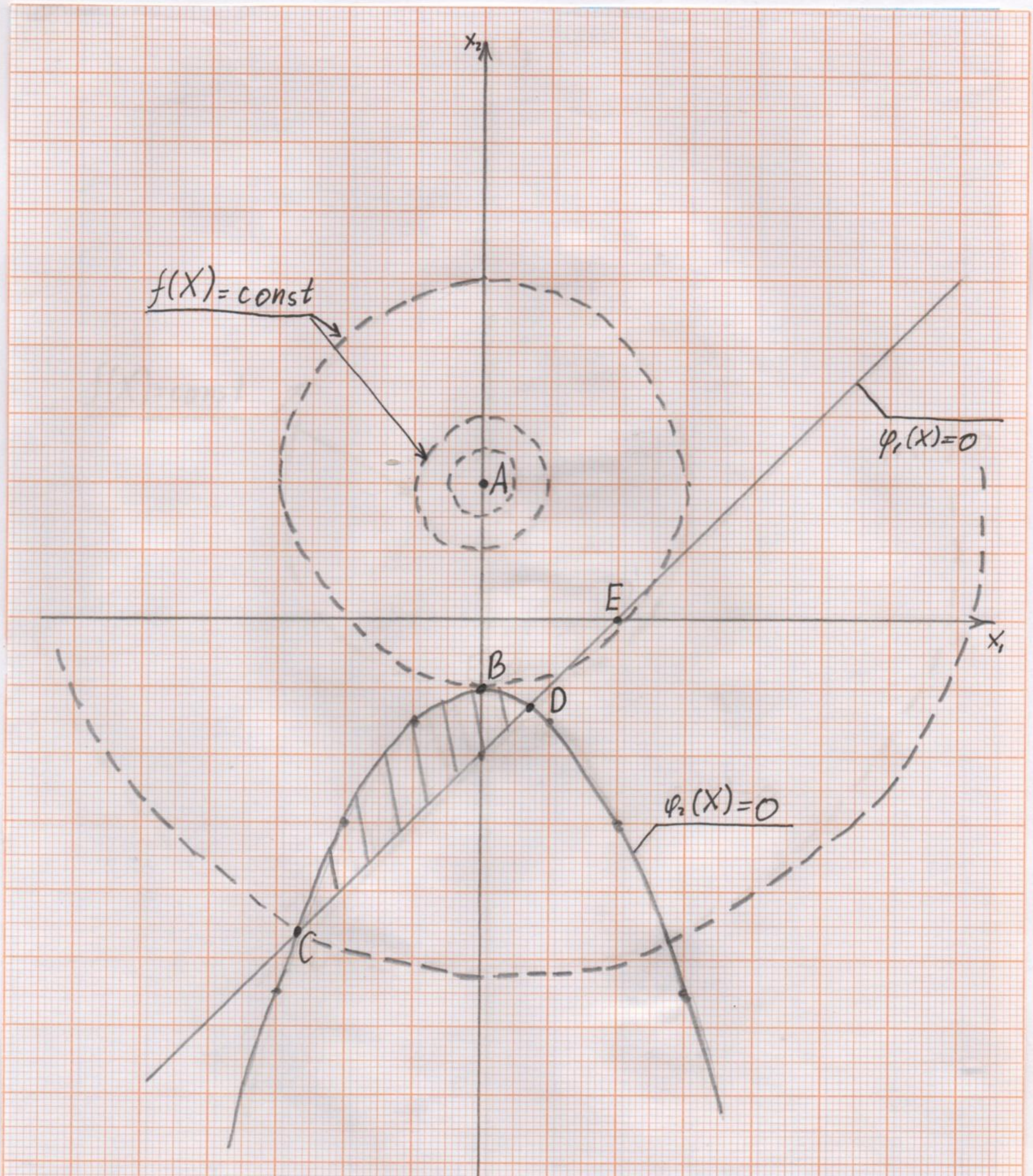
Запишем ур-ие линии уровня ф-ции $x_1^2+x_2^2-4x_2=C \Rightarrow x_1^2+(x_2^2-4x_2+4)-4=C \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1^2+(x_2-2)^2-4=C \Rightarrow x_1^2+(x_2-2)^2=C+4$, это ур-ие окружности с ц. в т. $(0;2)$ и радиусом $R=\sqrt{C+4}$

Точка $A=(0;2)$, являющаяся безусловным локальным минимумом ф-ции, не принадлежит МДР

Построим несколько линий уровня при различных значениях C. Отметим на графике точки касания линии уровня и МДР: B, C

Ответ: по графику видно, что

- условный локальный минимум в точке $B=(0;-1)$ (точка "внешнего" касания)
- условный локальный максимум в точке $C=(-2,7;-4,7)$ (точка "внешнего" касания)



Задание 1 б)

Аналитически отыскать регулярные экстремумы функции при ограничениях типа неравенства, используя аппарат необходимых и достаточных условий.

Решение

Преобразуем ограничения к виду: $\varphi_j(X)\le 0$

$$x_1-x_2\le 2 \Rightarrow x_1-x_2-2\le 0 \Rightarrow \varphi_1(X)=x_1-x_2-2$$

$$x_1^2+2x_2\le -2 \Rightarrow x_1^2+2x_2+2\le 0 \Rightarrow \varphi_2(X)=x_1^2+2x_2+2$$

Запишем классическую функцию Лагранжа:

$$L(X,\lambda)=x_1^2+x_2^2-4x_2+\lambda_1(x_1-x_2-2)+\lambda_2(x_1^2+2x_2+2)$$

Запишем необходимые условия экстремума ф-ции при ограничениях типа нер-ва:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2-4-\lambda_1+2\lambda_2=0\\ \lambda_1(x_1-x_2-2)=0\\ \lambda_2(x_1^2+2x_2+2)=0\end{array}\right\}$$

Решим полученную систему, рассматривая все случаи

Случай а) Ограничение $\varphi_1(X)=x_1-x_2-2<0$ – пассивно, $\lambda_1=0$

Ограничение $\varphi_2(X)=x_1^2+2x_2+2<0$ – пассивно, $\lambda_2=0$

Тогда получим и решим след. систему ур-й:
$$\begin{cases}2x_1=0\\2x_2-4=0\\\lambda_1=0\\\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=2\\\lambda_1=0\\\lambda_2=0\end{cases}$$

Т.о. получено 1-е решение системы – точка A с координатами $A=(0;2;0;0)$. Построим эту точку на чертеже.

Случай б) Ограничение $\varphi_1(X)=x_1-x_2-2=0$ – активно

Ограничение $\varphi_2(X)=x_1^2+2x_2+2=0$ – активно

Тогда получим и решим след. систему ур-й:

$$\begin{cases}2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0\\2x_2-4-\lambda_1+2\lambda_2=0\\x_1-x_2-2=0\\x_1^2+2x_2+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0\\2x_2-4-\lambda_1+2\lambda_2=0\\x_2=x_1-2\\x_1^2+2x_1-4+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0\\2x_2-4-\lambda_1+2\lambda_2=0\\x_2=x_1-2\\x_1^2+2x_1-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0\\2x_2-4-\lambda_1+2\lambda_2=0\\x_2=x_1-2\\x_1=-1\pm\sqrt3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0\\2x_2-4-\lambda_1+2\lambda_2=0\\x_2=-3+\sqrt3\\x_1=-1+\sqrt3\end{cases}\\ \begin{cases}2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0\\2x_2-4-\lambda_1+2\lambda_2=0\\x_2=-3-\sqrt3\\x_1=-1-\sqrt3\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2+2\sqrt3+\lambda_1+2\lambda_2+2\sqrt3\lambda_2=0\\-6+2\sqrt3-4-\lambda_1-6\lambda_2+2\sqrt3\lambda_2=0\\x_2=-3+\sqrt3\\x_1=-1+\sqrt3\end{cases}\\ \begin{cases}-2-2\sqrt3+\lambda_1-2\lambda_2-2\lambda_2\sqrt3=0\\-6-2\sqrt3-4-\lambda_1-6\lambda_2-2\lambda_2\sqrt3=0\\x_2=-3-\sqrt3\\x_1=-1-\sqrt3\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4+2\lambda_1+4\lambda_2+4=0\\-6+2\sqrt3-4-\lambda_1-6\lambda_2+2\sqrt3\lambda_2=0\\x_2=-3+\sqrt3\\x_1=-1+\sqrt3\end{cases}\\ \begin{cases}4+4+4\lambda_2+2\lambda_1=0\\-6-2\sqrt3-4-\lambda_1-6\lambda_2-2\lambda_2\sqrt3=0\\x_2=-3-\sqrt3\\x_1=-1-\sqrt3\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\lambda_1+4\lambda_2+8=0 \\ -\lambda_1-6\lambda_2+2\sqrt{3}\lambda_2-10+2\sqrt{3}=0 \\ x_2=-3+\sqrt{3} \\ x_1=-1+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\lambda_1+4\lambda_2+8=0 \\ -\lambda_1-6\lambda_2-2\sqrt{3}\lambda_2-10-2\sqrt{3}=0 \\ x_2=-3-\sqrt{3} \\ x_1=-1-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2+4=0 \\ \lambda_1+6\lambda_2-2\sqrt{3}\lambda_2+10-2\sqrt{3}=0 \\ x_1=-1+\sqrt{3} \\ x_2=-3+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2+4=0 \\ \lambda_1+6\lambda_2+2\sqrt{3}\lambda_2+10+2\sqrt{3}=0 \\ x_1=-1-\sqrt{3} \\ x_2=-3-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda_1=-2\lambda_2-4 \\ \lambda_1+6\lambda_2-2\sqrt{3}\lambda_2+10-2\sqrt{3}=0 \\ x_1=-1+\sqrt{3} \\ x_2=-3+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda_1=-2\lambda_2-4 \\ \lambda_1+6\lambda_2+2\sqrt{3}\lambda_2+10+2\sqrt{3}=0 \\ x_1=-1-\sqrt{3} \\ x_2=-3-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0 \\ 2x_2-4-\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ x_2=-3+\sqrt{3} \\ x_1=-1+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0 \\ 2x_2-4-\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ x_2=-3-\sqrt{3} \\ x_1=-1-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0 \\ -\lambda_1+2\lambda_2=10-2\sqrt{3} \\ x_2=-3+\sqrt{3} \\ x_1=-1+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0 \\ -\lambda_1+2\lambda_2=10+2\sqrt{3} \\ x_2=-3-\sqrt{3} \\ x_1=-1-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda_1-2\lambda_2+2\sqrt{3}\lambda_2=2-2\sqrt{3} \\ -\lambda_1+2\lambda_2=10-2\sqrt{3} \\ x_2=-3+\sqrt{3} \\ x_1=-1+\sqrt{3} \end{cases} + \\ \begin{cases} \lambda_1-2\lambda_2-2\sqrt{3}\lambda_2=2+2\sqrt{3} \\ -\lambda_1+2\lambda_2=10+2\sqrt{3} \\ x_2=-3-\sqrt{3} \\ x_1=-1-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\sqrt{3}\lambda_2=12-4\sqrt{3} \\ x_2=-3+\sqrt{3} \\ x_1=-1+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} -2\sqrt{3}\lambda_2=12+4\sqrt{3} \\ x_2=-3-\sqrt{3} \\ x_1=-1-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \lambda_2=2\sqrt{3}-2 \\ \lambda_1=-14+6\sqrt{3} \\ x_2=-3+\sqrt{3} \\ x_1=-1+\sqrt{3} \end{cases} & \begin{cases} \lambda_2=-2\sqrt{3}-2 \\ \lambda_1=-14-6\sqrt{3} \\ x_2=-3-\sqrt{3} \\ x_1=-1-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Т.о. получено 2-е и 3-е решение системы – точки D и C с координатами соответственно $D=(-1+\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}; -14+6\sqrt{3}, 2\sqrt{3}-2)$, $C=(-1-\sqrt{3}, -3-\sqrt{3}; -14-6\sqrt{3}, -2\sqrt{3}-2)$.

Построим эти точки на чертеже.

Случай в) Ограничение $\varphi_1(X)=x_1-x_2-2=0$ – активно

Ограничение $\varphi_2(X)=x_1^2+2x_2+2<0$ – пассивно, след-но $\lambda_2=0$

Тогда получим и решим след. систему ур-й:

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda_1=0 \\ 2x_2-4-\lambda_1=0 \\ x_1-x_2-2=0 \\ \lambda_2=0 \end{cases} + \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+\lambda_1=0 \\ 2x_1+2x_2=4 \\ x_1-x_2=2 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+\lambda_1=0 \\ x_1+x_2=2 \\ x_1-x_2=2 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+\lambda_1=0 \\ 2+2x_2=2 \\ x_1=2+x_2 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+\lambda_1=0 \\ 2x_2=0 \\ x_1=2+x_2 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+\lambda_1=0 \\ x_2=0 \\ x_1=2 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-4 \\ x_2=0 \\ x_1=2 \\ \lambda_2=0 \end{cases}$$

Т.о. получено 4-е решение системы – точка E с координатами $E=(2, 0; -4, 0)$.

Построим эту точку на чертеже.

Случай г) Ограничение $\varphi_1(X)=x_1-x_2-2<0$ – пассивно, след-но $\lambda_1=0$

Ограничение $\varphi_2(X)=x_1^2+2x_2+2=0$ – активно.

Тогда получим и решим след. систему ур-й:

$$\begin{cases} 2x_1+2\lambda_2 x_1=0 \\ 2x_2-4+2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ x_1^2+2x_2+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1(1+\lambda_2)=0 \\ 2x_2-4+2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ x_1^2+2x_2+2=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=0 \\ 2x_2-4+2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ 2x_2+2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda_2=-1 \\ 2x_2-4-2=0 \\ \lambda_1=0 \\ x_1^2+2x_2+2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1 \\ \lambda_1=0 \\ -2-4+2\lambda_2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=-1 \\ x_2=3 \\ x_1^2+2x_2+2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=-1 \\ x_2=3 \\ x_1^2+6+2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=\pm\sqrt{-8} \\ x_2=3 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=3 \end{cases} \\ \varnothing \end{array}\right.$$

Т.о. получено 5-е решение системы – точка B с координатами $B=(0,-1;0\ 3)$

Построим эту точку на чертеже.

Выпишем полученные точки:

Точка	Проверка условий на знак λ_j		Проверка точки на принадлежность МДР: $\varphi_1(x)\le 0$ и $\varphi_2(x)\le 0$	
	Условия	Вывод	Условия	Вывод
$A=(0,2;0,0)$	$\lambda_1=0$ $\lambda_2=0$	Точка является кандидатом на максимум или минимум	$\varphi_1(A')=-4<0$ $\varphi_2(A')=6>0$	Точка не принадлежит МДР и отбраковывается
$D=(-1+\sqrt{3},-3+\sqrt{3};-14+6\sqrt{3},2\sqrt{3}-2)$	$\lambda_1<0$ $\lambda_2>0$	Условия не выполнены, точка отбраковывается	—	—
$C=(-1-\sqrt{3},-3-\sqrt{3};-14-6\sqrt{3},-2\sqrt{3}-2)$	$\lambda_1<0$ $\lambda_2<0$	Точка является кандидатом на максимум	$\varphi_1(C')=0$ $\varphi_2(C')=0$	Точка принадлежит МДР
$E=(2,0;-4,0)$	$\lambda_1<0$ $\lambda_2=0$	Точка является кандидатом на максимум	$\varphi_1(D')=0$ $\varphi_2(D')=6>0$	Точка не принадлежит МДР и отбраковывается
$B=(0,-1;0,3)$	$\lambda_1=0$ $\lambda_2>0$	Точка является кандидатом на минимум	$\varphi_2(E')=-1<0$ $\varphi_2(E')=0$	Точка принадлежит МДР

Таким образом, после отбраковки остались две точки:

~~$B'=(-1+\sqrt{3},-3+\sqrt{3};14+6\sqrt{3},2\sqrt{3}-2)$ – точка является кандидатом на минимум~~

$C=(-1-\sqrt{3},-3-\sqrt{3};-14-6\sqrt{3},-2\sqrt{3}-2)$ – точка является кандидатом на максимум

$B\ (0,-1;0,3)$ – точка является кандидатом на минимум

Проверим достаточные условия первого порядка в каждой из полученных точек:

Точка	Активные ограничения		Знак λ_j	Вывод
$C=(-1-\sqrt{3}; -3-\sqrt{3}; -14-6\sqrt{3}, -2\sqrt{3}-2)$	$\varphi_1=0$ $\varphi_2=0$	число активных ограничений равно числу переменных	$\lambda_1<0$ $\lambda_2<0$	достаточные условия 1-го порядка выполнены - точка условный локальный максимум.
$B=(0,-1;0,3)$	$\varphi_2=0$	число активных ограничений меньше числа переменных - достаточ. усл. 1-го порядка не выполнены	—	необходима проверка достаточных условий 2-го порядка

Таким образом, получено: точка $C=(-1-\sqrt{3}; -3-\sqrt{3}; -14-6\sqrt{3}, -2\sqrt{3}-2)$ - усл. лок. макс. ф-ции

Для оставшейся точки проверим достаточные условия экстремума 2-го порядка.

Запишем 2-й дифференциал ф-ции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=2+2\lambda_2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2$$

$$\boxed{d^2L=(2+2\lambda_2)(dx_1)^2+2(dx_2)^2}$$

Запишем дифференциал ограничения φ_1:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}=1 \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}=-1 \quad \Rightarrow \boxed{d\varphi_1(X)=1\cdot dx_1-1\cdot dx_2}$$

Запишем дифференциал ограничения φ_2:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}=2x_1 \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \quad \Rightarrow \boxed{d\varphi_2(X)=2x_1dx_1+2dx_2}$$

Исследуем точку $B=(0,-1;0,3)$ - кандидат на минимум, активным в ней является ограничение φ_2, при этом $\lambda_2=3\neq 0$, тогда:

$d^2L(B)=8(dx_1)^2+2(dx_2)^2$, при условии $d\varphi_2(B)=0\cdot dx_1+2dx_2=0 \Rightarrow 2dx_2=0\cdot dx_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ получим: $dx_2=0 \Rightarrow d^2L(B)=8(dx_1)^2>0$ при $dx_1\neq 0$

Следовательно, в точке $B=(0,-1;0,3)$ выполнены достаточные условия <u>локального условного минимума</u>.

<u>Ответ</u>: функция $f(X)$ при ограничениях $x_1-x_2\leq 2$, $x_1^2+2x_2\leq -2$ имеет:

- условный локальный максимум в точке $C=(-1-\sqrt{3}, -3-\sqrt{3})$, $f(C)=48,78461$
- условный локальный минимум в точке $B=(0,-1)$, $f(B)=5$.