

**«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)» (МАИ)**

**Кафедра 805
«Математическая кибернетика»**

Отчет

по лабораторной работе №2

на тему «Численные методы поиска безусловного экстремума
ФМП»

Выполнил
студент группы М8О-209Б-22

Концебалов О.С.

Проверила доцент каф. 805

Лунева С.Ю.

2024

Цель — изучение методов безусловной минимизации на примере квадратичной функции, не имеющей ярко выраженной овражной структуры.

Постановка задачи

Дано: $f(X) = x^2 + xy + 2y^2 + (5-9)x + 15y$ — квадратичная функция 2-х переменных

$NL = 15$ — номер компьютера, за которым выполняется работа;

$NG = 9$ — последние две цифры номера учебной группы

Требуется найти: $f(X) \rightarrow \min_{X \in \mathbb{R}^n}$

Аналитическое решение задачи с использованием аппарата необходимых и достаточных условий экстремума

1) Запишем градиент целевой функции: $\nabla f(X) = (2x + y - 4, x + 4y + 15)^T$

2) Запишем необходимое условие экстремума: $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x + 4y + 15 = 0 \end{cases}$

3) Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x + 4y + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = \frac{31}{7} \approx 4,42857 \\ y^* = -\frac{34}{7} \approx -4,85714 \end{cases}$$

Получена точка $X^* = \left(\frac{31}{7}, -\frac{34}{7}\right)^T$ — стационарная точка функции

4) Составим матрицу вторых производных (матрицу Гессе) и вычислим её в точке $X^* = \left(\frac{31}{7}, -\frac{34}{7}\right)^T$.

$$H(X^*) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5) Определим знакоопределённость матрицы по критерию Симплекса.

Для этого найдём главные миноры матрицы: $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = 7$.

Т.к. $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$, то матрица положительно определена и, следовательно, $X^* = \left(\frac{31}{7}, -\frac{34}{7}\right)^T$ — безусловный локальный минимум.

Ответ: получена точка $X^* = \left(\frac{31}{7}, -\frac{34}{7}\right)^T$ — безусловный локальный минимум функции, $f(X^*) = -45\frac{2}{7}$

Методы 1-го порядка

Метод градиентного спуска (предельное число итераций $N = 5$)

Протокол расчета

Выполнил: Концебалов, Воропаев, группа 80-209, 05.04.2024

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 15x_2 + 0$

Метод градиентного спуска

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 5$, Количество итераций: 5

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0.23	-1.15	2.9	62.9075	-3.4	25.45	25.67611
1	0.63194	-0.368	-2.9535	-24.16186	-7.6895	2.818	8.1896
2	0.27	4.4913	-4.73431	-45.2439	0.2483	0.55407	0.60717
3	0.271	4.42426	-4.88391	-45.28415	-0.03538	-0.11137	0.11685
4	0.25	4.43385	-4.85373	-45.28565	0.01397	0.01894	0.02354
5	0	4.43036	-4.85846	-45.28571	0.00225	-0.00349	0.00416

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00222$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0$$

Протокол расчета

Выполнил: Концебалов, Воропаев, группа 80-209, 05.04.2024

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 + -4x_1 + 15x_2 + 0$

Метод покоординатного спуска

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 5$, Количество итераций: 4

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0.29	-1.15	2.9	62.9075	-3.4	25.45	25.67611
1	0.5175	-1.15	-4.4805	-15.98266	-10.7805	-4.072	11.5239
2	0.255	4.42891	-4.4805	-45.00187	0.37732	1.50691	1.55343
3	0.24786	4.42891	-4.86476	-45.2856	-0.00694	-0.03014	0.03093
4	0	4.42891	-4.85729	-45.28571	0.00053	-0.00026	0.00059

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00037$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0$$

Протокол расчета

Выполнил: Концебалов, Воропаев, группа 80-209, 05.04.2024

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 15x_2 + 0$

Метод градиентного наискорейшего спуска

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 10$, Количество итераций: 9

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0.27007	-1.15	2.9	62.9075	-3.4	25.45	25.67611
1	0.43535	-0.23177	-3.97324	-26.12367	-8.43677	-1.12473	8.51141
2	0.27003	3.4412	-3.48359	-41.89371	-0.6012	4.50684	4.54676
3	0.43547	3.60354	-4.70058	-44.68518	-1.4935	-0.19877	1.50667
4	0.27003	4.25391	-4.61402	-45.17945	-0.1062	0.79783	0.80487
5	0.43531	4.28259	-4.82946	-45.26691	-0.26428	-0.03525	0.26662
6	0.27009	4.39763	-4.81411	-45.28239	-0.01885	0.14117	0.14243
7	0.43525	4.40272	-4.85224	-45.28512	-0.0468	-0.00625	0.04721
8	0.27011	4.42309	-4.84952	-45.28561	-0.00334	0.025	0.02522
9	0	4.42399	-4.85628	-45.2857	-0.00829	-0.00111	0.00836

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00466$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 2.0E-5$$

Протокол расчета

Выполнил: Концебалов, Воропаев, группа 80-209, 05.04.2024

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 + -4x_1 + 15x_2 + 0$

Метод Гаусса-Зейделя

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 10$, Количество итераций: 9

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2) \ $
0	0.24997	-1.15	2.9	62.9075	-3.4	25.45	25.67611
1	0.49995	-1.15	-3.4617	-18.05531	-9.7617	0.00318	9.76171
2	0.49998	3.73036	-3.4617	-41.87803	-0.00098	4.88355	4.88355
3	0.24998	3.73085	-3.4617	-41.87803	-0	4.88403	4.88403
4	0.49995	3.73085	-4.68263	-44.85975	-1.22092	0.00034	1.22092
5	0.25	4.34125	-4.68263	-45.23242	-0.00012	0.61074	0.61074
6	0.50001	4.34125	-4.83531	-45.27904	-0.15281	0	0.15281
7	0.25001	4.41766	-4.83531	-45.28488	0	0.07641	0.07641
8	0.5	4.41766	-4.85441	-45.28561	-0.0191	-0	0.0191
9	0	4.42721	-4.85441	-45.2857	0	0.00955	0.00955

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00305$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 1.0E-5$$

Метод сопряженных градиентов (предельное число итераций $N = 2$)

Протокол расчета

Выполнил: Концебалов, Воропаев, группа 80-209, 05.04.2024

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 + -4x_1 + 15x_2 + 0$

Метод сопряженных градиентов

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 2$, Количество итераций: 2

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0.27008	-1.15	2.9	62.9075	-3.4	25.45	25.67611
1	0.52892	-0.23173	-3.97354	-26.12367	-8.43699	-1.12587	8.51178
2	0	4.42842	-4.85736	-45.28571	-0.00051	-0.00101	0.00114

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00026$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0$$

Методы 2-го порядка

Метод Ньютона (предельное число итераций $N = 1$)

Протокол расчета

Выполнил: Концебалов, Воропаев, группа 80-209, 05.04.2024

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 15x_2 + 0$

Метод Ньютона

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 1$, Количество итераций: 1

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0	-1.15	2.9	62.9075	-3.4	25.45	25.67611
1	0	4.42857	-4.85714	-45.28571	-0	0	0

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0$$

Метод Ньютона-Рафсона (предельное число итераций $N = 5$)

Протокол расчета

Выполнил: Концебалов, Воропаев, группа 80-209, 05.04.2024

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 15x_2 + 0$

Метод Ньютона-Рафсона

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 5$, Количество итераций: 1

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0.9999	-1.15	2.9	62.9075	-3.4	25.45	25.67611
1	0	4.42801	-4.85637	-45.28571	-0.00034	0.00255	0.00257

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00096$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0$$

Методы 0-го порядка

Метод Нелдера-Мида (предельное число итераций $N = 8$)

Протокол расчета

Выполнил: Концбалов, Воропаев, группа 80-209, 05.04.2024

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 15x_2 +$

Метод Нелдера-Мида

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 8$, Количество итераций: 8

$N_{\text{ит}}$	α	операция	коэффициент	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	1	сжатие	0.5	4.35 4.4 -1.15	-4.8 -4.75 2.9	-45.2775 -45.265 62.9075
1	1	сжатие	0.5	4.35 4.4 1.6125	-4.8 -4.75 -0.9375	-45.2775 -45.265 -17.66625
2	1	сжатие	0.5	4.35 4.4 2.99375	-4.8 -4.75 -2.85625	-45.2775 -45.265 -38.09078
3	1	сжатие	0.5	4.35 4.4 3.68438	-4.8 -4.75 -3.81563	-45.2775 -45.265 -43.33746
4	1	сжатие	0.5	4.35 4.4 4.02969	-4.8 -4.75 -4.29531	-45.2775 -45.265 -44.7194
5	1	сжатие	0.5	4.35 4.4 4.20234	-4.8 -4.75 -4.53516	-45.2775 -45.265 -45.10003
6	1	редукция		4.35 4.4 4.54766	-4.8 -4.75 -5.01484	-45.2775 -45.265 -45.24057
7	1	сжатие	0.5	4.44883 4.35 4.375	-4.90742 -4.8 -4.775	-45.28127 -45.2775 -45.27375
8				4.38721 4.44883 4.35	-4.81436 -4.90742 -4.8	-45.28211 -45.28127 -45.2775

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.05951$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0.0036$$

Протокол расчета

Выполнил: Концебалов, Воропаев, группа 80-209, 05.04.2024

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 + -4x_1 + 15x_2 + 0$

Метод случайного поиска

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 8$, Количество итераций: 4

$N_{\text{ит}}$	радиус r	коэф-т. k	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	9	1	-1.15	2.9	62.9075
1	1.74	1	5.29989	-3.37685	-38.85418
2	0.022	1	4.41622	-4.87576	-45.28464
3	0.016	1	4.43759	-4.87053	-45.2854
4			4.42638	-4.85912	-45.2857

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00295$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 2.0E-5$$

Протокол расчета

Выполнил: Концебалов, Воропаев, группа 80-209, 05.04.2024

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 + -4x_1 + 15x_2 + 0$

Метод конфигураций

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 8$, Количество итераций: 3

$N_{\text{ит}}$	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	dx_1	dx_2	коэф-т k
0	-1.15	2.9	62.9075	5	7.6	
1	-1.15	-4.7	-14.9925	5.35	1.0E-5	0
2	4.2	-4.69999	-45.22	0.23	0.158	0
3	4.43	-4.85799	-45.28571	0.23	0.158	0

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00166$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0$$