Индивидуальное ДЗ по курсу "Методы оптимизации"
Выполнил студент группы 80-209Б Концебалов О.С.
Вариант №135

$f(X) = x_1^2 + 6x_2^2 + 18x_1 + 12x_2 - 10 \longrightarrow extr$ при ограничении: $x_1 + x_2 = 4$
Этап №1. Тема: Методы решения ЗНП при ограничениях типа равенства Задание: а) Решить задачу графически. б) Аналитически отыскать экстремум функции при ограничениях типа равенства, используя аппарат необходимых и достаточных условий (методом множителей Лагранжа). в) Найти решение задачи методом штрафных функций.

1. Методы решения задачи нелинейного программирования при ограничениях типа равенства

Задание а).

<u>Дано:</u> $f(X) = x_1^2 + 6x_2^2 + 18x_1 + 12x_2 - 10 \longrightarrow extr$

при ограничении: $x_1 + x_2 = 4$

Преобразуем ограничение к виду: $\varphi_1(X) = 0$

$$x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 - 4 = 0 \Rightarrow \varphi_1(X) = x_1 + x_2 - 4$$

Решить задачу графически.

<u>Решение:</u>

Решение задачи есть точка касания ограничения и линии уровня $f = C$, где $C = const$. Искомая точка касания обладает следующими свойствами:

- точка касания принадлежит ограничению: $x_1^{кас} + x_2^{кас} = 4$
- в точке касания градиенты функции и ограничения линейно зависимы:

$$\nabla f(X^{кас}) = \alpha \cdot \nabla \varphi_1(X^{кас}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 + 18 \\ 12x_2 + 12 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2x_1 + 18}{1} = \frac{12x_2 + 12}{1}$$

Воспользовавшись условиями касания, составим систему ур-й и найдём координаты решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 18 = 12x_2 + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - 12x_2 = -6 \end{cases} \xRightarrow{(2) - 2\cdot(1)} -14x_2 = -14 \Rightarrow x_2 = 1 \xRightarrow{из\ (1)} x_1 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$$

Найдена точка $X^* = (3; 1)^T$ - точка касания ограничения и линии уровня ф-ции

Построим графическую иллюстрацию решения

Ограничение в задаче - прямая с уравнением $x_1 + x_2 = 4$, она проходит ч/з точки:

x_1	x_2
0	4
4	0

Построим прямую на графике и обозначим $\varphi_1(X)=0$.

Найдём значение ф-ции в найденной точке касания $X^*=(3;1)^T$:

$f(X^*)=3^2+6\cdot1^2+18\cdot3+12\cdot1-10=9+6+54+12-10=71$

Определим конфигурацию линии уровня ф-ции, вычислив инвариант:

$D=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=6$, т.к. $D>0$, то искомая линия уровня эллипс

Запишем уравнение линии уровня:

$$x_1^2+6x_2^2+18x_1+12x_2-10=71$$

$$x_1^2+6x_2^2+18x_1+12x_2=81$$

Приведём уравнение линии уровня к каноническому виду, выделив полные квадраты:

$$(x_1^2+18x_1+81)-81+6x_2^2+12x_2=81 \Rightarrow (x_1+9)^2+6((x_2^2+2x_2+1)-1)=81+81 \Rightarrow$$

$$\cancel{\Rightarrow (x_1+9)^2+6(x_2+1)^2=162+6 \Rightarrow (x_1+9)^2+6(x_2+1)^2=169}$$

$$\Rightarrow (x_1+9)^2+6(x_2+1)^2=162+6 \Rightarrow (x_1+9)^2+6(x_2+1)^2=168$$

$$\frac{(x_1+9)^2}{168}+\frac{6(x_2+1)^2}{168}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{(x_1+9)^2}{168}+\frac{(x_2+1)^2}{28}=1}$$ - каноническое ур-ие эллипса

Центр эллипса – точка с координатами $(-9;-1)$

Главные диагонали эллипса прямые с ур-ми: $x_1=-9$; $x_2=-1$.

Найдём т. пересечения эллипса с главными диагоналями:

$$x_1=-9 \Rightarrow \frac{(x_2+1)^2}{28}=1 \Rightarrow (x_2+1)^2=28 \Rightarrow x_2+1=\pm\sqrt{28} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2=\sqrt{28}-1\approx4{,}2915 \\ x_2=-\sqrt{28}-1\approx-6{,}2915\end{array}$$

Получены точки с координатами: $(-9;4{,}2915)$ и $(-9;-6{,}2915)$

$$x_2=-1 \Rightarrow \frac{(x_1+9)^2}{168}=1 \Rightarrow (x_1+9)^2=168 \Rightarrow x_1+9=\pm\sqrt{168} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=\sqrt{168}-9\approx3{,}96148 \\ x_1=-\sqrt{168}-9\approx-21{,}96148\end{array}$$

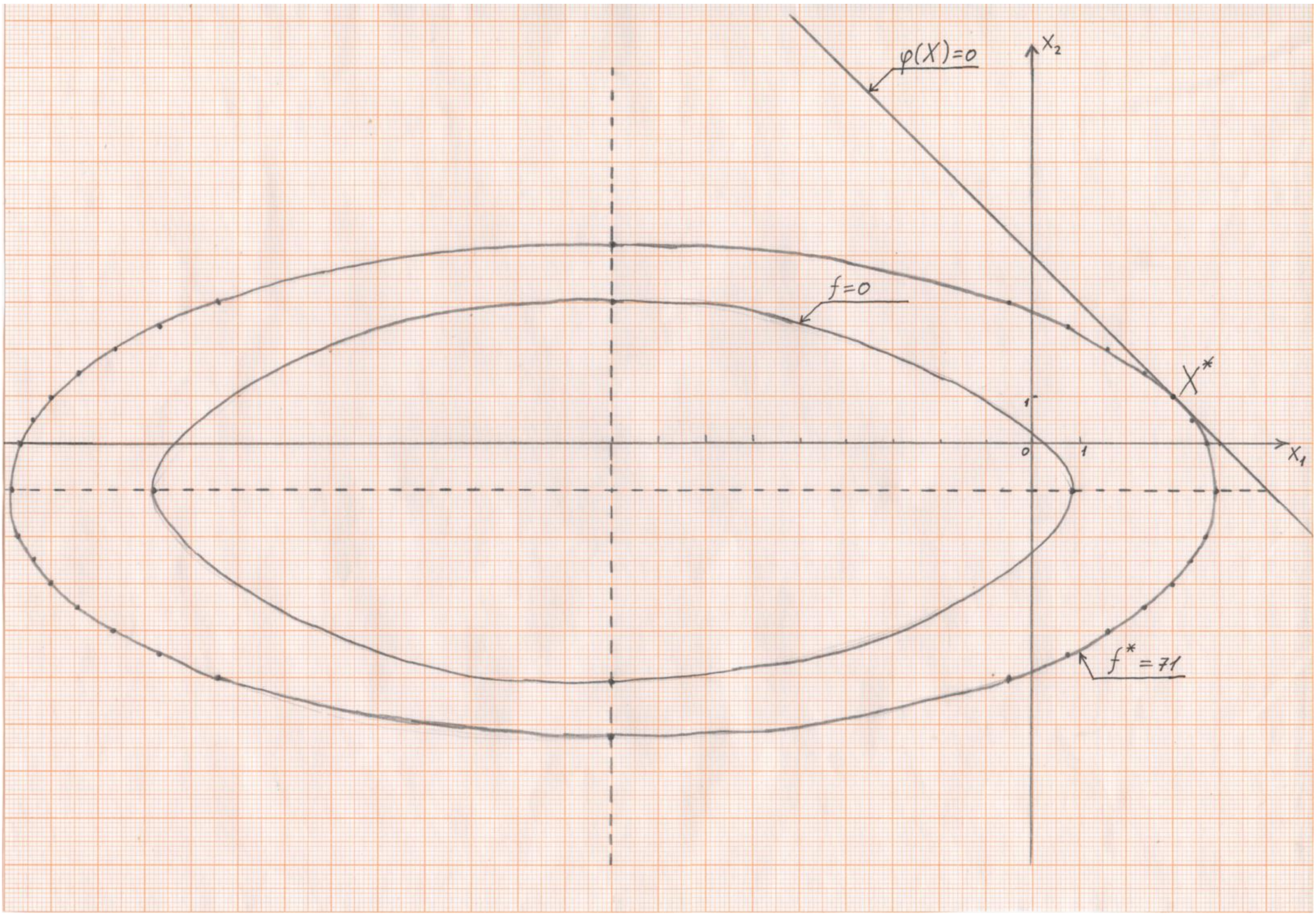
Получены точки с координатами: $(3{,}96148;-1)$ и $(-21{,}96148;-1)$

Найдём ещё несколько точек для построения эллипса, выразив x_1 из канонического ур-я эллипса:

$$x_1=\pm\sqrt{\left(1-\frac{(x_2+1)^2}{28}\right)168}-9$$

x_2	x_1	x_1
0	3,72792	-21,72792
0,5	3,4298	-21,4298
1	3	-21
1,5	2,42366	-20,42366
2	1,67708	-19,67708
2,5	0,72111	-18,72111
3	-0,514719	-17,48528

Построим на чертеже линию уровня функции



x_2
$\varphi(X)=0$
$f=0$
X^*
1
0
1
x_1
$f^*=71$

Задание б).

Дано: $f(X)=x_1^2+6x_2^2+18x_1+12x_2-10 \to extr$

при ограничении: $x_1+x_2=4$

Решить задачу методом множителей Лагранжа (аналитически отыскать экстремум функции при ограничениях типа равенств, используя аппарат необходимых и достаточных условий)

Решение:

Запишем классическую ф-цию Лагранжа:

$$L(X,\lambda)=x_1^2+6x_2^2+18x_1+12x_2-10+\lambda_1(x_1+x_2-4)$$

Запишем необходимые условия экстремума ф-ции при ограничениях типа равенства:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_1}=2x_1+18+\lambda_1=0 \\ \dfrac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_2}=12x_2+12+\lambda_1=0 \\ \varphi_1(X)=x_1+x_2-4=0. \end{cases}$$

Решим полученную систему:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases} 2x_1+18+\lambda_1=0 \\ 12x_2+12+\lambda_1=0 \\ x_1+x_2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+\lambda_1=-18 \\ 12x_2+\lambda_1=-12 \\ x_1+x_2=4 \end{cases} \overset{(2)-(1)}{\Longrightarrow} \cancel{\begin{cases} 2x_1+\lambda_1=-18 \\ 12x_2=6 \\ x_1+x_2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+\lambda_1=-18 \\ x_2=\dfrac{1}{12} \\ x_1+\dfrac{1}{12}=4 \end{cases}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\begin{matrix} \lambda_1= \\ x_2=\dfrac{1}{12} \\ x_1=\dfrac{47}{12} \end{matrix}} \quad \overset{(2)-(1)}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2x_1+\lambda_1=-18 \\ 12x_2-2x_1=6 \\ x_1+x_2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+\lambda_1=-18 \\ 6x_2-x_1=3 \\ x_1+x_2=4 \end{cases} \overset{(3)+(2)}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2x_1+\lambda_1=-18 \\ 6x_2-x_1=3 \\ 7x_2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1^*=-24 \\ x_1^*=3 \\ x_2^*=1 \end{cases}$$

Таким образом получено решение системы – точка с координатами $(X^*,\lambda^*)=(3,1,-24)$ условно-стационарная точка функции.

Определим характер полученной точки с помощью достаточных условий экстремума.

Запишем 2-й дифференциал ф-ции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L(X,\lambda)}{\partial x_1^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 L(X,\lambda)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 L(X,\lambda)}{\partial x_2\partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial^2 L(X,\lambda)}{\partial x_2^2}=12$$

$$d^2L(X,\lambda)=2(dx_1)^2+0\cdot dx_1dx_2+0\,dx_2dx_1+12(dx_2)^2 \Rightarrow d^2L(X,\lambda)=2(dx_1)^2+12(dx_2)^2$$

Запишем дифференциал ограничения φ_1:

$$\frac{\partial\varphi_1(X)}{\partial x_1}=1 \qquad \frac{\partial\varphi_1(X)}{\partial x_2}=1 \Rightarrow d\varphi_1(X)=dx_1+dx_2$$

В точке $X^*=(3;1;-24)$ имеем:

$d^2L(X^*\cancel{\lambda})=2(dx_1)^2+12(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_1(X^*)=dx_1+dx_2=0$, получим:

$dx_1=-dx_2 \Rightarrow d^2L(X^*)=2(-dx_2)^2+12(dx_2^2)=14(dx_2)^2>0$ при $dx_2\neq 0$

Следовательно, в точке $X^*=(3;1)^T$ выполнены достаточные условия локального условного минимума.

Ответ: функция $f(X)$ при ограничении $x_1+x_2=4$ имеет условный локальный минимум в точке с координатами $X^*=(3;1)^T$.

Задание в).

Дано: $f(X) = x_1^2 + 6x_2^2 + 18x_1 + 12x_2 - 10 \to extr$

при ограничении: $x_1 + x_2 = 4$

Найти решение задачи методом штрафной функции

Решение:

Составим вспомогательную функцию:

$$F(X,r) = x_1^2 + 6x_2^2 + 18x_1 + 12x_2 - 10 + \frac{r}{2}(x_1 + x_2 - 4)^2$$

Запишем необходимые условия безусловного минимума вспомогательной ф-ции:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(X,r)}{\partial x_1} = 2x_1 + 18 + r(x_1 + x_2 - 4) = 0 \\ \frac{\partial F(X,r)}{\partial x_2} = 12x_2 + 12 + r(x_1 + x_2 - 4) = 0 \end{cases}$$

Преобразуем исходную систему к виду: $\begin{cases} (2+r)x_1 + rx_2 = 4r - 18 \\ rx_1 + (12+r)x_2 = 4r - 12 \end{cases}$

Разрешим полученную систему относительно переменных x_1, x_2 по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2+r & r \\ r & 12+r \end{vmatrix} = (2+r)(12+r) - r^2 = 24 + 12r + 2r + \cancel{r^2} - \cancel{r^2} = 14r + 24$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4r-18 & r \\ 4r-12 & 12+r \end{vmatrix} = (4r-18)(12+r) - 4r^2 + 12r = 48r - 216 + \cancel{4r^2} - 18r \cancel{- 4r^2 + 30r - 216} - \cancel{4r^2} + 12r = 42r - 216$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+r & 4r-18 \\ r & 4r-12 \end{vmatrix} = (2+r)(4r-12) - 4r^2 + 18r = 8r + \cancel{4r^2} - 24 - 12r - \cancel{4r^2} + 18r = 14r - 24$$

Тогда $x_1^*(r) = \frac{42r - 216}{14r + 24}$,

$x_2^*(r) = \frac{14r - 24}{14r + 24}$, – стационарная точка вспомогательной ф-ции.

Найдём координаты условного экстремума ~~ф-ции~~ исходной задачи, как предел решения задачи поиска безусловного экстремума вспомогательной ф-ции:

$$x_1^* = \lim_{r\to\infty} \frac{42r - 216}{14r + 24} = \lim_{r\to\infty} \frac{42 - \frac{216}{r}\to 0}{14 + \frac{24}{r}\to 0} = \frac{42}{14} = 3; \quad x_2^* = \lim_{r\to\infty} \frac{14r - 24}{14r + 24} = \lim_{r\to\infty} \frac{14 - \frac{24}{r}\to 0}{14 + \frac{24}{r}\to 0} = \frac{14}{14} = 1$$

Получена точка $X^* = (3; 1)^T$ – точка условного экстремума исходной задачи.

Запишем м-цу Гессе для вспомогательной ф-ции: $H(X,r) = \begin{pmatrix} 2+r & r \\ r & 12+r \end{pmatrix}$.

$\Delta_1 = 2 + r > 0$ при $r \to \infty$

$\Delta_2 = (2+r)(12+r) - r^2 = 24 + 12r + 2r + \cancel{r^2} - \cancel{r^2} = 14r + 24 > 0$ при $r \to \infty$.

Следовательно по критерию Сильвестра, достаточные условия минимума ф-ции $F(X,r)$ выполняются, и значит полученная точка $X^* = (3; 1)^T$ – точка условного локального минимума ф-ции $f(X)$.

Запишем оценку λ_1^*:

$$\lambda_1^* = \lim_{r\to\infty} r\left(\frac{42r - 216}{14r + 24} + \frac{14r - 24}{14r + 24} - 4\right) = \lim_{r\to\infty} r\left(\frac{42r - 216 + 14r - 24 - 56r - 96}{14r + 24}\right) =$$

$$= \lim_{r\to\infty} r\left(\frac{-336}{14r + 24}\right) = \lim_{r\to\infty} \frac{-336r}{14r + 24} = \lim_{r\to\infty} \frac{-336}{14 + \frac{24}{r}\to 0} = -\frac{336}{14} = -24$$

Ответ: функция $f(X)$ при ограничении $x_1 + x_2 = 4$ имеет условный локальный минимум в точке с координатами $X^* = (3; 1)^T$.