Индивидуальное ДЗ по курсу Методы Оптимизации
Выполнил студент группы М8О-209Б Конделалов О.С.
Вариант №135

Задание:

Вариант №135 Конделалов	Этап №4. Тема: Решение двойственной ЗЛП
1. $f(X)=-6x_1+x_2 \to extr$ $x_1+2x_2 \le 8$ $3x_1-x_2 \le 3$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ 2. $f(X)=x_1-2x_2 \to extr$ $-x_1+x_2 \le 1$ $2x_1-x_2 \ge 2$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	Задание: а) Составить для задачи 1 (рассмотреть поиск максимума) и задачи 2 (рассмотреть поиск минимума) соответствующие двойственные задачи и решить их графически. б) Используя решение симплекс-методом прямых задач 1 и 2 (ИДЗ №2), найти решение соответствующих двойственных задач и сравнить их с полученными в п. а)

3. Решение двойственной задачи линейного программирования

Задание а). Пример 1.

Дано: $f(X) = -6x_1+x_2 \to max$
$x_1+2x_2 \le 8$ (1)
$3x_1-x_2 \le 3$ (2)
$x_1, x_2 \ge 0$ (3)
Составить двойственную задачу и найти её решение графически.

Решение:

В прямой задаче требуется найти максимум, правые части ограничений прямой задачи неотрицательны.

Прямая задача содержит 2 ограничения, значит, в двойственной задаче будет 2 переменных.

Прямая задача содержит 2 переменных, значит, в двойственной задаче будет 2 ограничения.

Матрица коэффициентов при переменных в ограничениях прямой задачи имеет вид $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, значит матрица коэффициентов при переменных в ограничениях двойственной задачи примет вид $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

Коэффициенты целевой ф-ции двойственной задачи – правые части ограничений прямой задачи, т.е. (8, 3).

Правые части ограничений двойственной задачи – коэффициенты целевой ф-ции прямой задачи, т.е. $\begin{pmatrix}-6\\ 1\end{pmatrix}$.

Обе переменные прямой задачи неотрицательны, следовательно, оба ограничения двойственной задачи будут неравенствами вида "$\ge$".

Первое ограничение прямой задачи является нер-вом вида "$\le$", значит переменная $u_1 \ge 0$
Второе ограничение прямой задачи является нер-вом вида "$\le$", значит переменная $u_2 \ge 0$.

Получим: $g(U) = 8u_1 + 3u_2 \to min$
$u_1+3u_2 \ge -6$ (1)
$2u_1 - u_2 \ge 1$ (2)
$u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0$ (3)

Для графического решения задачи построим МДР, задаваемое ограничениями (1)–(3).
Ограничение (1) в задаче определяется прямой $u_1+3u_2=-6$, проходящей через точки:

u_1	u_2
0	-2
-6	0

МДР в задаче будет ограничено этой прямой и будет содержать точку (0, 0), т.к. при подстановке координат этой точки в ограничение (1) получается верное неравенство: $0+3\cdot0\geq-6$.

Ограничение (2) в задаче определяется прямой $2u_1-u_2=1$, проходящей через точки:

u_1	u_2
0	-1
$\frac{1}{2}$	0

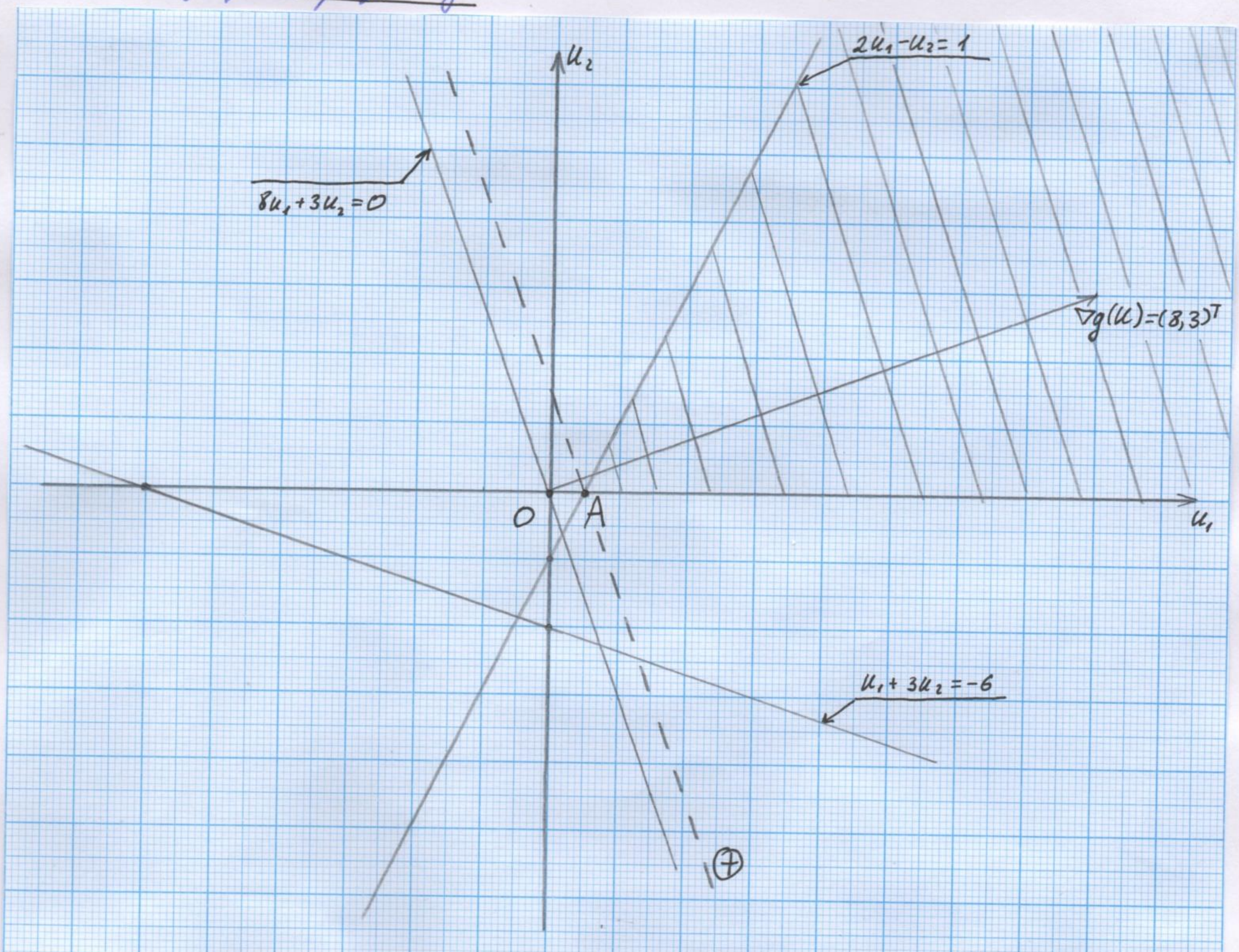
МДР в задаче будет ограничено этой прямой и НЕ будет содержать точку (0, 0), т.к. при подстановке координат этой точки в ограничение (2) получается неверное неравенство: $2\cdot0-0\geq1$.

Ограничения (3) в задаче задают I-ю четверть координатной плоскости.

МДР включает все точки, в к-рых ограничения выполняются одновременно. Отметим крайние точки получившегося множества: А

Построим градиент функции $\nabla g(U)=(8,3)^T$ в точке (0,0).

Построим линию уровня ф-ции $g(U)=C$, проходящую через точку (0,0). Для этого найдём значение константы C, подставив координаты точки в целевую ф-цию: $C=8\cdot0+3\cdot0=0$, и затем построим прямую $8u_1+3u_2=0$. Заметим, что построенная прямая перпендикулярна градиенту.



Построенная линия уровня не имеет общих точек с МДР. Используя параллельный перенос, построим ещё одну линию уровня ф-ции, пересекающую МДР, и отметим её +.

Будем искать точку минимума ф-ции как последнюю точку касания линии уровня и МДР при параллельном переносе линии (Г) в направлении, противоположном градиенту функции. Как видно из чертежа, это точка $A=(\frac{1}{2};0)$. Таким образом получено решение задачи поиска минимума функции:

$$u_1^*=\frac{1}{2}, \quad u_2^*=0, \qquad g(A)=g(U_{min}^*)=8\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 0=4.$$

Задание б). Пример 1.

Дано: $f(X)=-6x_1+x_2 \longrightarrow max$

$x_1+2x_2 \le 8 \quad (1)$

$3x_1-x_2 \le 3 \quad (2)$

$x_1, x_2 \ge 0 \quad (3)$

Найти решение двойственной задачи, используя решение симплекс-методом прямой задачи.

Решение:

Решим прямую задачу симплекс-методом (см. ИДЗ №3). Рассмотрим 1-ю и последнюю таблицы.

Таблица №1

			-6	1	0	0	C_j
$C_{iБ}$	БП.	БР.	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3	8	1	2	1	0	4
0	x_4	3	3	-1	0	1	-3
		Δ	-6	1	0	0	
					1-й столбец	2-й столбец	

Решение прямой задачи находится в таблице №2, т.к. все симплекс разности неположительны, и в состав базисных не входят искусственные переменные.

Таблица №2

			-6	1	0	0	C_j
$C_{iБ}$	БП.	БР.	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
1	x_2	4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	
0	x_4	7	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	
		Δ	$-\frac{13}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	
		Z	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	
					$\uparrow u_1^*$	$\uparrow u_2^*$	

Вычислим строку Z:

$Z_1=\left(\binom{1}{0},\binom{1/2}{7/2}\right)=\frac{1}{2},$

$Z_2=\left(\binom{1}{0},\binom{1}{0}\right)=1,$

$Z_3=\left(\binom{1}{0},\binom{1/2}{1/2}\right)=\frac{1}{2},$

$Z_4=\left(\binom{1}{0},\binom{0}{1}\right)=0.$

Оптимальные значения двойственных переменных находятся в строке Z при переменных, соответствующих начальным базисам, в порядке следования столбцов единичной матрицы.

$$u_1^*=\frac{1}{2}, \quad u_2^*=0, \qquad g(U_{min}^*)=8\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 0=4$$

Значения функции на оптимальном решение прямой и двойственной задачи совпадают.

Ответ: двойственная задача имеет решение: $u_1^*=\frac{1}{2}$, $u_2^*=0$, $g(U_{min}^*)=4$.

Задание а). Пример 2.

Дано: $f(X) = x_1 - 2x_2 \to min$

$-x_1 + x_2 \le 1$ (1)

$2x_1 - x_2 \ge 2$ (2)

$x_1, x_2 \ge 0$ (3)

Составить двойственную задачу и найти её решение графически.

Решение:

В прямой задаче требуется найти минимум, значит умножим ф-цию на (-1) и перейдём к задаче поиска максимума $f(X) = -x_1 + 2x_2 \to max$.

Правые части ограничений прямой задачи неотрицательны.

Прямая задача содержит 2 ограничения, значит, в двойственной задаче будет 2 переменных.

Прямая задача содержит 2 переменных, значит, в двойственной задаче будет 2 ограничения.

Матрица коэффициентов при переменных в ограничениях прямой задачи имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, значит матрица коэффициентов при переменных в ограничениях двойственной задачи примет вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Коэффициенты целевой функции двойственной задачи – правые части ограничений прямой задачи, т.е. $(1 \quad 2)$.

Правые части ограничений двойственной задачи – коэффициенты целевой функции прямой задачи, т.е. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Обе переменные прямой задачи неотрицательны, следовательно, оба ограничения двойственной задачи будут неравенствами вида "$\ge$".

Первое ограничение прямой задачи является неравенством вида "$\le$", значит переменная $u_1 \ge 0$

Второе ограничение прямой задачи является неравенством вида "$\ge$", значит переменная $u_2 \le 0$

Получим: $g(u) = u_1 + 2u_2 \to min$

$-u_1 + 2u_2 \ge -1$ (1)

$u_1 - u_2 \ge 2$ (2)

$u_1 \ge 0,\ u_2 \le 0$ (3)

Для графического решения задачи построим МДР, задаваемое ограничениями (1)-(3).

Ограничение (1) в задаче определяется прямой $-u_1 + 2u_2 = -1$, проходящей через точки:

u_1	u_2
0	$-\frac{1}{2}$
1	0

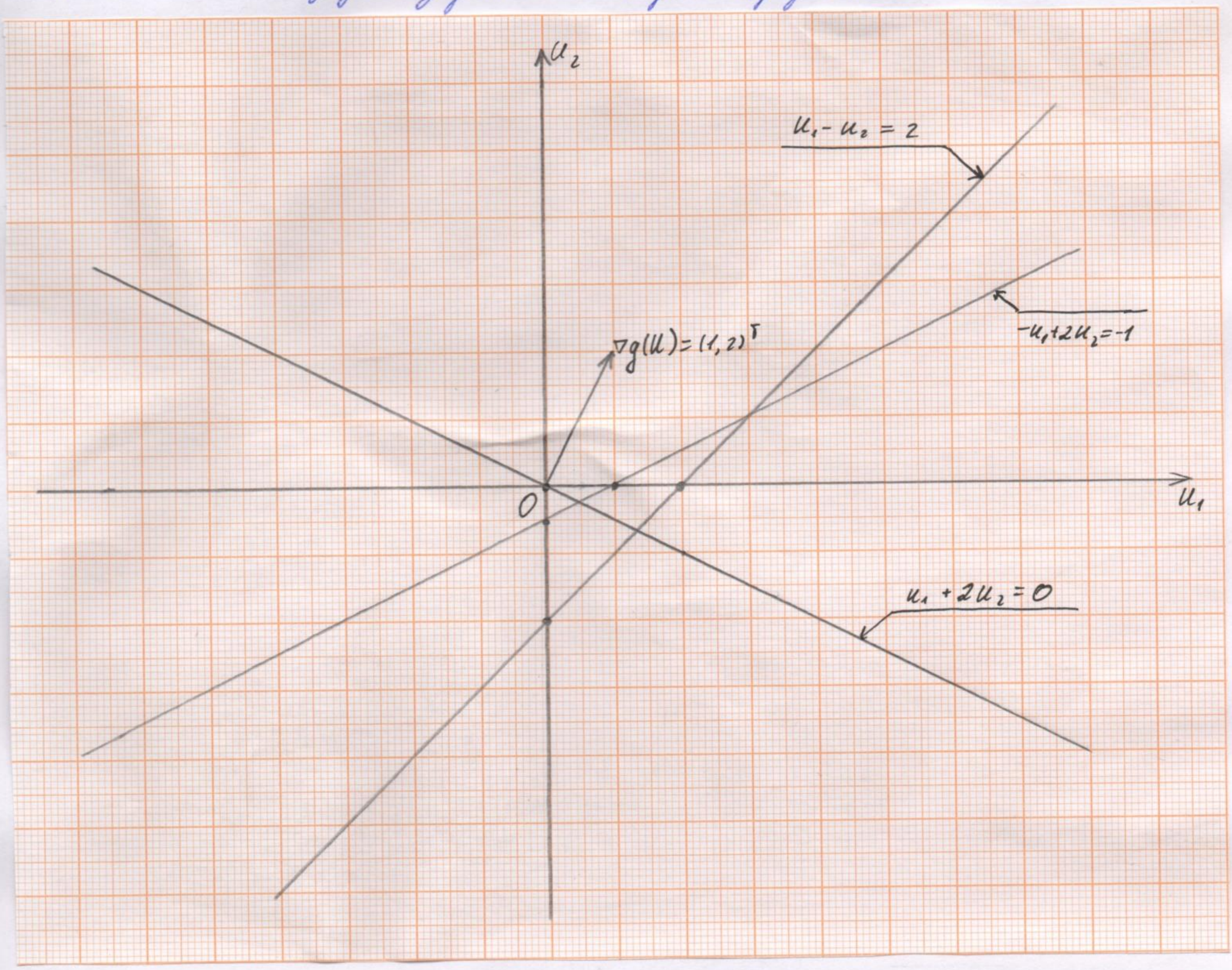
МДР в задаче будет ограничено этой прямой и будет содержать точку (0,0), т.к. при подстановке координат этой точки в ограничение (1) получается верное нер-во: $-0 + 2 \cdot 0 \ge -1$.

Ограничение (2) в задаче определяется прямой $u_1 - u_2 = 2$, проходящей через точки:

u_1	u_2
0	-2
2	0

МДР в задаче будет ограничено этой прямой и НЕ будет содержать точку (0,0), т.к. при подстановке координат этой точки в ограничение (2) получается неверное нер-во: $0-0 \geq 2$.

Ограничения (3) в задаче задают IV-ю четверть координатной плоскости.



МДР включает все точки, в к-рых ограничения выполняются одновременно. Отметим крайние точки получившегося множества: —

Построим градиент ф-ции $\nabla g(U) = (1,2)^T$ в точке (0,0).

Построим линию уровня ф-ции $g(U) = C$, проходящую через точку (0,0). Для этого найдём значение константы C, подставив координаты точки в целевую ф-цию: $C = 0 + 2\cdot 0 = 0$, и затем построим прямую $u_1 + 2u_2 = 0$. Заметим, что построенная прямая перпендикулярна градиенту.

Как видно из чертежа, МДР для данной двойственной задачи НЕ существует, следовательно, минимума в задаче нет.

Задание б). Пример 2.

Дано: $f(X) = x_1 - 2x_2 \to extr$

$-x_1 + x_2 \leq 1$, (1)

$2x_1 - x_2 \geq 2$, (2)

$x_1, x_2 \geq 0$. (3)

Найти решение двойственной задачи, используя решение симплекс-методом прямой задачи.

Решение:

Решим прямую задачу симплекс-методом (см. ИДЗ №3). Рассмотрим 1-ю и последнюю таблицы.

Таблица №1

			-1	2	0	0	$-M$	c_j
$C_{iБ}$	БП	БР	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r_i
0	x_3	1	-1	1	1	0	0	-1
$-M$	x_5	2	2	-1	0	-1	1	1
		Δ	$2M-1$	$2-M$	0	$-M$	0	
					1-й столбец		2-й столбец	

Завершение решения прямой задачи находится в таблице №3, т.к. среди элементов ④-столбца нет ни одного положительного элемента.

Таблица №3

			-1	2	0	0	$-M$	c_j
$C_{iБ}$	БП	БР	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r_i
2	x_2	4	0	1	2	-1	1	
-1	x_1	3	1	0	1	-1	1	
		Δ	0	0	-3	1	$-M-1$	
						④-столбец		

Среди элементов -столбца нет положительных, следовательно, прямая задача не имеет решения (в следствии неограниченности МДР), следовательно, двойственная задача тоже не имеет решения, согласно утверждению 1.

Полученные выводы об отсутствии решений прямой и двойственной задач совпадают.

Ответ: двойственная задача не имеет решения, согласно утверждению 1.