Кощебалов О.С. ; М80-309Б-22 ; 5.05.25

$k=9$; $l=15$ Задание III , Вариант - 9

Вычислите интеграл Лебега-Стилтьеса $\int\limits_{[a;b]} f(x)\,dF(x)$

$[a;b]=[-2k,\ 3l]$; $f(x)=\sin kx + 4\chi(2x-\frac{l}{5}) - 3x^2$

$F(x)=e^x+3\chi(x-1)+\chi(2x-k)+x^2\operatorname{sgn}x$

Тогда: $[a;b]=[-18;45]$

$f(x)=\sin(9x)+4\chi(2x-3)-3x^2$

$F(x)=e^x+3\chi(x-1)+\chi(2x-9)+x^2\operatorname{sgn}x$

Решение: $\int\limits_{-18}^{45}\underbrace{\sin(9x)+4\chi(2x-3)-3x^2}_{f(x)}\,d\big(\underbrace{e^x+3\chi(x-1)+\chi(2x-9)+x^2\operatorname{sgn}x}_{F(x)}\big) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_{-18}^{45} f(x)\,d\left[e^x+3\chi(x-1)+\chi(2x-9)+x^2\operatorname{sgn}x\right]$, разобьём наш интеграл на части, тогда получим:

$$\int\limits_{-18}^{45} f(x)\,dF(x)=\overset{1)}{\int\limits_{-18}^{45} f(x)\,d(e^x)}+\overset{2)}{\int\limits_{-18}^{45} f(x)\,d(3\chi(x-1))}+\overset{3)}{\int\limits_{-18}^{45} f(x)\,d(\chi(2x-9))}+\overset{4)}{\int\limits_{-18}^{45} f(x)\,d(x^2\operatorname{sgn}x)},$$

вычислим каждый из них:

1) $\int\limits_{-18}^{45} f(x)\,d(e^x)=\int\limits_{-18}^{45} f(x)\cdot e^x dx=\int\limits_{-18}^{45}\sin(9x)e^x dx+4\int\limits_{-18}^{45}\chi(2x-3)e^x dx-3\int\limits_{-18}^{45}x^2e^x dx =$

$=$ [воспользуемся ЭВМ для вычисления интегралов (первого)] $=3{,}8117172\cdot10^{18}+4(e^{45}-e^{1,5})-6{,}7667683\cdot10^{22} =$

$\int\limits_{-18}^{45}\chi(2x-3)e^x dx$, ф-ция $\chi(2x-3)=1$, только если $2x-3\geq0$, т.е. при $x\geq1{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_{1,5}^{45}e^x dx = e^x\Big|_{1,5}^{45}=e^{45}-e^{1,5}$

$u=x$ $du=dx$
$dv=e^x dx$ $v=e^x$

$\int\limits_{-18}^{45}x^2e^x dx=\left[\begin{matrix}u=x^2 & du=2xdx\\ dv=e^xdx & v=e^x\end{matrix}\right]=x^2e^x\Big|_{-18}^{45}-\int\limits_{-18}^{45}2xe^x dx=x^2e^x\Big|_{-18}^{45}-2\Big(xe^x\Big|_{-18}^{45}-\overbrace{\int\limits_{-18}^{45}e^x dx}^{e^x|_{-18}^{45}}\Big)=$

$=6{,}7667683\cdot10^{22}$

$= \boxed{-6{,}75241\cdot10^{22}}$

2) $\int\limits_{-18}^{45} f(x)\,d(3\chi(x-1))=3\int\limits_{-18}^{45} f(x)\,d\chi(x-1)=$ [скачок в $x=1$] $\Rightarrow$ наш интеграл $=$

$=f(1)=\sin(9)+4\cancelto{0}{\chi(2-3)}-3=\sin(9)-3\approx-2{,}58788 \ \Big|\cdot3\approx\boxed{-7{,}76364}$

3) $\int\limits_{-18}^{45} f(x)\, d\left(\chi(2x-9)\right) = $ [скачок в $x=4,5$] $\Rightarrow f(4,5) = \sin(9\cdot 4,5) + 4\,\overset{1}{\cancel{\chi(9-3)}} - 3\cdot 4,5^2 =$

$= \sin(40,5) + 4 - 60,75 \approx \boxed{-56,41584}$

4) $\int\limits_{-18}^{45} f(x)\, d(x^2 \cdot \operatorname{sgn} x) = $ [разбиваем на два участка] $=$

$= \int\limits_{-18}^{0} f(x)\, d(-x^2) + \int\limits_{0}^{45} f(x)\, d(x^2) = -\int\limits_{-18}^{0} f(x)\cdot 2x\,dx + \int\limits_{0}^{45} f(x)\,2x\,dx = \boxed{-6300299,99369481}$

$-\int\limits_{-18}^{0} f(x)\cdot 2x\,dx = -\int\limits_{-18}^{0} 2x\sin(9x)\,dx - \overbrace{\cancel{\int\limits_{-18}^{0} 8x\cdot\chi(2x-3)\,dx}}^{\text{на всем отрезке ф-ция хевисайда ноль}}_{=0} + \overbrace{\int\limits_{-18}^{0} 6x^3\,dx}^{\frac{6x^4}{4}\Big|_{-18}^{0}} =$

$= 0,85008819 - 157464 = \underline{-157463,14991181}$

$\int\limits_{-18}^{0} 2x\sin(9x)\,dx = \left[\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin(9x)dx, & v = -\frac{\cos(9x)}{9}\end{matrix}\right] = 2\left(-\frac{x\cos(9x)}{9}\Big|_{-18}^{0} + \overbrace{\int\limits_{-18}^{0} \frac{\cos(9x)}{9}\,dx}^{\frac{\sin(9x)}{81}\Big|_{-18}^{0}}\right) \approx$

$\approx -0,85008819$

$\int\limits_{0}^{45} f(x)\,2x\,dx = \overbrace{\int\limits_{0}^{45} 2x\sin(9x)\,dx}^{\text{посчитан ранее, ставим др. пределы}} + \overbrace{\int\limits_{0}^{45} 8x\cdot\chi(2x-3)\,dx}^{\text{ф-ция } \chi(2x-3)>0 \text{ при } x\geq 1,5} - 6\overbrace{\int\limits_{0}^{45} x^3\,dx}^{\frac{6x^4}{4}\Big|_{0}^{45}} =$

$= 9,656217 + \int\limits_{1,5}^{45} 8x\,dx - \frac{6x^4}{4}\Big|_{0}^{45} = 9,656217 + 8091 - 6150937,5 =$

$= \underline{-5142836,843783}$

Соберём все вместе:

$\int\limits_{-18}^{45} f(x)\, dF(x) = -6,75241\cdot 10^{22} - 7,76364 - 56,41584 - 6300299,99369481 \approx$

$\approx \boxed{-6,75241\cdot 10^{22}}$

<u>Ответ</u>: $\int\limits_{-18}^{45} f(x)\, dF(x) \approx -6,75241\cdot 10^{22}$