1. Фазовое пространство. Понятие о фазовом потоке, как об однопараметрической группе преобразований. Фазовая кривая, интегральная кривая.

Фазовое пространство эволюционных процессов называется множество всех его состояний. Состояние процесса определяется значением конечного числа параметров.
Однопараметрической группой преобразований множества называется действие на нем группы всех вещественных чисел. Однопараметрическая группа преобразований множества M называется также фазовым потоком с фазовым пространством M.
Пусть M – фазовое пространство. $g^t: M \to M, t \in R, g^{t+s} = g^s \circ g^t, g^0 x = x, g^{-t} \circ g^t = g^0$.
Движением точки x называется отображение $R \to N\ \forall t \in R, x \in M$, его образ есть $\{g^t x\}$.
Множество $\{g^t x, t \in R\}$ называется фазовой кривой (проходящей через x).
Расширенным фазовым пространством называется RxM.
Интегральной кривой называется график движения.

2. Фазовый поток как однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Фазовая скорость. Особые точки. Пример.

Диффеоморфизмом называется отображение, гладкое вместе со своим обратным.
Фазовым потоком дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$ называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов, для которой v является векторным полем фазовой скорости.
Точки, где v обращается в 0, называются положениями равновесия (также стационарными точками или особыми точками) векторного поля.
Пример. Фазовый поток уравнения $\dot{x} = kx$ есть группа $\{e^{kt}\}$

3. Дифференциальное уравнение как связь фазового потока и векторного поля над фазовым пространством. Пример.

Пусть v — векторное поле в области U n-мерного фазового пространства. Автономное дифференциальное уравнение, заданное полем v, — это уравнение $\dot{x} = v(x), x \in U \subset R^n$. Решением такого уравнения называется гладкое отображение $\varphi: I \to U$ интервала оси времени в фазовое пространство, для которого $\frac{d\varphi}{dt} = v(\varphi(t))$ при всех t из I. Образ отображения φ называется фазовой кривой, а график отображения φ — интегральной кривой. Интегральная кривая лежит в прямом произведении оси времени на фазовое пространство.
Пример: дифференциальное уравнение системы хищник — жертва. Если бы щук не было, караси размножались бы экспоненциально, со скоростью $\dot{x} = kx$, пропорциональной их количеству x. Если y — количество щук, то следует учесть карасей, съеденных щуками. Мы предположим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу карасей, так и числу щук; тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение $\dot{x} = kx - axy$. Что касается щук, то без карасей они вымирают: $\dot{y} = -ly$, в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей: $\dot{y} = -ly + bxy$.

4. Фазовый поток на прямой. Решение задачи Коши. Пример неоднозначности ее решения.

Одномерный фазовый поток
$M \subset R, x \in R, v(x) \in R$

Задача Коши ($Cauchy$) $\begin{cases} \dot{x} = v(x) - \text{ду} \\ x(0) = x_0 - \text{нач. усл.} \end{cases}$

Решение:
Если $v(x_0) = 0$, то $x(t) = x_0$
Если $v(x_0) \neq 0$. Пусть $v(x) = C(M)$. $\exists [\alpha, \beta], x_0 \in (\alpha, \beta): \forall x \in [\alpha, \beta]: v(x) \neq 0\ \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{v(\xi)} = t$,
$x = \varphi(x_0, t) \to$ решение задачи Коши

Пример1. $\begin{cases} \dot{x} = x^{\frac{1}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

$x = 0$ – решение

$x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}$ – тоже решение

$\dot{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot t^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$

5. Неавтономное уравнение Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$\begin{cases} \dot{x} = g(x, y) \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$

$x = x(t)$
$y = y(t)$
$g(x, y) \neq 0$ на $A \subset M$
$\dot{x} \neq 0$
$x = x(t) \to t = t(x)$
$y = y(t) = y(t(x)) = \varphi(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$

$\frac{dy}{dx} = h(x, y)$ – получили интегральную кривую, можем найти фазовые кривые, но не знаем, как по ним двигаться (не найдем $x(t)$ и $y(t)$)

$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)} - \text{частный случай ур. с разд. пер.} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Если $f(y_0) = 0 \to y = y_0$
Будем считать что $g(x_0) \neq 0$ (в нек. ок – ти x_0)

$\frac{dy}{f(y)} = \frac{dx}{g(x)}$. $\quad \int \frac{dy}{f(y)} = \int \frac{dx}{g(x)}$

$\int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\eta}{g(\eta)}$.

$y = \varphi(x, x_0, y_0) = \varphi(x, x_0, y(x_0))$

$F(\xi)$ – первооб. для $\frac{1}{f(\xi)}$

$G(\eta)$ – первооб. для $\frac{1}{g(\eta)}$

$F(y) - F(y_0) = G(x) - G(x_0)$
$y = F^{-1}(G(x) - G(x_0) + F(y_0))$
$y_0 = F^{-1}(F(y_0))$

$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)} \to \begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y) \\ \frac{dx}{dt} = g(x) \end{cases}$

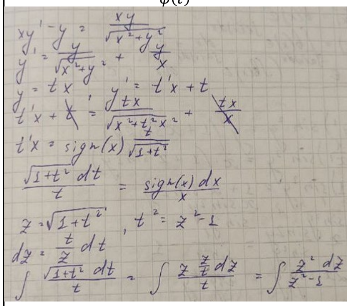
$t = \int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{f(\xi)} \quad t = \int_{x_0}^{x} \frac{d\eta}{f(\eta)}$

$\frac{dy}{dx} = F^{-1}(G(x) - G(x_0) + F(y_0)) \cdot G'(x) = \frac{1}{F'(y)} \cdot G'(x) = f(y) \cdot \frac{1}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)}$

6. Однородные ДУ 1 порядка

$y' = f(x, y), f(x, y)$ – однор. функция
$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$. Пример: $f(x, y) = \frac{x}{y}$

$y = tx, y' = t'x + t, t'x + t = f(x, tx) = f(1, t)$,
$t'x = f(1, t) - t = \varphi(t), \frac{dt}{d\varphi} = \frac{dx}{x}$ ($\varphi(t) = 0$ рассморим отдельно), $\int \frac{dt}{\varphi(t)} = \ln|x| + c$,


$xy' - y = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{x}$
$y = tx, \quad y' = t'x + t$
$t'x + \cancel{t} = \frac{tx}{\sqrt{x^2 + t^2 x^2}} + \cancel{\frac{tx}{x}}$
$t'x = \operatorname{sign}(x) \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$
$\frac{\sqrt{1 + t^2}\, dt}{t} = \frac{\operatorname{sign}(x)\, dx}{x}$
$z = \sqrt{1 + t^2}, \quad t^2 = z^2 - 1$
$dz = \frac{t}{z} dt$
$\int \frac{\sqrt{1 + t^2}\, dt}{t} = \int \frac{z \frac{z}{t} dz}{t} = \int \frac{z^2\, dz}{z^2 - 1}$

7. Линейные ДУ 1 порядка

$y' + a(x)y = b(x)$

Решим $y' + a(x)y = 0$. $\frac{dy}{y} = -a(x)dx$.

$\ln|y| = -\int a(x)dx + c_1$. $|y| = c_2 e^{-\int a(x)dx}, c_2 = e^{c_1}$
$y = ce^{-\int a(x)dx}$. Пусть $y = c(x)e^{-\int a(x)dx}$.
$y' = c'(x)e^{-\int a(x)dx} + c(x)e^{-\int a(x)dx} \cdot (-a(x)) + a(x) \cdot c(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$.
$c'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)\ c(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + \hat{c}$
$y = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + \hat{c}\right)$.

8. Уравнения Бернулли

$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$
$y = z^m$ – 1 способ
$mz^{m-1}z' + a(x)z^m = b(x)z^{\alpha m}$
$mz' + a(x)z = b(x)z^{\alpha m - m + 1}$

$\alpha m - m + 1 = 0$. $m = \frac{1}{1 - \alpha}$. $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$y(x) = u(x)v(x)$ – 2 способ
$u'v + uv' + a(x)uv = b(x)u^\alpha v^\alpha$
$u'v + u(v' + a(x)v) = b(x)u^\alpha v^\alpha$
Пусть $v' + a(x)v = 0$, тогда
$u'v = b(x)u^\alpha v^\alpha$

$\begin{cases} u' = b(x)u^\alpha v^{\alpha - 1} \\ v' + a(x)v = 0 \to v(x) = c_1 e^{-\int a(x)dx} \end{cases}$

$\frac{du}{u^\alpha} = b(x)(v(x))^{\alpha - 1}dx$

9. Уравнения Риккати

$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$
Пусть $y = y_1(x)$ – частное решение ур.
$y = z + y_1$
$z' + y_1' + a(x)(z + y_1) + b(x)(z + y_1)^2 = c(x)$
$z' + a(x)z + \underbrace{y_1' + a(x)y_1 + b(x)y_1^2}_{c(x)} + b(x)z^2 + 2b(x)zy_1 = c(x)$
$z' + (a(x) + 2b(x)y_1)z = -b(x)z^2$ – Бернулли

10. ДУ в полных дифференциалах, интегрирующий множитель

$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$
$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Пусть $\exists G(x, y): \frac{\partial G}{\partial x} = M(x, y), \frac{\partial G}{\partial y} = N(x, y)$

$\frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy = 0, dG = 0 \to$
$G(x, y) = c = const \to y = f(x, c)$ – общее реш.

Утв. $\exists G \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Утв. $\forall M(x, y), N(x, y)\ \exists P(x, y): \frac{\partial (PM)}{\partial y} = \frac{\partial (PN)}{\partial x}$

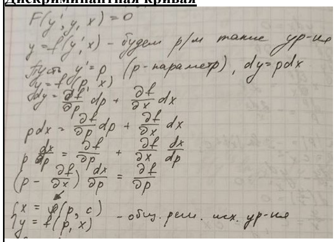
Если есть уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ $\exists P(x, y): PMdx + PNdy = 0$ – ур. в пол. диф., его реш. имеет вид $G(x, y) = c, \frac{\partial G}{\partial x} = PM, \frac{\partial G}{\partial y} = PN$

$P(x, y)$ – инт. мн. Как его найти?

$\frac{\partial (PM)}{\partial y} = \frac{\partial (PN)}{\partial x}$. $M\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial N}{\partial x}$

$M\frac{\partial P}{\partial y} - N\frac{\partial P}{\partial x} = P\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$

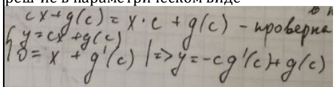
11. Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной. Общее решение. Особое решение. Дискриминантная кривая


$F(y', y, x) = 0$
$y = f(y', x)$ – будем р/м такие ур-ия
Пусть $y' = p$ (p – параметр), $dy = pdx$
$y = f(p, x)$
$dy = \frac{\partial f}{\partial p}dp + \frac{\partial f}{\partial x}dx$
$pdx = \frac{\partial f}{\partial p}dp + \frac{\partial f}{\partial x}dx$
$p\frac{dx}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dp}$
$\left(p - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial p}$
$\begin{cases} x = \varphi(p, c) \\ y = f(p, x) \end{cases}$ – общ. реш. исх. ур-ия

Особое решение - решение, график которого в каждой точке касается графика одного из решений входящих в общее решение

12. Уравнение Лагранжа. Особые решения. Уравнение Клеро. Общее решение.

Уравнение Лагранжа имеет следующий вид
$y = xf(y') + g(y')$
$y' = p$
$y = xf(p) + g(p)$
$dy = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp$
$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp$
$*\ (p - f(p))dx = (xf'(p) + g'(p))dp$
Пусть $p = f(p)$, p_0 – корень ур. $(p_0 = f(p_0))$,
$p = p_0$ – реш. частное (*)
$y = xf(p_0) + g(p_0)$ – частн. реш. исходного ур-я.
$y = xp_0 + g(p_0)$. Далее решить лин. ур-е (*)
Уравнение Клеро
$y = xy' + g(y')$
$y' = p, y = xp + g(p)$
$pdx = dy = pdx + xdp + g'(p) + dp$
$0 = (x + g'(p))dp$
1) $dp = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow y = cx + g(c)$- общ. реш.
2) $x = -g'(p) \Rightarrow y = -pg'(p) + g(p)$ – частное реш-ие в параметрическом виде


$cx + g(c) = x \cdot c + g(c)$ – проверка
$\begin{cases} y = cx + g(c) \\ 0 = x + g'(c) \end{cases} \Rightarrow y = -cg'(c) + g(c)$

13. Фазовый поток в n-мерном пространстве. Нормальная система дифференциальных уравнений. Приведение ДУ n-го порядка к нормальной системе ДУ.

$U \subset R^{(n+1)}$, в U задано векторное поле
$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n, x) \in U \subset R^{(n+1)}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1, \dots, y_n, x) \\ \dots \\ \varphi_{n+1}(y_1, \dots, y_n, x) \end{pmatrix}, \dot{\vec{y}} = \vec{v}$

$\begin{cases} \dot{y}_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_n, x) \\ \dots \\ \dot{x} = \varphi_{n+1}(y_1, \dots, y_n, x) \end{cases}$

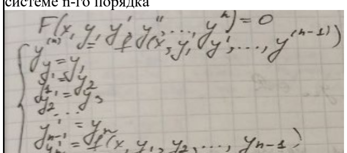
$\dot{y}_k = \frac{dy_k}{dt}\ \ \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$\frac{dy_k}{dx} = y_k' = \frac{\dot{y}_k}{\dot{x}}$

$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, \dots, y_n, x) \\ \dots \\ y_n' = f_k(y_1, \dots, y_n, x) \end{cases}$

, где $f_k(y_1, \dots, y_n, x) = \frac{\varphi_k(y_1, \dots, y_k)}{\varphi_{n+1}(y_1, \dots, y_{n+1})}$ – нормальная система ДУ n-го порядка.

Частным решением нормальной системы ДУ n-го порядка называют набор функций $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$, при подстановке которых в эту систему, все ее уравнения превращаются в тождество. **Общим решением** нормальной системы ДУ наз-ся набор ф-ций, к-рый зависит от x и n произвольных постоянных
$y_1 = \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \dots,$
$y_n = \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n)$
Такой, что при подстановке вместо $C_1, \dots, C_n$ произвольных чисел получается частное решение.
Преобразование ур-я n-го порядка к нормальной системе n-го порядка


$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$
$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$
$\begin{cases} y = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$

14. Приведение нормальной системы n дифференциальных уравнений к одному уравнению n-ого порядка.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases}$$

Продифференцируем первое из них по x, получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

или $y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$
Повторяя это действие в итоге получим
$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$
Из оставшихся n-1 уравнений изначальной системы и уравнений, получившихся в результате дифференцирования первого, можно выразить $y_2, \dots, y_n$ через $x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$. Внеся эти выражение в последнее уравнение, получим
$y_1^{(n)} = \Phi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})$

15. Понижение порядка дифференциального уравнения, не содержащего явно независимой переменной.

$y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{n-1}), y = \phi(x)$ – решение
Если $\phi'(x)^{>0}_{(<0)}, x \in (\alpha; \beta) \to \exists x = \phi^{-1}(y), x' = \frac{1}{y}$
Пусть $y' = p$,

$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} * \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$

$p = p(x) = p(\phi^{-1}(y)), \frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dx} * \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dy}{dx}}$

$y''' = (y'')' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right)p + \frac{dp}{dy} * \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx}p + \frac{dp}{dy}\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p$

$y''' = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)p$

Подставим в исх. ур-ие выражения для всех производных

$\frac{d^{(n-1)}p}{dy^{(n-1)}} = g\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{(n-2)}p}{dy^{(n-2)}}\right)$

16. Понижение порядка обобщенно-однородного уравнения.

$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ Пусть ур-ие не мен-ся при замене $x = kx, y = k^m y, y' = k^{m-1}y', \dots,$
$y^{(n)} = k^{(m-n)}y^{(n)}$ k – произвольное число, m – фикс. $x = e^t$, t - новая независимая переменная
$y = e^{mt}z, z = z(t)$
$y(z, z', \dots, z^{(n)}) = 0$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \left(me^{(m-1)t}z + e^{mt}\frac{dz}{dt}\right)e^{-t}$

17. Методы понижения порядка ДУ, отличные от указанных в двух предыдущих вопросах.

1) $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$
$z = y^{(k)}$
$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$
2) Уравнение $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ однородно по y, если при замене y на ky, y' на $ky', \dots, y^{(n)}$ на $ky^{(n)}$
$\Rightarrow y' = zy$ – замена $(z = z(x))$,
$y'' = (zy)' = z'y + zy' = z'y + z^2 y = y(z' + z^2)$
$y''' = (y(z' + z^2))' = y'(z' + z^2) + y(z'' + 2zz') = zy(z' + z^2) + y(z'' + 2zz') = y(z'' + 3zz' + z^3)$
$y^{(n)} = y(z^{(n-1)} + \cdots)$
$f\left(x, 1, z, (z' + z^2), \dots, (z^{(n-1)} + \cdots)\right) = 0$
3) Выделение интегрирующей комбинации
$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$
$g_1(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = g_2(x, y, y', \dots, y^{(n)})$
$\left(h_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\right)' = \left(h_2(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\right)'$
$h_1(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = h_2(x, y, \dots, y^{(n-1)}) + C$

18. Условие Липшица. Примеры выполнения и невыполнения.

$f(x, y): U \to R$. $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y в обл. U, если
$\exists N \in R^+ \forall x, y_1, y_2((x, y_1)$ и $(x, y_2) \in U): |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$

Пример: $\begin{cases} y, y \in [0; 1] \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, y \in (1; 2] \end{cases}$, $f(y)$ не является диф-мой на [0;2]. Для $f(y)$ вып. Усл. Липшица на [0;2]: $N = 1, |f(y_1) - f(y_2)| \leq |y_1 - y_2|$
Пример: $f(y) = \sqrt{y}, U = (0; 1), f \in D(U)$ – дифф. На (0;1). $f(y_1) - f(y_2) = f'(\hat{y})(y_1 - y_2)$,

$y_1 < \hat{y} < y_2$. $f'(\hat{y}) = \frac{1}{2\sqrt{\hat{y}}}, y_2 \to 0: f(\hat{y}) \to \infty$

Данная ф-ция не удовл. усл. Липщица на интервале (0;1). $[\varepsilon; 1)$ – на таком множ. $f(y)$ удовл. усл. Липшица
Если на рассматриваемом множ-ве ф-ция имеет ограниченную производную по y, то она удовлетворяет условию Липшица по y на этом множестве.

19. Преобразование задачи Коши в интегральное уравнение (с обоснованием)

$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y)(*) \\ y(x_0) = y_0(**) \end{cases}, (*)(**) \Leftrightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)d\xi$

Обозначим (***). Док-во ед-ти: пусть $y = \phi(x)$- решение интегрального ур-я (***). Т.е.
$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi(\xi))d\xi$, заметим, что
$\phi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(\xi, \phi(\xi))d\xi = y_0 \Rightarrow (**)$, кроме того, $\phi'(x) = (y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi(\xi))d\xi)' = f(x, \phi(x)) \Rightarrow (*)$. Далее пусть $y = \phi(x)$ решение (*), (**), т.е. $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ и $\phi(x_0) = y_0 \Rightarrow$
$\phi(x) = \int f(x, \phi(x))dx + C$ или

$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi(\xi))d\xi + C \to \phi(x_0) = C = y_0$

20. Метод последовательных приближений решения дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0) d\,\xi$

$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi)) d\,\xi$ и тд.

Посл-ть $y_n(x)$ фундаментальна.

21. Теорема Коши-Пеано существования и единственности решений задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Доказательство существования.

$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y)(*) \\ y(x_0) = y_0(**) \end{cases}$, Пусть

1)$f(x,y)$: $[x_0 - a; x_0 + a] \times [y_0 - b; y_0 + b] \to R$, $a > 0, b > 0$, декартово произведение $-$ A

2)$f(x,y) \in C(A)$(непрер. вA)

Из 1,2 $\Rightarrow \exists M, \forall (x,y) \in A: |f(x,y)| \le M$

3) $f(x,y)$удовлетворяет в области A условию Липшица по переменной *y.* Тогда

1,2,3 $\Rightarrow \exists y = \phi(x): [x_0 - h; x_0 + h] \to R$, где $h = min\,\{a, \frac{b}{M}\}$ явл-ся реш-ием ур-я (*) и удовлетворяющее усл-ю (**), т.е.

$\dfrac{d\phi(x)}{dx} = f(x, \phi(x))$и$y_0 = \phi(x_0)$ (Коши)

1,2,3 $\Rightarrow y = \phi(x) -$ единственное решение задачи Коши$(*)(**)$

Док-во см в файле 206.

22. Теорема Коши-Пеано существования и единственности решений задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Доказательство единственности

$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y)(*) \\ y(x_0) = y_0(**) \end{cases}$, Пусть

1)$f(x,y)$: $[x_0 - a; x_0 + a] \times [y_0 - b; y_0 + b] \to R$, $a > 0, b > 0$, декартово произведение $-$ A

2)$f(x,y) \in C(A)$(непрер. вA)

Из 1,2 $\Rightarrow \exists M, \forall (x,y) \in A: |f(x,y)| \le M$

3) $f(x,y)$удовлетворяет в области A условию Липшица по переменной *y.* Тогда

1,2,3 $\Rightarrow \exists y = \phi(x): [x_0 - h; x_0 + h] \to R$, где $h = min\,\{a, \frac{b}{M}\}$ явл-ся реш-ием ур-я (*) и удовлетворяющее усл-ю (**), т.е.

$\dfrac{d\phi(x)}{dx} = f(x, \phi(x))$и$y_0 = \phi(x_0)$ (Коши)

1,2,3 $\Rightarrow y = \phi(x) -$ единственное решение задачи Коши$(*)(**)$

Док-во см в файле 206.

23. Теорема Коши-Пеано для дифференциального уравнения n-ого порядка и для нормальной системы n дифференциальных уравнений (формулировки)

Для n-го порядка:

Пусть $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}): U \to R^{n+1}, U \subset R^{n+1}$, $f(\dots) \in C(U)$, $(x_0, y_0, y_01, \dots, y_{0n-1})$ – внутр. т. U

Тогда $\exists y = \phi(x)$ удовл. как ур-ю, так и нач. условиям и опред. в некоторой окрестности т. x_0

Если при этом ф-ция f удовл. усл. Липшица, то всем своим аргументам, кроме первого, в обл. U, то это реш. единственное.

Для системы:

Пусть $f_i(x, y_1, \dots, y_n): U \to R, U \subset R^{n+1}$

$i = 1, \dots, n f_i(x, y_1, \dots, y_n) \in C(U)$

$(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$- внутр. точка обл. U

Тогда задача Коши имеет решения

$\begin{cases} y_1 = \phi_1(x) \\ \quad\dots \\ y_n = \phi_n(x) \end{cases}$, реш-ие опред. как мин до границы обл. U. Если при этом все ф-ции f_i удовл. Усл. Липшица по каждому из $y_1, \dots, y_n$ во всей обл. U, то это реш-ие единственное.

24. Линейное дифференциальное уравнение n-ого порядка. Теорема существования и единственности решения.

Лин. ур-ем n-го порядка наз. ур-ие вида

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)\,y = f(x)$, где $a_n(x)$ и $f(x)$ некоторые ф-ции

Если $f(x) \equiv 0$,то ур-ие наз. однородным

Если $f(x) \ne 0$, то ур $-$ ие наз. неоднородным

Пусть $L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y$

$L(y) = f(x) -$ ЛНДУ, $L(y) = 0 -$ ЛОДУ

$L(\phi(x)) = \psi(x), \phi(x) \in D^n(U)$

Назовем L дифференциальным оператором

Теорема: если ф-ци $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$ непр. на *[a;b]* и x_0 – внутр. т. этого отрезка ($x_0 \in [a;b]$), то задача Коши

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{01} \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1} \end{cases}$$

Где $y_0, y_{01}, \dots, y_{0n-1} \in R$ имеет ед. реш-ие $y = \phi(x)$ опред. на всем отрезке *[a;b]*

25. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения. Свойства их решений.

Лин. ур-ем n-го порядка наз. ур-ие вида

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)\,y = f(x)$, где $a_n(x)$ и $f(x)$ некоторые ф-ции

Если $f(x) \equiv 0$,то ур-ие наз. однородным

Если $f(x) \ne 0$, то ур $-$ ие наз. неоднородным

Пусть $L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y$

$L(y) = f(x) -$ ЛНДУ, $L(y) = 0 -$ ЛОДУ

$L(\phi(x)) = \psi(x), \phi(x) \in D^n(U)$

Назовем L дифференциальным оператором

Свойство диф. оператора:

1) явл. лин. Оператором

$L(\lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x)) = \lambda_1 L(\phi_1(x)) + \lambda_2 L(\phi_2(x))$

Св-ва реш:

1)Если $y_1(x) -$ реш. ур $-$ я $L(y) = 0$, то есть реш. однородного ур $-$ я, то $Cy_1 -$ тоже реш. этого ур $-$ я, $(C \in R)$

2)Если $y_1(x), y_2(x) -$ реш ур $-$ я $L(y) = 0$, то их сумма $y_1 + y_2 -$ тоже решение

3)Если $y_1(x), y_2(x) -$ реш. $L(y) = 0$, то $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) -$ реш. этого ур $-$ я $\forall C_1, C_2 \in R$

4)Если $y_1(x) -$ реш. ур $-$ я $L(y) = f(x)$, а $C_2y_2(x) -$ реш ЛОДУ, то $y_1(x) + C_2y_2(x) -$ реш ЛНДУ, $C_2 \in R$

5)Если $y_1(x), y_2(x) -$ реш $L(y) = f(x)$, то $y_1(x) - y_2(x) -$ реш $L(y) = 0$

Док-во: $L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = f(x) - f(x) = 0$

6)Если $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ – общее реш. $L(y) = f(x)$, а $y = \psi(x)$-частное реш. $L(y) = f(x)$ То $f(x, C_1, C_2, \dots, C_n) + \psi(x)$-общее реш. $L(y) = f(x)$. О. Н. = О. О. +Ч. Н.

26. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Теорема об определителе Вронского линейно зависимой системы функций.

Пусть $\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)$ - вектор-функции на $[a;b]$

$$\bar{y}_k = \begin{pmatrix} y_{k_1}(x) \\ \dots \\ y_{k_n}(x) \end{pmatrix},\ k = 1, \dots, n$$

Определитель Вронского системы вектор-функций:

$$W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] = \begin{vmatrix} y_{11}(x), \dots, y_{n1}(x) \\ \dots \\ y_{n1}(x), \dots, y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)$ линейно зависимы на $[a;b]$, если $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ не равные нулю одновременно, что линейная комбинация равна нулю.

Если $\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)$ ЛЗ на $[a;b]$, то $\forall x \in [a;b]: W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] = 0$.

27. Теорема об определителе Вронского системы линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения.

$$(*) \begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \dots \end{cases}$$

$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x),\ \bar{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$

Система называется однородной, если $\forall i,\ f_i(x) \equiv 0$.

Теорема

Если $\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)$ — ЛНЗ решения линейного однородного диффура, то $\forall x_0 \in [a;b]$: $W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] \ne 0$.

Следствие: любые $n+1$ решения однородной системы ЛЗ.

28. Теорема об общем виде решения линейного однородного дифференциального уравнения.

Общее решение однородной системы имеет вид

$$\bar{y}(x) = c_1\bar{y}_1(x) + \dots + c_n\bar{y}_n(x),$$

где $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ — ФСР, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

29. Фундаментальная система решений. Теорема существования фундаментальной системы решений.

Любые n ЛНЗ решений однородной системы называются ФСР системы.

Теорема

ФСР существует.

Доказательство

Рассмотрим n задач Коши:

$\begin{cases} (*) \\ \bar{y}(x_0) = (1, 0, \dots, 0)^T \end{cases}$

$\begin{cases} (*) \\ \bar{y}(x_0) = (0, 1, \dots, 0)^T \end{cases}$

$\dots$

$\begin{cases} (*) \\ \bar{y}(x_0) = (0, 0, \dots, 1)^T \end{cases}$

Пусть $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ — решения этих задач. Тогда

$$W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] = \det E = 1 \ne 0.$$

30. Могут ли два различных линейных однородных уравнения n-ого порядка иметь одну и ту же фундаментальную систему решений? Ответ обосновать.

по сути МОГУТ, ведь ФСР это ЛЮБЫЕ n ЛНЗ решений однородной системы диффуров.

31. Формула Остроградского-Лиувилля.

Для линейной однородной системы диффуров $y'(x) = A(x)y(x)$

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(\zeta)\,d\zeta\right)$$

32. Решение однородного линейного уравнения второго порядка с помощью формулы Остроградского-Лиувилля.

Пусть в $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, функции p, q непрерывны на $[a;b]$, а $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ — решения.

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$$

Подставив

$y_1'' = -py_1' - qy_1$

$y_2'' = -py_2' - qy_2$

получим

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -py_1' - qy_1 & -py_2' - qy_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -py_1' & -py_2' \end{vmatrix} = -pW.$$

Решения ЛНЗ, потому $W \ne 0 \implies$

$\frac{dW}{W} = -pdx$ — диффур с разделяющимися переменными.

Интегрируем

$$\ln|W| = -\int p(x)\,dx + \ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{W}{C}\right| = -\int p(x)\,dx$$

$$W = C\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$$

33. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-ого порядка методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x)$

Пусть $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n -$ реш. од. ур.

Если реш. неод. ур., то $c_i -$ функ. от x

$y' = \underbrace{c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots + c_n'y_n}_{=0} + c_1y_1' + c_2y_2' + \dots + c_ny_n'$

$y'' = \underbrace{c_1'y_1' + c_2'y_2' + \dots + c_n'y_n'}_{=0} + c_1y_1'' + c_2y_2'' + \dots + c_ny_n''$

...

$y^{(n-1)} = c_1'y_1^{(n-2)} + c_2'y_2^{(n-2)} + \dots + c_n'y_n^{(n-2)} + c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)} + \dots + c_ny_n^{(n-1)}$

$y^{(n)} = c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)} + c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)} + \dots + c_ny_n^{(n)}$

$c_1\overset{=0}{L[y_1]} + c_2\overset{=0}{L[y_2]} + \dots + c_n\overset{=0}{L[y_n]} + c_1'y_1^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)} = b(x)$

Осталось $c_1'y_1^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)} = b(x)$

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots + c_n'y_n = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + \dots + c_n'y_n' = 0 \\ \dots \\ c_1'y_1^{(n-2)} + c_2'y_2^{(n-2)} + \dots + c_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)} = b(x) \end{cases}$$

эта система имеет решение

$\begin{cases} c_1' = \varphi_1(x) \\ c_2' = \varphi_2(x) \\ \dots \\ c_n' = \varphi_n(x) \end{cases}$ $\begin{cases} c_1 = \int \varphi_1(x)dx \\ c_2 = \int \varphi_2(x)dx \\ \dots \\ c_n = \int \varphi_n(x)dx \end{cases}$

$W[y_1, \dots, y_n] \ne 0$

$y_{\text{общ неод}} = y_1\int \varphi_1(x)dx + y_2\int \varphi_2(x)dx + \dots + y_n\int \varphi_n(x)dx + \tilde{c}_1y_1 + \tilde{c}_2y_2 + \dots + \tilde{c}_ny_n$

34. Линейное однородное дифференциальное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Элементы фундаментальной системы решений в случае некратных действительных и комплексных корней.

$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0$, где $a_1, a_2 \dots, a_n \in R$

Пусть $y = e^{\lambda x}$

$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \dots + a_ne^{\lambda x} = 0$

$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 -$ хар. ур. исход. ЛОДУ

Рассмотрим 2 случаи:

1. Хар. ур. имеет n различных действ. корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R, \lambda_i \ne \lambda_j \Leftrightarrow i \ne j$

Тогда $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x} -$ ФСР

$W[y_1, \dots, y_n] =$

$$= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1e^{\lambda_1 x} & \lambda_2e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_ne^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)}e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{(n-1)}e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{(n-1)}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \lambda_2^{(n-1)} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

опр-ль Бандер монда

$$= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \cdot \prod_{j>i;\, i,j=1,\dots,n} (\lambda_j - \lambda_i) \ne 0$$

Общее реш.: $y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + \dots + c_ne^{\lambda_n x}$

2. Среди корней есть комплексные

$\lambda = a + ib, y = e^{(a+ib)x}$

$\hat{\lambda} = a - ib, \hat{y} = e^{(a-ib)x}$

Формула Эйлера: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$y = e^{\alpha x}(\cos bx + i\sin bx)$

$\hat{y} = e^{\alpha x}(\cos bx - i\sin bx)$

Корни $\lambda = (a \pm ib)$ дают вклад в ФСР в виде 2 част. решений $y_1 = e^{\alpha x}\cos bx$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin bx$

35. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Структура общего решения. Структура частного решения.Пример

$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = P(n)e^{\alpha x}\sin\beta x$ $(\cos\beta x)$

$a_1, a_2 \dots, a_n -$ дейст. числа. $\alpha, \beta \in R, \beta \ge 0$

$P_n(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$

Частное реш. этого ур. можно искать в виде

$y_{\text{ч.н.}} = x^s(Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x + R_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x)$

$s -$ кратность корня $(\alpha \pm \beta i)$ хар. уравнения, если $(\alpha \pm \beta i) -$ не корень, то $s = 0$.

$Q_m(x)$и $R_m(x) -$ многочлен ст. m с неопр. коэф.

Частные случаи

1. Пусть правая часть имеет вид: $Ae^{\alpha x}$, $y_{\text{ч.н.}} = Bx^se^{\alpha x}$, где $s -$ кратность корня α хар. ур.

2. Пусть правая часть имеет вид: $A\sin\beta x$ $(A\cos\beta x)$, $y_{\text{ч.н.}} = x^s(B\sin\beta x + C\cos\beta x)$, где $s -$ кратность корня $\pm i\beta$ хар. ур.

3. Пусть правая часть имеет вид: $P_m(x)$, $y_{\text{ч.н.}} = x^sQ_m(x)$, где $s -$ кратность корня o х. ур.

Общее решение равно сумме частного решения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

Пример: $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \lambda_{1,2} = 1, y_{\text{о.о.}} = c_1e^x + c_2xe^x$,

$y_{\text{ч.н.}} = (ax + b)e^{2x}$

$y_{\text{ч.н.}}' = (2ax + 2b + a)e^{2x}$

$y_{\text{ч.н.}}'' = (4ax + 4b + 4a)e^{2x}$

$a = 1, b = -2, y_{\text{ч.н.}} = (x - 2)e^{2x}$

$y_{\text{о.н.}} = e^x(c_1 + c_2x) + (x - 2)e^{2x}$

36. Особые точки фазового потока на плоскости. Линеаризация фазового потока в окрестности особой точки (приведение к нормальной системе двух линейных однородных дифференциальных уравнений).

$*\ \bar{y}' = \bar{f}(\bar{y}), \bar{y} = (y_1 \dots y_n)^T, \bar{f} = (f_1(\bar{y}), \dots, f_n(\bar{y}))^T$

Пусть при $\bar{y} = \bar{y}_0 = (y_{10} \dots y_{n0})^T$ $(y_{i0} \in R)$: $\bar{f}(\bar{y}_0) = 0$, тогда $\bar{y} = \bar{y}_0 -$ част. реш. системы $*$.

Решение системы $*$ вида $\bar{y} = \bar{y}_0$, где $\bar{y}_0 \in R^n - n -$ мерный числовой вектор, наз. положением равновесия системы $*$ или особой точкой.

$f_i(\bar{y}) = \overset{=0}{\bar{f}_i(\bar{y}_0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial \bar{y}_i}\Big|_{\bar{y}=\bar{y}_0} (\bar{y}_i - \bar{y}_{i0}) + \bar{o}(||\bar{y} - \bar{y}_0||)$

$\bar{y}' = \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}}\Big|_{\bar{y}=\bar{y}_0}}_{A-\text{мат. матр.}} (\bar{y} - \bar{y}_0) + \bar{o}(||\bar{y} - \bar{y}_0||)$

Таким образом в малой окрест $-$ ти точки (1,0) исх. сист. можно заменить лин. однор. сист. с ПК $\bar{y}' = A(\bar{y} - \bar{y}_0)$; $\bar{z} = \bar{y} - \bar{y}_0 \to \bar{z}' = A\bar{z}$.

Частный случай системы 2 $-$ го порядка

$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$; $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} -$ част. реш. ду

Пусть (x_0, y_0): $f(x_0, y_0) = 0, g(x_0, y_0) = 0$, т. е. $(x_0, y_0) -$ положение равновесия сист. ду

$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} (y - y_0) + \bar{o}\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$

$\dot{y} = \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} (y - y_0) + \bar{o}\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$

Не ограничивая общности будем считать что $x_0 = y_0 = 0$ (сдвиг системы координат). Обозначим част. производные буквами a, b, c, d и отбросим $\bar{o}$.

$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$ получили линеаризованную сист.

37. Классификация особых точек линейной системы второго порядка. Узел.

$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$ или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{cx + dy}{ax + by}$

$\det\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda_{1,2} -$ собств. числа

Если $\lambda_{1,2} \in R, \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0, \lambda_1 \ne \lambda_2$

$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \lambda_1\tilde{x}, & \tilde{x} = c_1e^{\lambda_1 t} \\ \dot{\tilde{y}} = \lambda_2\tilde{y}, & \tilde{y} = c_2e^{\lambda_2 t} \end{cases}$. $c_1 = c_2 = 0 \to \tilde{x} = \tilde{y} = 0$ особая точ.

$y = Ax^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

Пусть для определенности $|\lambda_2| > |\lambda_1|$