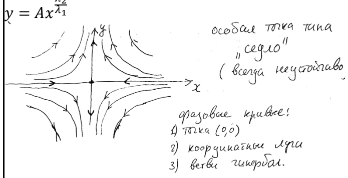
38. Классификация особых точек линейной системы второго порядка. Седло.

Если $\lambda_{1,2} \in R, \lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \lambda_1 \tilde{x}, & \tilde{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \dot{\tilde{y}} = \lambda_2 \tilde{y}, & \tilde{y} = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$y = Ax^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

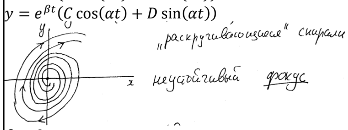


39. Классификация особых точек линейной системы второго порядка. Фокус.

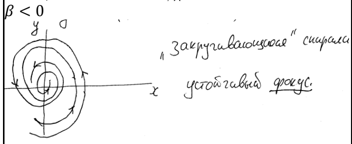
Если $\lambda_{1,2} = \beta \pm i\alpha, \beta > 0$

$x = e^{\beta t}(A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t))$

$y = e^{\beta t}(C\cos(\alpha t) + D\sin(\alpha t))$



$\beta < 0$



40. Классификация особых точек линейной системы второго порядка. Центр.

Если $\lambda_{1,2} = \pm i\alpha$ (чисто мнимые корни)

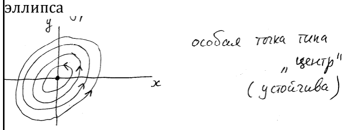
$x = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$,

$y = C\cos(\alpha t) + D\sin(\alpha t)$, тогда

$\cos(\alpha t) = \dfrac{Dx - By}{AD - BC}$,

$\sin(\alpha t) = \dfrac{Ay - Cx}{AD - BC}$, и

$(Dx - By)^2 + (Ay - Cx)^2 = (AD - BC)^2$ – ур. эллипса

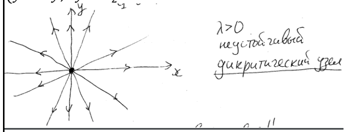


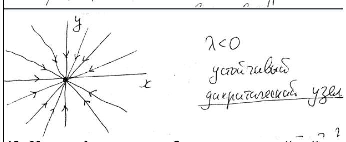
41. Классификация особых точек линейной системы 2 порядка. Дикритический узел.

Если $\lambda_{1,2} \in R, \lambda_{1,2} \neq 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Пусть геометрическая кратность 2, тогда жорданова форма матрицы системы $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \lambda \tilde{x}, & \tilde{x} = c_1 e^{\lambda t} \\ \dot{\tilde{y}} = \lambda \tilde{y}, & \tilde{y} = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$, если $c_1 \neq 0$, то $y = Ax$



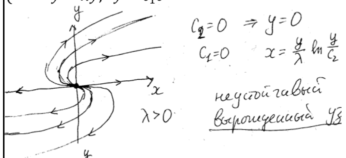


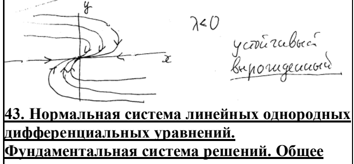
42. Классификация особых точек линейной системы 2 порядка. Вырожденный узел.

Если $\lambda_{1,2} \in R, \lambda_{1,2} \neq 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Пусть геометрическая кратность 1, тогда жорданова форма матрицы системы $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \lambda \tilde{x} + \tilde{y}, & \tilde{x} = (c_1 t + c_2)e^{\lambda t} \\ \dot{\tilde{y}} = \lambda \tilde{y}, & \tilde{y} = c_1 e^{\lambda t} \end{cases}$$





43. Нормальная система линейных однородных дифференциальных уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение.

$$* \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}$$

$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x), \ \ \bar{y} = (y_1 \dots y_n)^T$,

$A(x) = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \ \ \bar{f}(x) = (f_1(x) \dots f_n(x))^T$

Начальные условия $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$

Частное решение $\bar{y}(x) = \bar{\varphi}(x)$ (при подстановке в $*$ превращает сист. в набор тождеств)

Общее решение $\bar{y}(x) = \bar{\varphi}(x, \bar{c})$

Если $\bar{f}(x) \equiv \bar{0}$ то $*$ наз. однородной.

Любые n ЛНЗ реш. однор. сист.$*$ наз. ее ФСР.

Любые част. решения однор. сист.$*$ есть ЛК решений, входящих в ФСР.

Общее решение однор. сист.$*$ имеет вид $\bar{y}(x) = c_1\bar{y}_1(x) + \dots + c_n\bar{y}_n(x)$, где $\bar{y}_1, \dots \bar{y}_n$ – ФСР, $c_1, \dots, c_n \in R$ (произв. пост.)

44. Метод Лагранжа решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений.

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x)$$

Пусть $\bar{y}(x) = c_1\bar{y}_1(x) + \dots + c_n\bar{y}_n(x)$ – об. решние $\bar{y}' = A(x)\bar{y}$

$(\bar{y}_1, \dots \bar{y}_n)$ – ФСР. Пусть $c_1, \dots, c_n$ – функции от x

$\bar{y}'(x) = c_1\bar{y}_1' + \dots + c_n\bar{y}_n' + c_1'y_1 + \dots + c_n'y_n =$

$= A(x)(c_1\bar{y}_1 + \dots + c_n\bar{y}_n) + \bar{f}$

$c_1(\bar{y}_1' - A(x)\bar{y}_1) + \dots + c_n(\bar{y}_n' - A(x)\bar{y}_n) + c_1'y_1 + \dots + c_n'y_n = \bar{f}$

$c_1'y_1 + \dots + c_n'y_n = (y_1 \dots y_n)(c_1' \dots c_n')^T = \bar{f}$

тк $\det(\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n) = W[\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n] \neq 0$

$(c_1' \dots c_n')^T = (y_1 \dots y_n)^{-1}\bar{f}, c_1' = \varphi_1(x) \dots c_n' = \varphi_n(x)$

$y_{\text{о.н.}}(x) = y_1 \int \varphi_1(x)dx + \dots + y_n \int \varphi_n(x)dx + \tilde{c}_1 y_1 + \dots + \tilde{c}_n y_n$

45. Экспонента от матрицы. Свойства. Вычисление за конечное число операций.

Пусть A – постоянная матрица $n \times n$, тогда

$e^A = E + \dfrac{A}{1!} + \dots + \dfrac{A^n}{n!} + \dots$

Свойства:

1. $e^E = E + \dfrac{E}{1!} + \dots + \dfrac{E}{n!} + \dots = E(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots) = eE$
2. Если $AB = BA$, то $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$
3. Пусть C – невыр. матрица, $e^{CAC^{-1}} = Ce^AC^{-1}$
4. Пусть $D = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ – жорд. клетка

e^D мб вычислена за конечное число шагов.

46. Экспонента от матрицы. Связь с решением системы линейных однородных уравнений.

Пусть A – постоянная матрица $n \times n$, тогда

$e^A = E + \dfrac{A}{1!} + \dots + \dfrac{A^n}{n!} + \dots$

Столбцы матрицы e^{xA} являются ФСР системы $\bar{y}' = A(x)\bar{y}$

47. Нормальная система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение в случае равенства геометрической и алгебраической кратностей корней хар. ур.

$$\bar{y}' = A\bar{y}$$

Будем искать решение в виде $\bar{y} = \bar{p}e^{\lambda x}, p$ – пост. вектор.

$\lambda\bar{p}e^{\lambda x} = A\bar{p}e^{\lambda x}$; $\lambda\bar{p} = A\bar{p}$; $(A - \lambda E)\bar{p} = \bar{o}, \lambda$ – соб. число матрицы $A, \bar{p}$ – соб. вектор соотв. λ

$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow P_n(\lambda) = 0$ – хар. ур.

Если среди с. ч. есть кратные, но их алг. кр. совпадают с геометрической, то пусть

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – соб. числа

$s_1, \dots, s_k$ – их алг. кратность $(s_1 + \dots + s_k = n)$

λ_i соотв. s_i ЛНЗ соб. векторов $\bar{p}_{i1}, \dots, \bar{p}_{is_i}$

Общее решение: $\bar{y} = c_1\bar{p}_{11}e^{\lambda_1 x} + \dots + c_{s_1}\bar{p}_{1s_1}e^{\lambda_1 x} + \dots + c_{n-s_k+1}\bar{p}_{k1}e^{\lambda_k x} + \dots + c_n\bar{p}_{ks_k}e^{\lambda_k x}$

48. Нормальная система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение в случае неравенства геометрической и алгебраической кратностей корней характеристического уравнения.

В случае, когда геом кратность меньше алгебраической.

Пусть С.З. λ соотв. жорд. клетка размером m

У λ есть С.В. p_1 и $m-1$ присоединенный вектор $p_2, \dots, p_n$

$(A - \lambda E)p_1 = 0, (A - \lambda E)p_2 = p_1, \dots$

Част. решение

$y_1 = p_1 e^{\lambda x}$

$y_2 = (p_1 x + p_2)e^{\lambda x}$

$y_3 = (p_1 \frac{x^2}{2} + p_2 x + p_3)e^{\lambda x}$

$y_4 = (p_1 \frac{x^3}{3} + p_2 \frac{x^2}{2} + p_3 x + p_4)e^{\lambda x}$

...

49. Нормальная система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Вещественная форма общего решения в случае компл. корней

В теории дифференциальных уравнений устанавливается, что каждой паре комплексно сопряженных корней λ и λ* кратности k соответствуют 2k линейно-независимых частных решений, которые имеют следующий вид :

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \ y_2 = x e^{\alpha x}\cos\beta x, \dots y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

$$y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x, y_{k+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \quad (2.3)$$

Пример 21. Решить систему $x' = 3x - 2y, \ y' = x + y$.

Решение примера. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda = 2 \pm i.$$

Для $\lambda = 2 + i$ находим собственный вектор $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (1-i)a - 2b = 0, \\ 1 \cdot a - (1+i)b = 0. \end{cases}$$

Можно взять $b = 1$, $a = 1 + i$. Получаем частное решение

$$x = (1+i)e^{(2+i)t}, \quad y = e^{(2+i)t}.$$

Решениями данной системы являются вещественная и мнимая части этого частного решения:

$$\begin{aligned} x &= e^{2t}(\cos t - \sin t), \\ y &= e^{2t}\cos t \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x &= e^{2t}(\cos t + \sin t), \\ y &= e^{2t}\sin t. \end{aligned}$$ ◄

50. Понятие об устойчивости частного решения системы дифференциальных уравнений. Устойчивость по А.М.Ляпунову, асимптотическая устойчивость, неустойчивость.

$\dot{x} = \bar{f}(\bar{x}, t)$

$\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$

$\bar{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\exists \bar{x}(t)$ — решение системы, удовл. начальному условию (н.у.) $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$

Решение $\bar{x}(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $\forall$ н.у. $\bar{x}(t) = \bar{x}_1$, такое, что $||\bar{x}_1 - \bar{x}_0|| < \delta$: $\forall t \geq t_0$ выполняется $\forall t \geq t_0$: $||\bar{\bar{x}}(t) - \bar{x}(t)|| < \varepsilon$, где $\bar{\bar{x}}(t)$ — решение задачи с н.у. $\bar{\bar{x}}(t_0) = \bar{x}_1$

Решение $x(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и $\exists \lim_{t \to +\infty} ||\bar{\bar{x}}(t) - \bar{x}(t)|| = 0$

51. Знакоопределенные и знакопостоянные функции. Теорема А.М.Ляпунова об устойчивости. Функция Ляпунова. Примеры.

Пусть $V(x)$: $V(\bar{0}) = 0$.

$V(x)$ называется положительно определенной в окрестности нуля, если $V(\bar{x}) > 0, \ \forall \bar{x} \neq 0$

$V(x)$ называется знакоположительной в окрестности нуля, если $\exists U(\bar{0})$: $V(\bar{x}) \geq 0$.

Аналогичнно определяются отрицательно определенные и знакоотрицательные.

Теорема Ляпунова об устойчивости

$\dot{x} = f(\bar{x}, t)$

$x = 0$ — решение

Если $\exists V(\bar{x})$ — положит. определенная в окрестности 0 такая, что $\dot{V}(x)$ является знакоотрицательной функцией, то решение $x = 0$ — устойчивое по Ляпунову.

Такая функция $V(x)$ называется функцией Ляпунова.

52. Знакоопределенные и знакопостоянные функции. Теорема об асимптотической устойчивости. Примеры.

Если система диффуров имеет нулевое решение и существует такая положит. определенная функция, что производная в силу(?) системы диффуров является отрицательно определенной, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

53. Первый интеграл системы дифференциальных уравнений. Использование первых интегралов в качестве функции А.М.Ляпунова.

$\bar{y}' = f(\bar{y}, x)$

$V(\bar{y}, x)$ — функция

Если $V(x, \bar{y})$ такова, что $V'(x, \bar{y}) \equiv 0$, то равенство $V(x, \bar{y}) = C$, C называется первым интегралом системы.

Следствие теоремы об устойчивости: Если точка $x = 0$ является точкой экстремума первого интеграла системы диффуров, то реш. $x = 0$ устойчиво по Ляпунову.

54. Теорема Н.Г. Четаева о неустойчивости. Функция Н.Г.Четаева.

$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, t)$

$\bar{x} = 0$ — решение

Если $\exists V(x)$ дифферинцируемая, такая, что

1. $V(\bar{0}) = 0$,
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0$: $V(x_0) > 0$ в окрестности $U_\varepsilon(0)$,
3. $\forall x, V(x) > 0$: $\dot{V}(x)$
4. $\forall \alpha > 0 \ \exists \rho > 0$, если $V(x) \geq \alpha$, то $\dot{V}(x) \geq \rho$

Тогда решение $\bar{x} = \bar{0}$ неустойчиво.

Функция $V(x)$ называется функцией Четаева.

55. Теорема об устойчивости по первому приближению. Теорема о неустойчивости по первому приближению.

$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, t)$

$\bar{x} = \bar{0}$ — решение

Линеаризованная система $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_{\bar{x}=0} \right)$$

Хар. уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$

Теорема об устойчивости по первому приближению

Если все корни λ_i характеристического уравнения линеаризованной системы имеют отрицательные действительные части $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, то нулевое решение x=0 системы асимптотически устойчиво.

Теорема об неустойчивости по первому приближению

Если хотя бы одно собств. значение линеаризованной системы имеет положительную действительную часть, то нулевое решение неустойчиво (как седло).