



Simulaciones micromagnéticas en nanohilos ferromagnéticos de Co-Ni con anisotropía transversal

Nicolás Barrios Pizo

Anteproyecto de Grado

Director:
Dr. Luis Alfredo Rodríguez González

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Santiago de Cali, 2023

Aprobación del director:

Aprobación: _____

Dr. Luis Alfredo Rodríguez González

Universidad del Valle, Colombia

Departamento de Física

Índice

1. Introducción	1
2. Marco teórico	2
2.1. Ferromagnetismo	2
2.2. Términos de energía magnéticos	2
2.2.1. Energía de intercambio	2
2.2.2. Energías magnetostáticas	3
2.2.3. Energía de anisotropía magnetocristalina	4
2.3. Ecuaciones de Landau-Lifshitz y Gilbert	5
2.4. Simulaciones micromagnéticas	5
2.4.1. Métodos numéricos	5
2.4.2. Paquetes principales	6
2.5. Ciclos de histéresis	6
2.6. Nanohilos ferromagnéticos de Co-Ni con anisotropía transversal	7
3. Objetivos	9
3.1. Objetivo general	9
3.2. Objetivos específicos	9
4. Metodología	10
5. Cronograma de actividades	12
6. Recursos	13

Resumen

En este proyecto de investigación se propone realizar un estudio computacional del estado remanente y de los mecanismos de inversión de la imanación sobre nanohilos individuales de cobalto-níquel (Co-Ni) con anisotropía (ejes de fácil imanación transversal al eje del nanohilo). Para este fin, se realizan simulaciones micromagnéticas para estudiar la dependencia de la microestructura remanente en función de la geometría, la anisotropía magnetocristalina y la composición. Además, estudiar los procesos de inversión de imanación (ciclos de histéresis) para condiciones de interés. Uno de los estados más interesantes de este sistema son las cadenas de vórtices magnéticos generadas perpendicular al eje del nanohilo, estructuras magnéticas con potencial interés en aplicaciones de almacenamiento de información, desarrollado de memorias no volátiles, sensores, entre otros.

1. Introducción

El micromagnetismo, desarrollado entre 1930 y 1940, es una teoría continua que opera en la escala de 1 nm a varias micras. En dicha escala, la magnetización se puede considerar como una función continua de las coordenadas y su magnitud se mantiene constante, donde la dinámica de la magnetización se rige por las ecuaciones de Landau-Lifshitz y Gilbert (LLG). Estas ecuaciones nos proporcionan un marco matemático para estudiar como evoluciona la magnetización en el tiempo producto de diversos mecanismos físicos, tanto internos como externos al material. Entre estos se encuentran las interacciones de intercambio, entre dipolos magnéticos y con un campo magnético externo, además de la anisotropía magnetocristalina y de forma [1, 2].

Sin embargo, obtener expresiones analíticas para las ecuaciones LLG, salvo en algunas simplificaciones o aproximaciones, es en general una ardua tarea, por lo que las simulaciones micro-magnéticas son una herramienta útil para estudiar los sistemas físicos en una escala manométrica. Estas simulaciones consisten, a grandes rasgos, en la resolución numérica de las ecuaciones LLG. Su utilidad radica en que nos permite estudiar en gran detalle los procesos de magnetización de los materiales ferromagnéticos, variando sus propiedades intrínsecas y extrínsecas que experimentalmente sería muy complejo [3].

Entre la gran variedad de morfologías nanométricas y subnanométricas que se pueden modelar, los nanohilos cilíndricos ferromagnéticos revisten de gran importancia por sus aplicaciones en el campo de almacenamiento de datos, tecnologías de sensores, aplicaciones en espintrónica (diodos tunelados y MRAM), medicina, entre otros. Estos nanohilos son sistemas físicos comúnmente con radios de entre 10 nm a 40 nm que, debido a su pequeño tamaño, presentan propiedades magnéticas exóticas. Estos nanohilos pueden ser obtenidos experimentalmente, por ejemplo, de la electrodeposición en plantillas. Por estas razones, se plantea estudiar el estado remanente y los procesos de inversión de imanación del sistema de nanohilos basados en la aleación Co-Ni con anisotropía transversal al eje del nanohilo. Este sistema se caracteriza por una cadena de vórtices de flujo magnético equidistantes que pueden ser controlados o modulados mediante agentes externos [4].

2. Marco teórico

2.1. Ferromagnetismo

El ferromagnetismo es un fenómeno físico (de tipo magnético) que se caracteriza por preservar en el tiempo un comportamiento ordenado de los momentos magnéticos (estado remanente) después de ser aplicado en un campo magnético externo, durante un tiempo suficientemente largo. En dichos materiales, en general, existen regiones, repartidas de forma heterogenea e irregular, donde los espines están orientados en una única dirección (Figura 1). Este comportamiento se puede describir por la magnetización espontánea, \mathbf{M} [5]. En el micromagnetismo clásico, la magnitud de la magnetización, para una temperatura fija T , es constante [2]

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, T) = |\mathbf{M}(T)|(\gamma_1(\mathbf{r})\hat{e}_1 + \gamma_2(\mathbf{r})\hat{e}_2 + \gamma_3(\mathbf{r})\hat{e}_3),$$

es decir, queda totalmente caracterizada por sus cosenos directores γ_i referidos a algún sistema ortogonal de coordenadas con vectores unitarios \hat{e}_k .

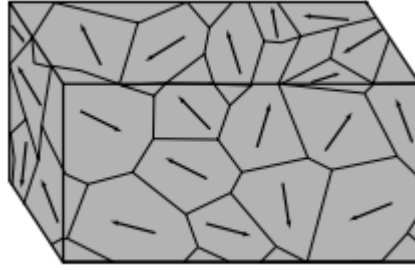


Figura 1: Dominios magnéticos en un sólido ferromagnético [5].

2.2. Términos de energía magnéticos

En micromagnetismo, la relación básica para el estudio del fenómeno magnético es la densidad de energía libre de Gibbs, ϕ'_l , la cual se puede escribir como

$$\phi'_l = U - TS - \sigma \cdot \epsilon - \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{H}_{ext},$$

donde S es la densidad de entropía, U la densidad de energía interna, ϵ el tensor de estrés y \mathbf{J}_s la polarización espontánea. Además, U contiene los términos de densidad de energía de intercambio, anisotropía magnetocristalina y magnetostática, entre otros. Las variables libres son la temperatura T , el tensor elástico σ y el campo magnético externo \mathbf{H}_{ext} [1, 2]. La energía libre de Gibbs total en equilibrio térmico está dada por

$$\phi_l = \int \phi'_l dV.$$

2.2.1. Energía de intercambio

El Hamiltoniano de intercambio de Heisenberg modela las interacciones de intercambio de los electrones desapareados, usualmente de los átomos vecinos más próximos [5], el cual podemos

escribir de forma general como

$$\hat{\mathcal{H}}_{ex} = -2 \sum_{i \neq j} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j,$$

donde J_{ij} es la integral de intercambio y $\hat{\mathbf{S}}_k$ son los operadores de espín.

En el micromagnetismo, la derivación de una expresión continua para las interacciones de intercambio, entre los vecinos más próximos, parte del modelo de Heisenberg. En esta aproximación, se considera a los operadores de espín $\hat{\mathbf{S}}_k$ como vectores clásicos \mathbf{S}_k y el ángulo entre ellos cambia lentamente y de forma continua [2].

Simetrías cúbicas

Para este tipo de simetrías la densidad de energía de intercambio, ϕ'_{ex} , se puede escribir como

$$\phi'_{ex} = A \sum_{i=1}^3 (\nabla \gamma_i(\mathbf{r}))^2,$$

donde A se le conoce como la constante de rigidez de intercambio y puede ser determinada por medio de la expresión [6]

$$A = \frac{2nJ_0S^2}{a},$$

donde n es el número de átomos por celda unitaria, J_0 es la integral de intercambio entre vecinos más proximos, a es el parametro de red y S es la magnitud del vector de espín.

Simetría hexagonal (HCP)

Por otro lado, para las simetrias hexagonales de empaquetamiento compacto (o por sus siglas en inglés, HCP) la constante de rigidez de intercambio toma distintos valores en su componente perpendicular A_{\perp} y paralela A_{\parallel} [1]. Así pues,

$$\phi'_{ex} = A_{\perp} \sum_{i=1,2} (\nabla \gamma_i(\mathbf{r}))^2 + A_{\parallel} (\nabla \gamma_3(\mathbf{r}))^2.$$

2.2.2. Energías magnetostáticas

La energía magnetostática consta de dos términos: la energía Zeeman y la energía dipolar.

Energía Zeeman

La energía Zeeman, o también llamada energía magnetostática del campo externo, surge entre la interacción de los momentos magnéticos electrónicos con un campo externo aplicado [2]. Se puede expresar la densidad de energía Zeeman como

$$\phi'_H = -\mu_0 \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{M},$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacio.

Energía Dipolar

En los sólidos cristalinos, cada momento dipolar produce un campo dipolar y cada uno de estos interactúan con el campo producido por los demás dipolos magnéticos, \mathbf{H}_s . Como el campo

magnético es generado sólo por los momentos dipolares se tiene $\nabla \times \mathbf{H}_s = 0$ y, por tanto, se le puede asociar un potencial escalar, $\mathbf{H}_s = -\nabla U$ [1]. Así pues, la energía dipolar toma la forma

$$\phi_s = \frac{1}{2}\mu_0 \oint_{S_0} \sigma(\mathbf{r})U(\mathbf{r})d\mathbf{S} + \frac{1}{2}\mu_0 \int_{V_0} \rho(\mathbf{r})U(\mathbf{r})dV,$$

donde $\sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es la densidad superficial de carga magnética, $\rho(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r})$ la densidad volumétrica de carga magnética y S_0 la superficie que contiene al volumen V_0 del sistema. Equivalentemente, se puede expresar la densidad de energía dipolar como

$$\phi'_s = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H}_s^2.$$

2.2.3. Energía de anisotropía magnetocristalina

Cuando una o varias propiedades de un material varían con la dirección se dice que dichas propiedades exhiben anisotropía. La anisotropía magnetocristalina es un caso particular de anisotropía magnética, dicho término de energía presenta la misma simetría que la estructura cristalina del material en cuestión [1]. Esta energía está asociada con el hecho de que en los materiales magnéticos existen direcciones para las cuales son fácilmente magnetizables que en otras, esto es, que el campo magnético necesario para magnetizar el material hasta la saturación es menor en unas direcciones que en otras. En la dirección en donde esto sucede decimos que es un “eje fácil” y en la dirección de difícil magnetización decimos que es un “eje duro” [7]. Una expresión general para la densidad de energía, ϕ'_K , puede escribirse como [8]

$$\phi'_K = k_0(\mathbf{r}) + \sum_{i \neq j} k_{ij} \gamma_i(\mathbf{r}) \gamma_j(\mathbf{r}) + \sum_{ijk} k_{ijk} \gamma_i(\mathbf{r}) \gamma_j(\mathbf{r}) \gamma_k(\mathbf{r}) + \dots, \quad (1)$$

donde los k son tensores de propiedades del material.

Simetrías cúbicas

Estas estructuras cristalinas tienden a orientar los momentos magnéticos en más de un eje fácil, esto se debe a que dichas configuraciones son sumamente simétricas. Para el Ni, que tiene estructura cúbica centrada en las caras (o por sus siglas en inglés, FCC), esta puede orientarse en cuatro distintas direcciones (Figura 2).

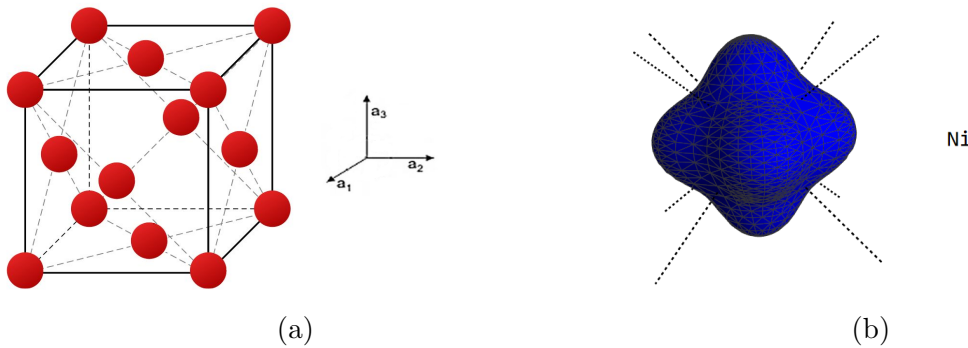


Figura 2: a) Estructura cristalina del Ni. b) Superficie de energía de anisotropía magnetocristalina para el Ni.

Una expresión general para las simetrías cúbicas se deriva a partir de la ecuación 1, donde el Ni se caracteriza por tener una constante k_2 negativa. Así pues,

$$\phi'_K = k_0 + k_1(\gamma_1^2(\mathbf{r})\gamma_2^2(\mathbf{r}) + \gamma_1^2(\mathbf{r})\gamma_3^2(\mathbf{r}) + \gamma_2^2(\mathbf{r})\gamma_3^2(\mathbf{r})) + k_2\gamma_1^2(\mathbf{r})\gamma_2^2(\mathbf{r})\gamma_3^2(\mathbf{r}) + \dots$$

Simetría hexagonal (HCP)

En este tipo de simetrías cristalograficas, presentes en el Co, la magnetización tiende a alianarse sobre un único eje, esto es, que la magnetización tiende a aliarse sobre la dirección c ([0001]) en la estructura HCP (Figura 3). Cuando la anisotropía magnetocristalina tiene un único eje fácil decimos que presenta anisotropía uniaxial.

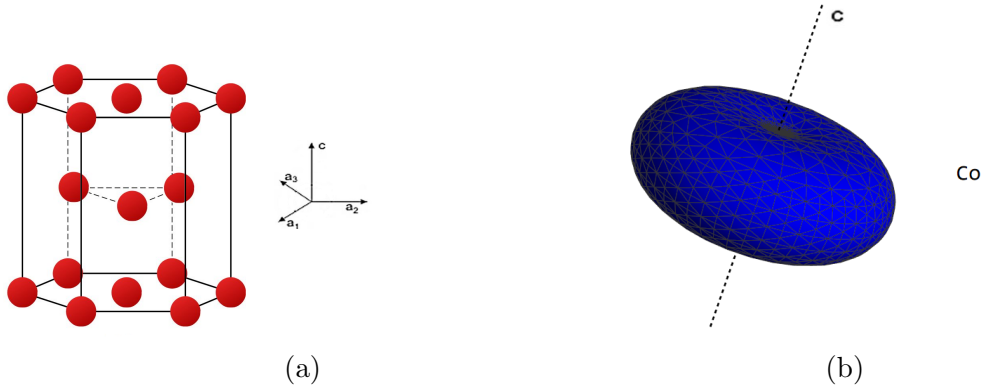


Figura 3: a) Estructura cristalina del Co. b) Superficie de energía de anisotropía magnetocristalina para el Co.

Una expresión analítica para la densidad energía de anisotropía se puede derivar a partir de la ecuación 1 obteniendo así

$$\phi'_K = k_0 + k_1(\gamma_1^2(\mathbf{r}) + \gamma_2^2(\mathbf{r})) + k_2(\gamma_1^2(\mathbf{r}) + \gamma_2^2(\mathbf{r}))^2 + k_3(\gamma_1^2(\mathbf{r}) + \gamma_2^2(\mathbf{r}))^3 + \dots$$

2.3. Ecuaciones de Landau-Lifshitz y Gilbert

Las ecuaciones LLG describen la evolución en el tiempo de la magnetización espontánea [2]

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma_G(\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}) - \frac{\alpha_G}{M}(\mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt}),$$

donde γ_G es la relación giromagnética de los electrones, α_G la constante de amortiguamiento de Gilbert y $\mathbf{H}_{eff} = -(1/J_s)\partial\phi_l/\partial\mathbf{m}$ con $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M$.

2.4. Simulaciones micromagnéticas

2.4.1. Métodos numéricos

Las ecuaciones LLG son un conjunto de ecuaciones no lineales acopladas, por lo que obtener expresiones analíticas puede ser muy laborioso o incluso imposible, así pues, se realizan aproximaciones numéricas para estudiar la dinámica de la magnetización. Los métodos más comunes son el micromagnetismo numérico de diferencias finitas (FE), basado en campo y el basado en energía, y el método de elemento finito (FD). Por un lado, el método FE basado en campo consiste en

buscar la solución numérica sobre la base de una evaluación directa de las componentes del campo efectivo \mathbf{H}_{eff} bajo la restricción de las condiciones de frontera. Por otro lado, el método FE basado en energía da prioridad a la energía magnética y se calcula directamente de la magnetización discretizada, mientras que el campo efectivo se deriva de la energía resultante [9]. Finalmente, el método FD consiste en que el dominio se subdivide en elementos y se aproximan las cantidades de campo usando funciones nodales [10].

2.4.2. Paquetes principales

Existen una gran cantidad de paquetes de software de propósito general diseñados para resolver las ecuaciones LLG (Tabla 1). A grandes rasgos, las diferencias más importantes de estos paquetes son el método que usan para resolver dichas ecuaciones, el hardware en el que corren (CPU o GPU) y si son de acceso gratuito o comercial [3]. Este trabajo de investigación se centra en los dos paquetes de libre acceso más empleados: OOMMF y mumax³.

Nombre	FE/FD	CPU/GPU	Gratis
LLG	FD	CPU	No
OOMF	FD	CPU	Si
micromagus	FD	CPU	No
magpar	FE	CPU	Si
Nmag	FE	CPU	Si
GPMagnet	FD	GPU	No
FEMME	FE	CPU	No
tetramaf ^b	FE	GPU	No
finmag ^c	FE	CPU	Si
Fastmag	FE	GPU	No
mumax	FD	GPU	Si
micromagnum	FD	GPU	Si
magnum.fd ^d	FD	GPU	Si
magnum.fe	FE	CPU	No
mumax ³	FD	GPU	Si

Tabla 1: Lista de paquetes de software de propósito general [3].

2.5. Ciclos de histéresis

El fenómeno de histéresis consiste en la respuesta no lineal e irreversible de la magnetización con el campo magnético, es decir, la magnetización no sigue una relación unívoca con el campo y depende, en gran medida, de las características intrínsecas, extrínsecas e historia de preparación del material (Figura 4) [5, 11]. Además, en nanohilos cilíndricos, este ciclo de histéresis también está influenciado por la orientación del campo magnético aplicado al mismo [12].

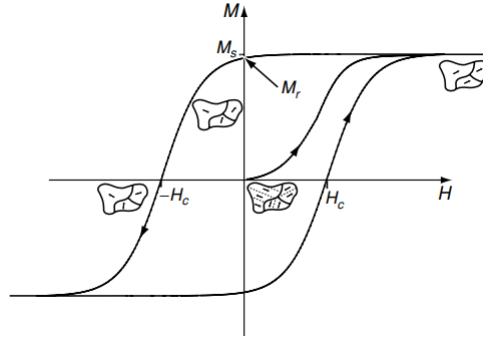


Figura 4: Ciclo de histéresis de un ferromagneto. Se observa el comportamiento de los dominios magnéticos cuando es magnetizado hasta la saturación M_s , en el estado de magnetización remanente M_r y cuando es aplicado un campo H_c (campo coercitivo) para la anulación de la magnetización [5].

2.6. Nanohilos ferromagnéticos de Co-Ni con anisotropía transversal

Este sistema de nanohilos individuales se caracteriza por la aparición de una cadena de vórtices repartidos longitudinalmente en la región C2 (Figura 5). En dicha región, el flujo magnético rota alrededor de ejes fijos equidistantes, además, la dirección de giro (horaria o antihoraria) del flujo magnético cambia de forma alternada. En este sistema, conviven dos fases cristalográficas: HCP y FCC, donde se emplea una aleación de Co-Ni con poca concentración de Ni para orientar el eje fácil uniaxial, propio de la estructura HCP, perpendicular al eje del nanohilo; de esta manera, se vence la anisotropía de forma que tiende a orientar la magnetización a lo largo del eje del nanohilo [4]. Por otro lado, este sistema magnético puede tener aplicaciones tecnológicas interesantes como: memorias magnéticas, debido a que se puede manipular deliberadamente la polaridad del arreglo de vórtices lo que puede ser usado para el desarrollo de dispositivos de almacenamiento extremadamente compactos; o circuitos lógicos, ya que esta cadena puede ser controlada mediante corrientes o campos externos [13].

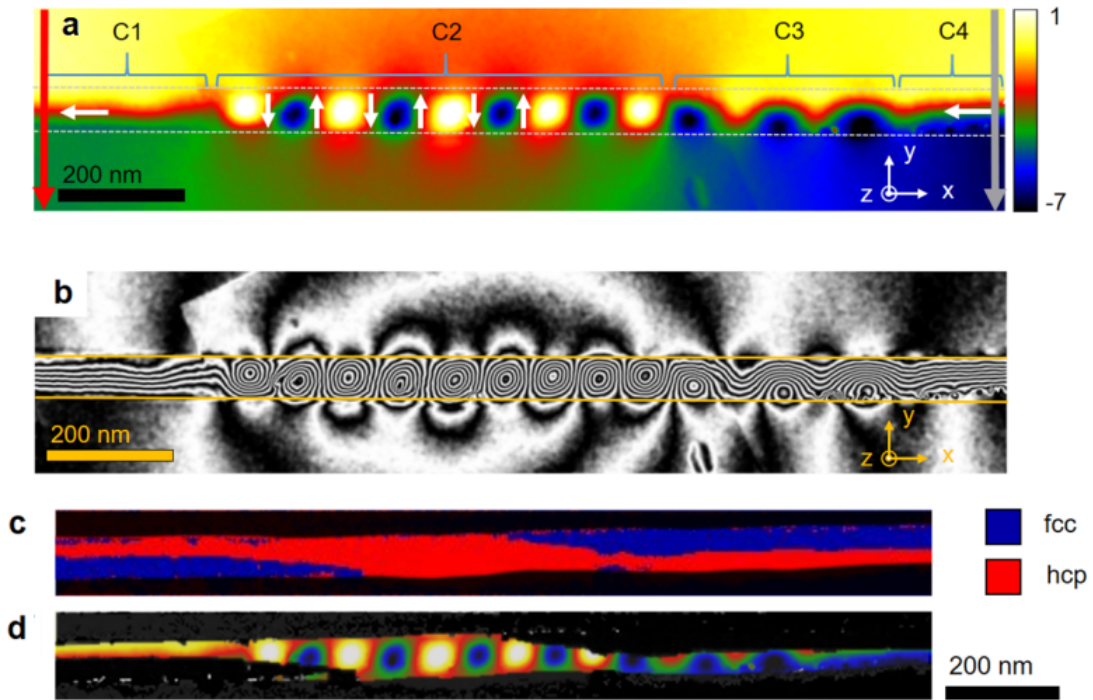


Figura 5: La figura a) muestra el cambio de fase magnética y b) muestra las líneas de flujo magnético. Las gráficas c) y d) corresponden a resultados experimentales del análisis estructural del nanohilo. La Figura c) muestra las fases cristalográficas FCC y HCP en la dirección z al eje del nanohilo. La figura d) muestra la superposición de las figuras a) y c) en donde solo la fase HCP es visible [4].

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

Estudiar la microestructura magnética de nanohilos basados en la aleación Co-Ni y su dependencia con variables intrínsecas y extrínsecas.

3.2. Objetivos específicos

OE1: Estudiar la dependencia de la microestructura remanente como función de la geometría del nanohilo, la anisotropía magnetocristalina y la composición.

OE2: Estudiar el proceso de inversión de la imanación para condiciones y parámetros magnéticos de interés.

4. Metodología

Para dar cumplimiento con el **OE1**, se plantea realizar las siguientes actividades.

OE1. Actividad 1.1: Revisión bibliográfica del estudio de nanohilos de Co-Ni. Se llevará a cabo una revisión bibliográfica centrada en el sistema de nanohilos ferromagnéticos basados en la aleación Co-Ni [4, 12, 13]. Dicha revisión bibliográfica permitirá determinar la importancia de estudiar este tipo de sistema y conocer que otro tipo de estudio teórico o de modelamiento, se han desarrollado en los nanohilos de Co-Ni. Además, se revisarán aspectos relacionados con el fenómeno micromagnético y la microestructura de materiales ferromagnéticos [1, 2], las simulaciones micromagnéticas en nanohilos [9, 14] y aspectos generales del magnetismo [5, 7, 11].

OE1. Actividad 1.2: Determinación de las condiciones apropiadas para el desarrollo de simulaciones micromagnéticas en nanohilos de Co-Ni. De acuerdo con la literatura consultada, se establecerán los parámetros micromagnéticos y rangos apropiados para el sistema de nanohilos con los que se llevarán a cabo las simulaciones. Entre los parámetros relevantes que se deben definir se encuentra la geometría y morfología de los nanohilos; la constante y tipo de anisotropía; la magnetización de saturación y la constante de intercambio.

OE1. Actividad 1.3: Pruebas en el paquete de simulaciones seleccionado. Para el desarrollo de las simulaciones micromagnéticas, se evaluarán los posibles métodos y paquetes de simulación con los cuales se podría realizar el trabajo, dando especial importancia en aquellas que sean libres y que permitan simulaciones de la forma más eficiente. Entre los posibles paquetes se encuentra OOMMF, el programa de simulaciones más usado a nivel mundial y mumax³, software que permite realizar simulaciones usando la GPU.

OE1. Actividad 1.4: Pruebas con los parámetros magnéticos seleccionados. Teniendo en cuenta los parámetros y rangos establecidos en la actividad 1.2, se realizarán un conjunto de simulaciones en las cuales se variarán los distintos parámetros de interés, en donde se buscará asegurar la validez y confiabilidad de los resultados mediante consideraciones físicas y lo reportado en la literatura.

OE1. Actividad 1.5: Simulaciones del estado remanente de los nanohilos de Co-Ni. Se realizará una serie de simulaciones del estado remanente de nanohilos de Co-Ni, lo que permitirá analizar los estados magnéticos remanentes observados en cada simulación, con el objetivo de identificar patrones y tendencias presentes en el sistema. Además, se buscará establecer correlaciones y proporcionar una explicación física para su causalidad.

Para dar cumplimiento con el **OE2**, se plantea realizar las siguientes actividades:

OE2. Actividad 2.1: Construcción del script para realizar simulaciones de ciclos de histéresis de los nanohilos de Co-Ni. Se desarrollará un script para el paquete de simulación seleccionado en donde se simularán los ciclos de histéresis para el sistema y de esta manera determinar su comportamiento en diferentes configuraciones.

OE2. Actividad 2.2: Correlación de los estados magnéticos de los nanohilos de Co-Ni con la dirección de barrido del campo magnético. Se evaluarán los diferentes estados magnéticos que tome el nanohilo de Co-Ni en función con la orientación del campo magnético aplicado. El objetivo es comprender cómo la orientación del campo magnético afecta la microestructura magnética del nanohilo.

5. Cronograma de actividades

Actividades	Mes											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Actividad 1.1: Revisión bibliográfica del estudio de nanohilos de Co-Ni	⊗	⊗										
Actividad 1.2: Determinación de las condiciones apropiadas para el desarrollo de simulaciones micromagnéticas en nanohilos Co-Ni		⊗	⊗									
Actividad 1.3: Pruebas en el paquete de simulaciones seleccionado			⊗	⊗	⊗							
Actividad 1.4: Pruebas con los parámetros magnéticos seleccionados					⊗	⊗	⊗	⊗				
Actividad 1.5: Simulaciones del estado remanente de los nanohilos Co-Ni								⊗	⊗			
Actividad 2.1: Construcción del script para realizar simulaciones de ciclos de histéresis de los nanohilos de Co-Ni								⊗	⊗	⊗		
Actividad 2.2: Correlación de los estados magnéticos de los nanohilos de Co-Ni con la dirección del barrido de campo magnético									⊗	⊗	⊗	⊗

6. Recursos

El desarrollo de este trabajo de investigación, el cual tendrá una duración de 1 año (12 meses), requerirá de los siguientes recursos (en especie):

Luis Alfredo Rodríguez (dedicación 3 h/sem): \$10.600.000

Estación de cálculo (Workstation): \$4.000.000

Referencias

1. Kronmüller, H. y Fähnle, M. *Micromagnetism and the Microstructure of Ferromagnetic Solids* (Cambridge University Press, 2003).
2. Exl, L., Suess, D. y Schrefl, T. en *Handbook of Magnetism and Magnetic Materials* (eds. Coey, M. y Parkin, S.) 1-44 (Springer International Publishing, Cham, 2020).
3. Leliaert, J. y Mulkers, J. Tomorrow's micromagnetic simulations. *Journal of Applied Physics* **125** (2019).
4. Andersen, I. M. *et al.* Exotic Transverse-Vortex Magnetic Configurations in CoNi Nanowires. *ACS Nano* **14**, 1399-1405 (2020).
5. Coey, J. M. D. *Magnetism and Magnetic Materials* (Cambridge University Press, 2010).
6. Kittel, C. Physical Theory of Ferromagnetic Domains. *Rev. Mod. Phys.* **21**, 541-583 (4 oct. de 1949).
7. O'Handley, R. *Modern Magnetic Materials: Principles and Applications* ISBN: 9780471155669 (Wiley, 1999).
8. Birss, R. *Symmetry and Magnetism* (North-Holland Publishing Company, 1964).
9. Miltat, J. E., Donahue, M. J. *et al.* Numerical micromagnetics: Finite difference methods. *Handbook of magnetism and advanced magnetic materials* **2**, 742-764 (2007).
10. Schrefl, T., Fidler, J., Chantrell, R. y Wongsam, M. Micromagnetics: Finite Element Approach. *Encyclopedia of Materials: Science and Technology*, 5651-5661 (2001).
11. Jackson, J. *Classical Electrodynamics* (Wiley, 2012).
12. Ivanov, Y. y Chubykalo-Fesenko, O. en *Magnetic Nano- and Microwires* (ed. Vázquez, M.) 423-448 (Woodhead Publishing, 2015).
13. Andersen, I. M. *et al.* Field tunable three-dimensional magnetic nanotextures in cobalt-nickel nanowires. *Phys. Rev. Res.* **3**, 033085 (2021).
14. Kumar, D. y Adeyeye, A. O. Techniques in micromagnetic simulation and analysis. *Journal of Physics D: Applied Physics* **50** (2017).
15. Moreno, J. A., Bran, C., Vazquez, M. y Kosel, J. Cylindrical Magnetic Nanowires Applications. *IEEE Transactions on Magnetism* **57**, 1-17 (2021).