Departamento de
Engenharia Electromecânica

UC: Placas e Cascas – 15253

Ano Letivo: 2025/2026 (1º Semestre)

Trabalho 03 – Placas de Kirchhoff: Soluções Numéricas

Limite para entrega: 24 de novembro de 2025 às 23h59

Resolva as questões a seguir e escreva as suas soluções num relatório, com no máximo 15 páginas (excluindo-se os elementos pré e pós-textuais), contendo:

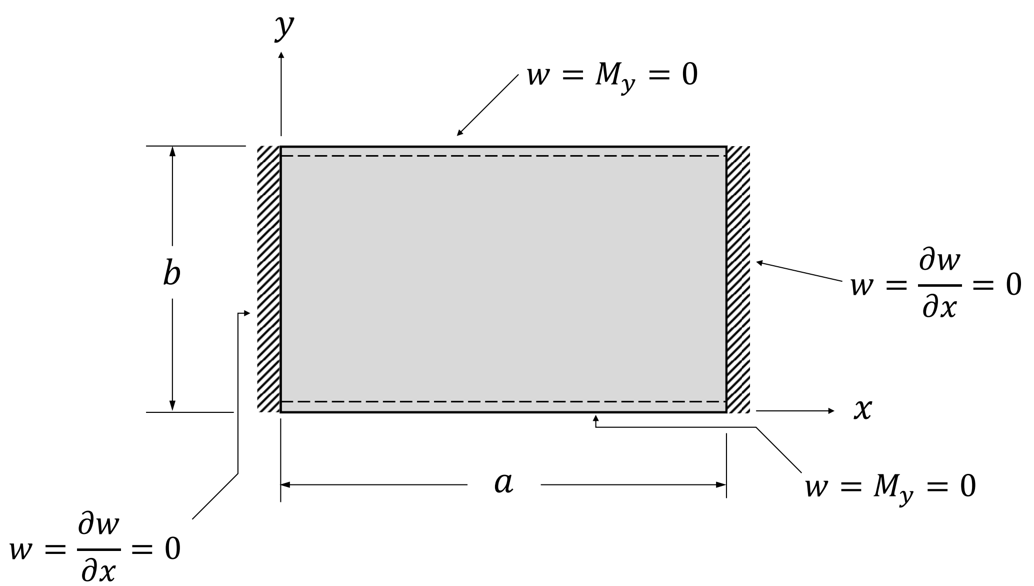
- descrição dos problemas;
- metodologia de solução;
- implementação do código;
- resultados e discussão; e
- conclusão.

Os códigos desenvolvidos devem ser adicionados ao apêndice.

O relatório deve ser escrito utilizando o guião disponível no Moodle, o qual se baseia nas normas de formatação gráfica de apresentações de dissertações de 2.º ciclo e de teses de 3.º ciclo - Despacho n.º 2019/R/63.

Para cada questão é fornecido um conjunto de dados de entrada e cada pessoa deve utilizar um conjunto de dados diferente. A seleção será feita no momento da entrega do enunciado.

1. A figura a seguir mostra uma placa de lados a e b, e espessura t, feita dum material ortotrópico, (ver Apêndice I), e cuja massa específica é ρ. A placa está encastrada ao longo de suas bordas $x = 0$ e $x = a$, e está simplesmente apoiada ao longo das bordas $y = 0$ e $y = b$.



Sob a condição de vibração livre, a energia potencial total para a placa acima pode ser definida como:

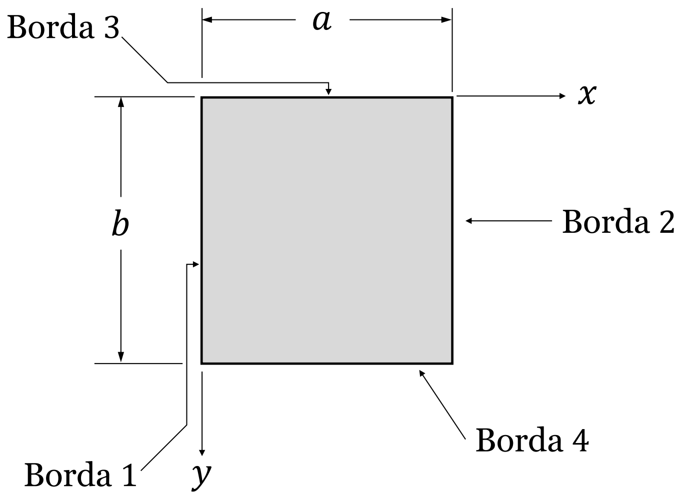
$$\Pi = \frac{1}{2}\iint \left[D_{11}\left(w_{,xx}\right)^2 + 2D_{12}w_{,xx}w_{,yy} + D_{22}\left(w_{,yy}\right)^2 + 4D_{66}\left(w_{,xy}\right)^2\right] dxdy \\ -\frac{1}{2}\omega^2\rho t \iint w^2\, dxdy = 0\,.$$

Use o método de Ritz para determinar a frequência fundamental ω de vibração livre da placa acima, e o seu correspondente modo de vibrar. Para tal, considere que a aproximação de Ritz para uma placa retangular pode ser escrita na forma:

$$w(x, y) \approx W_{mn}(x, y) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}X_i(x)Y_j(y)$$

onde c_{ij} são os coeficientes de Ritz e as funções $X_i(x)$ e $Y_j(y)$ devem satisfazer apenas as condições de fronteiras geométricas do problema (ver Apêndice II).

2. A figura a seguir apresenta uma placa fina de lados a e b, e espessura t, feita dum material ortotrópico (ver Apêndice II) e sujeita a um carregamento p_0 uniformemente distribuído ao longo de toda a sua superfície xy.



a) Considerando os eixos principais do material alinhados aos eixos x e y na figura acima, derive uma expressão para a matriz de elasticidade $[\tilde{D}]$;

b) Utilizando o método dos elementos finitos, escreva um programa de computador para calcular: as deflexões $w(x, y)$, as reações nos apoios e as tensões σ_x, σ_y e τ_{xy} no intervalo $x = [0, a]$ e $y = [0, b]$;

c) Comente os seguintes casos particulares: (i) os eixos principais do material não coincidem com os eixos x e y e (ii) o material é um compósito laminado simétrico, não-balanceado e de n camadas.

Notas:

(i) Podem ser utilizados elementos do tipo triangular de 3 nós (9 GDL's) ou retangular de 4 nós (12 GDL's) para a discretização da placa;

(ii) Refine a malha com o número de elementos que julgar necessário para atingir a convergência dos resultados justificando a discretização final.

Dados:

Caso	a [mm]	b [mm]	t [mm]	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	ν_{12}	G_{12} [GPa]	p_0 [N/m²]	B1	B2	B3	B4
1	600	650	1	140	11	0.25	4	250	F	F	S	S
2	650	600	1	140	12	0.25	5	75	F	S	S	C
3	700	600	1	150	13	0.28	5	100	C	S	S	F
4	800	700	2	160	14	0.28	6	125	S	S	C	C
5	650	750	2	170	13	0.28	4	150	S	C	C	F
6	750	600	2	130	10	0.26	5	175	C	C	F	F
7	600	625	1	140	11	0.26	5	300	C	F	C	F
8	625	650	1	135	10	0.27	4	250	F	S	S	C
9	600	650	1	145	12	0.27	6	200	C	S	S	F
10	750	800	2	155	13	0.25	6	150	S	S	C	C
11	825	650	1	165	12	0.25	4	100	S	C	C	F
12	700	625	1	150	13	0.26	5	250	C	C	F	F

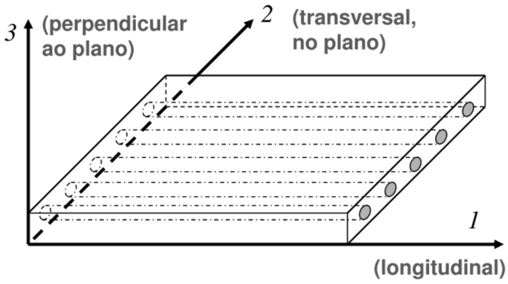
Nota:
F – Livre;
S – Apoio Simples;
C – Encastre.

Apêndice I

As equações constitutivas para uma lâmina fina de um material homogéneo, ortotrópico e linear elástico, pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1} & -\dfrac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\dfrac{\nu_{12}}{E_1} & \dfrac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

onde E_1, E_2, ν_{12} e G_{12} são as constantes elásticas definidas no eixo principal do material que coincide com os eixos principais do sistema xyz adotado para a placa, conforme mostrado na figura a seguir.



Ao inverter a relação apresentada na Equação (1), tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

onde

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \tag{3a}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{E_1} Q_{11}, \tag{3b}$$

$$Q_{12} = \nu_{21} Q_{11}, \tag{3c}$$

$$Q_{66} = G_{12}. \tag{3d}$$

Apêndice II – Polinómios Algébricos

Numa placa com as bordas $x = 0$ e $x = a$ encastradas, as quatro condições de fronteira geométricas a serem satisfeitas indicam que o polinómio algébrico mais simples $X_i(x)$ é:

$$X_i(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{i+1} - 2\left(\frac{x}{a}\right)^{i+2} + \left(\frac{x}{a}\right)^{i+3}.$$

Numa placa com as bordas $y = 0$ e $y = b$ simplesmente apoiadas, as duas condições de fronteira geométricas a serem satisfeitas indicam que o polinómio algébrico mais simples $Y_j(y)$ é:

$$Y_j(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^{j} - \left(\frac{y}{b}\right)^{j+1}.$$