

Trabalho 02- Placas Retangulares: Soluções de Navier e Lévy

José Miguel Correia Barros, M15321

Engenharia Aeronáutica
(2º ciclo de estudos)

Docente: Prof. Doutor Thiago Assis Dutra

27 de Outubro de 2025

Índice

Índice	iii
Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	vii
1 Descrição do Problema	1
1.1 Tarefa 1	1
1.2 Tarefa 2	2
2 Metodologia de Solução	5
2.1 Tarefa 1	5
2.2 Tarefa 2	9
3 Implementação do código	13
4 Resultados e Discussões	15
4.1 Tarefa 1	15
4.2 Tarefa 2	16
5 Conclusão	19
Bibliografia	21
A Implementação do código	23
A.1 Tarefa 2	26

Lista de Figuras

1.1	Placa ortotrópica submetida a carregamento uniforme p_0 sobre a superfície xy	1
1.2	Placa isotrópica submetida a carregamento uniforme: (a) vista lateral e (b) vista superior com apoios elásticos.	2
3.1	Fluxograma referente à Tarefa 1	13
3.2	Fluxograma referente à Tarefa 2	13
4.1	Representação gráfica da deflexão $w(x, y)$ da placa ortotrópica sob carregamento uniforme, apresentada em duas vistas complementares.	15
4.2	Distribuição da deflexão na placa representada em duas perspectivas: (a) vista isométrica e (b) vista lateral.	16
4.3	Caso (i): $k_w \rightarrow \infty$ e $k_{\theta x} \rightarrow 0$	17
4.4	Caso (ii): $k_w \rightarrow 0$ e $k_{\theta x} \rightarrow 0$	18

Lista de Tabelas

1.1	Dados fornecidos para a Tarefa 1.	2
1.2	Dados fornecidos para a Tarefa 2.	3

Capítulo 1

Descrição do Problema

Este relatório tem como propósito apresentar a resolução referente ao Trabalho 2 da Unidade Curricular de Placas e Cascas, que se refere às soluções propostas por Navier e Lévy para placas retangulares. Devido à flexão, as placas frequentemente necessitam das soluções em séries infinitas complexas. Na sua abordagem, Navier baseia-se na decomposição da carga em séries de Fourier. Por sua vez, o método de Lévy assume que as condições de fronteira variam em dois lados contrários da placa, sendo que os restantes dois lados estão simplesmente apoiados.

1.1 Tarefa 1

No primeiro exercício, considera-se uma placa fina, de dimensões a e b e espessura t , constituída por um material ortotrópico. A placa encontra-se sujeita a um carregamento p_0 , uniformemente distribuído ao longo de toda a superfície xy , conforme representado na Figura 1.1,

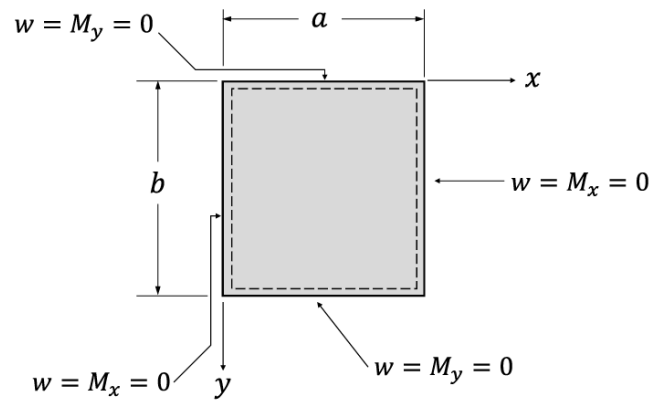


Figura 1.1: Placa ortotrópica submetida a carregamento uniforme p_0 sobre a superfície xy .

Na alínea *a*), solicita-se que, com base na teoria de Kirchhoff, seja obtida a equação diferencial que descreve a deflexão da placa fina ortotrópica ilustrada na Figura 1.1, expressa em função de $w(x, y)$.

Na alínea *b*), pretende-se que, aplicando o método de Navier, seja determinada a solução da equação deduzida na alínea anterior e que sejam representadas graficamente as deflexões $w(x, y)$ no domínio $x \in [0, a]$ e $y \in [0, b]$. Para esse efeito, deverão ser considerados

os nove primeiros termos da série, de forma a garantir uma boa aproximação por convergência.

Para o desenvolvimento desta tarefa, são fornecidos os parâmetros necessários conforme indicado na Tabela 1.1.

Tabela 1.1: Dados fornecidos para a Tarefa 1.

Caso	a [mm]	b [mm]	t [mm]	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	ν_{12}	G_{12} [GPa]	p_0 [N/m ²]
6	750	600	2	130	10	0.26	5	175

1.2 Tarefa 2

No segundo exercício, analisa-se uma placa de dimensões a e b , com espessura t , composta por um material isotrópico. Esta placa encontra-se simplesmente apoiada ao longo das bordas $x = 0$ e $x = a$. Na extremidade $y = 0$, o apoio é realizado por meio de elementos elásticos lineares, caracterizados por uma constante de rigidez k_w . Na borda oposta, $y = b$, a placa apoia-se igualmente sobre elementos elásticos lineares, de rigidez k_w , e sobre elementos elásticos torsionais, com rigidez $k_{\theta x}$, associada à rotação em torno do eixo x . Um carregamento uniformemente distribuído atua sobre toda a superfície xy , conforme ilustrado na Figura 1.2.

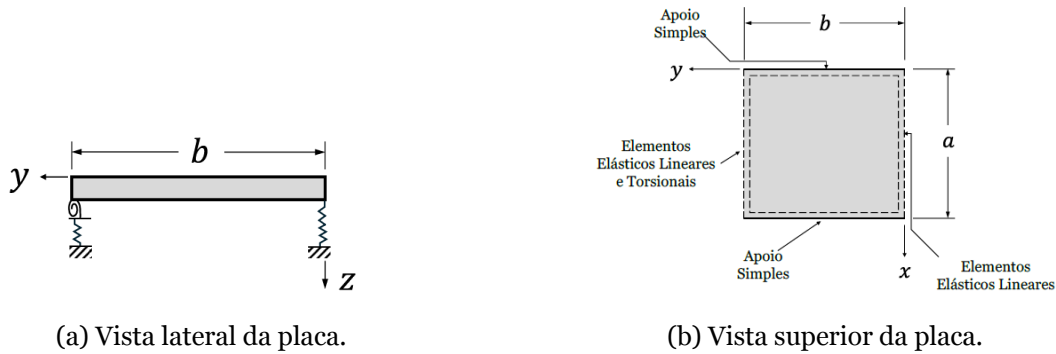


Figura 1.2: Placa isotrópica submetida a carregamento uniforme: (a) vista lateral e (b) vista superior com apoios elásticos.

Na alínea a), solicita-se que, partindo da teoria de placas de Kirchhoff e aplicando o método de Lévy, seja derivada a expressão analítica para a deflexão da placa, $w(x, y)$, considerando as condições de fronteira descritas.

Na alínea b), pretende-se o desenvolvimento de um programa computacional capaz de determinar numericamente as deflexões $w(x, y)$ no domínio $x \in [0, a]$ e $y \in [0, b]$. Os resultados deverão ser apresentados graficamente, mostrando a superfície defletida da placa.

Na alínea c), é pedido que sejam discutidos os seguintes casos particulares:

1. quando $k_w \rightarrow \infty$ e $k_{\theta x} \rightarrow 0$;
2. quando $k_w \rightarrow 0$ e $k_{\theta x} \rightarrow 0$.

A discussão deve incluir uma interpretação física dos resultados obtidos, apoiada em representações gráficas que ilustrem as variações de rigidez e o comportamento da placa para cada condição limite.

Os parâmetros necessários para o desenvolvimento da Tarefa 2 são apresentados na Tabela 1.2.

Tabela 1.2: Dados fornecidos para a Tarefa 2.

Caso	a [mm]	b [mm]	t [mm]	E [GPa]	ν	k_w [kN/m ²]	$k_{\theta x}$ [N]	p_0 [N/m ²]
6	750	600	1	210	0.3	125	1060	175

Capítulo 2

Metodologia de Solução

2.1 Tarefa 1

A teoria de Kirchhoff aplicada a placas finas constitui um modelo destinado à análise do comportamento de placas submetidas a diferentes tipos de carregamento. Essa teoria baseia-se nos seguintes princípios fundamentais:

- A deflexão da superfície média é muito pequena quando comparada à espessura total da placa. Assim, o gradiente da superfície deformada é reduzido, e o seu quadrado pode ser considerado desprezável em relação à unidade;
- O plano médio da placa não sofre alongamento durante o processo de flexão;
- As secções planas que, inicialmente, são perpendiculares à superfície média permanecem planas e normais a essa superfície mesmo após a deformação por flexão;
- A componente de tensão normal ao plano médio, σ_z , é muito inferior às demais e, portanto, pode ser negligenciada. Contudo, essa hipótese deixa de ser válida em regiões próximas a pontos de aplicação de cargas altamente concentradas.

No contexto da alínea a), para se estabelecer a equação diferencial que descreve a deflexão da placa, é fundamental começar por determinar as componentes de tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} , com base nas relações constitutivas que regem o comportamento de uma placa fina de um material ortotrópico.

A equação 2.1 traduz a ligação entre os estados de deformação e as tensões internas na placa:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

A matriz apresentada na equação (2.1) descreve o comportamento ortotrópico do material, permitindo determinar as deformações a partir das tensões aplicadas. Ao inverter esta relação constitutiva, obtém-se a forma explícita que possibilita calcular as tensões

em função das deformações impostas, conforme se apresenta na equação (2.2):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Os coeficientes de rigidez reduzida assumem as expressões apresentadas nas equações (2.3)–(2.6):

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.3)$$

$$Q_{12} = \nu_{21}Q_{11} \quad (2.5)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.4)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (2.6)$$

Substituindo estes valores, obtêm-se o seguinte sistema (2.7) para as expressões explícitas das tensões:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_x + \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_y \\ \sigma_y = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_x + \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_y \\ \tau_{xy} = G_{12} \gamma_{xy} \end{cases} \quad (2.7)$$

De seguida, vamos calcular as curvaturas da superfície média da placa, obtendo (2.8):

$$k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.8)$$

Sendo então as deformações através da curvatura média, dadas pelas equações representadas (2.9):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -z k_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = -z k_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = -2z k_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.9)$$

Substituindo o sistema de equações das deformações (2.9) no sistema de equações de tensões (2.7) obtêm-se as tensões em função dos deslocamentos médios e da deflexão $w(x, y)$, dadas pelo sistema (2.10):

$$\begin{cases} \sigma_x = -z \left(\frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -z \left(\frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) \left(\nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \tau_{xy} = -2z G_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.10)$$

Os momentos M_x , M_y e M_{xy} podem ser obtidos diretamente a partir da integração das tensões ao longo da espessura da placa, resultando no seguinte sistema (2.11):

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz \quad (2.11)$$

A partir destas integrais, e substituindo as expressões das tensões em função da deflexão $w(x, y)$, obtêm-se as formas explícitas dos momentos (2.12):

$$\begin{cases} M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} = -2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.12)$$

As constantes de rigidez à flexão D_x , D_y e D_{xy} podem ser determinadas em função das propriedades do material e da espessura da placa. Estas grandezas são obtidas pelas representadas pelas equações (2.13), (2.14), (2.15)

$$D_x = \frac{E_1 t^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (2.13)$$

$$D_y = \frac{E_2 t^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (2.14)$$

$$D_{xy} = \frac{G_{12} t^3}{12} \quad (2.15)$$

A condição global de equilíbrio da placa, escrita em termos dos momentos fletores, é dada por:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}$$

Ao substituir as expressões dos momentos em função de $w(x, y)$ e das rigidezes à flexão, resulta a relação diferencial da placa (2.16):

$$p = D_x \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu_{21} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + D_{xy} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + D_y \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (2.16)$$

Para resolver (2.16), vamos utilizar séries de Fourier duplas:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.17)$$

De modo a aplicar (2.17) em (2.16), obtêm-se as derivadas necessárias:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.20)$$

Ao inserir a expressão da deflexão (2.17) na equação diferencial da placa (2.16), e considerando apenas os termos relevantes, obtêm-se a seguinte forma para o coeficiente a_{mn} :

$$a_{mn} = \frac{p_{mn}}{D_x \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + [D_x \nu_{21} + 4D_{xy} + D_y \nu_{12}] \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_y \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4} \quad (2.21)$$

em que o termo p_{mn} é dado por (2.22):

$$p_{mn} = \frac{16 P_0}{\pi^2 m n} \quad (2.22)$$

Finalmente, substituindo (2.21) em (2.17), obtêm-se a expressão final da deflexão $w(x, y)$ da placa ortotrópica fina.

2.2 Tarefa 2

Na tarefa 2, a equação geral da deflexão $w(x, y)$ na placa é dada por uma solução particular e uma solução homogênea (2.23):

$$w(x, y) = w_p + w_h \quad (2.23)$$

Ambas partem da teoria de Kirchhoff, através da equação diferencial para a deflexão de placas finas ($\nabla^4 w$), onde a equação particular é dada por (2.24):

$$\nabla^4 w_p = \frac{p_0}{D} \quad (2.24)$$

Nesta tarefa, como estamos no caso de uma placa isotrópica e homogênea, a constante de rigidez é representada por (2.25):

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.25)$$

A equação homogênea da deflexão é definida como (2.26) :

$$\nabla^4 w_h = 0 \quad (2.26)$$

Simplificando $\nabla^4 w$, obtemos a seguinte expressão expandida (2.27):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (2.27)$$

Admitindo, como mostrado na figura 1.2b, estamos no caso de apoios simples em $x = 0$ e $x = a$, podemos aplicar o método de Levy e temos que o valor da deflexão homogênea é dada pela equação 2.28:

$$w_h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m y \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m y \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.28)$$

onde os coeficientes A_m, B_m, C_m, D_m são determinados pelas condições de fronteira da placa.

Para simplificação, temos que (2.29):

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad (2.29)$$

De seguida, temos que a solução particular é dada por (2.30):

$$w_p = \frac{4p_0a^4}{\pi^5 D} \cdot \frac{1}{m^5} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.30)$$

Logo, a solução geral pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} & \left[A_m \sinh(\alpha y) + B_m \cosh(\alpha y) \right. \\ & + C_m y \sinh(\alpha y) + D_m y \cosh(\alpha y) \\ & \left. + \frac{4p_0a^4}{m^5 \pi^5 D} \right] \sin(\alpha x), \end{aligned} \quad (2.31)$$

Após determinarmos a equação da deflexão (2.31), vamos determinar as condições de fronteira para ser possível calcular as constantes A_m, B_m, C_m, D_m .

Assume-se que, nas extremidades $y = 0$ e $y = b$, a placa está apoiada de forma assimétrica em relação ao eixo y . Na extremidade $y = 0$, estão presentes elementos elásticos lineares com constante de rigidez k_w . Já na extremidade $y = b$, além dos elementos elásticos lineares com constante k_w , existem também elementos torcionais com constante k_{θ_x} , que introduzem restrições adicionais à rotação da placa em torno do eixo x .

Para $y = 0$, temos que:

$$D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 \quad (2.32)$$

$$D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \nu \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=0} - k_w w(x, 0) = 0 \quad (2.33)$$

Para $y = b$, temos:

$$D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (2 - \nu) \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=b} - k_w w(x, b) = 0 \quad (2.34)$$

$$D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=b} - k_{\theta} \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (2.35)$$

Essas condições de fronteira (2.32)–(2.35) permitem determinar as constantes A_m, B_m, C_m, D_m na expressão geral (??), de acordo com o comportamento físico e os apoios da placa.

Vamos então calcular as derivadas parciais de $w(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} = \sin(\alpha x) & \left(C_m \cosh(\alpha y) + D_m \sinh(\alpha y) \right. \\ & + B_m \alpha \cosh(\alpha y) + A_m \alpha \sinh(\alpha y) \\ & \left. + D_m \alpha y \cosh(\alpha y) + C_m \alpha y \sinh(\alpha y) \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha \sin(\alpha x) & \left(2D_m \cosh(\alpha y) + 2C_m \sinh(\alpha y) \right. \\ & + A_m \alpha \cosh(\alpha y) + B_m \alpha \sinh(\alpha y) \\ & \left. + C_m \alpha y \cosh(\alpha y) + D_m \alpha y \sinh(\alpha y) \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \alpha^2 \sin(\alpha x) & \left(3C_m \cosh(\alpha y) + 3D_m \sinh(\alpha y) \right. \\ & + B_m \alpha \cosh(\alpha y) + A_m \alpha \sinh(\alpha y) \\ & \left. + D_m \alpha y \cosh(\alpha y) + C_m \alpha y \sinh(\alpha y) \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\alpha^2 \sin(\alpha x) & \left(A_m \cosh(\alpha y) + B_m \sinh(\alpha y) \right. \\ & + \frac{p_0}{D\alpha^4} + C_m y \cosh(\alpha y) \\ & \left. + D_m y \sinh(\alpha y) \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Tendo todos os parâmetros definidos estamos em condições calcular, a partir das equações (2.36)–(2.39), o valor das constantes A_m, B_m, C_m, D_m . No entanto, devido à sua complexidade, essas constantes serão expressas posteriormente no Apêndice A, onde se apresentam as deduções completas com base nas condições de fronteira descritas nas seções anteriores.

Capítulo 3

Implementação do código

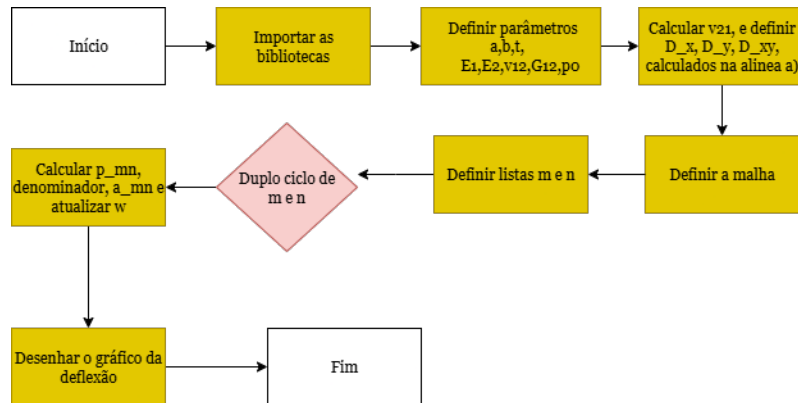


Figura 3.1: Fluxograma referente à Tarefa 1

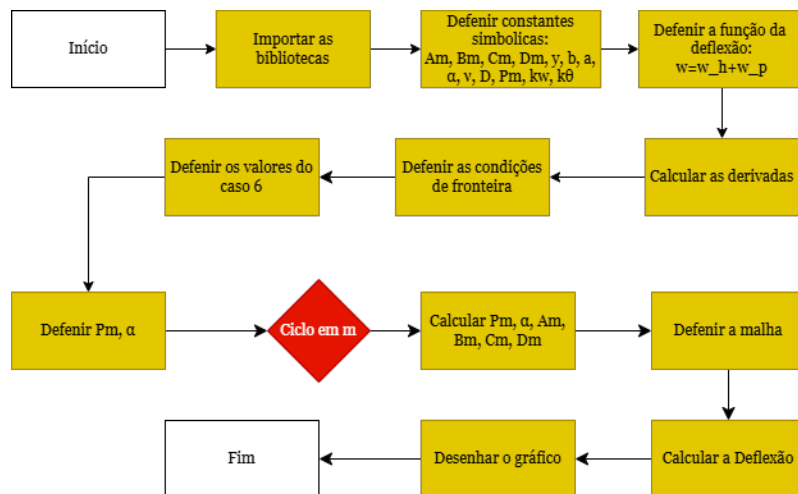


Figura 3.2: Fluxograma referente à Tarefa 2

O desenvolvimento da Tarefa 1 seguiu o fluxograma representado na Figura 3.1 onde inicialmente começamos com a importação de bibliotecas que nos permite definir os parâmetros geométricos da placa, das propriedades do material ortotrópico e do carregamento uniforme aplicado. De seguida, calcularam-se as constantes de rigidez à flexão — D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} — a partir das relações constitutivas indicadas no enunciado. Com esses valores, procedeu-se à discretização da placa, definindo-se a malha de cálculo e as listas de índices m e n , necessárias para a formulação da solução em série dupla de Fourier segundo o método de Navier. Através de um ciclo duplo sobre esses índices, determinaram-se os coeficientes p_{mn} e a_{mn} , bem como o denominador, atualizando iterativamente a expressão da deflexão $w(x, y)$ até obter a solução final. Por fim, representou-se graficamente a superfície $w(x, y)$, considerando os nove primeiros termos da série de Fourier, assegurando a convergência e coerência com a teoria de Kirchhoff. Este processo permitiu visualizar o comportamento da placa sob carregamento uniforme e validar numericamente os resultados obtidos.

O desenvolvimento da Tarefa 2 seguiu o fluxograma apresentado na figura 3.2 onde inicialmente, importaram-se as bibliotecas necessárias e definiram-se as constantes simbólicas associadas ao modelo, incluindo as propriedades geométricas da placa, as características do material e os parâmetros do carregamento. De seguida, formulou-se a função geral da deflexão e aplicando as condições de fronteira correspondentes ao caso 6 e calculando as derivadas necessárias à equação de flexão de Kirchhoff. Após definir os valores do caso de estudo, executou-se um ciclo sobre o índice m , no qual foram determinados os coeficientes $P_m, \alpha, A_m, B_m, C_m$ e D_m . Com base nestes coeficientes, construiu-se a malha de discretização e calculou-se a deflexão $w(x, y)$ para cada ponto da placa. Por fim, representou-se graficamente a superfície da deflexão, permitindo analisar o comportamento da placa sob carregamento uniforme e validar os resultados obtidos de acordo com o método de Lévy.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

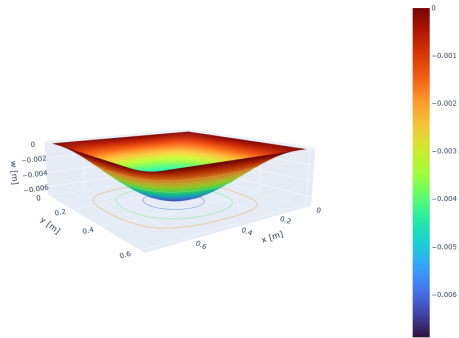
4.1 Tarefa 1

Na alínea *a*), foi estabelecida a equação diferencial que descreve a deflexão $w(x, y)$ de uma placa ortotrópica fina. A formulação obtida pode ser expressa pela seguinte série dupla de Fourier:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{D_x \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + [D_x \nu_{21} + 4D_{xy} + D_y \nu_{12}] \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_y \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4} \times \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.1)$$

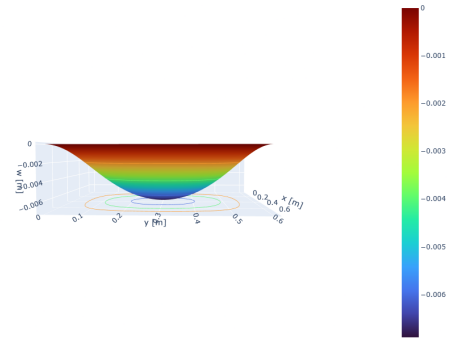
Na alínea *b*), aplicou-se o método de Navier para resolver a equação (4.1), obtendo-se a representação gráfica da deflexão $w(x, y)$ no domínio $x \in [0, a]$ e $y \in [0, b]$, conforme ilustrado na Figura 4.1.

Deflexão $w(x, y)$ da placa ortotrópica



(a) Vista em perspetiva da deflexão da placa.

Deflexão $w(x, y)$ da placa ortotrópica



(b) Vista lateral da deflexão da placa.

Figura 4.1: Representação gráfica da deflexão $w(x, y)$ da placa ortotrópica sob carregamento uniforme, apresentada em duas vistas complementares.

A partir da Figura 4.1, constata-se que a deflexão máxima obtida corresponde a $w = -6.899 \times 10^{-3}$ m, localizada aproximadamente no ponto de coordenadas $x = 0.372$ m e $y = 0.297$ m, isto é, sensivelmente no centro da placa.

Este comportamento resulta da aplicação de uma carga uniformemente distribuída p_0 so-

bre toda a superfície da placa. Devido à sua geometria retangular, verifica-se que a deflexão aumenta gradualmente à medida que nos aproximamos do centro e, inversamente, diminui junto das extremidades.

As condições de fronteira, que impõem apoios simples em todos os lados, confirmam a coerência do resultado obtido, uma vez que a deflexão é nula nas bordas e atinge o seu valor máximo no interior da placa.

4.2 Tarefa 2

Na alínea *a*), recorrendo ao método de Lévy, determinou-se uma expressão analítica para a deflexão da superfície elástica $w(x, y)$, de acordo com a Equação 4.2.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[-3.739 \times 10^{-2} \sinh(\alpha y) + 2.056 \times 10^{-2} \cosh(\alpha y) - 5.89 \times 10^{-2} y \sinh(\alpha y) + 7.847 \times 10^{-2} y \cosh(\alpha y) + \frac{4p_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} s \right] \sin(\alpha x) \quad (4.2)$$

Na alínea *b*), implementou-se um programa em *Python* com o objetivo de calcular numericamente as deflexões $w(x, y)$ no domínio definido por $x \in [0, a]$ e $y \in [0, b]$. O resultado obtido encontra-se representado na Figura 4.2.

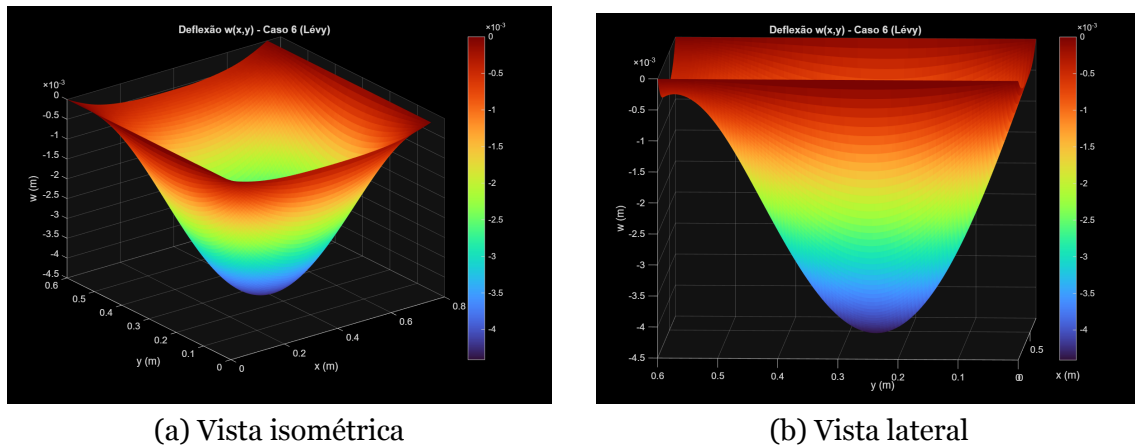


Figura 4.2: Distribuição da deflexão na placa representada em duas perspectivas: (a) vista isométrica e (b) vista lateral.

A partir do gráfico, observa-se que a deflexão máxima obtida é de aproximadamente $w = -4.263 \times 10^{-3}$ m. Tal como verificado na alínea *b*) da Tarefa 1, o ponto de máxima deflexão situa-se essencialmente no centro geométrico da placa, o que está de acordo com o comportamento teórico esperado. Além da identificação do ponto de máxima deflexão,

observa-se que o padrão de deformação da placa segue o comportamento previsto pela teoria de Lévy, apresentando deflexão nula nas bordas simplesmente apoiadas ($x = 0$ e $x = a$) e máxima na região central. As condições de apoio elásticas nos bordos $y = 0$ e $y = b$ influenciam significativamente a rigidez global da placa: o elemento linear elástico em $y = 0$ reduz moderadamente a deflexão, enquanto o apoio com o elemento elástico linear e o elemento elástico torcional em $y = b$ aumenta a restrição à rotação, resultando numa ligeira assimetria na distribuição das deflexões.

De forma geral, a concordância entre os resultados numéricos obtidos e o comportamento teórico previsto pela formulação de Lévy confirma a validade do modelo implementado. As diferenças observadas são residuais e podem estar associadas à discretização numérica e à representação dos elementos elásticos. Assim, pode-se concluir que a metodologia adotada descreve adequadamente a resposta estrutural da placa sob as condições de apoio mistas consideradas.

Caso (i): $k_w \rightarrow \infty$ e $k_{\theta x} \rightarrow 0$

A Figura 4.3 apresenta a deflexão $w(x, y)$ obtida pela teoria de Lévy para o caso em que os bordos horizontais possuem rigidez elástica infinita e rigidez torsional nula. Nesta configuração, os apoios impedem deslocamentos verticais, mas permitem rotações livres, resultando numa resposta estrutural mais rígida.

Observa-se que a deflexão máxima ocorre no centro geométrico da placa, com valor aproximado de $w_{\max} = -7.154 \times 10^{-3}$ m. A superfície apresenta simetria em relação aos eixos médios, com deflexão nula nos bordos simplesmente apoiados ($x = 0$ e $x = a$). O comportamento é típico de uma placa com bordos inferiores indeformáveis, em conformidade com o previsto pela teoria de Lévy.

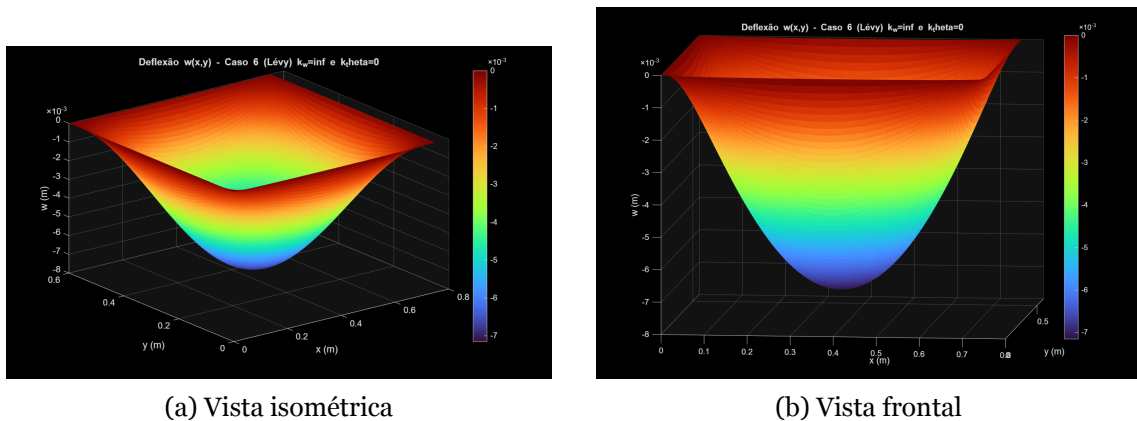


Figura 4.3: Caso (i): $k_w \rightarrow \infty$ e $k_{\theta x} \rightarrow 0$.

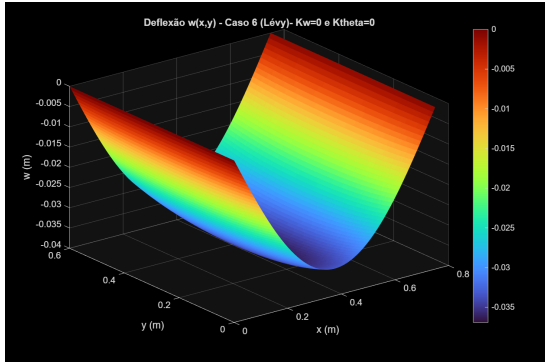
A elevada rigidez translacional dos apoios horizontais limita fortemente os deslocamentos verticais, conduzindo a menores valores de deflexão máxima e a uma curvatura mais

uniforme em toda a superfície da placa.

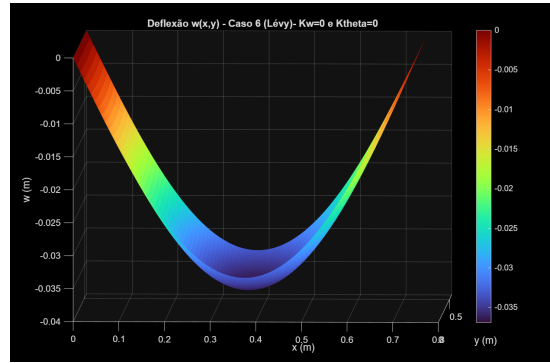
Caso (ii): $k_w \rightarrow 0$ e $k_{\theta x} \rightarrow 0$

A Figura 4.4 apresenta a distribuição de deflexões para o caso em que ambos os apoios horizontais são livres, isto é, não possuem rigidez elástica, nem torsional. Nestas condições, a placa apresenta comportamento mais flexível, com deslocamentos significativamente superiores.

O valor máximo de deflexão é $w_{\max} = -3.69 \times 10^{-2}$ m, superior ao do caso anterior. A ausência de restrições verticais e rotacionais conduz a um aumento acentuado da curvatura e a uma superfície assimétrica, com maior amplitude de deformação no centro da placa.



(a) Vista isométrica



(b) Vista frontal

Figura 4.4: Caso (ii): $k_w \rightarrow 0$ e $k_{\theta x} \rightarrow 0$.

Comparando os dois casos, verifica-se que a redução da rigidez dos apoios resulta num aumento expressivo da deflexão máxima e numa alteração do padrão de curvatura. Assim, confirma-se a forte dependência do comportamento fletor da placa em relação às condições de apoio elásticas impostas nas extremidades horizontais.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvido o estudo da deflexão em placas finas ortotrópicas e isotrópicas, recorrendo a diferentes métodos analíticos e numéricos para a resolução das equações diferenciais envolvidas.

Na primeira tarefa, aplicou-se o método de Navier para determinar a deflexão de uma placa ortotrópica sujeita a um carregamento uniformemente distribuído. A partir desta abordagem, foi possível deduzir a equação diferencial que descreve $w(x, y)$ (4.1), verificando-se que a deflexão máxima ocorre aproximadamente no centro da placa. Este resultado encontra-se em conformidade com o esperado, uma vez que as condições de fronteira correspondem a apoios simples em todos os lados.

Na segunda tarefa, utilizou-se o método de Lévy para analisar uma placa isotrópica apoiada sobre elementos elásticos lineares e torsionais. Este método revelou-se adequado para problemas em que apenas duas bordas apresentam condições de apoio simples, permitindo a resolução analítica das equações diferenciais de flexão através da decomposição em séries. A introdução das constantes de rigidez k_w e $k_{\theta x}$ demonstrou o impacto direto das condições de apoio na distribuição das deflexões: à medida que a rigidez linear aumenta, a deflexão máxima diminui, aproximando-se do comportamento de uma placa simplesmente apoiada; por outro lado, valores reduzidos de rigidez resultam em maiores deslocamentos, simulando uma borda mais livre.

Comparando os resultados obtidos para as placas ortotrópicas e isotrópicas, observou-se que as propriedades anisotrópicas do material influenciam significativamente o padrão de deflexão, evidenciando maior rigidez na direção com módulo elástico superior. Já para a placa isotrópica, o comportamento é simétrico, sendo a distribuição das deflexões fortemente dependente das condições de contorno impostas.

Podemos concluir então, dizendo que, a combinação dos métodos de Navier e Lévy permitiu compreender de maneira aprofundada o comportamento estrutural de placas sob diferentes condições de fronteira e propriedades do material. Além disso, verificou-se a importância da utilização de métodos analíticos como ferramenta de validação para soluções numéricas.

Bibliografia

Gamboa. P.V., Apontamentos da unidade curricular – Placas e Cascas, 320 acetatos, UBI, 2020.

Gamboa, P. V., Apontamentos da Unidade Curricular – Estruturas em Materiais Compósitos, 320 acetatos, Universidade da Beira Interior, Departamento de Ciências Aeroespaciais, 2025.

Dutra, T., Apontamentos da Unidade Curricular – Placas e Cascas, 250 acetatos, Universidade da Beira Interior, Departamento de Ciências Aeroespaciais, 2025.

Apêndice A

Implementação do código

Tarefa 1

Alínea a)

```
1 # Importar as bibliotecas
2 # Definir as constantes simbólicas que representam as propriedades do material
3 # Definir a deflexão em função de x e y  $\square w(x, y)$ 
4 # Definir os coeficientes de rigidez reduzida
5 # Definir a matriz de rigidez reduzida Q para um material ortotrópico
6 # Determinar as curvaturas da superfície média da placa
7 # Definir as tensões em função das deformações
8 # Cálculo simbólico integral das tensões para obter os momentos
9 # Simplificando o resultado obtido, obtemos os valores das constantes de
   rigidez de uma placa ortotrópica
10
11 import sympy as sp
12 import math
13 import numpy as np
14
15 E1, E2, v12, v21, G12 = sp.symbols('E1, E2, v12, v21, G12')
16 sigma_x, sigma_y, tau_xy = sp.symbols('sigma_x, sigma_y, tau_xy')
17 ep_x, ep_y, gamma_xy = sp.symbols('ep_x, ep_y, gamma_xy')
18 x, y, z, t = sp.symbols('x, y, z, t')
19 w = sp.Function('w')(x, y)
20
21 Q11 = E1 / (1 - v12 * v21)
22 Q22 = (E2 / E1) * Q11
23 Q12 = v12 * Q11
24 Q66 = G12
25
26 Q = sp.Matrix([
27     [Q11, Q12, 0],
28     [Q12, Q22, 0],
29     [0, 0, Q66]
30 ])
31
32 k_xx = sp.diff(w, x, 2)
33 k_yy = sp.diff(w, y, 2)
```

```

34 k_xy= 2*sp.diff(w,x,y)
35
36 k=sp.Matrix([k_xx,k_yy,k_xy])
37
38 eps=-z*k
39
40 tensoes= Q*eps
41
42 M = sp.integrate(z * tensoes, (z, -t/2, t/2))
43
44 D = sp.integrate(z**2 * Q, (z, -t/2, t/2))
45 D_simplificado = sp.simplify(D)
46
47 M_relação = sp.Eq(M, D_simplificado * k)
48
49 sp.pprint(D_simplificado)

```

Listagem A.1: Código em Python para o caso 6

Alínea b)

```

1 # Importar as bibliotecas necessárias
2 # Definir os valores simbólicos das propriedades do material
3 # Cálculo de  $v_{21}$  a
4 # Calcular as rigidezes de flexão equivalentes
5 # Definir o intervalo de valores de  $x$  e  $y$  e criar uma malha bidimensional
6 # Calcular a deflexão  $w(x, y)$  somando os termos das séries duplas de Fourier
7 # com os índices  $m$  e  $n$  ímpares (1, 3, 5)
8 # Representar graficamente a deflexão obtida em 3D
9 # Determinar os valores da deflexão máxima e as coordenadas correspondentes
10
11 import math
12 import numpy as np
13 import plotly.graph_objects as go
14
15 #Dados relativos ao caso 6
16 a= 0.75 #m
17 b= 0.6 #m
18 t= 0.002 #m
19 E1= 130e9 #Pa
20 E2= 10e9 #Pa
21  $v_{12}$ = 0.26
22 #Das aulas de estruturas 2 temos que :
23  $v_{21} = (E_2 / E_1) * v_{12}$ 
24 G12= 5e9 #Pa
25  $p_0 = -175 \text{ N/mm}^2$ 

```



```

26 pi=math.pi
27
28 #Da alinea a) anterior obtemos as seguintes rigidezes
29 D_x= (E1*t**3)/(12*(1-v12*v21))
30 D_y= (E2*t**3)/(12*(1-v12*v21))
31 D_xy=(G12*t**3)/12
32
33
34 x = np.linspace(0, a, 120)
35 y = np.linspace(0, b, 120)
36 X, Y = np.meshgrid(x, y)
37 w = np.zeros_like(X)
38
39
40 valores_m= [1,3,5]
41 valores_n= [1,3,5]
42
43 for m in valores_m:
44     for n in valores_n:
45         p_mn = (16 * p0) / (pi**2 * m * n)
46         denominador = (
47             D_x * ((m * pi / a)**4)
48             + (D_x * v21 + 4 * D_xy + D_y * v12) * ((m * pi / a)**2 * (n * pi /
49                 b)**2)
50             + D_y * ((n * pi / b)**4)
51         )
52         a_mn = p_mn / denominador
53         w += a_mn * np.sin(m * pi * X / a) * np.sin(n * pi * Y / b) #como é um
54         somatório += serve para guardar todo os valroes e somar-los
55
56
57 fig = go.Figure(data=[
58     go.Surface(
59         x=X, y=Y, z=w,
60         colorscale='Turbo',
61         contours_z=dict(show=True, usecolormap=True, project_z=True)
62     )
63 ])
64
65 fig.update_layout(
66     title="Deflexão w(x, y) da placa ortotrópica",
67     scene=dict(
68         xaxis_title="x [m]",
69         yaxis_title="y [m]",
70         zaxis_title="w [m]",
71         aspectratio=dict(x=1, y=1, z=0.3)
72     ),

```

```

71     width=900,
72     height=650,
73     margin=dict(l=0, r=0, t=50, b=0)
74 )
75
76 fig.show()
77
78 w_min = np.min(w)
79 indice_min = np.unravel_index(np.argmax(w), w.shape)
80 x_min = X[indice_min]
81 y_min = Y[indice_min]
82
83 print(f"Deflexão máxima (em valor absoluto): {w_min:.3e} m")
84 print(f"Ocorre em: x = {x_min:.3f} m, y = {y_min:.3f} m")

```

Listagem A.2: Código em Python para o caso 6

A.1 Tarefa 2

```

1 # Importar bibliotecas
2 # Devido à complexidade do código, vamos dividir o mesmo por etapas
3 # -----
4 # - Definição simbólica das constantes, coordenadas e dos parâmetros físicos
5 # - Construção da solução particular e da solução homogênea da deflexão  $w(x,y)$ 
6 # - Definição total da equação da deflexão  $\rightarrow w(x,y)$ 
7 # -----
8 # - Derivadas parciais em  $x$  e em  $y$ 
9 # -----
10 # - Cálculo dos momentos e dos esforços de corte nos limites  $y=0$  e  $y=b$ 
11 # -----
12 # - Definição das condições de fronteira
13 # - Simplificação dividindo pelo fator  $\sin(\alpha x)$ 
14 # -----
15 # - Preparação para obter a solução simbólica de  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  e  $D_m$ 
16 # -----
17 # - Definição das propriedades da placa e parâmetros do problema
18 # - Cálculo de  $P_m$  para cada modo  $m$ 
19 # - Substituição numérica e resolução do sistema linear para cada modo
20 # -----
21 # - Cálculo da deflexão total  $w(x,y)$  somando todos os modos  $m$ 
22 # -----
23 # - Criar o gráfico 3D
24 # -----
25 # - Determinar os valores de  $w$  no centro da placa e as respectivas coordenadas
26 # -----

```

```

27
28 import sympy as sp
29 import numpy as np
30 import plotly.graph_objects as go
31
32 # -----
33 # 1) Símbolos e solução simbólica
34 # -----
35 Am, Bm, Cm, Dm = sp.symbols('Am Bm Cm Dm')
36 x, y, a, b, alpha, nu, D, Pm, kw, ktheta = sp.symbols('x y a b alpha nu D Pm kw
    ktheta', real=True)
37
38 W_part = (Pm / D) / alpha**4
39 W_h = Am*sp.cosh(alpha*y) + Bm*sp.sinh(alpha*y) + Cm*y*sp.cosh(alpha*y) + Dm*y*
    sp.sinh(alpha*y)
40
41 W_total = W_h + W_part
42
43 w_xy = W_total * sp.sin(alpha*x)
44
45 w_y = sp.diff(w_xy, y)
46 w_yy = sp.diff(w_y, y)
47 w_yyy = sp.diff(w_yy, y)
48 w_xx = sp.diff(w_xy, x, 2)
49
50 subso = {y: 0}
51 subsb = {y: b}
52
53 wo, w_yo, w_yyo, w_yyyo = [sp.simplify(expr.subs(subso)) for expr in [w_xy, w_y
    , w_yy, w_yyy]]
54 w_b, w_yb, w_yyb, w_yyyb = [sp.simplify(expr.subs(subsb)) for expr in [w_xy,
    w_y, w_yy, w_yyy]]
55
56 M_yo = D * (w_yyo - nu * w_xx.subs(subso))
57 M_yb = D * (w_yyb - nu * w_xx.subs(subsb))
58 Q_yo = D * (w_yyyo - (2 - nu) * alpha**2 * w_yo)
59 Q_yb = D * (w_yyyb - (2 - nu) * alpha**2 * w_yb)
60
61 eq1_x = sp.simplify(Q_yo + kw*wo)
62 eq2_x = sp.simplify(M_yo)
63 eq3_x = sp.simplify(Q_yb - kw*w_b)
64 eq4_x = sp.simplify(M_yb - ktheta*w_yb)
65
66 sin_factor = sp.sin(alpha*x)
67 eqs = [sp.simplify(eq / sin_factor) for eq in [eq1_x, eq2_x, eq3_x, eq4_x]]
68
69 unknowns = [Am, Bm, Cm, Dm]

```

```

70 M_sym = sp.zeros(4,4)
71 RHS_sym = sp.zeros(4,1)
72
73 for i, eq in enumerate(eqs):
74     for j, u in enumerate(unknowns):
75         M_sym[i,j] = sp.diff(eq, u)
76         const_term = eq.subs({u:0 for u in unknowns})
77         RHS_sym[i] = -const_term
78
79 sol = sp.solve(M_sym * sp.Matrix(unknowns) - RHS_sym, unknowns, dict=True)[0]
80 A_expr = sp.simplify(sol[Am])
81 B_expr = sp.simplify(sol[Bm])
82 C_expr = sp.simplify(sol[Cm])
83 D_expr = sp.simplify(sol[Dm])
84
85 print('--- Soluções simbólicas gerais (simplificadas) ---')
86 print(f"A_m = {A_expr}")
87 print(f"B_m = {B_expr}")
88 print(f"C_m = {C_expr}")
89 print(f"D_m = {D_expr}\n")
90
91 a_val = 0.75
92 b_val = 0.6
93 t_val = 0.001
94 E_val = 210e9
95 nu_val = 0.30
96 kw_val = 125e3
97 ktheta_val = 1060
98 po_val = 175
99 D_val = E_val * t_val**3 / (12 * (1 - nu_val**2))
100
101 def compute_Pm_alpha(m, po, a):
102     return (4.0 * po / (a * (m * np.pi / a))), (m * np.pi / a)
103
104 m_list = [1, 3, 5, 7, 9]
105 ABCD = {}
106
107 for m in m_list:
108     Pm_val, alpha_val = compute_Pm_alpha(m, po_val, a_val)
109     subs_vals = {
110         alpha: alpha_val, a: a_val, b: b_val, D: D_val, nu: nu_val,
111         kw: kw_val, ktheta: ktheta_val, Pm: Pm_val
112     }
113
114     M_num = np.array(sp.N(M_sym.subs(subs_vals)), dtype=float)
115     RHS_num = np.array(sp.N(RHS_sym.subs(subs_vals)), dtype=float).flatten()
116

```

```

117     try:
118         sol_num = np.linalg.solve(M_num, RHS_num)
119     except np.linalg.LinAlgError:
120         sol_num = np.linalg.pinv(M_num) @ RHS_num
121
122     ABCD[m] = dict(A=sol_num[0], B=sol_num[1], C=sol_num[2], D=sol_num[3],
123                   Pm=Pm_val, alpha=alpha_val)
124
125 nx, ny = 100, 100
126 x_vals = np.linspace(0, a_val, nx)
127 y_vals = np.linspace(0, b_val, ny)
128 X, Y = np.meshgrid(x_vals, y_vals)
129 W = np.zeros_like(X)
130
131 for m in m_list:
132     s = ABCD[m]
133     alpha_m, Pm_m = s['alpha'], s['Pm']
134     A, B, C, Dm_ = s['A'], s['B'], s['C'], s['D']
135     cosh_term = np.cosh(alpha_m * Y)
136     sinh_term = np.sinh(alpha_m * Y)
137     Wm = (A * cosh_term + B * sinh_term + C * Y * cosh_term + Dm_ * Y *
138           sinh_term + Pm_m / (D_val * alpha_m**4))
139     W += Wm * np.sin(alpha_m * X)
140 W = -W
141
142 fig = go.Figure(data=[
143     go.Surface(
144         z=W,
145         x=X,
146         y=Y,
147         colorscale='Turbo',
148         colorbar=dict(title='w (m)'),
149         contours={"z": {"show": True, "usecolormap": True, "project_z": True}}
150     )
151 ])
152
153 fig.update_layout(
154     title='Deflexão w(x,y) - Caso 6 (Lévy)',
155     scene=dict(
156         xaxis_title='x (m)',
157         yaxis_title='y (m)',
158         zaxis_title='w (m)'
159     ),
160     width=900,
161     height=700
162 )

```

```
163  
164 fig.show()  
165  
166 ix = np.argmin(abs(x_vals - a_val/2))  
167 iy = np.argmin(abs(y_vals - b_val/2))  
168 w_centro = W[iy, ix]  
169 print(f"w_centro ≈ {w_centro:.3e} m")
```

Listagem A.3: Código em Python para o caso 6

Expressões de Am, Bm, Cm e de Dm:

$$\begin{aligned} A_m = & ((2 * Pm * D^3 * b^2 * nu^3 - 2 * Pm * D^3 * b^2 * nu^4 + 2 * Pm * D^3 * b^2 * nu^2 - 2 * Pm * D^3 * b^2 * \\ & nu) * alpha^9 + (8 * Pm * b * sinh(alpha * b) * D^3 * nu^2 - 4 * Pm * b * sinh(alpha * b) * D^3 * nu^3 - 4 * \\ & Pm * b * sinh(alpha * b) * D^3 * nu) * alpha^8 + (3 * D^3 * Pm * nu * cosh(2 * alpha * b) - D^3 * Pm * \\ & nu^3 - D^3 * Pm * nu^4 - 3 * D^3 * Pm * nu - 3 * D^3 * Pm * nu^2 + 3 * D^3 * Pm * nu^2 * cosh(2 * alpha * \\ & b) + D^3 * Pm * nu^3 * cosh(2 * alpha * b) + D^3 * Pm * nu^4 * cosh(2 * alpha * b) + 4 * D^2 * Pm * b * \\ & ktheta * nu - 4 * D^2 * Pm * b * ktheta * nu^2) * alpha^7 + (-2 * Pm * ktheta * sinh(2 * alpha * b) * \\ & D^2 * nu^2 - 2 * Pm * ktheta * sinh(2 * alpha * b) * D^2 * nu) * alpha^6 + (4 * D^2 * Pm * b * kw + 4 * D^2 * \\ & Pm * b * kw * nu + 4 * D^2 * Pm * b * kw * cosh(alpha * b) - 8 * D^2 * Pm * b * kw * nu^2 - 4 * D^2 * Pm * b * \\ & kw * nu * cosh(alpha * b) + 2 * D * Pm * b^2 * ktheta * kw * nu^2 - 2 * D * Pm * b^2 * ktheta * kw * nu) * \\ & alpha^5 + (12 * D^2 * Pm * kw * sinh(alpha * b) + 6 * D^2 * Pm * kw * sinh(2 * alpha * b) + 4 * D^2 * \\ & Pm * kw * nu^2 * sinh(2 * alpha * b) - 4 * D^2 * Pm * kw * nu * sinh(alpha * b) + 2 * D^2 * Pm * kw * \\ & nu * sinh(2 * alpha * b) - 4 * D * Pm * b * ktheta * kw * sinh(alpha * b) + 4 * D * Pm * b * ktheta * \\ & kw * nu * sinh(alpha * b)) * alpha^4 + (D * Pm * ktheta * kw * nu - 4 * D * Pm * ktheta * kw - 8 * \\ & D * Pm * ktheta * kw * cosh(alpha * b) - 4 * D * Pm * ktheta * kw * cosh(2 * alpha * b) + D * Pm * \\ & ktheta * kw * nu^2 - D * Pm * ktheta * kw * nu^2 * cosh(2 * alpha * b) - D * Pm * ktheta * kw * nu * \\ & cosh(2 * alpha * b)) * alpha^3 + (4 * D * Pm * kw^2 * cosh(2 * alpha * b) - 4 * D * Pm * kw^2 + 4 * Pm * \\ & b * ktheta * kw^2) * alpha - 2 * Pm * ktheta * kw^2 * sinh(2 * alpha * b)) / ((2 * D^4 * b^2 * nu^4 - 4 * D^4 * \\ & b^2 * nu^2 + 2 * D^4 * b^2) * alpha^13 + (9 * D^4 - 9 * D^4 * cosh(2 * alpha * b) + 6 * D^4 * nu^2 + D^4 * nu^4 - \\ & 6 * D^4 * nu^2 * cosh(2 * alpha * b) - D^4 * nu^4 * cosh(2 * alpha * b) - 4 * D^3 * b * ktheta + 4 * D^3 * b * \\ & ktheta * nu^2) * alpha^11 + (2 * ktheta * sinh(2 * alpha * b) * D^3 * nu^2 + 6 * ktheta * sinh(2 * alpha * \\ & b) * D^3) * alpha^10 + (8 * kw * D^3 * b * nu^2 - 8 * kw * D^3 * b - 2 * ktheta * kw * D^2 * b^2 * nu^2 + 2 * ktheta * \\ & kw * D^2 * b^2) * alpha^9 + (-4 * kw * sinh(2 * alpha * b) * D^3 * nu^2 - 12 * kw * sinh(2 * alpha * b) * \\ & D^3) * alpha^8 + (9 * D^2 * ktheta * kw + 7 * D^2 * ktheta * kw * cosh(2 * alpha * b) - D^2 * ktheta * kw * \\ & nu^2 + D^2 * ktheta * kw * nu^2 * cosh(2 * alpha * b)) * alpha^7 + (4 * D^2 * kw^2 - 4 * D^2 * kw^2 * cosh(2 * \\ & alpha * b) - 4 * D * b * ktheta * kw^2) * alpha^5 + (2 * D * ktheta * kw^2 * sinh(2 * alpha * b)) * alpha^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_m = & ((2 * D^3 * Pm * b * nu + 2 * D^3 * Pm * b * nu^2 - 2 * D^3 * Pm * b * nu^3 - 2 * D^3 * Pm * b * nu^4 - 2 * \\ & D^3 * Pm * b * nu^2 * cosh(alpha * b) + 2 * D^3 * Pm * b * nu^3 * cosh(alpha * b) + 2 * D^3 * Pm * b * nu^4 * \\ & cosh(alpha * b) - 2 * D^3 * Pm * b * nu * cosh(alpha * b)) * alpha^8 + (6 * D^3 * Pm * nu * sinh(alpha * \\ & b) - 3 * D^3 * Pm * nu * sinh(2 * alpha * b) + 6 * D^3 * Pm * nu^2 * sinh(alpha * b) + 2 * D^3 * Pm * \\ & nu^3 * sinh(alpha * b) - 3 * D^3 * Pm * nu^2 * sinh(2 * alpha * b) + 2 * D^3 * Pm * nu^4 * sinh(alpha * \\ & b) - D^3 * Pm * nu^3 * sinh(2 * alpha * b) - D^3 * Pm * nu^4 * sinh(2 * alpha * b)) * alpha^7 + (2 * D^2 * \\ & Pm * b^2 * kw - 2 * D^2 * Pm * ktheta * nu - 2 * D^2 * Pm * ktheta * nu^2 + 2 * D^2 * Pm * ktheta * nu^2 * \\ & cosh(2 * alpha * b) - 2 * D^2 * Pm * b^2 * kw * nu^2 + 2 * D^2 * Pm * ktheta * nu * cosh(2 * alpha * b)) * \\ & alpha^6 + (6 * Pm * b * kw * sinh(alpha * b) * D^2 * nu^2 + 2 * Pm * b * kw * sinh(alpha * b) * D^2) * \\ & alpha^5 + (6 * D^2 * Pm * kw - 6 * D^2 * Pm * kw * nu - 6 * D^2 * Pm * kw * cosh(2 * alpha * b) - 4 * D^2 * \\ & Pm * kw * nu^2 + 8 * D^2 * Pm * kw * nu^2 * cosh(alpha * b) - 4 * D^2 * Pm * kw * nu^2 * cosh(2 * alpha * \\ & b) - 4 * D * Pm * b * ktheta * kw + 8 * D^2 * Pm * kw * nu * cosh(alpha * b) - 2 * D^2 * Pm * kw * nu * \\ & cosh(2 * alpha * b) + 2 * D * Pm * b * ktheta * kw * nu - 2 * D * Pm * b * ktheta * kw * cosh(alpha * \\ & b) + 2 * D * Pm * b * ktheta * kw * nu^2 - 4 * D * Pm * b * ktheta * kw * nu * cosh(alpha * b) - 2 * D * \\ & Pm * b * ktheta * kw * nu^2 * cosh(alpha * b)) * alpha^4 + (2 * D * Pm * ktheta * kw * sinh(alpha * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b) + 4 * D * Pm * ktheta * kw * sinh(2 * alpha * b) - 2 * D * Pm * ktheta * kw * nu^2 * sinh(alpha * b) + D * Pm * ktheta * kw * nu^2 * sinh(2 * alpha * b) + D * Pm * ktheta * kw * nu * sinh(2 * alpha * b)) * alpha^3 + (2 * Pm * b^2 * ktheta * kw^2 - 4 * D * Pm * b * kw^2 + 4 * D * Pm * b * kw^2 * cosh(alpha * b)) * alpha^2 + (8 * D * Pm * kw^2 * sinh(alpha * b) - 4 * D * Pm * kw^2 * sinh(2 * alpha * b) - 4 * Pm * b * ktheta * kw^2 * sinh(alpha * b)) * alpha + (2 * Pm * ktheta * kw^2 - 4 * Pm * ktheta * kw^2 * cosh(alpha * b) + 2 * Pm * ktheta * kw^2 * cosh(2 * alpha * b)) / ((2 * D^4 * b^2 * nu^4 - 4 * D^4 * b^2 * nu^2 + 2 * D^4 * b^2) * alpha^13 + (9 * D^4 - 9 * D^4 * cosh(2 * alpha * b) + 6 * D^4 * nu^2 + D^4 * nu^4 - 6 * D^4 * nu^2 * cosh(2 * alpha * b) - D^4 * nu^4 * cosh(2 * alpha * b) - 4 * D^3 * b * ktheta + 4 * D^3 * b * ktheta * nu^2) * alpha^11 + (2 * ktheta * sinh(2 * alpha * b) * D^3 * nu^2 + 6 * ktheta * sinh(2 * alpha * b) * D^3) * alpha^10 + (8 * kw * D^3 * b * nu^2 - 8 * kw * D^3 * b - 2 * ktheta * kw * D^2 * b^2 * nu^2 + 2 * ktheta * kw * D^2 * b^2) * alpha^9 + (-4 * kw * sinh(2 * alpha * b) * D^3 * nu^2 - 12 * kw * sinh(2 * alpha * b) * D^3) * alpha^8 + (9 * D^2 * ktheta * kw + 7 * D^2 * ktheta * kw * cosh(2 * alpha * b) - D^2 * ktheta * kw * nu^2 + D^2 * ktheta * kw * nu^2 * cosh(2 * alpha * b)) * alpha^7 + (4 * D^2 * kw^2 - 4 * D^2 * kw^2 * cosh(2 * alpha * b) - 4 * D * b * ktheta * kw^2) * alpha^5 + (2 * D * ktheta * kw^2 * sinh(2 * alpha * b)) * alpha^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_m = & ((2 * D^3 * Pm * b * nu - 2 * D^3 * Pm * b * nu^2 - 2 * D^3 * Pm * b * nu^3 + 2 * D^3 * Pm * b * nu^4 + 2 * D^3 * Pm * b * nu^2 * cosh(alpha * b) + 2 * D^3 * Pm * b * nu^3 * cosh(alpha * b) - 2 * D^3 * Pm * b * nu^4 * cosh(alpha * b) - 2 * D^3 * Pm * b * nu * cosh(alpha * b)) * alpha^8 + (6 * D^3 * Pm * nu * sinh(alpha * b) - 3 * D^3 * Pm * nu * sinh(2 * alpha * b) - 6 * D^3 * Pm * nu^2 * sinh(alpha * b) + 2 * D^3 * Pm * nu^3 * sinh(alpha * b) + 3 * D^3 * Pm * nu^2 * sinh(2 * alpha * b) - 2 * D^3 * Pm * nu^4 * sinh(alpha * b) - D^3 * Pm * nu^3 * sinh(2 * alpha * b) + D^3 * Pm * nu^4 * sinh(2 * alpha * b)) * alpha^7 + (2 * D^2 * Pm * ktheta * nu^2 - 2 * D^2 * Pm * ktheta * nu - 2 * D^2 * Pm * ktheta * nu^2 * cosh(2 * alpha * b) + 2 * D^2 * Pm * ktheta * nu * cosh(2 * alpha * b)) * alpha^6 + (2 * D^2 * Pm * b * kw * sinh(alpha * b) - 2 * D^2 * Pm * b * kw * nu^2 * sinh(alpha * b)) * alpha^5 + (3 * D^2 * Pm * kw * cosh(2 * alpha * b) - 6 * D^2 * Pm * kw * nu - 3 * D^2 * Pm * kw + 5 * D^2 * Pm * kw * nu^2 - 8 * D^2 * Pm * kw * nu^2 * cosh(alpha * b) + 3 * D^2 * Pm * kw * nu^2 * cosh(2 * alpha * b) + 8 * D^2 * Pm * kw * nu * cosh(alpha * b) - 2 * D^2 * Pm * kw * nu * cosh(2 * alpha * b) + 2 * D * Pm * b * ktheta * kw * nu - 2 * D * Pm * b * ktheta * kw * cosh(alpha * b) - 2 * D * Pm * b * ktheta * kw * nu^2 + 2 * D * Pm * b * ktheta * kw * nu^2 * cosh(alpha * b)) * alpha^4 + (2 * D * Pm * ktheta * kw * sinh(alpha * b) - 2 * D * Pm * ktheta * kw * sinh(2 * alpha * b) + 2 * D * Pm * ktheta * kw * nu^2 * sinh(alpha * b) - D * Pm * ktheta * kw * nu^2 * sinh(2 * alpha * b) - 4 * D * Pm * ktheta * kw * nu * sinh(alpha * b) + D * Pm * ktheta * kw * nu * sinh(2 * alpha * b)) * alpha^3 + (2 * D * Pm * kw^2 * sinh(2 * alpha * b) - 4 * D * Pm * kw^2 * sinh(alpha * b)) * alpha + (4 * Pm * ktheta * kw^2 * cosh(alpha * b) - 3 * Pm * ktheta * kw^2 - Pm * ktheta * kw^2 * cosh(2 * alpha * b)) / ((2 * D^4 * b^2 * nu^4 - 4 * D^4 * b^2 * nu^2 + 2 * D^4 * b^2) * alpha^12 + (9 * D^4 - 9 * D^4 * cosh(2 * alpha * b) + 6 * D^4 * nu^2 + D^4 * nu^4 - 6 * D^4 * nu^2 * cosh(2 * alpha * b) - D^4 * nu^4 * cosh(2 * alpha * b) - 4 * D^3 * b * ktheta + 4 * D^3 * b * ktheta * nu^2) * alpha^10 + (2 * ktheta * sinh(2 * alpha * b) * D^3 * nu^2 + 6 * ktheta * sinh(2 * alpha * b) * D^3) * alpha^9 + (8 * kw * D^3 * b * nu^2 - 8 * kw * D^3 * b - 2 * ktheta * kw * D^2 * b^2 * nu^2 + 2 * ktheta * kw * D^2 * b^2) * alpha^8 + (-4 * kw * sinh(2 * alpha * b) * D^3 * nu^2 - 12 * kw * sinh(2 * alpha * b) * D^3) * alpha^7 + (9 * D^2 * ktheta * kw + 7 * D^2 * ktheta * kw * cosh(2 * alpha * b) - D^2 * ktheta * kw * nu^2 + D^2 * ktheta * kw * nu^2 * cosh(2 * alpha * b)) * alpha^6 + (4 * D^2 * kw^2 - 4 * D^2 * kw^2 * cosh(2 * alpha * b) - 4 * D * b * ktheta * kw^2) * alpha^4 + (2 * D * ktheta * kw^2 * sinh(2 * alpha * b)) * alpha^3)
\end{aligned}$$

$$D_m = ((2 * Pm * b * sinh(alpha * b) * D^3 * nu^4 - 2 * Pm * b * sinh(alpha * b) * D^3 * nu^3 - 2 * Pm * b *$$

$$\begin{aligned}
& \sinh(\alpha*b)*D^3*nu^2+2*Pm*b*\sinh(\alpha*b)*D^3*nu)*\alpha^8+(3*D^3*Pm*nu^2- \\
& D^3*Pm*nu^3+D^3*Pm*nu^4-3*D^3*Pm*nu+3*D^3*Pm*nu*\cosh(2*\alpha*b)-3*D^3* \\
& Pm*nu^2*\cosh(2*\alpha*b)+D^3*Pm*nu^3*\cosh(2*\alpha*b)-D^3*Pm*nu^4*\cosh(2*\alpha*b) \\
&)*\alpha^7+(2*D^2*Pm*ktheta*nu^2*\sinh(2*\alpha*b)-2*D^2*Pm*ktheta*nu*\sinh(2* \\
& \alpha*b))*\alpha^6+(2*D^2*Pm*b*k*nu^2-2*D^2*Pm*b*k*\cosh(\alpha*b)-2*D^2*Pm* \\
& b*k*nu+2*D^2*Pm*b*k*nu^2*\cosh(\alpha*b))*\alpha^5+(2*D^2*Pm*k*nu^2*\sinh(\alpha* \\
& b)-3*D^2*Pm*k*\sinh(2*\alpha*b)-6*D^2*Pm*k*\sinh(\alpha*b)-3*D^2*Pm*k*nu^2* \\
& \sinh(2*\alpha*b)-4*D^2*Pm*k*nu*\sinh(\alpha*b)+2*D^2*Pm*k*nu*\sinh(2*\alpha* \\
& b)+2*D*Pm*b*ktheta*k*\sinh(\alpha*b)-2*D*Pm*b*ktheta*k*nu^2*\sinh(\alpha* \\
& b))*\alpha^4+(2*D*Pm*ktheta*k-3*D*Pm*ktheta*k*nu+4*D*Pm*ktheta*k* \\
& \cosh(\alpha*b)+2*D*Pm*ktheta*k*\cosh(2*\alpha*b)-D*Pm*ktheta*k*nu^2+D* \\
& Pm*ktheta*k*nu^2*\cosh(2*\alpha*b)+4*D*Pm*ktheta*k*nu*\cosh(\alpha*b)-D* \\
& Pm*ktheta*k*nu*\cosh(2*\alpha*b))*\alpha^3+(2*D*Pm*k^2-2*D*Pm*k^2*\cosh(2* \\
& \alpha*b)-2*Pm*b*ktheta*k^2)*\alpha+Pm*ktheta*k^2*\sinh(2*\alpha*b))/((2*D^4* \\
& b^2*nu^4-4*D^4*b^2*nu^2+2*D^4*b^2)*\alpha^12+(9*D^4-9*D^4*\cosh(2*\alpha*b)+6*D^4*nu^2+ \\
& D^4*nu^4-6*D^4*nu^2*\cosh(2*\alpha*b)-D^4*nu^4*\cosh(2*\alpha*b)-4*D^3*b*ktheta+4* \\
& D^3*b*ktheta*nu^2)*\alpha^10+(2*ktheta*\sinh(2*\alpha*b)*D^3*nu^2+6*ktheta*\sinh(2* \\
& \alpha*b)*D^3)*\alpha^9+(8*k*D^3*b*nu^2-8*k*D^3*b-2*ktheta*k*D^2*b^2*nu^2+2* \\
& ktheta*k*D^2*b^2)*\alpha^8+(-4*k*\sinh(2*\alpha*b)*D^3*nu^2-12*k*\sinh(2*\alpha* \\
& b)*D^3)*\alpha^7+(9*D^2*ktheta*k+7*D^2*ktheta*k*\cosh(2*\alpha*b)-D^2*ktheta*k* \\
& nu^2+D^2*ktheta*k*nu^2*\cosh(2*\alpha*b))*\alpha^6+(4*D^2*k^2-4*D^2*k^2*\cosh(2* \\
& \alpha*b)-4*D*b*ktheta*k^2)*\alpha^4+(2*D*ktheta*k^2*\sinh(2*\alpha*b))*\alpha^3)
\end{aligned}$$

