Departamento de
Engenharia Electromecânica

Placas e Cascas - 15253

Ficha de Exercícios 02

Introdução ao FORTRAN 90 – Parte 2

1. Considere a matriz e o vetor fornecidos abaixo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 11 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 13 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -6 & 8 \end{bmatrix} \text{e } \{b\} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Escreva um programa em FORTRAN 90 para:

a) Determinar a matriz triangular superior utilizando o método de Cholesky tal que $[A] = [R]^T[R]$.

b) Achar a solução do sistema $[A]\{x\} = \{b\}$ utilizando o método de Cholesky.

- Nota: Utilize sub-rotinas para leitura e impressão de dados, bem como para solução dos itens a) e b).

Factoração e solução de sistemas lineares através do método de Cholesky:

Através do método da Factoração de Cholesky é possível decompor uma matriz simétrica e positiva definida em uma matriz triangular inferior e sua transposta:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix}$$

As componentes da matriz $[L]$ acima podem ser obtidas como:

$$\begin{aligned} a_{11} &= L_{11}^2 & &\rightarrow & L_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ a_{12} &= L_{11}L_{21} & &\rightarrow & L_{21} &= a_{12}/L_{11} \\ a_{13} &= L_{11}L_{31} & &\rightarrow & L_{31} &= a_{13}/L_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= L_{21}^2 + L_{22}^2 & &\rightarrow & L_{22} &= \sqrt{a_{22} - L_{21}^2} \\ a_{23} &= L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & &\rightarrow & L_{32} &= (a_{23} - L_{21}L_{31})/L_{22} \\ a_{33} &= L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 & &\rightarrow & L_{33} &= \sqrt{a_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} \end{aligned}$$

Desta forma, pode-se generalizar os termos da matriz triangular superior em duas formas distintas – uma para os elementos da diagonal principal e outra para os termos adjacentes:

$$L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} {L_{ji}}^2}$$

$$L_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ki} L_{kj} \right) \Big/ L_{jj}$$

O método da Factoração de Cholesky para solução de sistemas de equações lineares parte do seguinte princípio:

- *Transformar o sistema em dois sistemas diferentes que possam ser resolvidos separadamente sem necessidade de inversão da matriz dos coeficientes.*

A sequência de operações para este método é apresentada abaixo:

$$[L][U]\{x\} = \{b\}$$

fazendo $[U]\{x\} = \{V\}$, tem-se:

$$[L]\{V\} = \{b\}$$

Através da técnica de *forward substitution* obtém-se o vetor $\{V\}$, resolvendo-se desta forma o primeiro sistema. De posse de $\{V\}$, é possível realizar uma *backward substitution* e por fim calcular a solução $\{x\}$.