FACULDADE ENGENHARIA
Departamento de Engenharia Electromecânica

UC: Placas e Cascas – 15253

Ano Letivo: 2025/2026 (1º Semestre)

Trabalho 02 – Placas Retangulares: Soluções de Navier e Lévy

<u>Limite para entrega: 27 de outubro de 2025 às 23h59</u>

Resolva as questões a seguir e escreva as suas soluções num relatório, com no máximo 15 páginas (excluindo-se os elementos pré e pós-textuais), contendo:

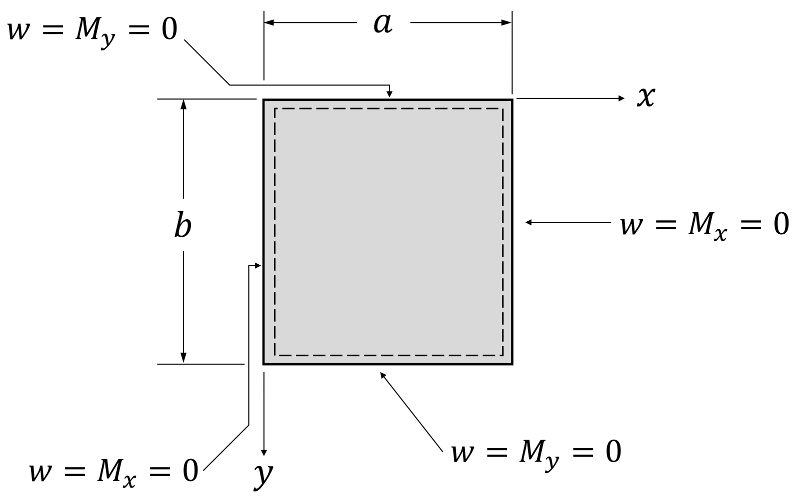
- descrição dos problemas;
- metodologia de solução;
- implementação do código;
- resultados e discussão; e
- conclusão.

Os códigos desenvolvidos devem ser adicionados ao apêndice.

O relatório deve ser escrito utilizando o guião disponível no Moodle, o qual se baseia nas normas de formatação gráfica de apresentações de dissertações de 2.º ciclo e de teses de 3.º ciclo - Despacho n.º 2019/R/63.

Para cada questão é fornecido um conjunto de dados de entrada e cada pessoa deve utilizar um conjunto de dados diferente. A seleção será feita no momento da entrega do enunciado.

1. Uma placa fina de lados a e b, e espessura t, é feita dum material ortotrópico (ver Apêndice I) e está sujeita a um carregamento p_0 uniformemente distribuído ao longo de toda a sua superfície xy, conforme mostrado na figura a seguir.



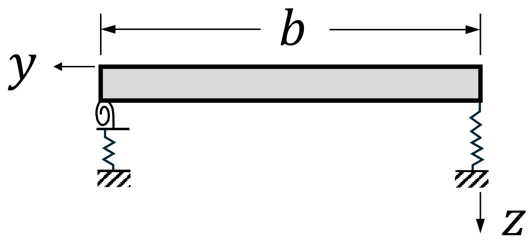
a) A partir da teoria de Kirchhoff, determine a equação diferencial para deflexão da placa fina ortotrópica acima em função de $w(x, y)$;

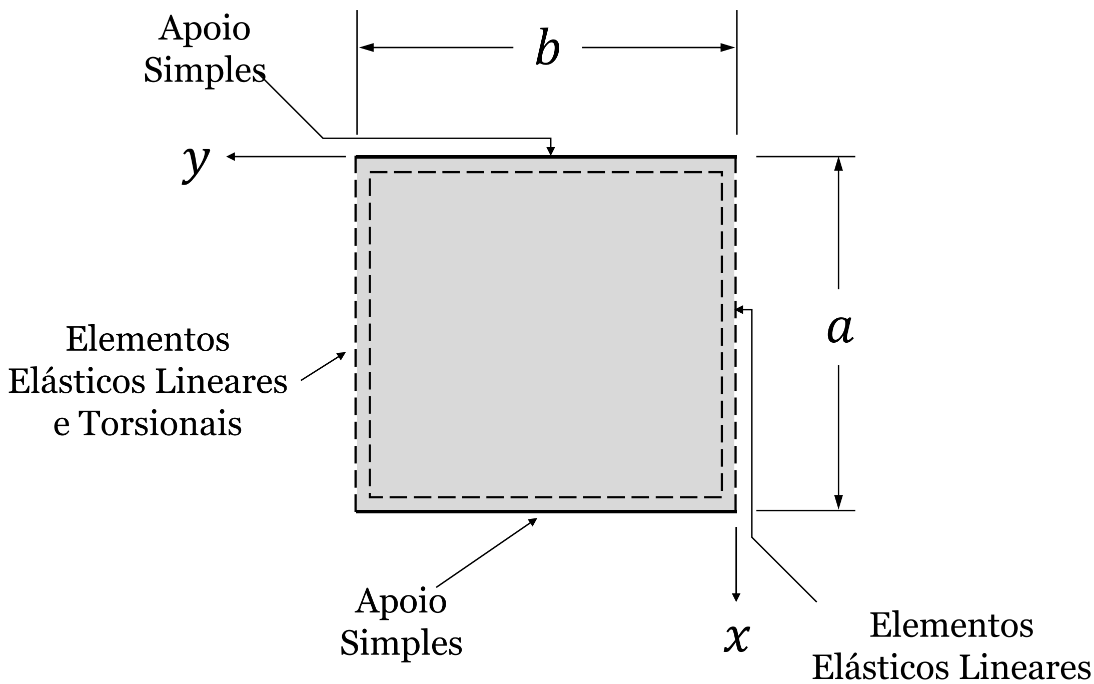
b) Utilizando o método de Navier, encontre a solução para a equação da alínea anterior e represente graficamente as deflexões $w(x, y)$, no intervalo $x = [0, a]$ e $y = [0, b]$. Utilize os primeiros nove termos da série para convergência.

Dados:

Caso	a [mm]	b [mm]	t [mm]	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	ν_{12}	G_{12} [GPa]	p_0 [N/m²]
1	600	650	1	140	11	0.25	4	250
2	650	600	1	140	12	0.25	5	75
3	700	600	1	150	13	0.28	5	100
4	800	700	2	160	14	0.28	6	125
5	650	750	2	170	13	0.28	4	150
6	750	600	2	130	10	0.26	5	175
7	600	625	1	140	11	0.26	5	300
8	625	650	1	135	10	0.27	4	250
9	600	650	1	145	12	0.27	6	200
10	750	800	2	155	13	0.25	6	150
11	825	650	1	165	12	0.25	4	100
12	700	625	1	150	13	0.26	5	250

2. A figura a seguir mostra uma placa de lados a e b, e espessura t, feita dum material isotrópico e que está simplesmente apoiada ao longo de suas bordas $x = 0$ e $x = a$. Ao longo da borda $y = 0$, a placa está apoiada sobre elementos elásticos lineares, cuja constante de rigidez é k_w. Ao longo da borda $y = b$, a placa está apoiada sobre elementos elásticos lineares, k_w, e sobre elementos elásticos torsionais, k_{θ_x}, cuja rigidez está associada à rotação em relação ao eixo x. Um carregamento uniformemente distribuído é aplicado ao longo de toda a superfície xy da placa.





a) A partir da teoria de Kirchhoff, utilize o método de Lévy e derive uma expressão para a deflexão da superfície elástica $w(x, y)$;

b) Escreva um programa de computador para calcular as deflexões $w(x, y)$, no intervalo $x = [0, a]$ e $y = [0\ , b]$. Represente graficamente a superfície defletida;

c) Comente os seguintes casos particulares:

(i) quando $k_w \to \infty$ e $k_{\theta_x} \to 0$;

(ii) quando $k_w \to 0$ e $k_{\theta_x} \to 0$.

Podem ser utilizadas representações gráficas para suportar os comentários.

Dados:

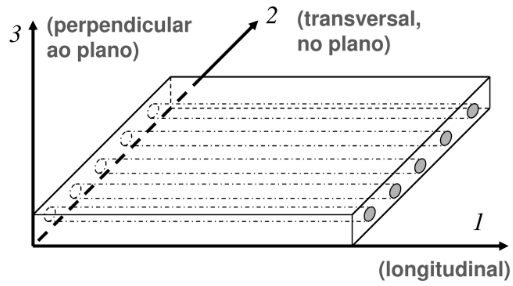
Caso	a [mm]	b [mm]	t [mm]	E [GPa]	ν	k_w[kN/m^2]	k_{θ_x} [N]	p_0 [N/m^2]
1	600	650	1	210	0.3	120	1000	250
2	650	600	1	210	0.3	130	1100	75
3	700	600	1	70	0.33	100	1050	100
4	800	700	1	70	0.33	105	1040	125
5	650	750	1	210	0.3	110	1035	150
6	750	600	1	210	0.3	125	1060	175
7	600	625	1	70	0.33	115	1085	300
8	625	650	1	70	0.33	105	1090	250
9	600	650	1	210	0.3	100	1070	200
10	750	800	1	210	0.3	125	1055	150
11	825	650	1	70	0.33	130	1035	100
12	700	625	1	70	0.33	100	1045	250

Apêndice I

As equações constitutivas para uma lâmina fina de um material homogéneo, ortotrópico e linear elástico, pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1} & -\dfrac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\dfrac{\nu_{12}}{E_1} & \dfrac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

onde E_1, E_2, ν_{12} e G_{12} são as constantes elásticas definidas no eixo principal do material que coincide com os eixos principais do sistema xyz adotado para a placa, conforme mostrado na figura a seguir.



Ao inverter a relação apresentada na Equação (1), tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

onde

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \tag{3a}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{E_1} Q_{11}, \tag{3b}$$

$$Q_{12} = \nu_{21} Q_{11}, \tag{3c}$$

$$Q_{66} = G_{12}. \tag{3d}$$