

Triangulo de Sierpinski

Juan Navarro Rodríguez, Jorge Barroso Díaz, María Ramón García

19 de diciembre de 2022

1. Índice

- Introducción a los fractales
- Propiedades de los fractales
- Dimensión fractal
- Tipos de fractales
- Fractales clásicos
- Aplicaciones de los fractales en la naturaleza
- Espacio de fases

2. Introduction

El término fractal fue usado por vez primera en 1975 por el matemático francés Benoît Mandelbrot. Deriva del vocablo latino *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Según sus propias palabras, tal como indicaba en la página 4 de su libro “The fractal geometry of Nature” publicado el 15 de agosto de 1982: “I coined fractal from the Latin adjective *fractus*. The corresponding Latin verb *frangere* means “to break”: to create irregular fragments. It is therefore sensitive and how appropriate for our needs! that, in addition to ”fragmented”(as in fraction or refraction), *fractus* should also mean irregular”, both meanings being preserved in fragment.”

Si bien no existe aún una definición formal del término fractal en la comunidad científica, el consenso general define a un fractal como una figura geométrica cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. Esto es, una figura geométrica compuesta por fragmentos en una infinita variedad de tamaños, tales que cada uno de ellos es una copia reducida del total (“la parte contiene al todo”).

El término fractal aparece también definido en el DRAE: “(Del fr. *fractal*, voz inventada por el matemático francés B. Mandelbrot en 1975, y este del lat. *fractus*, quebrado). 1. m. Fís. y Mat. Figura plana o espacial, compuesta de infinitos elementos, que tiene la propiedad de que su aspecto y distribución estadística no cambian cualquiera que sea la escala con que se observe. U. t. c. adj.”

Los fractales no se limitan a patrones geométricos. Existen también fractales por ejemplo en la descripción de procesos temporales, y sus características se encuentran en campos tan variados como imágenes, estructuras, sonidos, arte o legislación.

3. Propiedades de los fractales

Un fractal posee las siguientes características:

- Es demasiado irregular local y globalmente para ser descrita en términos geométricos tradicionales. No puede ser definido por tanto mediante las dimensiones euclídeas o tipológicas tradicionales, definiendo para ello la dimensión fractal, generalización de la dimensión euclídea que incluye números no enteros. Posee, por tanto, una forma inusual de llenar el espacio en el que se contiene.

- Es autosimilar. Es decir, su forma está hecha de copias más pequeñas de la misma figura. A esta propiedad de autosimilaridad o autosimilitud también se le denomina independencia de escala. Poseen por tanto infinito detalle: la figura no pierde detalle cualquiera que sea la escala con que se observe. La autosimilaridad puede ser:

Aproximada: los patrones son muy parecidos en las diferentes escalas, con pequeños cambios (distorsiones, rotaciones, etc.) en la forma.

Exacta: patrones idénticos a cualquier escala.

Estadística: las repeticiones de patrones siguen algún tipo de medida numérica de acuerdo a procesos estocásticos.

Cualitativa: patrones repetitivos, no geométricos (por ejemplo series temporales).

Multifractal: existe más de una regla de escala o más de una dimensión fractal.

- La función matemática que los expresa es no derivable. No existe por tanto ninguna entidad geométrica tangente en ningún elemento del fractal. Esto significa que un fractal no es "medible" (cuantificable) según los métodos tradicionales de medida.

- Es una entidad matemáticamente compleja, pero que puede expresarse mediante algoritmos recursivos sencillos. Esta característica es ideal para su estudio mediante ordenadores.

4. Dimensión fractal

La dimensión topológica indica la conectividad de los puntos del objeto de medida. Su valor es siempre entero, nos indica si el objeto geométrico es un punto (dimensión cero), una arista (dimensión uno), un plano (dimensión dos) un volumen (dimensión tres) y un hipervolumen (dimensión cuatro).

La dimensión fractal (también denominada dimensión de autosimilaridad, de capacidad o de Hausdorff) se refiere a cómo el objeto geométrico llena el espacio en el que está inmerso, y puede ser entera o fraccionaria. Así, en la geometría de fractales, la dimensión fractal es un número real que generaliza el concepto de dimensión ordinaria para aquellos objetos geométricos que no admiten espacio tangente. Es un exponente del grado de completitud con el que un fractal parece llenar el espacio en el que se contiene conforme se avanza en las iteraciones del fractal.

La forma más sencilla de aproximarse a esta idea es mediante la autosimilitud. Así, una forma de medir la longitud de una curva es aproximarla mediante una serie de pequeñas rectas que lo recubren (rectificación). Cuanto más pequeñas sean las rectas, más exacta será la medida.

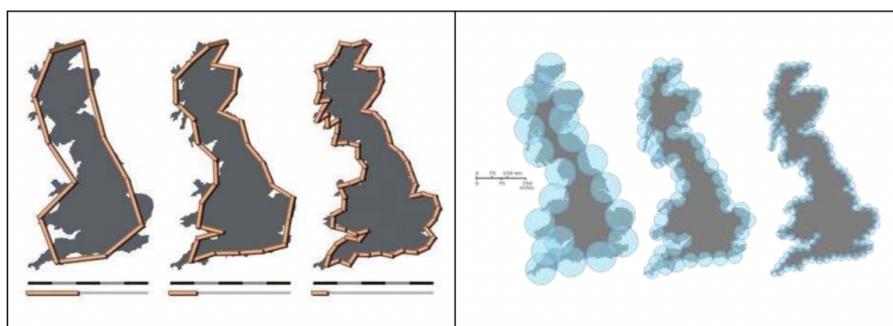


Figura 1. Medición de la costa de Inglaterra mediante pequeñas rectas y mediante pequeñas bolas

De acuerdo a la meteorología anterior, puede pensarse en medir la longitud de una superficie. Como ejemplo, para rectificar un cuadrado de lado 1, puede intentar emplearse una línea de longitud total $L_1 = 1$. Si dividimos el cuadrado en cuatro cuadrados idénticos, cada uno de ellos se cubriría con una línea

de tamaño $1/2$ haciendo una longitud total de $L_2 = 2$. En un nuevo paso, se tendrían 16 cuadrados más pequeños con 1 línea cada uno de tamaño $1 / 4$ para recubrirlo, por lo que la longitud total sería $L_3 = 4$. Si se repite esta operación infinitas veces, no existiría un solo punto del cuadrado por el que no pasará una línea, ni por ninguna de ellos pasaría simultáneamente más de una. Dado que para cubrir el cuadrado original el cuadrado se podría dividir en infinitos cuadrados más pequeños, repitiendo este paso infinitas veces:

$$L_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} \left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

Se concluye por tanto que la longitud de un cuadrado es infinita. Por su parte, para medir el volumen de un cuadrado, puede procederse de forma análoga. Para medir un volumen de un objeto geométrico, sin que queden huecos ni excedentes, se halla el límite de la suma de los elementos de volumen infinitesimales que lo llenan. Así, para medir el volumen de un cuadrado de lado 1, en un primer paso se emplea una única caja cúbica que contenga al cuadrado como sección transversal. El volumen sería entonces de $V_1= 1$. Dividiendo nuevamente el cuadrado en 4 para el paso 2, tendríamos 4 cajas cúbicas de volumen $1/8$, lo que haría un volumen del cuadrado de $V_2=1/2$. En el tercer paso, para recubrir 16 cuadrados idénticos de lado $1/4$, se emplean 16 cajas cúbicas de volumen $1/64$, haciendo un volumen total de $V_3= 1/4$. Así, tendiendo a infinitos pasos para no dejar excedentes, se tendría:

$$V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} \left(\frac{1}{2^n}\right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

Concluyéndose por tanto que el volumen de un cuadrado es nulo

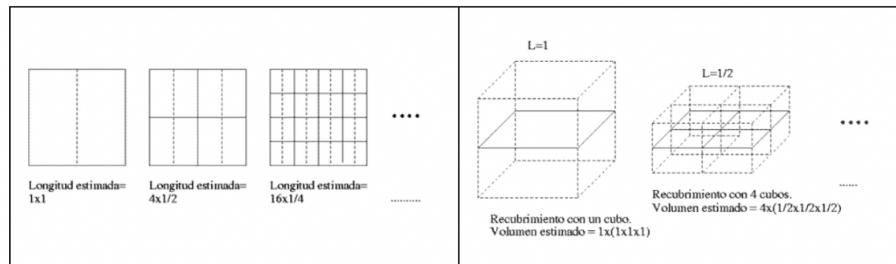


Figura 2. Longitud y volumen de un cuadrado

El resultado anterior es general en la geometría euclídea tradicional. Así, medidas que usen dimensiones euclídeas más bajas que la del propio objeto geométrico medido son infinitas, y las más bajas, cero. Sin embargo, en geometría fractal esto no es así: existen objetos geométricos que tienen longitud infinita y superficie nula, y otros que disponen de superficie infinita y volumen nulo. En general ocurre que para cubrir un segmento de dimensión 1 hacen falta $N = 2^a$ segmentos (autosimilitud) de tamaño característico $R = (1/2^n)$. Se observa que $N = R^{-1}$. Para cubrir un cuadrado (dimensión 2) hacen falta $N = 2^{2n}$ cuadrados de tamaño $R = (1/2^n)$, con $N = R^{-2}$. Y para cubrir un cubo (dimensión 3), hacen falta $N = 2^{3n}$ elementos similares(cubos) de tamaño $R=(1/2^n)$, cumpliendo que $N=R^{-3}$. Extrapolando el concepto, para cubrir un objeto geométrico hacen faltan piezas(similares) de tamaño característico R tal que se cumple que $N=R^{-D}$ donde D es la dimensión del objeto. Se deduce entonces que la dimensión fractal o dimensión de autosimilaridad se define como:

$$D = -\frac{\log N(R)}{\log R}$$

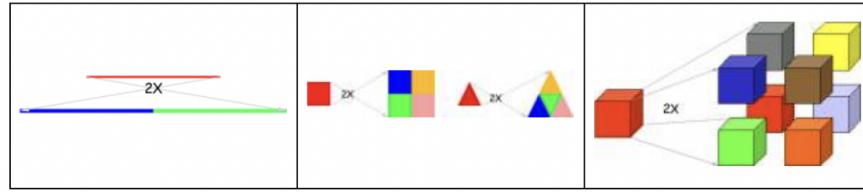


Figura 3. Autosimilaridad en dimensiones tradicionales

La definición anterior cubre los casos de dimensión tradicional (dimensión entera) y también los casos de dimensión no entera. Una definición más general que la anterior, que cubre también los casos en los que la autosimilaridad no sea perfecta, viene dada por la expresión:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)} \right)$$

donde el objeto geométrico en estudio se recubre con el mínimo número $N(r)$ d de bolas de radio r necesarias para cubrir completamente el conjunto en base a todo lo expuesto en el presente apartado, las dimensiones pueden resumirse en la siguiente tabla:

Dimensión	Número de puntos	Longitud	Área	Volumen	Hipervolumen
$D = 0$	Finito	0	0	0	0
$0 < D < 1$	∞	0	0	0	0
$D = 1$	∞	Finito	0	0	0
$1 < D < 2$	∞	∞	0	0	0
$D = 2$	∞	∞	Finito	0	0
$2 < D < 3$	∞	∞	∞	0	0
$D = 3$	∞	∞	∞	Finito	0
$D > 3$	∞	∞	∞	∞	...

Figura 4. Dimensiones enteras y no enteras

5. Tipos de fractales

Existen multitud de clases de fractales, cada una de las cuales puede generarse mediante uno o varios de los tres métodos siguientes:

- Mediante sistemas de funciones integrados, IFS.
 - La creación de Fractales se produce mediante repetición, siguiendo un algoritmo sobre una base inicial, determinadas operaciones (traslación, cambio de tamaño, sustitución, rotación, reflexión, etc.) en sucesivas etapas hasta el infinito. Ejemplos son los polvos, alfombras y esponjas fractales, los sistemas L, los mosaicos o las curvas que llenan el espacio en el que están embebidas.
- Mediante fórmulas (también llamados algoritmos de escape). Consiste en la aplicación de una o varias fórmulas matemáticas recursivamente hasta el infinito. Los más conocidos son el conjunto de julia, el conjunto de Mandelbrot y los atractores extraños (por ejemplo el atractor de Lorentz).
- Mediante procesos estocásticos no deterministas. Son los que ocurren en la naturaleza y se basan en la repetición parcial o limitada de unos patrones con un comportamiento aleatorio o pseudo aleatorio.

6. Fractales clásicos

Los orígenes del estudio de los fractales se remontan al siglo XVII con la noción de autosimilitud y recursividad (Gottfried Leibniz). A lo largo del siglo XIX se profundizó asimismo en el estudio de funciones continuas pero no diferenciables (Karl Weierstrass, 1872, primera función definida como continua en todos sus puntos y no derivable en ninguno). En 1883 Georg Cantor publicó ejemplos de subconjuntos de los números reales (conocidos como ‘Conjunto de Cantor’, considerado como tal el primer fractal conocido) con una serie de propiedades no estudiadas desde la perspectiva de la geometría euclídea.

Ya a principios del siglo XX se establecieron las bases de dimensiones no enteras (fractales) para definir y profundizar en estos casos especiales (definidos inicialmente como ‘monstruos geométricos’ por Poincaré). En 1904 Helge von Koch presentó una definición más geométrica, publicando otro ‘caso anómalo’ que se denominó ‘curva de Koch’. En 1915 Waclaw Sierpinski presentó su famoso triángulo, y un año más tarde la denominada alfombra de Sierpinski. En 1918 dos matemáticos franceses, Pierre Fatou y Gaston Julia estudiaron por separado los comportamientos (fractales) asociados a funciones iterativas con números complejos, profundizando en la idea de puntos atractores y repulsores. El mismo año Felix Haussdorff expandió la definición de ‘dimensión’ para cubrir los casos de dimensión no entera. En 1938 Paul Lévy publicó un estudio sobre las curvas autosimilares, y definió un nuevo fractal, denominado ‘curva C de Lévy’. En la década de 1960 el matemático francés Benoît Mandelbrot comenzó a publicar trabajos sobre autosimilitud, tratando por ejemplo la medición de la longitud de la costa de Inglaterra, aseverando que depende del método de medida y que tenía dimensión no entera. Debido a su trabajo en IBM, Mandelbrot pudo simular los comportamientos e iteraciones de los fractales mediante ordenadores, y pudo además representarlos gráficamente. Mandelbrot acuñó el término ‘fractal’ por primera vez en 1975, y es considerado el padre de la geometría fractal. Desde entonces, se han realizado multitud de estudios y avances sobre fractales, apoyados en los potentes procesamientos mediante ordenador, y aplicando sus conclusiones a múltiples disciplinas sociales y científicas en la actualidad.

Nosotros nos vamos a centrar en el triángulo de Sierpinski:

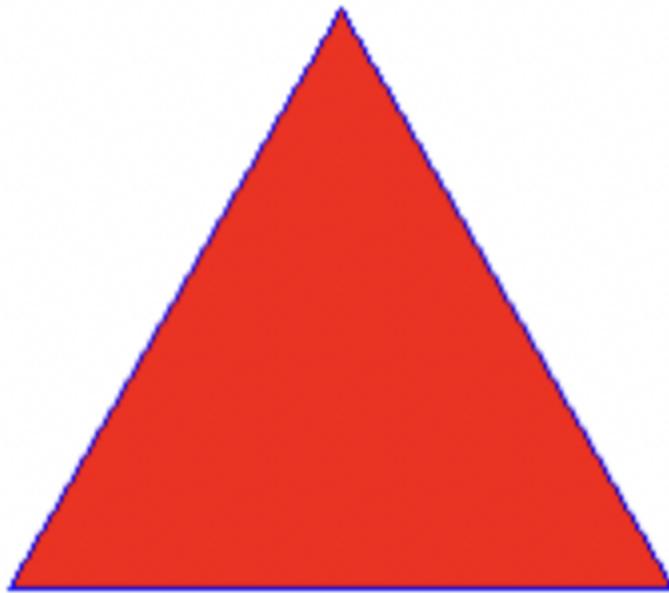
- Introducción: El matemático Waclaw Sierpinski, fue un importante matemático polaco que dedicó una parte de sus investigaciones al estudio de distintas formas de fractales (introdujo el que analizaremos en 1919), hoy nos centraremos en una de las más conocidas.

El triángulo de Sierpinski es uno de los fractales más famosos. Fue publicado en 1915 y presenta propiedades matemáticas relacionadas con campos muy diversos, como el triángulo de Pascal. Tiene infinita longitud, área nula, y una dimensión fractal de $D = \log 3 / \log 2 = 1.5850$. Una variante también muy conocida es la alfombra de Sierpinski, basada es un cuadrado, y de dimensión fractal $D = 1.8928$. Análogamente se encuentran otros polígonos regulares como base de las mismas iteraciones, dando lugar por ejemplo al pentágono, hexágono y octágono de Sierpinski.

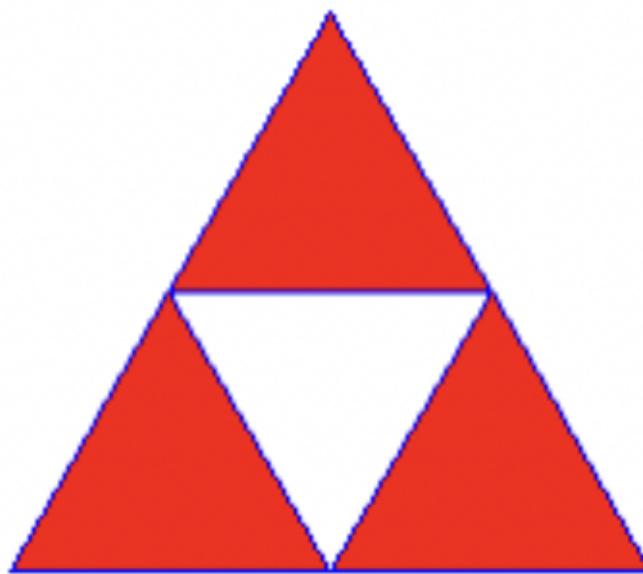
- Construcción:

El triángulo de Sierpinski es un conjunto fractal que se construye de manera recurrente como se indica a continuación: se toma un triángulo equilátero ‘lleno’, al que se le quita el pequeño triángulo formado al unir las mitades de sus tres lados. Después obtenemos el formado por tres triángulos ‘ llenos’ sobre los cuales se realiza el mismo proceso que acabamos de describir. Logramos así una figura formada por nueve triángulos llenos, a los que se les vuelve a aplicar el mismo procedimiento. Interpretando este procedimiento indefinidamente, se obtiene el triángulo de Sierpinski, que lleva el nombre del matemático Waclaw Sierpiński.

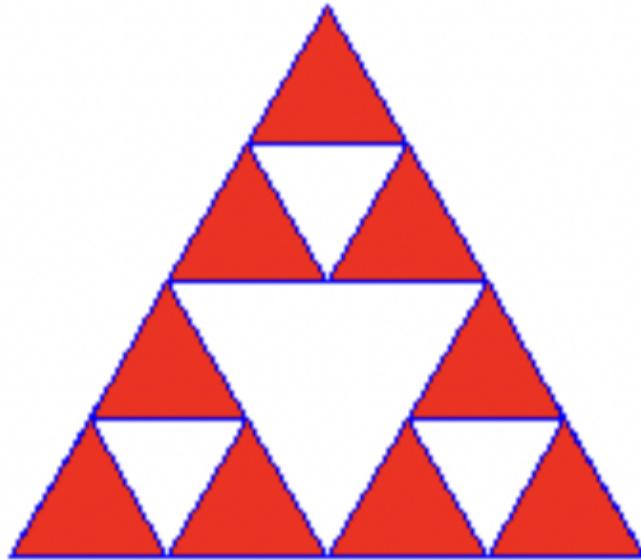
- Construimos el triángulo equilátero de lado A:



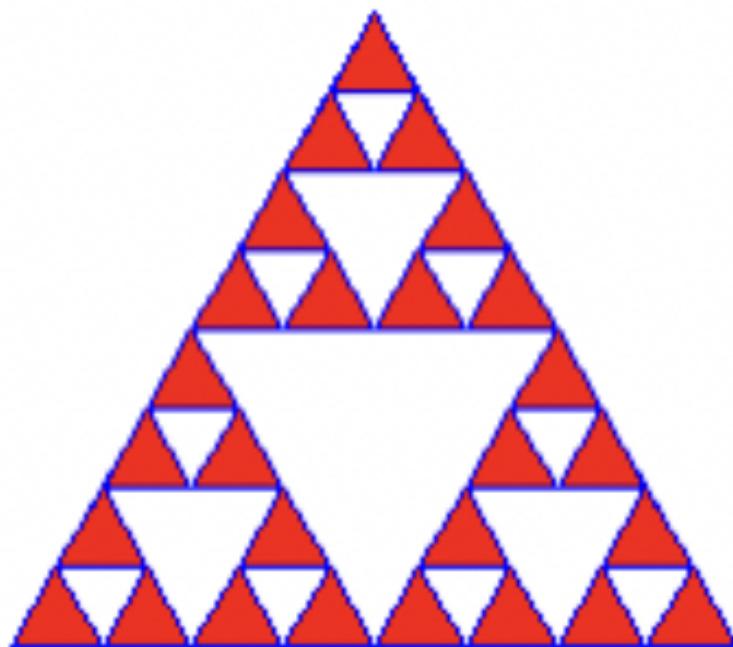
- Unimos los puntos medios de cada lado A, resultando la siguiente figura(resultan 4 triángulos equiláteros):



- Repetimos el proceso en cada uno de los triángulos y obtenemos la siguiente figura:



- Y así sucesivamente:



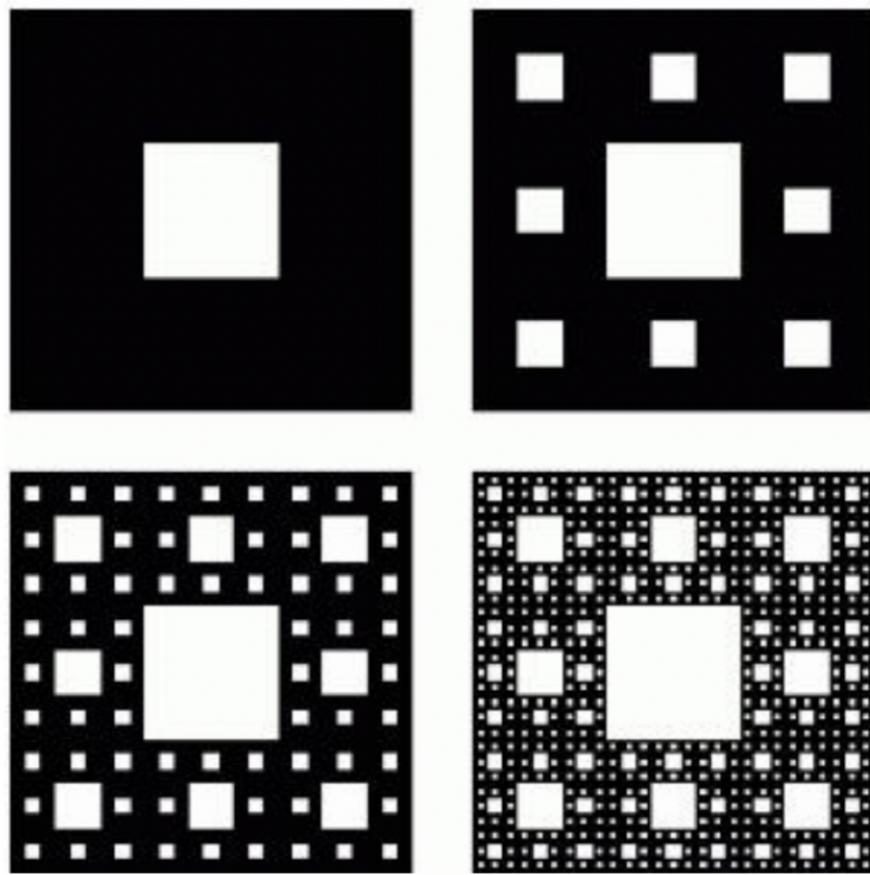
Otros: Existen también variantes en 3 dimensiones sobre los patrones de Sierpinski, siendo el tetraedro uno muy conocido. El tetraedro de Sierpinski o tetrix es el análogo tridimensional del triángulo de Sierpinski, formado al contraer repetidamente un tetraedro regular a la mitad de su altura original, juntando cuatro copias de este tetraedro con las esquinas tocándose y luego repitiendo el proceso. El tetraedro es conocido como la alfombra de Sierpinski. La alfombra de Sierpinski fue un fractal

publicado en 1916 aunque previamente descubierto. Este fractal se construye dividiendo un cuadrado en otros 9 de lado del cuadrado original y eliminando el interior del cuadrado que ocupa la posición central, repitiendo este proceso en cada uno de los cuadrados que quedan. En cada iteración, el número de cuadrados se ve multiplicado por 8 y en cambio el lado de los mismos es $1/3$ del anterior.

Otro fractal a destacar es el hexágono. De los tres el que tiene unas propiedades más interesantes es el hexágono, ya que como se puede ver en las imágenes la parte central del fractal (y por extensión la de los otros hexágonos más pequeños) forman un copo de Koch, y del mismo modo los perímetros cada lado de un hexágono son curvas de Koch.



dimensión fractal del hexágono: 1'63093



7. Aplicaciones de los fractales en la naturaleza

- FRACTALES EN LA NATURALEZA

Existen infinidad de ejemplos de elementos de la naturaleza que pueden ser descritos mediante geometría fractal. Los fractales naturales son aproximados o estadísticos, y su autosimilaridad se extiende

únicamente a un rango de escalas, unas pocas interacciones (no tienen, por tanto detalle infinito en independencia total a la escala).

Las nubes, las montañas, los cráteres, las fallas, los terremotos, los ríos, el sistema circulatorio, los latidos del corazón, los pulmones, las cortes, los árboles y plantas, los copos de nieve, los cristales, la coloración de los animales, el ADN, el oleaje, son solo algunos de los miles de ejemplos claros de fractales naturales.



Figura 22. Ejemplos de fractales en la Naturaleza

-CAMPOS DE APLICACIÓN

- Aunque los fractales comenzaron a investigarse para el estudio de la Naturaleza, existen muchísimos campos de aplicación en la actualidad, debido al procesamiento de fractales mediante ordenadores. Por citar solo algunos, los fractales se emplean en el estudio y modelado de:

- Galaxias y otros conceptos en Astronomía. Se simulan las galaxias en el universo (dimensión fractal estimada 1.23) mediante cuadrados de Cantor (dimensión fractal 1.26).

- Compresión de datos e imágenes. Interpolación. Se emplean técnicas algorítmicas para codificar el almacenamiento de la información (por ejemplo la enciclopedia Encarta está comprimida mediante técnicas fractales), así como la interpolación al agrandar imágenes digitales.

- Árboles y plantas, paisajes, elementos de la Naturaleza terrestre. Los árboles son muy fáciles de construir algo algorítmicamente mediante ordenadores usando por ejemplo sistemas L. Para los paisajes y modelado del terreno se emplean fractales aleatorios e interpolación triangular.

- Sistemas dinámicos y teoría del caos. Se emplean técnicas de fractales para el estudio de sistemas complejos (diferenciales, no lineales) como la predicción meteorológica.

- Medición de costas y fronteras. Mediante el método de conteo de cajas se ha estimado por ejemplo que las costas de Inglaterra, Australia y Sudáfrica las dimensiones fractales son de 1,24, 1,13 y 1,02 respectivamente. O para las fronteras de Alemania y Portugal, de 1,15 y 1,14.

- Telecomunicaciones y electrónica. Diseño de antenas y transistores. Un diseño fractal combina regularidad (rendimiento en una antena) y aleatoriedad (robustez en una antena). Con antenas de un solo hilo, con un esquema fractal se incluye más hilo en el mismo espacio, aumentando la capacitancia e inductancia.

- Sistemas de evolución de la población, sistemas económicos, sistemas legislativos. Se emplean técnicas fractales para estudiar la bolsa, las crisis económicas y los sistemas legislativos. La evolución de la población se estudia mediante la teoría del caos.

- Medicina : anatomía humana, neurociencia, diagnóstico por imagen, patología. Se ha estimado, por ejemplo, que la ramificación de los pulmones es de una dimensión fatal de 2,7. El coste energético de mover un fluido por estas ramificaciones se minimiza para ángulos de ramificación entre 40 y 50 grados, justo los valores existentes de los pulmones.

- Sistemas moleculares y reacciones químicas. Sistemas orgánicos. Los modelos de crecimiento orgánico

(por ejemplo los cultivos de bacterias) se modelan mediante algoritmos de difusión limitada a fractales.

- Sistemas geológicos, geografía, simbología, arqueología, morfología del terreno. Las técnicas fractales se usan para el estudio de terremotos, erosión del terreno o formación de contornos, entre muchos otros.

- Arte fractal: música, pintura, arquitectura. Artistas como Escher o Mondrian han elaborado obras de patrones recursivos basados en fractales. Arquitecturas como el árabe, la india o la gótica poseen también innumerables ejemplos de empleo de fractales en la sociedad.

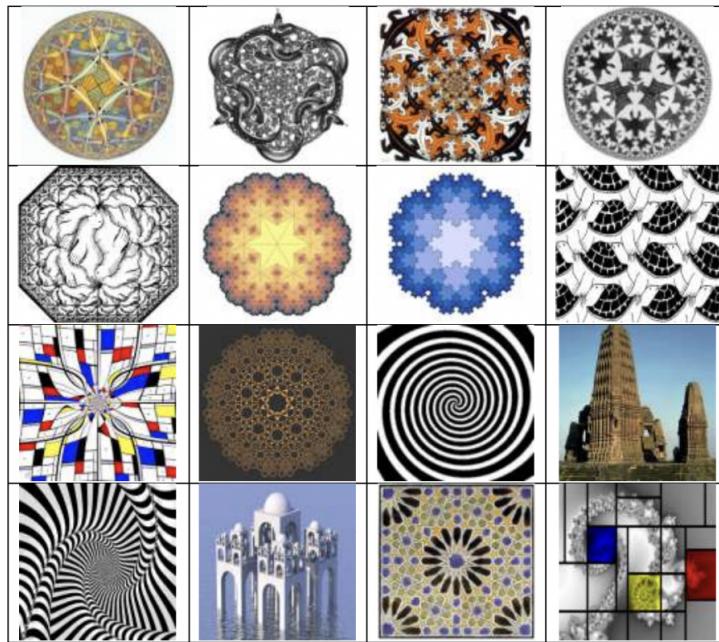


Figura 24. Ejemplos de arte fractal

8. Espacio de fases

¿Qué es el espacio de fases?

Más técnicamente, el espacio de fases es una variedad diferenciable de dimensión par, tal que las coordenadas de cada punto representan tanto las posiciones generalizadas como sus momentos conjugados correspondientes. Es decir, cada punto del espacio fásico representa un estado del sistema físico.

Relación entre el espacio de fases y las ecuaciones diferenciales Recordemos que el espacio fase de un sistema de ecuaciones diferenciales aporta la suficiente información como para conocer de forma completa el comportamiento de los soluciones a diferentes tiempos, incluso esta información puede ser suficiente para describir el fenómeno que estemos estudiando sin la necesidad de conocer explícitamente las soluciones del sistema.

Relación entre el triángulo y el espacio de fases: Conclusiones del triángulo de Sierpinski En los fractales se manifiesta una relación no muy común entre el área y su perímetro. Mientras que el perímetro tienda hasta el infinito, el área tenderá a ser cero. Es un campo muy amplio en el que se ha profundizado.