

西安电子科技大学

学位论文独创性（或创新性）声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得西安电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切的法律责任。

本人签名：纪红娜

日期：2011.2.21

西安电子科技大学

关于论文使用授权的说明

本人完全了解西安电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属西安电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。同时本人保证，毕业后结合学位论文研究课题再撰写的文章一律署名单位为西安电子科技大学。

（保密的论文在解密后遵守此规定）

本学位论文属于保密，在___年解密后使用本授权书。

本人签名：纪红娜

日期：2011.2.21

导师签名：李国红

日期：2011.2.21

摘 要

张拉整体移动机器人是张拉整体结构研究的一个新方向,它具有轮式和腿式机器人所没有的形状和性质。本文以张拉整体移动机器人为研究对象,首先建立它的动力学模型,之后对其进行轨迹规划和运动性能分析。具体研究内容及成果如下:

1. 运用拉格朗日方法建立了张拉整体移动机器人刚体运动过程中的动力学模型;利用碰撞动力学理论建立了机器人与地面接触碰撞过程中的动力学模型;最后将两种动力学模型相结合,建立了张拉整体移动机器人的动力学模型。

2. 根据张拉整体移动机器人的动力学模型和结构特性,选择索驱动作为它的驱动方式。通过寻找驱动索变化量的合适组合状态,提出了一种基于索变化量组合挑选法的张拉整体移动机器人轨迹规划算法,该算法可以实现机器人沿预定轨迹运动,并通过机器人的运动实例验证了该方法的可行性。

3. 基于机器人动力学模型及轨迹规划算法,开发了张拉整体移动机器人运动仿真软件,该软件实现了张拉整体移动机器人的参数化建模和运动仿真。

4. 研究了驱动器配置、索的弹性系数和机器人构型对张拉整体移动机器人运动性能的影响,分析了这些因素对机器人运动性能影响的规律,为机器人的设计及应用提供了依据。

关键词: 张拉整体移动机器人 动力学建模 轨迹规划 运动性能

Abstract

The mobile robot based on tensegrity structures is a new research direction of tensegrity structures, it has the shape and properties which wheeled and legged robots do not have. This paper is on the research of mobile robot based on tensegrity structures. First, the dynamic model is established, and then trajectory planning and the motion performance of robot are analyzed. The main research contents and achievements are as follows:

1. The dynamic models during rigid body motion process and contact-impact process are established by using the Lagrange approach and the theory of collision dynamics. Finally, the dynamic model of mobile robot based on tensegrity structures is founded through combining over two models.

2. According to the dynamic model and structural characteristics of such robot, cable driven is chosen as the robot's driving mode. By searching for the suitable combination states of driver cable changing quantity, a trajectory planning algorithm based on group selection techniques of cable changing quantity is presented, which can make mobile robot move along preconceived track. And the feasibility of this algorithm is verified through motion examples.

3. Based on the dynamic model and trajectory planning algorithm, a software simulation platform is established, which achieves parametric modeling and motion simulation of robot based on tensegrity structures.

4. Through the studies of driver configuration, cable elastic coefficient and robot configuration, the influence factors of motion performance is discussed, and the regularity of them are analyzed which provides foundation for design and application of mobile robot based on tensegrity structures.

Keywords: robot based on tensegrity structures dynamic modeling trajectory planning motion performance

目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 张拉整体结构简介.....	1
1.1.1 张拉整体结构的基本概念和发展.....	1
1.1.2 张拉整体结构的特性.....	4
1.2 张拉整体机器人简介.....	4
1.2.1 张拉整体机器人的研究现状.....	4
1.2.2 张拉整体机器人的特点及应用.....	6
1.3 本文的主要工作.....	6
第二章 张拉整体移动机器人动力学模型及运动分析	9
2.1 引言.....	9
2.2 刚体运动过程中的动力学模型.....	9
2.2.1 坐标系的建立.....	9
2.2.2 系统能量的求解.....	11
2.2.3 动力学方程的建立.....	16
2.3 接触碰撞过程中的动力学模型.....	18
2.3.1 碰撞分析.....	18
2.3.2 摩擦分析.....	19
2.4 张拉整体移动机器人运动实例.....	20
2.5 本章小结.....	23
第三章 张拉整体移动机器人运动轨迹规划及仿真软件开发	25
3.1 引言.....	25
3.2 张拉整体移动机器人运动轨迹规划方法.....	25
3.3 张拉整体移动机器人轨迹规划运动实例仿真.....	27
3.4 张拉整体移动机器人运动仿真软件开发.....	30
3.4.1 软件开发工具及运行环境.....	30
3.4.2 软件的主要功能及操作中的关键问题.....	31
3.4.3 软件仿真实例.....	33
3.5 本章小结.....	35
第四章 三杆九索张拉整体移动机器人运动性能分析	37

4.1 引言	37
4.2 驱动器配置分析	37
4.2.1 驱动索数目对其运动性能的影响.....	37
4.2.2 中索驱动对其运动性能的影响.....	38
4.3 索的弹性系数分析	39
4.3.1 索的弹性系数不同.....	39
4.3.2 索的弹性系数分布不同.....	40
4.3.3 驱动索与从动索的弹性系数.....	41
4.4 机器人构型分析	42
4.4.1 不同构型对其运动性能的影响.....	43
4.4.2 中索驱动对不同构型机器人运动性能的影响.....	44
4.5 本章小结	45
第五章 总结与展望	47
5.1 总结	47
5.2 展望	48
致 谢.....	49
参考文献	51

第一章 绪论

1.1 张拉整体结构简介

1.1.1 张拉整体结构的基本概念和发展

张拉整体(Tensegrity)的概念是在20世纪40年代,由美国发明家、结构工程师、建筑大师富勒(R. B. Fuller)首次提出的, Tensegrity一词是由“Tensile”(张拉)和“Integrity”(整体)缩写而成。他的这种思想是受大自然的启发而产生的,他认为宇宙的运行是按照张拉整体的原理进行的,即万有引力是一个平衡的张力网,而各个星球是这个网中的一个个孤立的点,连续不断的拉力与相互独立的星球形成了浩瀚的宇宙^[1]。1976年安东尼·保罗在书《张拉整体结构介绍》中完善了张拉整体结构的定义,即:非连续的受压构件(杆件)和连续的受拉构件(绳索)所组成的稳定的空间结构。张拉整体结构的发展经历了以下几个阶段:

(1) 艺术作品阶段

最早的张拉整体结构可以追溯到1920年约翰逊(Ioganson)^[2]完成的一个雕塑作品,如图1.1所示。这个结构可以说是张拉整体结构的雏形,它已经非常接近3根杆和9根索组成的自应力张拉整体结构。1948年著名的雕塑家斯奈尔森(K. Snelson)^[3]制造出了第一个真正意义上的张拉整体结构:用一些弦将4根独立杆张紧形成的一个稳定体,如图1.2所示。之后,他把所设计的张拉整体结构应用到雕塑中,成为现代张拉整体结构发展的标志,从此张拉整体结构不但有了理论依据,还有了实体模型。

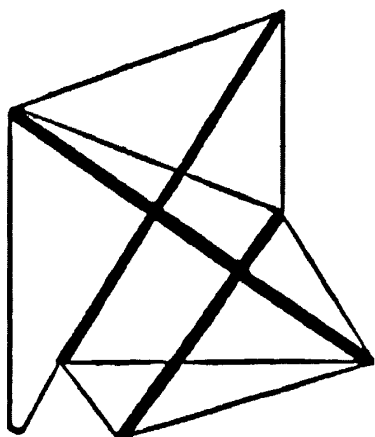


图1.1 约翰逊的雕塑

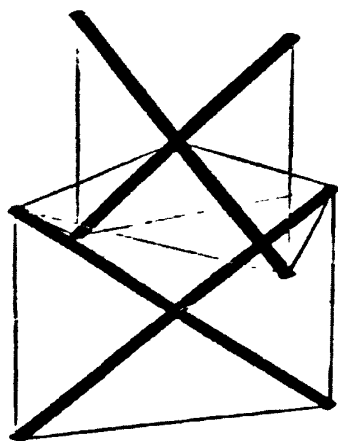


图1.2 斯奈尔森的雕塑

(2) 建筑结构阶段

富勒^[4]从结构的角度对张拉整体结构进行了研究,他的主要成果是用于建筑

的索穹顶结构,如图1.3所示。在索穹顶结构出现以前,张拉整体结构仅限于理论研究,并没有在现实中应用。美国著名工程师盖格尔(D. H. Geiger)于1986年首次在韩国汉城体操馆中使用这种索穹顶结构,并获得了巨大成功,它是一个可以容纳15000人的大型体育场馆,索穹顶用隔热膜材料覆盖,跨度达120m。美国工程师李维(Levy)巧妙的将盖格尔的放射状索穹顶进行三角化,在1992年建造了世界上最大的索穹顶体育馆—乔治亚穹顶(Georgia Dome)。

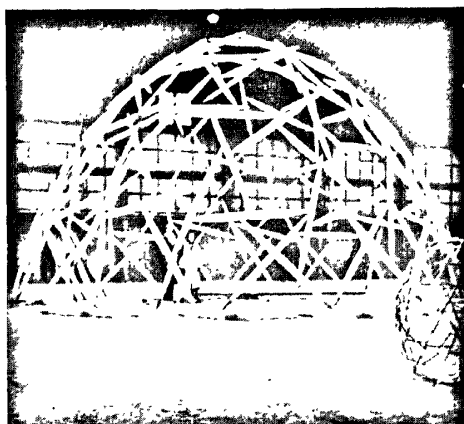


图1.3 富勒的索穹顶结构

(3) 张拉整体结构专利阶段

继富勒的索穹顶结构之后,人们展开了对张拉整体结构的研究,并申请了许多相关的专利。例如,20世纪60年代初期,富勒在美国申请了专利^[5],同时,埃梅里希在法国申请了专利,但他们在专利中所描述的是同一个结构:三杆九索的张拉整体结构,如图1.4所示,只是描述的侧重点不同。R·马库特列出了有关“张拉整体结构”的专利名单,其中大部分都应用在建筑行业。关于自应力体系第一个授予的专利是在1965年^[6]。此后,人们将这些简单的张拉整体结构通过顶点与顶点、顶点与索或索与索相连得到了更加复杂的张拉整体结构,对它的研究也在不断的深入。

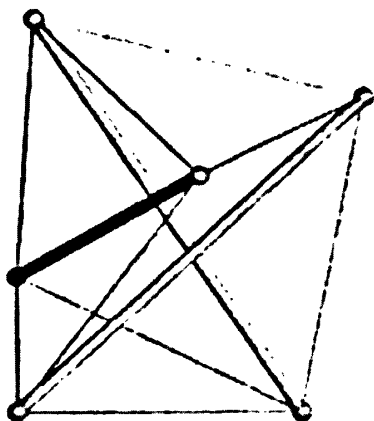


图1.4 三杆九索张拉整体结构

(4) 生物医学阶段

20 世纪末, D. E. Ingber 等人^[7-9]开始将张拉整体结构应用于细胞结构和骨骼肌肉的研究, 为生物医学的发展做出了重要贡献, 如图 1.5 所示。由于骨骼类似于张拉整体结构中的杆件, 肌肉则类似于张拉整体结构中的索, 骨骼和肌肉互相连接组成一个完整的体系, 当整个系统受到外部激励后, 系统能够储存一定的能量用于抵抗外部的扰动, 维持本身的稳定性, 这与张拉整体结构靠自身的预应力来维持自身平衡的原理是一样的。

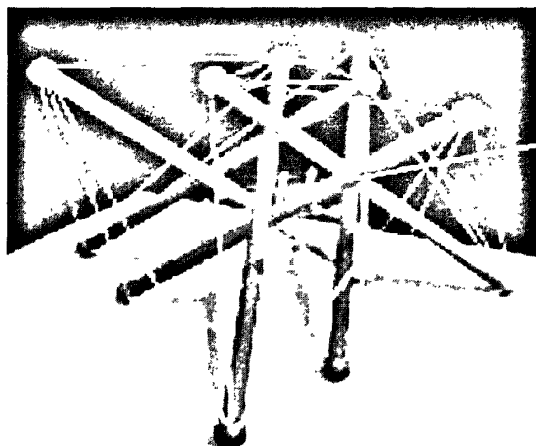


图1.5 细胞的张拉整体结构模型

(5) 静力学分析及拓扑结构阶段

进入 21 世纪后, 人们对张拉整体结构的研究侧重于它的静力学特性, 主要是对结构找形方法的研究^[10-13]。A. G. Tibert 和 S. Pellegrino 对张拉整体结构的找形方法进行了总结^[14], S. H. Juan 和 J. M. Tur 以现存的大量文献为基础, 对张拉整体结构的静力学分析方法进行了总结^[15], 研究了它的刚性和稳定性等问题。随着张拉整体结构中杆和索数量的增加, 整个结构也越来越复杂, 于是许多学者开始对张拉整体结构拓扑图进行研究^[16,17], 通过定义顶点与边的关系, 更加清晰的了解不同张拉整体结构的构型。

(6) 动力学分析阶段

最近十年, 人们才开始将研究重点转移到了动力学方面, S. H. Juan 和 J. M. Tur 对现有的张拉整体结构动力学的研究方法进行了总结^[18], 为以后动力学的进一步研究奠定了基础。

随着研究的不断深入, 特别是有了张拉整体结构在动力学方面的研究基础, 人们开始了将张拉整体结构应用于机器人的研究, 这是一个全新的研究领域, 对张拉整体结构的研究也进入了新的阶段。

1.1.2 张拉整体结构的特性

张拉整体结构具有张力结构的一般特点,并呈现出其自身特定的结构性状和特征:

(1) 结构的刚度和预应力:张拉整体结构的一个重要特征就是在无预应力情况下结构的刚度为零,施加预应力后机构自身能够平衡,不需要外力作用即可保持应力不流失。并且结构的刚度和预应力的基本呈线性关系^[19]。

(2) 自适应:自适应能力是结构自我减少物理效应、反抗变形的能力,在不增加结构材料的前提下,通过自身形状的改变从而改变自身的刚度,达到减少外荷载的作用效果,所以只要所施加的外力在结构所能承受的力的自然波动范围之内,结构的运动就可以得到很好的改善^[20]。

(3) 恒定应力态:张拉整体结构中杆元和索元汇集到结点达到力学平衡,称为互锁状态。互锁状态保证了预应力的不流失,同时也保证了张拉整体结构的恒定预应力状态,即在外力的作用下,结构的索元保持拉力状态,而杆保持压力状态。

(4) 非线性:张拉整体结构是一种非线性结构,结构很小的位移也许就会影响整个结构的内力分布。

(5) 可展开性与冗余性:由于杆件之间是通过绳索等柔性机构相连的,所以存在可展开性,这在空间机构中是非常重要的,特别是对于可展开天线^[21];张拉整体结构各构件可以同时充当传感器,激励器和负荷运行者的角色,所以即使其中某个构件损坏,其它构件也可以代替损坏构件完成任务^[22]。

1.2 张拉整体机器人简介

1.2.1 张拉整体机器人的研究现状

张拉整体结构具有质量轻、可变形等优点,使其更易调整自身的形态,为张拉整体机器人的构型提供了传统轮式和腿式机器人所没有的形状和性质。但也正是由于这种结构变形的灵活性使对它的控制难度加大,所以将其用于机器人是个全新的研究领域。国内对张拉整体结构的研究最多的是在桥梁^[23]、屋顶等建筑行业以及空间的可展开天线^[24],还没有开展针对机器人的研究,国外对张拉整体机器人的研究也还处于起步阶段,发展现状如下:

Paul 等^[25]利用遗传算法实现了三杆九索及四杆十二索张拉整体机器人的步态运动,如图 1.6 所示,并将该算法应用到了实物模型上,同时他还对张拉整体机器人的冗余控制进行了研究。

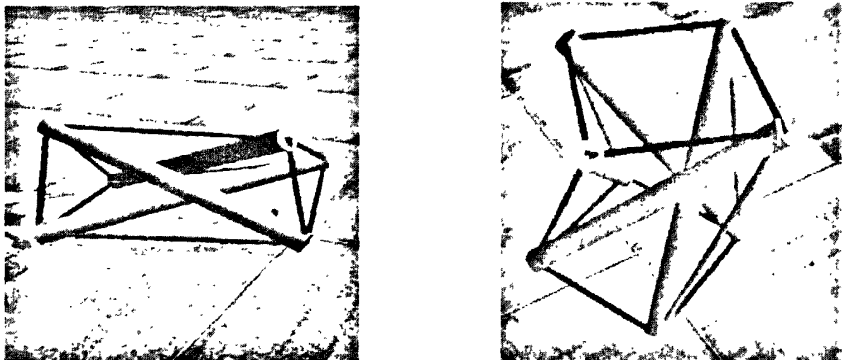


图1.6 三杆九索及四杆十二索张拉整体机器人模型

Mizuho Shibata, Fumio Saijyo 和 Shinichi Hirai 通过形状记忆合金来实现整个张拉整体结构的变形，通过改变系统的能量使得张拉整体机器人能够翻滚^[26]，如图 1.7 所示。同时，John Rieffel 等人利用神经网络的控制算法实现了张拉整体机器人的步态运动^[27]，如图 1.8 所示。另外，J. M. Tur 等人对张拉整体机器人的运动和控制进行了分析，并对机器人沿不同路径的运动进行了仿真^[28,29]。

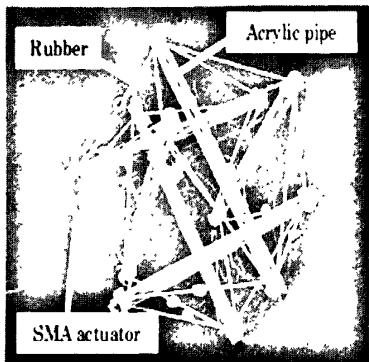


图1.7 通过形状记忆合金控制的机器人



图1.8 通过神经网络控制的机器人

Etienne Fest 等人还设计了一个可以抵抗外部载荷并可通过利用预测模型和搜索算法来维持要求形状的张拉整体结构^[30]。美国康奈尔大学正在对一种复杂的张拉整体机器人进行研究，他们用于试验的机器人如图 1.9 所示。



图1.9 复杂张拉整体机器人

由于张拉整体机器人的构型中既有刚性构件又有柔性构件,这就给动力学建模和机器人的运动控制带来了困难,所以对张拉整体机器人的研究还有很长一段路要走。

1.2.2 张拉整体机器人的特点及应用

张拉整体机器人除了具有张拉整体结构的特性外,还具有它作为机器人的优越性。

(1) 传统的机器人主要通过球铰接等将刚性构件连接在一起,整体质量比较大,驱动起来比较困难。张拉整体机器人则实现了刚性构件与柔性构件的结合,使得连接更加简洁,结构更加简单,而且质量轻,强度大,将其应用于空间环境探测等领域,可以大大减少运载所需燃料和驱动能量。

(2) 传统的机器人受结构设计和现代机器人控制原理的限制很容易受机械损伤,往往只能通过单一的作动器控制单一自由度的运动,而张拉整体机器人是一种高度超静不定机械结构,单个构件的运动变化可以带动其它多个构件发生运动,有些构件的损坏对整体结构的影响不会很大,这种容错性使得张拉整体机器人更适合应用于容易使机器人受到机械损伤的环境中。

1.3 本文的主要工作

本文主要通过建立张拉整体移动机器人的动力学模型,对机器人进行了轨迹规划及运动性能分析,具体工作安排可分为以下几个方面:

第一章:主要介绍了张拉整体结构的定义以及国内外的的发展状况,并对张拉整体结构在应用中的优点进行了总结。接着又介绍了以张拉整体结构为基础的张拉整体机器人的研究现状,并总结了张拉整体机器人的特性以及应用情况。

第二章:详细叙述了张拉整体移动机器人动力学模型建立的全过程,首先利用拉格朗日方程建立刚体运动过程中的动力学模型,然后利用碰撞动力学理论建立机器人与地面接触碰撞过程中动力学模型,并将这两个运动过程的动力学模型相结合,对三杆九索张拉整体移动机器人进行了动力学分析。

第三章:提出了一种基于索变化量组合挑选法的张拉整体移动机器人轨迹规划算法,并将该方法应用到三杆九索张拉整体移动机器人的运动实例中,实现了该机器人沿预定轨迹的运动,从而证明了该轨迹规划方法的可行性。最后以张拉整体移动机器人的动力学模型和轨迹规划方法为基础,开发了张拉整体移动机器人的运动仿真软件平台,并以六杆二十四索张拉整体移动机器人为例,介绍了该软件的主要功能。

第四章：对三杆九索张拉整体移动机器人的运动性能进行了分析，研究了驱动器配置、索的弹性系数及机器人构型对机器人运动性能的影响，从而更深入的了解张拉整体移动机器人的运动特性。

第五章：对本文的研究内容及结果进行了总结，为张拉整体移动机器人的深入研究打下了良好的基础，并展望了进一步的研究工作。

第二章 张拉整体移动机器人动力学模型及运动分析

2.1 引言

为了更好的研究张拉整体移动机器人的运动特性,首先必须要建立它的动力学模型。之前就有关于动力学方程的研究,比如Skelton等人提出了一些线性和非线性动力学方程^[31],Motro等人对三杆九索的张拉整体结构进行线性动力学分析,对三杆九索结构中六个节点中的一个节点施加谐波激励,然后测量其它节点的动力学响应^[32,33]。后来Kanchanasaratool和Williamson在不考虑杆质量的前提下对部分张拉整体结构模型进行了动力学分析^[34],而Skelton和Sultan等在分析结构的动力特性时则考虑了杆件质量^[35],但是以上这些动力学研究都有一定的局限性,并没有考虑张拉整体结构在自驱动下的动力学特性。本章就对张拉整体结构在自驱动下的动力学特性进行研究,利用完整系统的拉格朗日方程建立张拉整体移动机器人的动力学模型,并应用该动力学模型对机器人进行运动分析。

张拉整体移动机器人在运动过程中不但要考虑自身的动力学特性,还要考虑机器人与地面的接触碰撞问题,因为机器人在运动过程中具有两个状态:机器人底部抬起与地面没有接触状态和机器人底部落下与地面接触状态,所以本文将张拉整体移动机器人动力学模型的建立过程分为两个部分:机器人刚体运动过程动力学模型和接触碰撞动力学模型。最后将这两部分相结合,形成完整的张拉整体移动机器人动力学模型。

2.2 刚体运动过程中的动力学模型

由于拉格朗日方程^[36]是一种基于能量函数的标量型微分方程,它能直接导出与每个独立广义坐标一一对应的全部运动微分方程,并且能有效地应用于柔体或刚-柔耦合系统,所以本文采用拉格朗日方程建立张拉整体移动机器人在刚体运动过程中的动力学模型。

2.2.1 坐标系的建立

由于 n 根杆 m 根索的张拉整体移动机器人是个完整系统,所以采用完整系统的拉格朗日方程建立该机器人的动力学方程。首先建立了机器人动力学模型的坐标系。

在选择广义坐标时,如果按一般情况考虑,每根杆件有6个广义坐标,即每根杆件的质心位置坐标 (x, y, z) 和三个方位角 θ 、 ψ 、 φ ,如图2.1所示。但如若这

样选取广义坐标会出现质量矩阵不可逆的情况,从几何角度来说就是当 θ 角为零度时,杆件与 z 轴平行,在 xoy 面内的投影为一个点,使得 ψ 角的值任意,这样就会影响所建立的二阶微分方程的求解。为了解决这个问题,这里引入四元数 $(e_{0i}, e_{1i}, e_{2i}, e_{3i})$ 来表示第 i 个杆件在空间中的姿态,且满足:

$$\Phi(q_i) = e_{0i}^2 + e_{1i}^2 + e_{2i}^2 + e_{3i}^2 - 1 = 0, \{i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2-1)$$

即 $(e_{0i}, e_{1i}, e_{2i}, e_{3i})$ 为单位四元数。

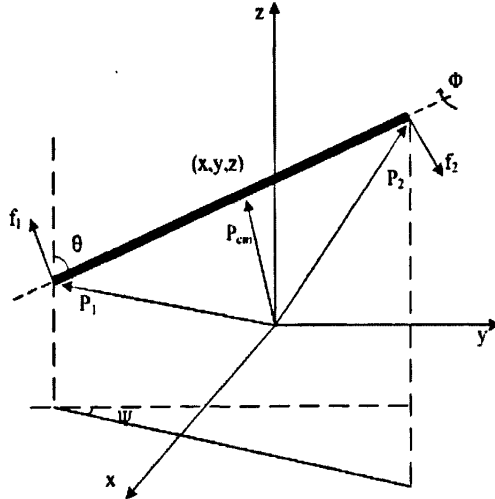


图2.1 杆所在的坐标系

四元数的数学概念是1843年由哈密顿^[37]首先提出来的,它是指由一个实数单位1和三个虚数单位 \bar{i} 、 \bar{j} 、 \bar{k} 组成,并具有下列实元的数:

$$\bar{e} = e_0 \cdot 1 + e_1 \bar{i} + e_2 \bar{j} + e_3 \bar{k} \quad (2-2)$$

其中数 e_0 叫做四元数的标量部分, $e_1 \bar{i} + e_2 \bar{j} + e_3 \bar{k}$ 叫做四元数的矢量部分, e_0 、 e_1 、 e_2 、 e_3 代表实数, \bar{i} 、 \bar{j} 、 \bar{k} 为三个虚数单位,这三个虚数单位也可以看作是三维空间的单位矢量,服从如下的运算公式:

$$\begin{aligned} \bar{i} \otimes \bar{i} &= \bar{j} \otimes \bar{j} = \bar{k} \otimes \bar{k} = -1 \\ \bar{i} \otimes \bar{j} &= -\bar{j} \otimes \bar{i} = \bar{k} \\ \bar{j} \otimes \bar{k} &= -\bar{k} \otimes \bar{j} = \bar{i} \\ \bar{k} \otimes \bar{i} &= -\bar{i} \otimes \bar{k} = \bar{j} \end{aligned} \quad (2-3)$$

四元数可以描述一个坐标系或一个矢量相对某一坐标系的旋转,标量部分表示了转角的一半余弦值,而其矢量部分则表示瞬时转轴的方向,用四元数来表示转动可用如下的公式来表示:

$$\bar{e} = \cos \frac{\theta}{2} + (\sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha) \bar{i} + (\sin \frac{\theta}{2} \cos \beta) \bar{j} + (\sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma) \bar{k} \quad (2-4)$$

其中 θ 为绕瞬时转轴的转角, $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 为瞬时转动轴与参考坐标系坐

标轴间的方向余弦值, 因此四元数既可以表示转轴的方向, 又可以表示绕该转轴转角的大小^[38]。

这样对于第 i 个杆件用 $(x_i, y_i, z_i, e_{0i}, e_{1i}, e_{2i}, e_{3i})$ 这 7 个参数来表示它在空间中的位姿, 将这 7 个参数分成两部分, 其中 $p_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ 表示位置, $s_i = (e_{0i}, e_{1i}, e_{2i}, e_{3i})^T$ 表示姿态, 总坐标用 $q_i^T = (p_i^T, s_i^T)$ 来表示。

2.2.2 系统能量的求解

(1) 系统的动能

用 T_i 来表示第 i 个杆件的动能, 则它可以分为两部分, 一部分为杆件平动的动能, 另一部分为杆件转动的动能, 用上述的广义坐标可以表示为:

$$T_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_i \dot{p}_i^T \dot{p}_i + \frac{1}{2} \dot{s}_i^T I_i(s_i) \dot{s}_i \quad (2-5)$$

其中:

$$I_i(s_i) = C_i(s_i)^T I_i^{xyz} C_i(s_i) \quad (2-6)$$

是第 i 个杆件相对于 q_i 所在的坐标系 (定坐标系) 的惯性矩阵, m_i 为第 i 个杆件的质量, I_i^{xyz} 表示第 i 个杆件相对于自身坐标系的惯性矩阵, $C_i(s_i)$ 表示由 q_i 所在的坐标系到杆件自身所在坐标系的转换矩阵, 由此可得到杆件的角速度:

$$\omega_i = C_i(s_i) \dot{s}_i \quad (2-7)$$

设 S_i 为用四元数所表示的坐标变换矩阵, 即由杆件自身所在的坐标系到定坐标系 q_i 的转换矩阵, 根据四元数与刚体转动的关系, 可得:

$$S_i = \begin{pmatrix} e_{0i}^2 + e_{1i}^2 - e_{2i}^2 - e_{3i}^2 & 2(e_{1i}e_{2i} - e_{0i}e_{3i}) & 2(e_{0i}e_{2i} + e_{1i}e_{3i}) \\ 2(e_{0i}e_{3i} + e_{1i}e_{2i}) & e_{0i}^2 - e_{1i}^2 + e_{2i}^2 - e_{3i}^2 & 2(e_{2i}e_{3i} - e_{0i}e_{1i}) \\ 2(e_{1i}e_{3i} - e_{0i}e_{2i}) & 2(e_{0i}e_{1i} + e_{2i}e_{3i}) & e_{0i}^2 - e_{1i}^2 - e_{2i}^2 + e_{3i}^2 \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

由于 S_i 是旋转矩阵, 所以它是正交阵, 根据正交矩阵的性质可得:

$$\dot{S}_i S_i^T = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{i3} & \Omega_{i2} \\ \Omega_{i3} & 0 & -\Omega_{i1} \\ -\Omega_{i2} & \Omega_{i1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

其中

$$\Omega_j(s_i) = \sum_{k=1}^4 a_{jk}(s_i) \dot{s}_{ik} \quad (j=1, 2, 3) \quad (2-10)$$

因为:

$$\begin{pmatrix} \Omega_{i1} \\ \Omega_{i2} \\ \Omega_{i3} \end{pmatrix} = \omega_i = C_i(s_i) \dot{s}_i \quad (2-11)$$

所以有:

$$C_i(s_i) = \begin{pmatrix} a_{11}(s_i) & a_{12}(s_i) & a_{13}(s_i) & a_{14}(s_i) \\ a_{21}(s_i) & a_{22}(s_i) & a_{23}(s_i) & a_{24}(s_i) \\ a_{31}(s_i) & a_{32}(s_i) & a_{33}(s_i) & a_{34}(s_i) \end{pmatrix} \quad (2-12)$$

将式(2-8)代入式(2-9)可得:

$$C_i(s_i) = 2 \begin{pmatrix} -e_{1i} & e_{0i} & -e_{3i} & e_{2i} \\ -e_{2i} & e_{3i} & e_{0i} & -e_{1i} \\ -e_{3i} & -e_{2i} & e_{1i} & e_{0i} \end{pmatrix} \quad (2-13)$$

I_i^{yz} 为第 i 个杆件相对于自身坐标系的惯性矩阵, 根据理论力学中惯性矩的计算方法可得:

$$I_i^{yz} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} m_i (3r_i + l_i^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_i (3r_i + l_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m_i r_i \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

上式中 l_i 为第 i 个杆件的杆长, $r_i = r_{1i}^2 + r_{2i}^2$, r_{1i} 和 r_{2i} 分别为第 i 个杆件的内外半径。

将式(2-13)代入式(2-6), 可得 $I_i(s_i)$, 记:

$$M_i(q_i) = \begin{pmatrix} m_i I^{3 \times 3} & 0^{3 \times 4} \\ 0^{4 \times 3} & I_i(s_i) \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

式中 $I^{3 \times 3}$ 表示 3×3 的单位矩阵, 则第 i 个杆件的动能可表示为:

$$T_i(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2} \dot{q}_i^T M_i(q_i) \dot{q}_i \quad (2-16)$$

设 $q^T = (q_1^T, q_2^T, \dots, q_n^T)$ 为整个系统的广义坐标并且整个系统的质量阵为:

$$M(q) = \begin{pmatrix} M_1(q_1) & 0^{7 \times 7} & \dots & 0^{7 \times 7} \\ 0^{7 \times 7} & M_2(q_2) & \dots & 0^{7 \times 7} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^{7 \times 7} & 0^{7 \times 7} & \dots & M_n(q_n) \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

则整个系统的动能为:

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (2-18)$$

(2) 系统的势能

系统的势能分为两部分, 一部分为整个系统的重力势能, 另一部分为索中的

弹性势能。

1) 重力势能:

由于重力只在 z 方向作用, 在其它方向都为零, 所以设

$$f_i^g = (0, 0, m_i g, 0, 0, 0)^T, \{i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2-19)$$

$$f^g = \begin{bmatrix} f_1^g \\ f_2^g \\ \vdots \\ f_n^g \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

则系统的重力势能可表示为

$$U^g(q) = \sum_{i=1}^n U_i^g(q_i) = \sum_{i=1}^n q_i^T f_i^g = q^T f^g \quad (2-21)$$

2) 弹性势能:

系统中的弹性势能为 m 根索中的弹性势能之和, 即:

$$U^s(q) = \sum_{k=1}^m U_k^s(q) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} k_k \Delta l_k(q)^2 \quad (2-22)$$

其中 k_k 为第 k 根索的弹性系数, $\Delta l_k(q)$ 为索长变化量。

由于要建立拉格朗日方程, 所以要用到 $\frac{\partial U^s(q)}{\partial q}$, 这里先对其进行推导。将索

中具有势能看成索中的张力沿索收缩方向所做的功, 则有:

$$\frac{\partial U^s(q)}{\partial q} = -\frac{\partial r(q)}{\partial q} F^s(q) \quad (2-23)$$

其中 $F^s(q) = (F_{11}^s, F_{21}^s, \dots, F_{1n}^s, F_{2n}^s)^T$, F_{ji}^s 表示作用在第 i 个杆件第 j 个节点上的索的张力, $r(q) = (r_{11}, r_{21}, \dots, r_{1n}, r_{2n})$, r_{ji} 表示第 i 个杆第 j 个节点的位置向量, 用广义坐标可表示为:

$$r_{ji}(q_i) = p_i + \frac{l_i}{2} (-1)^j v(q_i), j \in \{1, 2\} \quad (2-24)$$

$v(q_i)$ 是由姿态决定的, 用四元数可表示为:

$$v(q_i) = \begin{pmatrix} 2(e_{1i}e_{3i} - e_{0i}e_{2i}) \\ 2(e_{0i}e_{1i} + e_{2i}e_{3i}) \\ 2(e_{0i}^2 + e_{3i}^2) - 1 \end{pmatrix} \quad (2-25)$$

每一行对 s 求导可得:

$$\frac{\partial v(q_i)}{\partial s_i} = \begin{pmatrix} -2e_{2i} & 2e_{1i} & 4e_{0i} \\ 2e_{3i} & 2e_{0i} & 0 \\ -2e_{0i} & 2e_{3i} & 0 \\ 2e_{1i} & 2e_{2i} & 4e_{3i} \end{pmatrix} \quad (2-26)$$

$$\text{则: } \frac{\partial r(q_i)}{\partial s_i} = \frac{l_i}{2} (-1)^j \frac{\partial v(q_i)}{\partial s_i}, j \in \{1, 2\} \quad (2-27)$$

$$\text{定义: } H_i(q_i) = \frac{\partial r(q_i)}{\partial q_i} = \begin{pmatrix} I^{3 \times 3} & I^{3 \times 3} \\ \frac{\partial r(q_i)}{\partial s_i} & -\frac{\partial r(q_i)}{\partial s_i} \end{pmatrix}_{7 \times 6} \quad (2-28)$$

对于整个系统来说有:

$$H(q) = \begin{pmatrix} H_1(q_1) & 0^{7 \times 6} & \cdots & 0^{7 \times 6} \\ 0^{7 \times 6} & H_2(q_2) & \cdots & 0^{7 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^{7 \times 6} & 0^{7 \times 6} & \cdots & H_n(q_n) \end{pmatrix} \quad (2-29)$$

将式(2-29)代入式(2-23)得到:

$$\frac{\partial U_s(q)}{\partial q} = -H(q)F^s(q) \quad (2-30)$$

设第 k 根索连接节点 p_{k1} 、 p_{k2} , 则索中的力可表示为:

$$f_k^s = k_k \left(1 - \frac{l_{0k}}{\|p_{k1} - p_{k2}\|} \right) (\bar{p}_{k1} - \bar{p}_{k2}), (k=1, 2, \dots, m) \quad (2-31)$$

其中 l_{0k} 为第 k 根索的原长, 这是个三维的列向量, 这三个分量分别表示了力在 x 、 y 、 z 方向的大小, 因为有 m 根索所以设:

$$f^s(q) = (f_1^s, f_2^s, \dots, f_m^s)^T \quad (2-32)$$

其中 $f^s(q)$ 是一个 $3m$ 维的列向量, 对于整个张拉整体机器人来说, 必须满足每根索连接的两个节点上作用的力大小相等, 方向相反, 所以这里必须引入关联矩阵, 根据各个节点与索的连接情况得到该张拉整体机器人的关联矩阵为:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{2n-1,1} & d_{2n-1,2} & \cdots & d_{2n-1,m} \\ d_{2n,1} & d_{2n,2} & \cdots & d_{2n,m} \end{pmatrix} \quad (2-33)$$

其中: $d_{ij} = \begin{cases} \pm I^{3 \times 3} & (\text{第} i \text{个杆与第} j \text{个索相连}) \\ 0 & (\text{第} i \text{个杆与第} j \text{个索不相连}) \end{cases}$

其中 $I^{3 \times 3}$ 为 3 维单位阵, 这里以图 2.2 所示的三杆九索张拉整体结构为例。

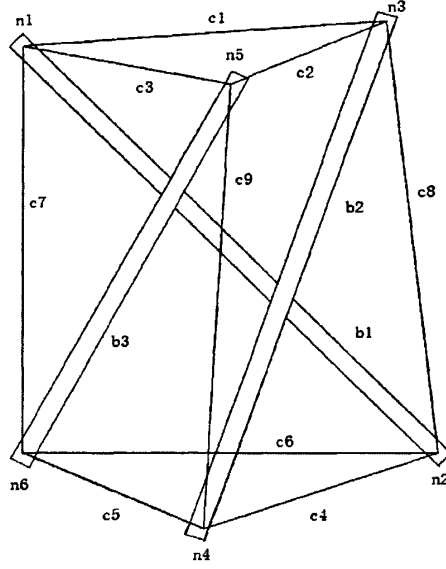


图2.2 三杆九索张拉整体结构

它的关联矩阵为:

$$D = \begin{pmatrix} I^{3 \times 3} & 0 & -I^{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 & I^{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I^{3 \times 3} & 0 & -I^{3 \times 3} & 0 & -I^{3 \times 3} & 0 \\ -I^{3 \times 3} & I^{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I^{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I^{3 \times 3} & I^{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 & -I^{3 \times 3} \\ 0 & -I^{3 \times 3} & I^{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I^{3 \times 3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I^{3 \times 3} & I^{3 \times 3} & -I^{3 \times 3} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{18 \times 27} \quad (2-34)$$

连接矩阵的行数为 3 个杆 6 个顶点的坐标个数, 每个顶点 3 个坐标, 所以共有 18 行, 列数为每个顶点与 9 根索的连接数, 若相连则为 1 或 -1, 若不相连则为 0, 所以共有 $3 \times 9 = 27$ 列。以第一行和第一列为例, 第一根杆 $b1$ 的第一个顶点 $n1$ 与 $c1$ 、 $c3$ 、 $c7$ 相连, 所以第一根索所在的三列、第三根索所在的三列以及第七根索所在的三列有单位矩阵; 第一根索连接了第一根杆的第一个顶点 $n1$ 和第二根杆的第一个顶点 $n3$, 索中的力在这两点作用的方向应该是相反的, 所以在 $n1$ 所在的行为 $I^{3 \times 3}$, 在 $n3$ 所在的行为 $-I^{3 \times 3}$, 以此类推得到上面的关联矩阵。

联立式(2-32)和式(2-33)可得:

$$F^s(q) = Df^s(q) \quad (2-35)$$

将式(2-35)代入式(2-30)可得:

$$\frac{\partial U^s(q)}{\partial q} = -H(q)Df^s(q) \quad (2-36)$$

3) 总势能:

系统中的总势能为以上两部分的势能之和, 可表示为:

$$U(q) = U^s(q) + U^g(q) \quad (2-37)$$

将式(2-21)和(2-22)带入式(2-37), 系统的总势能为:

$$U(q) = q^T f^g + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} k_k \Delta l_k(q)^2 \quad (2-38)$$

2.2.3 动力学方程的建立

对于整个系统有:

$$L(q, \dot{q}) = T - U = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - q^T f^g - U_s(q) \quad (2-39)$$

根据完整系统的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (3-40)$$

可得:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - q^T f^g - U_s(q) \right) \quad (2-41)$$

经过整理, 整个张拉整体机器人系统的拉格朗日方程可简化为:

$$Q = M(q) \ddot{q} + \dot{q}^T \overline{M}(q) \dot{q} + f^g + \frac{\partial U_s(q)}{\partial q} \quad (2-42)$$

$$\text{其中: } \dot{q}^T \overline{M}(q) \dot{q} = (\dot{q}^T \overline{M}_1(q) \dot{q}, \dots, \dot{q}^T \overline{M}_{7n}(q) \dot{q}) \quad (2-43)$$

上式中 $\overline{M}_i(q)$ 是一个 $7n \times 7n$ 的方阵, 可表示为:

$$\overline{M}_i(q) = \left(\frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{jk}(q)}{\partial q_i} \right)_{jk}, (j, k = 1, \dots, 7n) \quad (2-44)$$

将式(2-36)代入式(2-42)得:

$$Q = M(q)\ddot{q} + \dot{q}^T \overline{M} \dot{q} + f^g - H(q)Df^s(q) \quad (2-45)$$

由该系统的性质可知 $Q=0$ ，所以上式可写为：

$$M(q)\ddot{q} + \dot{q}^T \overline{M} \dot{q} + f^g = H(q)Df^s(q) \quad (2-46)$$

由于在广义坐标中使用了单位四元数，引入了一个约束条件，见式(2-2)，所以对于整个张拉整体机器人，它的动力学方程是一个微分代数方程(Differential-Algebraic Equations)，简称为 DAEs^[39]，这里联立方程组进行求解，将 $\Phi(q_i) = 0$ 这个式子对时间求二阶导数，得到：

$$(2e_{0i} \quad 2e_{1i} \quad 2e_{2i} \quad 2e_{3i}) \begin{bmatrix} \ddot{e}_{0i} \\ \ddot{e}_{1i} \\ \ddot{e}_{2i} \\ \ddot{e}_{3i} \end{bmatrix} = -2\dot{e}_{0i}^2 - 2\dot{e}_{1i}^2 - 2\dot{e}_{2i}^2 - 2\dot{e}_{3i}^2, \{i=1,2,\dots,n\} \quad (2-47)$$

$$\text{令} \quad \Phi_{q_i}^T(q_i) = (2e_{0i} \quad 2e_{1i} \quad 2e_{2i} \quad 2e_{3i}), \{i=1,2,\dots,n\} \quad (2-48)$$

$$\gamma_i(q, q_i) = -2\dot{e}_{0i}^2 - 2\dot{e}_{1i}^2 - 2\dot{e}_{2i}^2 - 2\dot{e}_{3i}^2, \{i=1,2,\dots,n\} \quad (2-49)$$

引入约束乘子 λ ，可以得到拉格朗日方程与约束微分方程的联立方程组：

$$\begin{pmatrix} M_i(q_i) & \Phi_{q_i}(q_i) \\ \Phi_{q_i}^T(q_i) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_i(q, \dot{q}) \\ \gamma_i(q, \dot{q}) \end{pmatrix}, \{i=1,2,\dots,n\} \quad (2-50)$$

将 \ddot{q}_i 用 q 、 \dot{q} 表示为：

$$\ddot{q} = A(q, \dot{q}) \quad (2-51)$$

然后利用四阶龙格-库塔法求解微分方程^[40]。但由于所建立的微分方程是二阶微分方程，所以必须先将二阶转化为一阶才能使用上述方法，转化过程如下：

$$\text{令} \quad Y(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

则方程(2-51)可转化成如下的一阶微分方程的形式：

$$\dot{Y}(t) = C \cdot Y(t) + P(t) \quad (2-53)$$

$$\text{即} \quad \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{7n \times 7n} & I_{7n \times 7n} \\ 0_{7n \times 7n} & 0_{7n \times 7n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{7n \times 1} \\ A(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (2-54)$$

降阶之后再利用四阶龙格-库塔法对方程进行求解。

至此,张拉整体机器人刚体运动过程中的动力学方程已经完全建立,但没有考虑机器人与地面的接触碰撞问题,所以接下来建立机器人的接触碰撞动力学模型。

2.3 接触碰撞过程中的动力学模型

2.3.1 碰撞分析

碰撞就是物体由于受到冲击,或是由于运动受到障碍,以致在非常短的时间里,速度突然发生有限的改变。它的特点就是碰撞的时间间隔非常短,往往以千分之一或万分之一秒来计算,在这极短的时间内物体的速度却发生了有限的改变,因而物体的加速度非常大,于是作用于物体上的力也非常大,这种在碰撞过程中出现的非常大的力称为碰撞力。在这极短的时间内碰撞力又是急剧变化的,很难确定其变化规律。为了解决一般工程问题,可根据碰撞现象的特点,作以下两点简化:

(1) 在碰撞过程中,由于碰撞力非常大,重力、弹性力等普遍力远远不能与之相比,因此这些普遍力的冲量可以忽略不计。但是必须注意忽略非碰撞力的作用只限于碰撞过程的极短时间内,而在碰撞过程开始之前和结束之后的问题中,非碰撞力对物体的作用是必须考虑的,不能忽略不计。

(2) 由于碰撞过程非常短促,物体在碰撞开始和碰撞结束时的位置基本上没有改变,因此在碰撞过程中,物体的位移可以忽略不计,即可以认为物体在碰撞开始时与碰撞结束时处于同一位置。

基于以上简化,考虑到这些碰撞力没有引起整个结构位置的改变,只引起了速度的变化,所以要研究这些力对速度的影响。设第一次与地面接触时的接触点为 $\vec{r}_i(t)$ (相对于第 i 个杆的质心), $\vec{v}_i(t)$ 和 $\vec{\omega}_i(t)$ 分别为第 i 个杆质心的线速度和角速度,其三者的关系为:

$$\dot{\vec{r}}_i(t) = \vec{v}_i(t) + \vec{\omega}_i(t) \times \vec{r}_i(t) \quad (2-55)$$

其中 $\vec{v}_i(t) = \dot{\vec{p}}_i$, $\vec{\omega}_i(t) = C_i(s_i) \dot{s}_i$, 见式(2-7)。碰撞的方向用单位向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ 来描述,即垂直于地面向上的方向,则接触点的速度在 \vec{n} 方向的分量为:

$$v_r(t) = \vec{n} \cdot \dot{\vec{r}}_i(t) \quad (2-56)$$

前面已经知道了碰撞冲量的方向为 \vec{n} ,接下来确定它的大小。假定碰撞前的各项用“-”表示,碰撞后的各项用“+”表示,根据碰撞的牛顿假设有^[41]:

$$v_r^+ = -e v_r^-, e \in [0, 1] \quad (2-57)$$

其中 e 为碰撞系数, $e=1$ 时, 为完全弹性碰撞, 没有能量损失; $e=0$ 时, 为塑性碰撞, 有一定的能量损失。碰撞前后各个量之间的关系为:

$$\bar{\mathbf{v}}_i^+(t) = \bar{\mathbf{v}}_i^-(t) + \frac{P_i \bar{\mathbf{n}}}{m_i} \quad (2-58)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i^+(t) = \boldsymbol{\omega}_i^-(t) + \bar{\mathbf{I}}_i^{-1}(t)(\bar{\mathbf{r}}_i(t) \times P_i \bar{\mathbf{n}}) \quad (2-59)$$

其中 $\mathbf{I}_i = \mathbf{S}(q) \mathbf{I}_i^{xyz} \mathbf{S}^T(q)$, $\mathbf{S}(q)$ 为旋转矩阵, 见式(2-8), P_i 为第 i 个杆与地面碰撞后的冲量。

2.3.2 摩擦分析

机器人运动时与地面间不仅有接触碰撞还存在摩擦力的作用, 带有摩擦力的碰撞是一个很复杂的问题, 一般根据刚体发生碰撞时与接触点之间是否存在滑动, 将该类问题进行简化^[41]。

(1) 碰撞时与接触点无滑动

$$\text{此时切向冲量} \quad \bar{P}_t = -\mu P \frac{\bar{\mathbf{v}}_t}{|\bar{\mathbf{v}}_t|} \quad (2-60)$$

其中 μ 为地面的摩擦系数, P 为外力冲量的大小, $\bar{\mathbf{v}}_t$ 为接触点的切向速度

(2) 碰撞时与接触点有滑动

$$\text{此时切向冲量} \quad \bar{P}_t = \mu P_n \frac{\bar{\mathbf{v}}_t}{|\bar{\mathbf{v}}_t|} \quad (2-61)$$

其中 μ 为地面的摩擦系数, P_n 为外力法向冲量的大小, $\bar{\mathbf{v}}_t$ 为接触点的切向速度。

根据以上简化, 假设机器人与地面碰撞时在接触点存在滑动, 则此时式(2-58)、(2-59)变为:

$$\bar{\mathbf{v}}_i^+(t) = \bar{\mathbf{v}}_i^-(t) + \frac{P_n \bar{\mathbf{a}}}{m_i} \quad (2-62)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i^+(t) = \boldsymbol{\omega}_i^-(t) + \bar{\mathbf{I}}_i^{-1}(t)(\bar{\mathbf{r}}_i(t) \times P_n \bar{\mathbf{a}}) \quad (2-63)$$

其中 $\bar{\mathbf{a}} = (\mu v_x, \mu v_y, 1)$, v_x 和 v_y 为接触点在 x 和 y 方向的速度分量, 联立式(2-55)、(2-56)、(2-57)、(2-62)和(2-63)可得:

$$P_n = \frac{-(1+e)v_r(t)^-}{\frac{1}{m_i} + \bar{n} \cdot \{ [\bar{I}_i^{-1}(r_i(t) \times \bar{a})] \times r_i(t) \}}$$

(2-64)

将式(2-64)代入式(2-62)和(2-63)，求出碰撞后的 $\dot{v}_i^+(t)$ 和 $\dot{\omega}_i^+(t)$ 。

在进行动力学方程的求解过程中，求出每一个位置后都要判断此时杆是否与地面接触。如果接触，则先将碰撞之前杆质心的速度和角速度代入式(2-64)求出法向冲量 P_n ，然后求出碰撞后杆质心的速度和角速度，再根据 $\dot{v}_i(t) = \dot{p}_i$ ， $\dot{\omega}_i(t) = C_i(s_i)\dot{s}_i$ ，计算出机器人质心位置坐标 \dot{p}_i 和姿态坐标 \dot{s}_i ，作为下次求解的初值，进入下一时刻的求解。

2.4 张拉整体移动机器人运动实例

以上得到了张拉整体移动机器人的通用动力学方程，本节将采用四阶龙格-库塔法对该微分方程组进行求解，并对张拉整体移动机器人的运动情况进行分析和仿真。

由于三杆九索张拉整体机器人是空间张拉整体机器人最基本的形式^[42,43]，本文将选它作为研究对象对所有张拉整体机器人来说具有重要的意义。该机器人由三根杆和九根索组成，其中包括六根边索(c1、c2、c3、c4、c5、c6)和三根中索(c7、c8、c9)，其杆索连接关系如图 2.3 所示。

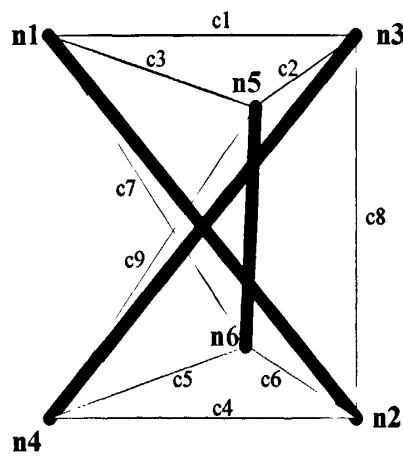


图2.3 三杆九索张拉整体机器人结构图

对其进行运动分析的初始条件为：

$$\begin{aligned}
q_1 &= [0.0000, -0.0289, 0.1100, 0.3827, 0.0000, -0.9239, 0.0000]^T \\
q_2 &= [0.0250, 0.0144, 0.1100, 0.3827, 0.800, 0.4620, 0.0000]^T \\
q_3 &= [-0.0250, 0.0144, 0.1100, 0.3827, -0.8000, 0.4620, 0.0000]^T \\
\dot{q}_1 &= \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T
\end{aligned} \quad (2-65)$$

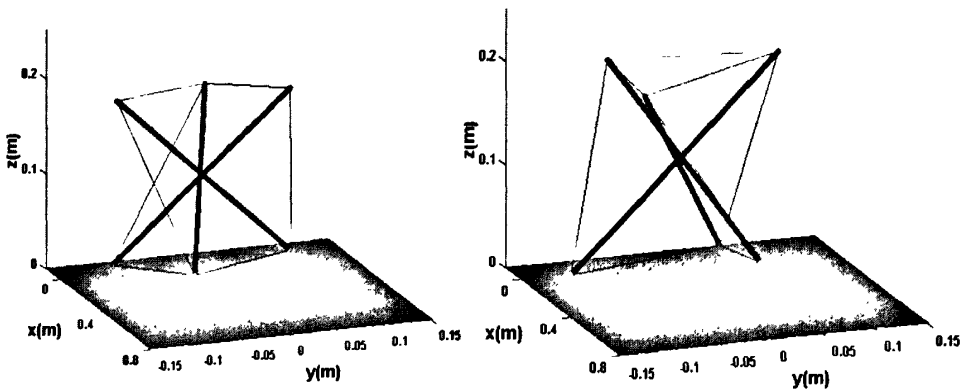
其中 q_1 、 q_2 、 q_3 为三根杆的质心坐标， \dot{q}_1 、 \dot{q}_2 、 \dot{q}_3 为三根杆质心的初始速度。

杆和索的具体结构参数如下：三根杆件质量 $m_1 = m_2 = m_3 = 0.3\text{kg}$ ，截面圆的外径 $r_1 = 0.01\text{m}$ ，内径 $r_2 = 0.005\text{m}$ ，边索长度 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0.18\text{m}$ ，中索长度 $c_7 = c_8 = c_9 = 0.20\text{m}$ ，每根索的弹性系数相同为 300N/m 。整个三杆九索张拉整体机器人的运动是靠自驱动来实现的，所谓自驱动就是通过调节驱动索的索长来实现整个机构运动姿态的变化，这里选取 4 根边索 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 作为驱动索，它们的索长变化量 ILc 为时间 t 的正弦函数，分别设为：

$$\begin{aligned}
ILc_1 &= 0.02 \sin(3.14t) \\
ILc_2 &= 0.02 \sin(3.14t) \\
ILc_3 &= -0.01 \sin(3.14t) \\
ILc_4 &= -0.01 \sin(3.14t)
\end{aligned} \quad (2-66)$$

这里选取正弦曲线主要是为了将索长变化量控制在一定的范围内，防止出现无限增大或者无限减小的情况，可以使机构不至于发生大的变形运动，有利于保持机器人运动的稳定性。

将初始条件及索长变化量带入式(2-54)进行求解，求解步长为 0.1s ，求解时间为 10s ，图 2.4 为张拉整体机器人运动过程中的四个状态。从图中可以看出，机器人在运动过程中没有一定的规律性，整个运动过程没有出现大的变形或是绳索松弛使机构变为平面结构的情况。



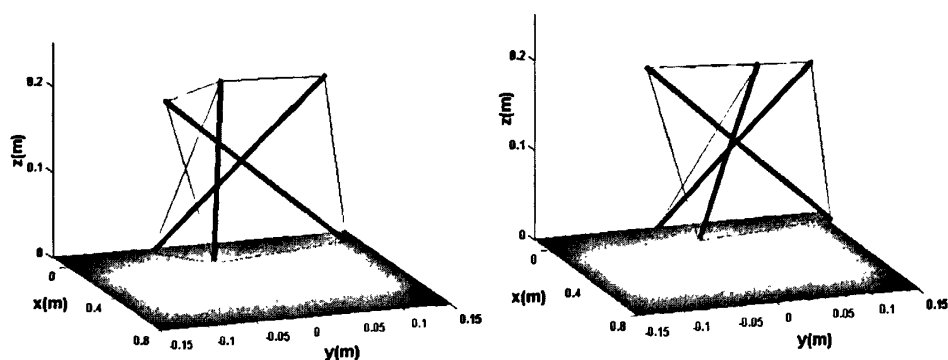


图2.4 三杆九索张拉整体机器人运动状态图

图 2.5 为 10s 内机器人质心运动轨迹在行走平面的投影，从图中可以看出，在索 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 的驱动下，经过 10s 后整个机器人质心在行走平面内从曲线的起点(0, 0)运动到了终点(-0.12, 0.14)。

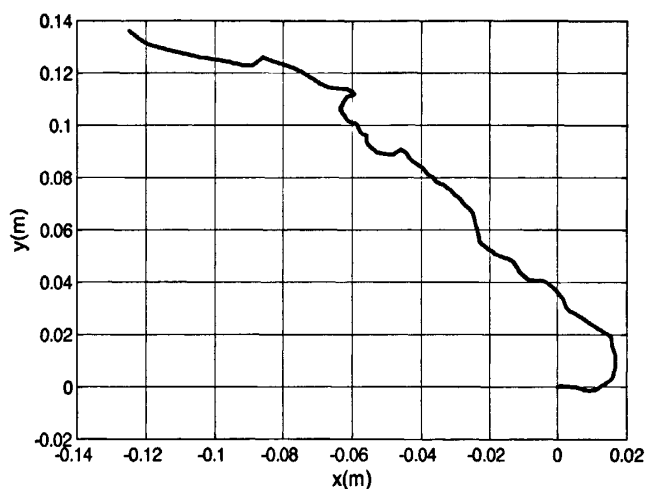
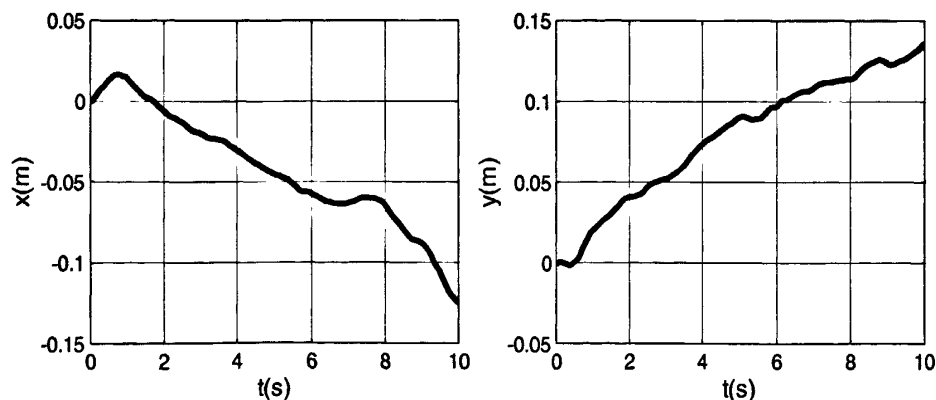


图2.5 机器人质心运动轨迹在行走平面的投影曲线

图 2.6 为 10s 内整个机器人质心的运动轨迹沿 x 轴和 y 轴方向随时间变化的曲线，通过这个实例验证了所建动力学模型的可行性。

图2.6 机器人质心在行走平面的投影曲线沿 x 轴和 y 轴方向随时间的变化曲线

2.5 本章小结

本章详细的论述了张拉整体移动机器人动力学模型的建立,首先通过引入四元数作为广义坐标,利用拉格朗日方程建立了张拉整体移动机器人刚体运动过程中的动力学模型。而后利用碰撞动力学理论,对机器人运动过程与地面的碰撞和摩擦进行分析,建立了机器人碰撞动力学模型。最后将这两个模型相结合,以三杆九索张拉整体移动机器人为研究对象,对机器人在行走过程中的状态和质心轨迹在行走平面投影进行了分析。

第三章 张拉整体移动机器人运动轨迹规划及仿真软件开发

3.1 引言

第二章主要介绍了张拉整体移动机器人动力学的建模方法，并对其进行了正动力学的运动仿真。这一章将从逆动力学角度出发，研究张拉整体移动机器人的运动轨迹规划方法，实现其沿预定轨迹的运动，并结合建立的动力学模型，在 C++ Builder 中开发了张拉整体移动机器人的运动仿真平台。

3.2 张拉整体移动机器人运动轨迹规划方法

为了将张拉整体结构应用于机器人，必须对它在空间中运动的位置进行控制，使其按照预定轨迹运动。首先需要对张拉整体机器人的三种驱动方式进行了解，即杆驱动、索驱动和杆索混合驱动。杆驱动是指通过调节可伸缩杆件的长度来控制整个机构的运动；索驱动是通过改变绳索的长度来控制整个机构运动；杆索混合驱动则是结合以上两种方式来控制整个机构的运动。由于索驱动和另外两种驱动方式相比在模型的建立及控制方法的实现上具有很大的优势，所以本文采用索驱动。

采用索驱动来实现张拉整体机器人的轨迹规划，首先必须引入控制变量 $u_k(t)$ ，此时对于第 k 根索，它的当前长度为：

$$l_k(q) = l_{0k} + \Delta l_k(q) + u_k(t) \quad (3-1)$$

其中 $l_k(q)$ 为索的当前长度， l_{0k} 为索的原长， $\Delta l_k(q)$ 为索的当前变化量， $u_k(t)$ 是由驱动器引起的索长变化量。

$u_k(t)$ 是时间的连续函数，它的取值必须在一定的范围内，因为取的过大时会损坏绳索，取的过小时又会出现绳索长度小于等于零的情况，这个变量只影响整个结构的势能，即式(2-38)中的 $U(q)$ ，所以如何控制 $u_k(t)$ 的值是采用索驱动来实现张拉整体机器人轨迹规划的关键。本文采用组合挑选法^[44]，通过寻找驱动索变化量的合适组合状态，实现机器人沿预定轨迹运动。主要控制策略是将整个机器人的运动过程划分为许多时间段，系统的输入为初始时刻杆质心的位姿和速度，输出为时间间隔 Δt 后杆质心的位姿和速度，假设在每个时间段 Δt 内，驱动器使每根索的长度具有 3 种变化方式：

$$\Delta L_i = u_k(t) - u_k(t + \Delta t) = \{-u_0, 0, u_0\} \quad (3-2)$$

其中 $-u_0$ 表示索长减小 u_0 ，0 表示索长不变， u_0 表示索长增加 u_0 。

如果用 m 根索来驱动, 索的长度变化就有 3^m 种状态, 分别计算在这 3^m 种状态下张拉整体机器人经过 Δt 后质心在行走平面的投影坐标 (C_x, C_y) (以杆质心为顶点组成的多边形的形心在行走平面的投影坐标), 从中选出满足预定轨迹所对应的一种驱动状态, 然后进入下一时间段的求解。这样在每一时间段采用相同的控制策略, 最终实现机器人沿预定轨迹的运动。但由于时间被离散化了, 所以 $u_k(t)$ 也被离散化了。

从整个控制策略中可以发现, 驱动索控制变量 u_0 的选取以及时间的划分精度对控制效果的影响很大, u_0 选取不当会使 Δt 内的所有驱动状态都不满足要求, 或使从动索出现松弛, 导致机器人结构失效, 这样就必须重新选取 u_0 , 即图 3.1 中的调整索长变化量 ΔL_i 。如果 u_0 的值过大, 容易使整个机构在短时间内储存很大的势能, 使得机构运动幅度过大, 从而影响整个机构的稳定性。另外, 时间划分的越精细, 控制效果越好, 因为时间间隔小会很快纠正上一个时间段内存在的运动误差, 使得累计误差减小。图 3.1 为整个控制过程的流程图。

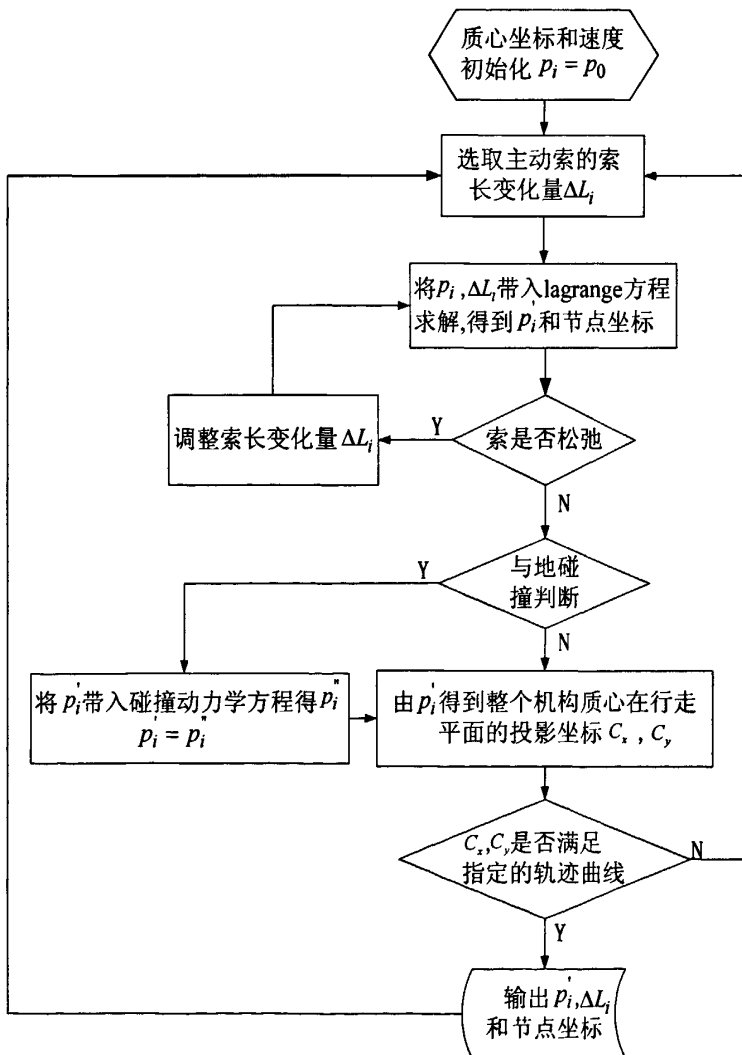


图3.1 控制算法流程图

3.3 张拉整体移动机器人轨迹规划运动实例仿真

上一节对张拉整体移动机器人的轨迹规划方法进行了研究, 本节将用两个实例来验证该轨迹规划方法的可行性。所选运动仿真模型仍为三杆九索张拉整体移动机器人, 其结构参数与初始状态与 2.4 节中的模型相同。

(1) 机器人质心在行走平面的投影轨迹为直线

设求解时间为 3s, 控制算法的时间间隔 Δt 为 0.1s, 驱动索为 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 , 每根索在 Δt 内有 $\{-0.005, 0, 0.005\}$ 这三种状态, 即可缩短 5mm、保持原长或可伸长 5mm。根据上文中的轨迹规划方法, 此时, 每 0.1s 就要在这 3^4 种驱动状态中选取一个合适的状态, 使得机器人沿预定轨迹行走。若要使机器人质心在行走平面的投影轨迹为沿 x 轴正向的直线, 则投影坐标 (C_x, C_y) 必须满足直线约束条件:

$$c(q, \dot{q}) = 5 \cdot |C_y| - C_x < n \quad (3-3)$$

其中 $c(q, \dot{q})$ 为轨迹误差, n 的初值取为 10^{-10} 。

从式(3-3)可以看出, 若轨迹脱离 x 轴正向运动时 $c(q, \dot{q})$ 的值变大, 不满足约束条件, 只有 C_y 的值在 0 附近, 投影坐标 (C_x, C_y) 才会满足这个约束条件, 这样就保证了机器人质心在行走平面的投影轨迹为沿 x 轴的直线。为了限制轨迹误差, 在每一步计算过程中都要更新 n 的值, 使得 $n_{i+1} < n_i$, n 值选取基本过程如图 3.2 所示。

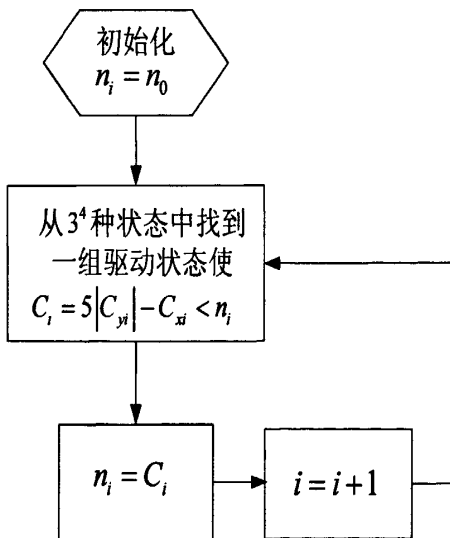


图3.2 n 值选取过程

将初始条件带入张拉整体机器人动力学方程, 并利用上述轨迹规划方法编写程序进行求解。图 3.3 为利用 Matlab 软件对求解得到的数据做出的仿真动画和曲线图。图的左侧为四根驱动索在 3s 内的索长变化量随时间变化的曲线, 其中 c_3 索长变化范围最大为 5cm。图的右侧为四根驱动索中的力在 3s 内随时间的变化曲线, 根据胡克定律, 它与索长变化量是呈线性关系的。因此, 图中左侧驱动索的索长

变化量 $cabi(i=1,2,3,4)$ 与右侧索中力的变化量 $fi(i=1,2,3,4)$ 是一一对应的。图中间为机构运动到 3s 时的状态图，可以看出机器人运动平面上的直线为预定轨迹线 $y=0$ 。

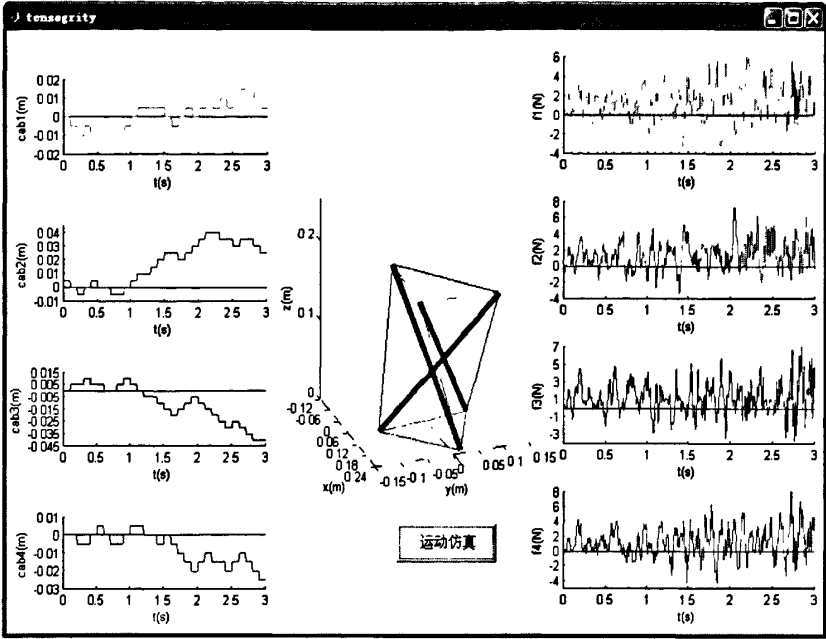


图3.3 张拉整体机器人运动仿真图

图 3.4 为在 3s 内机器人质心运动轨迹在行走平面的投影，可以看出曲线偏离直线 $y=0$ 的最大距离不到 5mm，这个偏差很小，达到了预定的轨迹要求。从图中看出，3s 内机构质心在行走平面的投影沿 x 轴正向运动了 0.14m，平均运动速度为 0.047m/s。

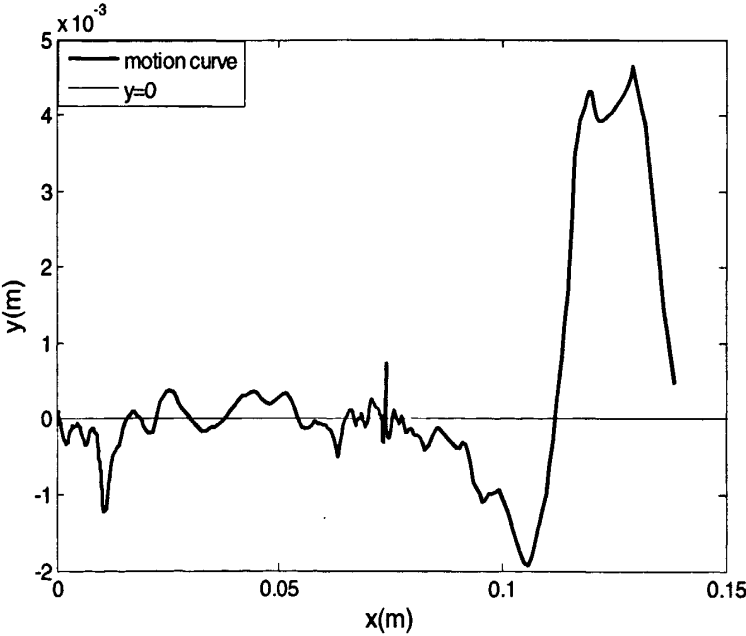


图3.4 机器人质心运动轨迹在行走平面的投影

(2) 机器人质心在行走平面的投影沿 x 轴正向运动 1cm 后实现转直角弯

设求解时间为 1.48s，控制算法的时间间隔 Δt 为 0.02s，驱动索为 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 ，每根索在 Δt 内有 $\{-0.001, 0, 0.001\}$ 这三种状态，即可缩短 1mm、保持原长或者可伸长 1mm。可以看出为了更好的实现转直角弯，把时间划分的更为精细的同时减小了索在每一步的变化量，因为时间划分的越精细每一步的误差会越小，而且索长变化量越小，机器人在每一个时间段内运动的变化幅度越小，更能容易实现其按照预定轨迹运动。由于整个运动过程分为两个阶段，在这里张拉整体机器人质心在行走平面的投影坐标 (C_x, C_y) 也必须满足两个约束条件：

1) 质心投影坐标 (C_x, C_y) 在沿 x 轴正向运动 1cm 的过程中：

$$c_1(q, \dot{q}) = 5 \cdot |C_y| - C_x < n_1 \quad (3-4)$$

2) 质心投影坐标 (C_x, C_y) 在沿 x 轴正向运动 1cm 后，沿 y 轴运动的过程中：

$$c_2(q, \dot{q}) = 5 \cdot |C_x - 0.01| - C_y < n_2 \quad (3-5)$$

其中 $c_1(q, \dot{q})$ 和 $c_2(q, \dot{q})$ 为轨迹误差， n_1 、 n_2 的初值为 10^{-10} ，它们在每个时间间隔内的选取过程见图 3.2。

利用初始条件和约束条件可对动力学方程进行求解，图 3.5 为 1.48s 内机器人质心运动轨迹在行走平面的投影，从图中可以看出，机器人沿 x 轴正向运动 1cm 后开始试图沿 y 轴运动，但由于惯性的作用不能很快的实现，所以存在一个缓冲的过程，在这个过程中运动轨迹偏离 y 轴的最大距离为 3.7mm。这个误差在运动过程中是很小的，所以通过该轨迹规划方法，机器人实现了沿预定轨迹的运动，同时也说明了张拉整体机器人能够实现运动方向的突变。

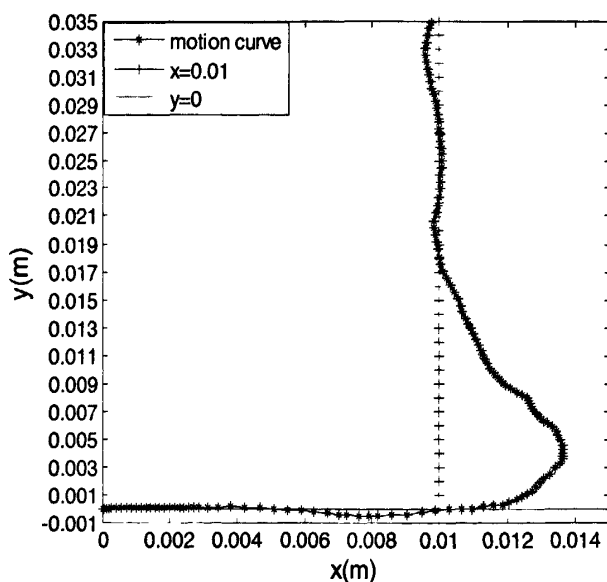


图3.5 机器人实现转直角弯时质心运动轨迹在行走平面的投影

两个实例的运动仿真验证了轨迹规划方法的可行性。只是实例(2)中时间划分的更为精细,而且每个时间间隔索长变化量也更小,仿真结果表明:采取这样的措施后运动误差大大减小,如实例(1)中的最大偏差为 2mm,而实例(2)中当机构沿 x 轴正向运动时,偏离 x 轴的最大距离不到 1mm,只是在转弯时出现了偏离预定轨迹的最大值,也只有 3.7mm。因此时间划分的精细度以及每个时间间隔内绳索变化量的大小对控制效果有很明显的影响。

3.4 张拉整体移动机器人运动仿真软件开发

本节将根据前面建立的通用动力学模型和轨迹规划方法,以 C++ Builder 为软件开发环境,利用 OpenGL 作为仿真界面,从正、逆动力学两个方面实现张拉整体移动机器人的参数化建模及运动仿真。

3.4.1 软件开发工具及运行环境

(1) 软件开发工具

目前面向对象开发工具主要有:Microsoft 公司的 VC++、VB, Borland 公司的 C++ Builder、Delphi 以及基于 Java 的各类开发工具,这些开发工具都有各自的优点。其中 C++ Builder 是 Borland 公司 98 年推出的全新 32 位 Windows 开发工具,它不但继承了 Delphi 的使用简便、功能强大、效率高等特点,还结合了 C++ 语言的所有优点,是一个 Windows 环境下基于 C++ 语言进行快速程序开发的集成开发环境,而且具有传统 C++ 应用程序开发工具高效和底层硬件控制能力强的特点,同时还利用了 VCL 中所提供的组件,使得该工具具有应用方便和真正的可视化的特点。基于 C++ Builder 的这些优点这里选择它作为软件的开发环境。

应用程序可视化是计算机程序设计的发展趋势,本文软件的可视化部分采用 OpenGL 语言编写。90 年代三维图形迅速发展,各种三维图形工具软件包相继推出,如 PHIGS、PEX、Render Man 等,这些三维图形工具软件包有些侧重于使用方便,有些侧重于渲染效果或与应用软件的连接,但没有一种三维工具软件包在交互式三维图形建模能力、外部设备管理以及编程方便程度上能与 OpenGL 相比。OpenGL 是 SGI 公司开发的一套高性能的图形处理系统,是图形硬件的软件界面,GL 即代表图形库(Graphics Library),通过它可以创建交互式应用程序实现二维和三维的高级图形技术,在性能上表现的异常优越,包括建模、变换、光线处理、色彩处理、动画以及更先进的技术,这些能力为实现逼真的三维渲染效果和建立交互的三维景观提供了优秀的软件工具。由于 OpenGL 具有广泛的移植性,许多在计算机界具有领导地位的计算机公司纷纷采用它作为三维图形应用程序设计界面,已成为了目前三维图形开发标准。基于 OpenGL 的强大三维建模功能和可移

植性好的特点, 因此这里选择它作为机器人运动仿真界面显示的软件平台。

(2) 软件运行环境

软件的运行环境主要包括硬件环境及软件环境两个方面, 该软件运行过程中所占计算机内存比较小, 所以对计算机的硬件要求不高, 一般选择 Pentium 4 或 Anthon 处理器, 1G 内存, 硬盘空间 100M 以上的硬件环境就可以运行该软件。软件环境主要是指支持软件运行的操作系统的选择, 到目前为止, 主要有两类操作系统应用于通用计算机: 类 Unix 操作系统和微软的 Windows 操作系统。二者相比较, 微软的 Windows 操作系统是当前最流行的操作系统, 在全球桌面市场上占有 90% 左右的份额, 在中低端市场中也有广泛的应用, 因此为了实现张拉整体机器人运动仿真软件应用的广泛性, 这里选择 Windows 操作系统。

3.4.2 软件的主要功能及操作中的关键问题

(1) 软件的主要功能

张拉整体机器人运动仿真软件利用张拉整体机器人通用动力学模型, 通过在界面中输入张拉整体机器人的结构参数, 动力学仿真类型选择及驱动索相关参数, 可以用于张拉整体机器人的动力学仿真。并利用 3.3 节的轨迹规划方法, 从正、逆动力学两个方面实现张拉整体机器人的参数化建模及运动仿真, 用户可以根据自己的需要建立相应的张拉整体机器人动力学模型, 并显示运动仿真效果图。这里强调的是该软件只适用于严格定义中的张拉整体结构, 而不适用于张拉整体结构的广义定义, 即结构中不允许有杆件与杆件的直接连接。图 3.6 为该软件的整体结构框架图。

(2) 操作中的关键问题

1) 杆的参数设定

杆的输入参数主要有杆的数目、杆的质量、杆的内外半径及杆的节点坐标, 这些参数均需根据需要进行运动仿真的张拉整体机器人的总体参数来确定, 为了确保机器人运动的平稳性, 建议一般取所有杆的质量和内外半径大小均相等。所输入的杆的位置参数为杆件两个端点的节点坐标 a_i 和 b_i , 对于 n 根杆的情况, a_i 表示第 i 个杆第一个节点坐标, b_i 表示第 i 个杆第二个节点的坐标, 其中 $(i=1, 2, \dots, n)$ 。

2) 索的参数设定

索的参数输入主要包括索编号、原长、弹性系数和杆索关联系数等, 其中最重要的是杆索关联系数, 要根据每根索所连接的杆的节点信息填写。例如编号为 k ($k=1, 2, \dots, m$) 的索对应的杆索关联系数为 i 和 j , 则它所连接的就是第 $(i/2+1)$ 根杆的第 $(i\%2+1)$ 个节点和第 $(j/2+1)$ 根杆的第 $(j\%2+1)$ 个节点。

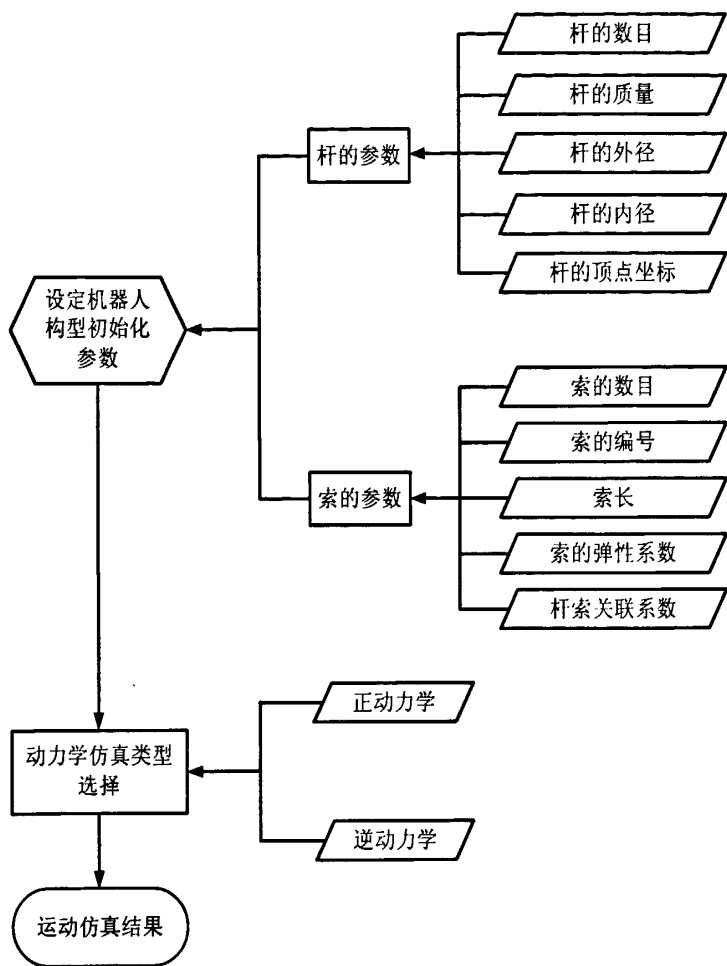


图3.6 软件结构框架图

3) 运动仿真类型的选择

该软件可实现张拉整体机器人正、逆运动学两方面的运动仿真，当用户确定所需要仿真的机器人构型，并将所有的初始化参数都输入后，张拉整体机器人的初始状态就完全确定了。接下来就进入动力学选择界面，用户可根据自己的需要，选择正动力或逆动力学进行运动仿真。

正动力学主要是通过设定驱动索的个数和索长变化量来驱动机器人进行运动，在该界面中需要输入驱动索的个数和驱动索索长变化量（为时间 t 的函数）的参数，这里取索长变化量函数为正弦函数，一般形式为 $a\sin(bt+c)+d$ ，这样选取可以使它的变化量控制在一定的范围以内。界面中输入的则为每根索索长变化量函数中的 a 、 b 、 c 、 d 四个值，若初始索长变化量为零，则表示这根索为从动索。

张拉整体机器人的逆动力学是指通过选取合适的驱动索及驱动索索长变化量的合适组合来实现张拉整体机器人沿预定的轨迹运动。驱动索的选取主要通过索的最小编号和个数来确定，若驱动索的最小编号为 i ，驱动索的个数为 j ，则驱动索为 ci ， $c(i+1)$ ， \cdots ， $c(i+j-1)$ 。索长变化量为每一步求解过程中驱动索相对于上

一步求解时的索长变化量，即式(3-2)中的 u_0 。

3.4.3 软件仿真实例

为了更加详细的介绍该软件的功能，本节将以二层塔结构张拉整体移动机器人（6杆 24 索）为例，应用该运动仿真软件对其进行仿真分析。

二层塔结构张拉整体移动机器人是两个三杆九索张拉整体结构的组合体，其中一个在下层，另一个在上层，该结构的基本构型如图 3.7 所示。

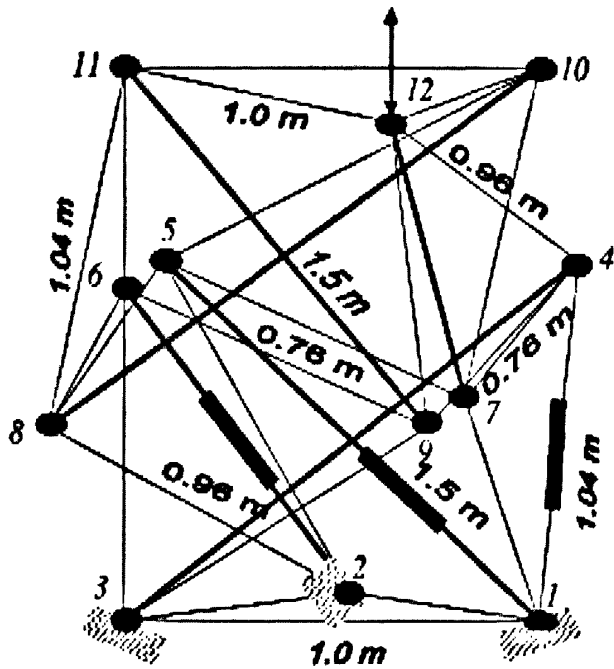


图 3.7 二层塔张拉整体结构

(1) 杆索的基本参数

- 1) 杆件：共 6 根，直径均为 0.01m，长为 1.5m；
- 2) 索件：共 24 根，包括顶索（最顶层的三根）和底索（最底层的三根）共 6 根，长度均为 1m；垂直索长（竖向索的两个端点属于同一个三杆九索张拉整体结构）均为 1.04m；对角索长（竖向索的两个端点不属于同一个三杆九索张拉整体结构）均为 0.96m；鞍索（横向索的两个端点不属于同一个三杆九索张拉整体结构）长均为 0.76m，索的弹性系数均相同为 300N/m。

(2) 杆索关联关系

根据图 3.7 所示结构图及顶点编号，得到该机器人的杆索关联关系如表 3.1 所示。

表 3.1 二层塔张拉整体移动机器人杆索关联关系

索编号	名称	与之相连的节点号	与之相连的杆的节点
1	下层垂直索	1-4	1 杆 1 点-3 杆 2 点
2	下层垂直索	2-5	2 杆 1 点-1 杆 2 点
3	下层垂直索	3-6	3 杆 1 点-2 杆 2 点
4	下层对角索	1-7	1 杆 1 点-4 杆 1 点
5	下层对角索	2-8	2 杆 1 点-5 杆 1 点
6	下层对角索	3-9	3 杆 1 点-6 杆 1 点
7	鞍索	4-7	3 杆 2 点-4 杆 1 点
8	鞍索	7-5	3 杆 1 点-1 杆 2 点
9	鞍索	5-8	1 杆 2 点-5 杆 1 点
10	鞍索	8-6	5 杆 1 点-2 杆 2 点
11	鞍索	6-9	2 杆 2 点-6 杆 1 点
12	鞍索	9-4	6 杆 1 点-3 杆 2 点
13	上层垂直索	7-10	4 杆 1 点-5 杆 2 点
14	上层垂直索	8-11	5 杆 1 点-6 杆 2 点
15	上层垂直索	9-12	6 杆 1 点-4 杆 2 点
16	上层对角索	5-10	1 杆 2 点-5 杆 2 点
17	上层对角索	6-11	2 杆 2 点-6 杆 2 点
18	上层对角索	4-12	3 杆 2 点-4 杆 2 点
19	顶索	1-2	1 杆 1 点-2 杆 1 点
20	顶索	2-3	2 杆 1 点-3 杆 1 点
21	顶索	3-1	3 杆 1 点-1 杆 1 点
22	底索	10-11	5 杆 2 点-6 杆 2 点
23	底索	11-12	6 杆 2 点-4 杆 2 点
24	底索	12-10	4 杆 2 点-5 杆 2 点

(3) 动力学仿真

将以上参数输入到张拉整体移动机器人运动仿真软件，对该机器人进行运动仿真及运动分析。选择机器人的运动仿真模式为逆动力学运动仿真，选取 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 作为驱动索，每个时间间隔内驱动索的索长变化量为 0.005m，在逆动力学界面输入驱动索的相关参数。

图 3.8 为机器人运动到 2.5s 时的运动仿真画面，图中左上角为机器人运动过程中索长的变化量，右上角显示的数值为张拉整体机器人的运动时间、系统的动能、弹性势能、重力势能及系统总能量，右下角所显示的数据为求解步长，图中运动

平面上的轨迹线为机器人质心运动轨迹在行走平面的投影曲线，通过该界面可对张拉整体机器人的运动情况有更好的了解。

从图中可以看出机器人实现了沿预定直线的行走，并且运动过程平稳，保持了机器人的初始构型。

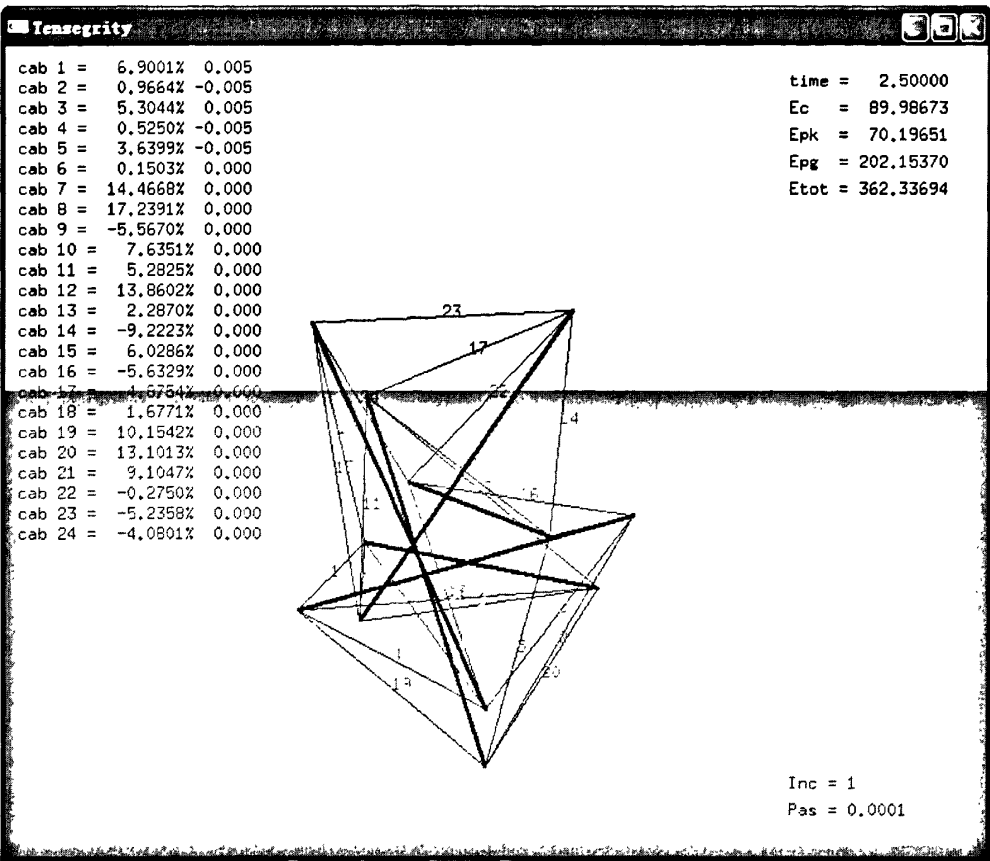


图 3.8 六杆二十四索张拉整体机器人运动仿真界面

3.5 本章小结

本章以建立的张拉整体移动机器人动力学模型为基础，选择索驱动作为它的驱动方式，通过寻找驱动索变化量的合适组合状态，提出了一种基于索变化量组合挑选法的张拉整体移动机器人轨迹规划算法，该算法实现了机器人沿预定轨迹的运动，并通过两个实例证实了该轨迹规划算法的合理性和可行性。并以此为基础开发了张拉整体移动机器人的运动仿真软件，以六杆二十四索张拉整体移动机器人为例，对软件的功能进行了介绍，为更好的研究张拉整体移动机器人的运动性能打下了良好的基础。

第四章 三杆九索张拉整体移动机器人运动性能分析

4.1 引言

前面章节建立了张拉整体移动机器人的动力学模型并对其进行了运动分析和运动仿真,本章将从驱动器配置、索材料及机器人构型三个方面来研究它们对张拉整体移动机器人运动性能的影响,从而深入了解张拉整体移动机器人的运动性能。本章仍选取三杆九索张拉整体移动机器人作为研究对象,为研究张拉整体移动机器人的运动特性打下良好的基础。

4.2 驱动器配置分析

本节将主要分析在不同驱动索的作用下,张拉整体移动机器人的运动性能所表现出的差异性,并根据所得结果寻求最佳的驱动器配置状态,使得张拉整体移动机器人运动性能达到最优化。

4.2.1 驱动索数目对其运动性能的影响

三杆九索张拉整体机器人的结构和初始参数如 2.4 节所述,再利用 3.2 节研究的轨迹规划方法,设定机器人质心运动轨迹在行走平面的投影为沿 x 轴正向的直线,选取时间间隔为 $0.1s$,每个时间间隔内主动索的三个状态为 $\{-0.005,0,0.005\}$,求解时间为 $2s$ 。图 4.1 为驱动索数目不同时,三杆九索张拉整体机器人质心运动轨迹在行走平面的投影曲线。

图中横坐标表示机器人质心在行走平面的投影在 x 轴的运动坐标,纵坐标表示机器人质心投影坐标偏离 x 轴的大小。七根曲线分别表示机器人在 3—9 根不同数目索的驱动下,质心运动轨迹在行走平面的投影曲线,可以明显看出机器人质心投影坐标偏离 x 轴的距离都在 $\pm 1cm$ 范围内,并实现了沿预定轨迹行走的效果。但是它们在相同时间内各自的行走速度不同,在 8 根索的驱动下机器人的行走速度最快,约为 $0.108m/s$,其次为 7 根索驱动和 9 根索驱动,所以机器人的运动速度与驱动索的个数不是成比例关系的。然而不论是由 7 根索驱动(有 1 根中索),还是 8 根索(有 2 根中索)、9 根索驱动(有 3 根中索),它们里面都含有中索驱动,所以可以看出中索对张拉整体机器人运动速度的提高有一定的帮助。但是从运动仿真结果来看,机器人运动速度提高的同时,其运动轨迹偏离预定轨迹的误差值也随之增大,这是因为中索越多机构的运动幅度越大,例如,当用 9 根索驱动时,三根中索都参与了驱动,此时运动轨迹的最大偏差值达到 $0.97cm$,这使得机器人

在运动过程中的稳定性减小，反过来又抑制了速度的提高。

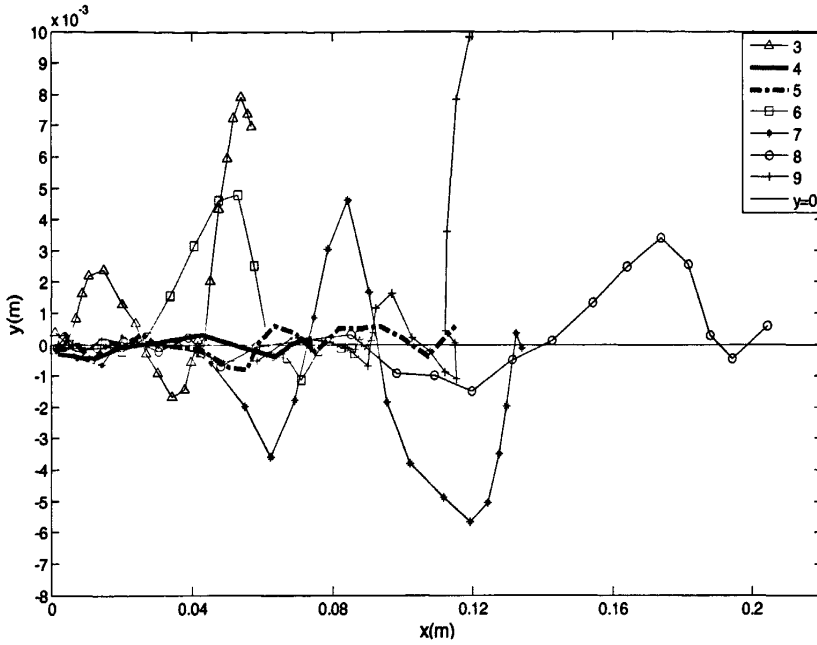


图4.1 驱动索数目不同时机器人质心轨迹的投影曲线

4.2.2 中索驱动对其运动性能的影响

为了具体研究中索在驱动器配置中的重要性，本节重点分析了三杆九索张拉整体移动机器人在驱动索的总数相同（四根），但包含的中索个数不同时的运动性能，图 4.2 为中索做驱动索数目不同时质心运动轨迹在行走平面的投影曲线。

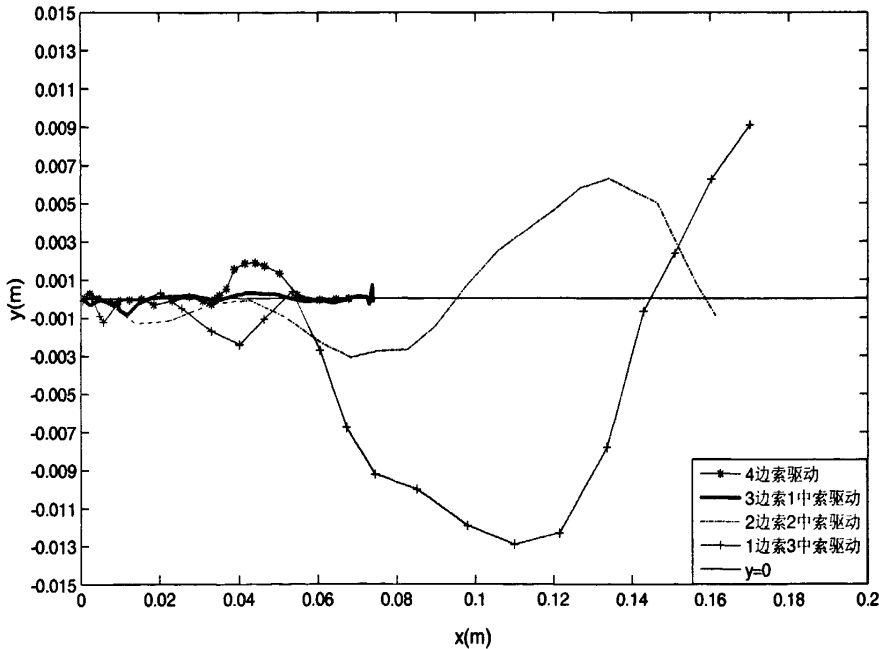


图4.2 中索做驱动索数目不同时机器人质心轨迹的投影曲线

图中所示曲线分别由 4 根边索驱动、3 根边索和 1 根中索驱动、2 根边索和 2 根中索驱动以及 1 根边索和 3 根中索驱动时机器人质心运动轨迹在行走平面的投影曲线。从图中可以看出,随着作为驱动索的中索数目的增加,机器人的运动速度也随之加快,当 3 根中索全部作为驱动索时,机器人的运动速度最快,约为 0.09m/s,但此时机器人质心运动轨迹投影坐标偏离预定轨迹的误差值也达到了最大。从运动画面中也可以看出,此时机器人运动的稳定性有所下降,这充分证明了 4.2.1 节中的观点,即在三杆九索张拉整体机器人的驱动器配置中,中索作为驱动索起到了双刃剑的作用,它的增加会提高机器人运动速度,但是也会增大运动轨迹偏离预定轨迹的误差,从而降低机器人运动的稳定性,抑制机器人沿预定轨迹行走的运动性能。所以在选择驱动索时,一定要考虑中索作为驱动索时对机器人运动性能的影响,若希望机器人沿预定轨迹行走时的误差更小,则应适当减少驱动索里中索的个数;若要求机器人运动速度快,而且可以接受运动轨迹与理想轨迹之间存在一定范围的偏差,则可以适当增加驱动索里中索的个数,但不能太多,否则会影响机器人运动的稳定性。

4.3 索的弹性系数分析

由于张拉整体机器人索的弹性系数不同,对其运动性能的影响也不同,所以本节将主要研究索的弹性系数对机器人运动性能的影响。

4.3.1 索的弹性系数不同

这里主要分析索的弹性系数大小对机器人运动性能的影响,设机器人所有索的弹性系数 k 均相等,但 k 值有变化,研究此时机器人的运动情况。

机器人的结构和初始运动参数同 2.4 节,选取的驱动索为 $c1$ 、 $c2$ 、 $c3$ 、 $c4$,设定机器人质心运动轨迹在行走平面的投影为沿 x 轴正向的直线,时间间隔为 0.1s,每个时间间隔内驱动索的三个状态为 $\{-0.005, 0, 0.005\}$,求解时间为 2s,研究索的弹性系数 k 变化时三杆九索张拉整体机器人质心运动轨迹在行走平面的投影曲线,如图 4.3 所示。

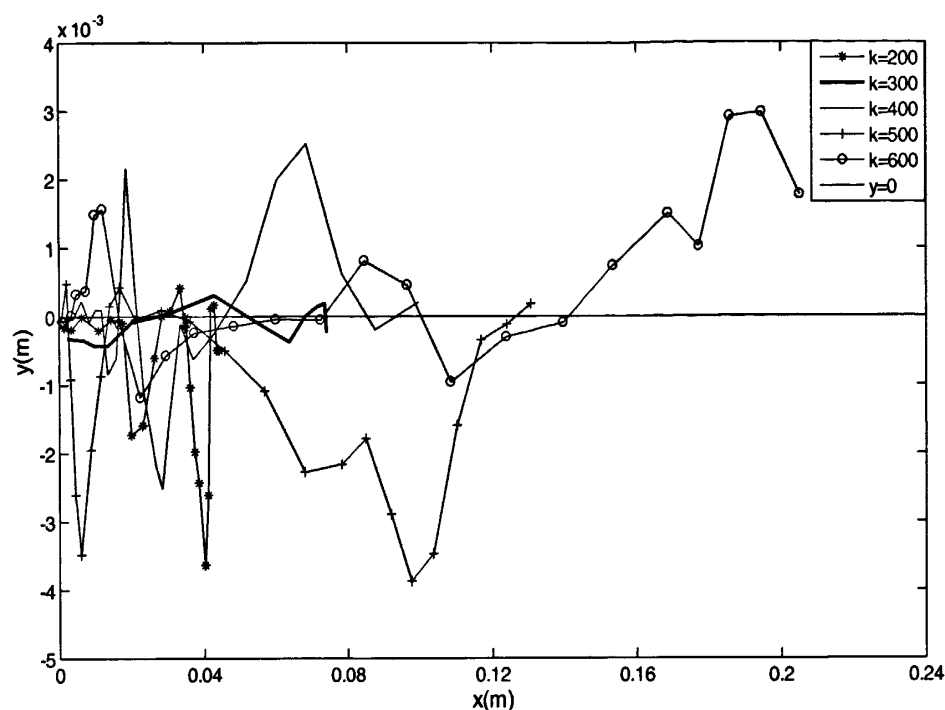


图4.3 索弹性系数不同时机器人质心轨迹的投影曲线

图中曲线分别表示索的弹性系数值 k 分别为 200N/m、300N/m、400N/m、500N/m、600N/m 时机器人质心运动轨迹在行走平面的投影曲线。可以看出在这 5 种情况下，机器人都实现了沿预定轨迹的运动，而且偏离 x 轴的误差值控制在了 $\pm 0.5\text{cm}$ 之间。但在运动速度上存在着很大的差距，当 $k = 200\text{N/m}$ 时机器人的运动速度最慢，约为 0.02m/s ，当 $k = 600\text{N/m}$ 时机器人的运动速度最快，约为 0.11m/s ，不难发现，随着索弹性系数 k 的增大，机器人的运动速度在不断的加快。这是因为索的弹性系数增大会增加整个系统的弹性势能，从而加快机器人的运动速度。但是系统能量的增加势必会造成机器人运动幅度和变形量的增加，会影响机器人的运动状态，降低机器人运动的稳定性，很有可能出现倾斜甚至倒下的情况，所以如果机器人要保持一定的运动状态，弹性系数必须要控制在一定的范围内，不能使其太大。

4.3.2 索的弹性系数分布不同

这里主要研究张拉整体机器人索的弹性系数具有不同分布状态时，对机器人运动性能的影响。设机器人 9 根索的弹性系数分布有以下几种状态：

- a. 3 根上边索弹性系数相同为 300N/m，其余索弹性系数为 400N/m；
- b. 上下 6 根边索弹性系数相同为 300N/m，3 根中索弹性系数为 400N/m；
- c. 3 根下边索弹性系数相同为 300N/m，其余索弹性系数为 400N/m；

d. 所有索的弹性系数均为 300N/m ;

e. 所有索的弹性系数均为 400N/m 。

机器人的结构和初始运动参数同 2.4 节, 选取的驱动索为 c_2 、 c_3 、 c_4 、 c_5 , 设定机器人质心运动轨迹在行走平面的投影为沿 x 轴正向的直线, 时间间隔为 0.1s , 每个时间间隔内驱动索的三个状态为 $\{-0.005, 0, 0.005\}$, 求解时间为 2s 。图 4.4 为机器人 9 根索弹性系数在上述 a、b、c、d、e 五种分布状态下, 质心运动轨迹在行走平面的投影曲线。

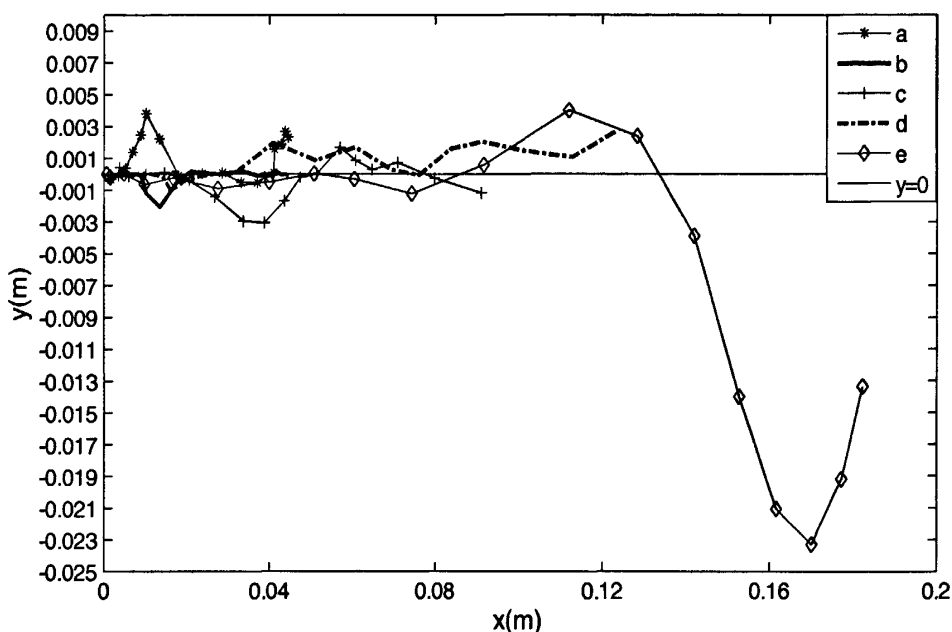


图 4.4 索弹性系数分布不同时机器人质心运动轨迹投影曲线

从图中可以看出在这五种状态下, 机器人质心在行走平面的投影轨迹都实现了沿预定路径的运动, 而且在 a、b、c 三种状态下 (9 根索的弹性系数不相同, 具有不同的分布状态) 运动的轨迹误差都控制在了 $\pm 5\text{mm}$ 之间, 但在这三种状态下机器人的运动速度却比较慢, 都不到 0.01m/s 。不难看出在 d、e 两种状态下 (弹性系数均为 300N/m 和 400N/m) 机器人的运动速度最快, 约为 0.065m/s 和 0.093m/s 。所以机器人在 9 根索的弹性系数均匀分布时的运动速度比不均匀分布时的快。此时 9 根索弹性系数均为 400N/m 时要比均为 300N/m 时的运动速度快, 但轨迹误差较均为 300N/m 时的大, 这充分验证了第一种情况中的结论。

4.3.3 驱动索与从动索的弹性系数

这种情况主要分析驱动索的弹性系数 k_1 和从动索的弹性系数 k_2 不同时对机器人运动性能的影响, 机器人的结构和初始运动参数同 2.4 节, 选取的驱动索为 c_2 、 c_3 、 c_4 、 c_5 , 设定机器人质心运动轨迹在行走平面的投影为沿 x 轴正向的直

线，时间间隔为 0.1s，每个时间间隔内驱动索的三个状态为 $\{-0.005, 0, 0.005\}$ ，求解时间为 2s。图 4.5 所示为当 $k_1 > k_2$ 、 $k_1 = k_2$ 及 $k_1 < k_2$ 三种情况下机器人质心轨迹在行走平面的投影曲线。

从图中可以看出这三种情况下机器人都能实现沿预定轨迹的运动，但在 $k_1 < k_2$ 和 $k_1 > k_2$ 这两种情况下机器人的运动速度较慢，在 $k_1 = k_2$ 时，机器人的运动速度最快，约为 0.093m/s。这说明机器人的运动速度只与索的弹性系数分布情况有关，而与索是驱动索还是从动索无关。

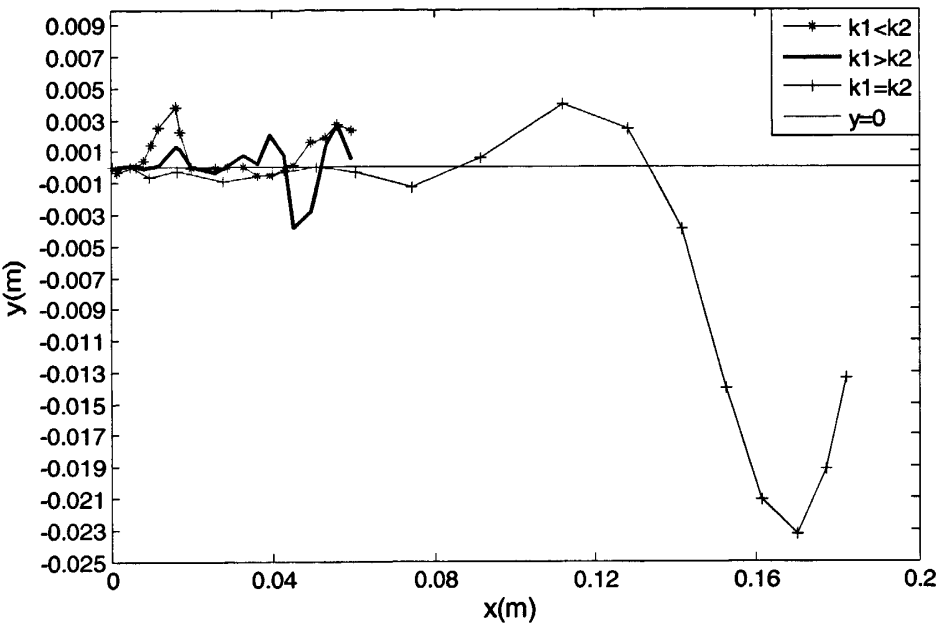


图4.5 驱动索和从动索弹性系数不同时机器人质心轨迹的投影曲线

4.4 机器人构型分析

前面章节均以机器人构型为竖向放置为研究对象，下面将主要研究机器人构型为横向放置时它的运动性能，并将其与竖向放置时的运动性能进行比较。图 4.6 为机器人横向放置时的结构图，六根边索为(c1、c2、c3、c4、c5、c6)，三根中索为(c7、c8、c9)。

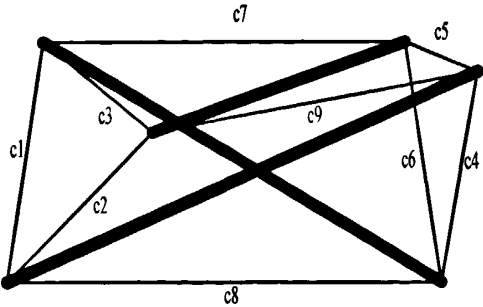


图4.6 机器人横向放置结构图

4.4.1 不同构型对其运动性能的影响

本节将张拉整体机器人的初始状态进行了改变，即将其横向放置，杆索关联关系与竖向放置时相同，此时机器人的初始参数如下：

$$\begin{aligned} q_1 &= [0.0451, 0.0000, 0.0881, 0.4637, 0.8119, -0.3548, 0.0000]^T \\ q_2 &= [0.0000, 0.0000, 0.0100, 0.7071, 0.5324, 0.4653, 0.0000]^T \\ q_3 &= [-0.0451, 0.0000, 0.0881, 0.8860, 0.4249, -0.1857, 0.0000]^T \\ \dot{q}_1 &= \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (4-1)$$

其中 q_1 、 q_2 、 q_3 为三根杆的质心坐标， \dot{q}_1 、 \dot{q}_2 、 \dot{q}_3 为三根杆质心的初始速度。

机器人其它结构参数也与竖向放置时相同，包括杆的质量、杆的内外半径、索长及索的弹性系数。选取上述两种放置状态对张拉整体机器人进行运动仿真，驱动索都选 c_2 、 c_3 、 c_4 、 c_5 ，时间间隔为 0.1s，设定机器人质心运动轨迹在行走平面的投影为沿 x 轴正向的直线，每个时间间隔内驱动索的三个状态为 $\{-0.005, 0, 0.005\}$ 。图 4.7 为张拉整体机器人不同构型下质心运动轨迹在行走平面的投影曲线。

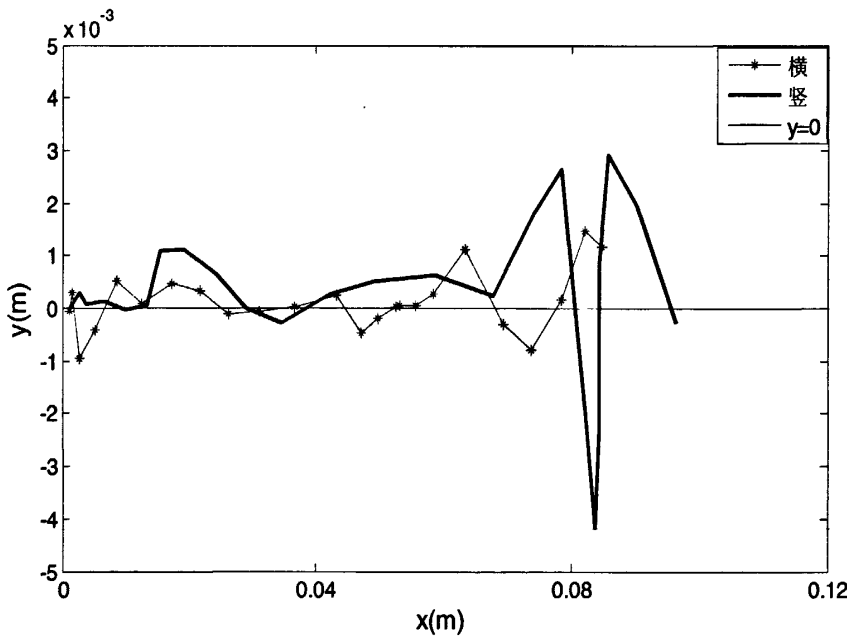


图4.7 张拉整体机器人不同构型质心运动轨迹的投影曲线

从上图可以看出张拉整体机器人在这两种构型下都能实现沿预定轨迹的运动，而且偏离预定轨迹的误差都控制在了 $\pm 0.5\text{cm}$ 之内。主要区别在于横向放置时运动轨迹偏离误差要比竖向时的小，但运动的速度要比竖向放置时的慢，这是因为机器人横向放置时重心下降，稳定性有所提高，所以轨迹偏离误差变小。但此时重力势能也随之减小，导致运动过程中的机器人整体的变形不是很大，从而运动速度减慢。由此可以看出张拉整体机器人在不同的放置状态下，用相同索驱动

的运动效果是大不相同的，横向放置对机器人的运动性能来说有利也有弊。

4.4.2 中索驱动对不同构型机器人运动性能的影响

4.2.2 节中的研究发现，中索驱动对机器人构型为竖向放置时的运动性能有很大的影响，所以本节将主要研究张拉整体机器人构型为横向放置时，驱动索里中索的个数对其运动性能的影响，并将所得结果与中索驱动对竖向放置时机器人运动的影响进行比较。

机器人横向放置时的杆索关联关系如图 4.6 所示，初始状态与 4.4.1 节相同，运动仿真的参数如下：时间间隔为 0.1s，设定机器人质心运动轨迹在行走平面的投影为沿 x 轴正向的直线，每个时间间隔内驱动索的三个状态为 $\{-0.005, 0, 0.005\}$ 。图 4.8 中所示曲线分别由 4 根边索驱动、3 根边索和 1 根中索驱动、2 根边索和 2 根中索驱动以及 1 根边索和 3 根中索驱动时机器人质心运动轨迹在行走平面的投影曲线。

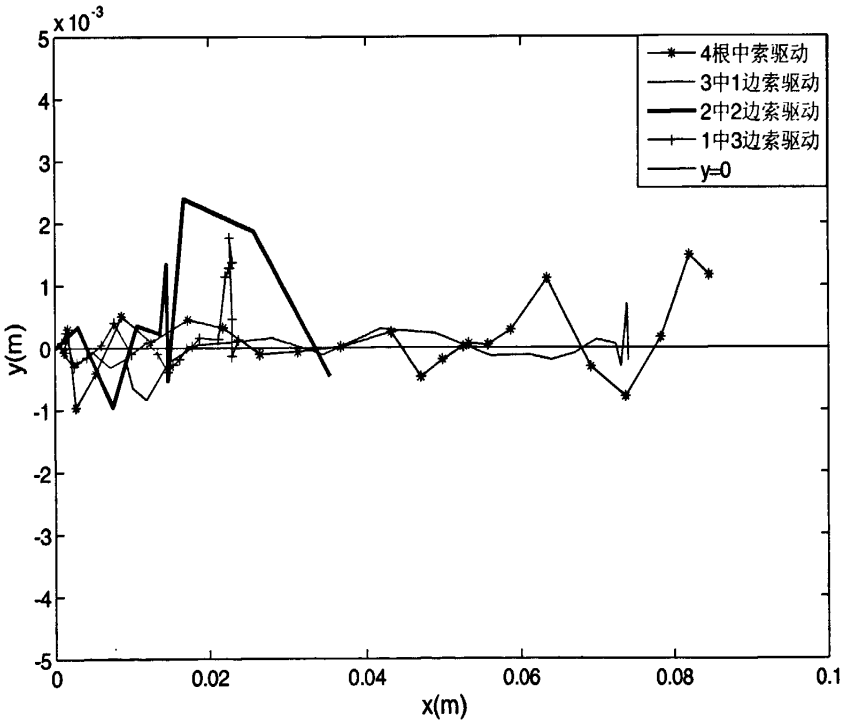


图4.8 机器人横向放置中索做驱动索数目不同时质心运动轨迹的投影曲线

从图中可以看出，在上述 4 种情况下，机器人都能沿预定的轨迹行走，而且偏离预定轨迹的误差范围都控制在了 $\pm 0.3\text{cm}$ 之内，说明在这几种情况下机器人的运动都具有一定的稳定性。但是随着驱动索里中索数目的增加，机器人的运动速度越来越慢，如图中显示，当机器人由 1 根边索和 3 根中索驱动时速度最慢，约为 0.01m/s ，都由边索驱动时运动速度最快，约为 0.043m/s 。这与机器人竖向放置时

的情况恰好相反,所以可以看出机器人的不同构型对机器人的运动性能有很大的影响。

4.5 本章小结

本章主要研究了驱动器配置、索的弹性系数和机器人构型三个方面对三杆九索张拉整体移动机器人运动性能的影响。通过对驱动器的配置分析发现三杆九索张拉整体移动机器人在 8 根索的驱动下运动速度最快,而且驱动索里中索的数目越多机器人的运动速度越快,但机器人运动的稳定性也随之减小,与预定轨迹的偏差变大,所以中索参与驱动的数目要依情况而定。在对索的弹性系数进行分析时,机器人的运动速度只与索的弹性系数分布有关,当所有索的弹性系数相同时,机器人的运动速度最快。通过对机器人构型的分析,发现机器人构型为横向放置时比竖向放置时的运动速度慢,但运动的稳定性有所提高。通过对这三个方面的深入分析,进一步加深了对张拉整体移动机器人运动性能的了解。

第五章 总结与展望

5.1 总结

张拉整体结构的定义来源于大自然的连续拉和离散压的规律,这个全新的概念直到二十世纪四十年代才被提出来,而对它的实际应用则推迟到了二十世纪八十年代非严格意义上的张拉整体结构—索穹顶结构在建筑上的应用,此后各国学者才将目光再次关注到了张拉整体结构上来,直到今天,张拉整体结构仍然是空间结构体系最为前沿的课题之一。最近几年在机器人的研究领域里,以张拉整体结构为基础的张拉整体机器人成为了前沿课题,国内对张拉结构的研究最多的是应用在桥梁、屋顶的建筑上以及空间的可展开天线,而以机器人为对象的研究还没有正式开始。国外对张拉整体机器人的研究也还处于起步阶段,如何能够深入的了解张拉整体机器人的运动情况,并实现对张拉整体机器人的运动控制,进而使其进入应用领域是我们此时最关心的问题,而解决上述问题的关键则是建立张拉整体机器人的动力学模型,并在详尽地分析该模型的基础上提出合理的轨迹规划方法并对其运动性能做出分析。为此,本论文对张拉整体移动机器人的动力学建模、轨迹规划方法及运动性能分析等方面进行了研究。本文所做的主要研究工作及得出的主要结论有如下几个方面。

1. 介绍了张拉整体结构及其发展历史并叙述了张拉整体结构的定义、特性及张拉整体机器人的国内外研究现状及其发展前景。

2. 采用四元数作为广义坐标,利用拉格朗日方程建立了张拉整体移动机器人刚体运动过程中的动力学模型,并利用碰撞动力学理论,对机器人运动过程与地面的碰撞和摩擦进行分析,建立了机器人碰撞动力学模型。最后以三杆九索张拉整体移动机器人为研究对象,对该机器人在行走过程中的状态和质心轨迹在行走平面投影作了分析。

3. 提出了一种基于索变化量挑选法的张拉整体移动机器人运动轨迹规划算法。以动力学模型为基础,并以三杆九索张拉整体移动机器人为例,利用这种轨迹规划方法实现了机器人沿预定轨迹的运动,结果验证了所提出的轨迹规划方法的可行性。

4. 以 C++ Builder 为软件开发环境,以 OpenGL 为显示界面开发了张拉整体移动机器人的运动仿真软件,用户可以通过输入张拉整体移动机器人的相关参数,最终实现机器人正动力学及逆动力学的运动仿真,并以六杆二十四索张拉整体移动机器人为例,对该软件的功能进行了详细的叙述。

5. 对三杆九索张拉整体移动机器人的运动性能进行研究,深入分析了驱动器

配置、索的弹性系数及机器人的构型对机器人运动性能的影响,并研究了这些因素对机器人运动特性影响的规律性,为对张拉整体机器人的进一步研究打下了基础。

以上是本论文的主要研究成果,所述方法和结论得到了有效验证,但有关张拉整体移动机器人的控制和步态分析还有待进一步的研究。

5.2 展望

张拉整体移动机器人作为一个全新的研究领域还有许多需要研究的方面,本文所作的工作只是其中的一部分,在这一领域还存在许多有待于继续探索的问题。作者认为在以下几个方面还应进一步深入研究。

(1) 在进行张拉整体移动机器人的轨迹规划时,所用的方法是穷举法,计算机的工作量会随着驱动索数目的增加而增大,从而影响计算速度,还需要进一步寻求更加简洁和有效的轨迹规划方法。

(2) 本文只针对三杆九索的张拉整体移动机器人进行了运动性能的分析,更加复杂的张拉整体移动机器人的运动性能如何还有待于进一步的分析。

致 谢

随着论文工作的完成，我的研究生生活也接近了尾声，在这两年半的学习和生活中我要深深的感谢我的老师、同学及家人给予我的的大力帮助和支持。

首先谨向我的导师李团结教授致以最真挚的谢意！从最初的论文选题到各章节内容的组织撰写，李老师都给予了最大的指导和支持，并针对论文中的各重点问题提出了许多建议和指导，及时指出了研究工作中出现的问题，保证了本论文的顺利完成，同时李老师在生活上也给予我无微不至的关心和帮助。李老师谦虚谨慎的科学态度、严谨的治学作风，敏锐的学术洞察力，求真务实的科研作风，诲人不倦的敬业品德，乐于助人的师表精神，为人正直的高尚品格，不仅使我在知识上受益匪浅，而且在学习态度、治学方法、为人做事上也受到了潜移默化的影响。在此对李老师表示衷心的感谢！

由衷感谢纪志飞、麻钰娟、童浙夫、朱一斌、苏金国同学在学习和生活上给予我的帮助，感谢实验室的师弟师妹们读研期间给予的支持。

感谢我的舍友王艳、李雪梅、张希颖同学在生活和学习上给我的帮助和支持。感谢父母对我的理解和关爱，感谢他们一直以来对我的默默支持和无私奉献。特别感谢我的男友在生活和学习中给予我的无微不至的关怀和支持。

此外，研究生学习期间，还得到了其他老师及同学们的帮助，在此对他们一并表示深深的谢意！

参考文献

- [1] 勒内·模特罗. 张拉整体—未来的结构体系[M]. 北京: 中国建筑工业出版社. 2007.
- [2] 孙国鼎. 张拉整体结构的形态分析[D]. 西安电子科技大学. 2010.
- [3] Andrew Peter Schmalz. Classification, Analysis, and Control of Planar Tensegrity Structures for Robotic Applications[D]. University of Delaware. 2006.
- [4] Motro. Tensegrity systems: The state of the art. International[J]. Journal of Space Structures. 1992, 7(2): 75-83.
- [5] Fuller R B. Tensile-integrity structures[P]. US: Patent: 3063521, 1962.
- [6] Snelsen K. Continuous tension, discontinuous compression structures[P]. US: Patent: 3169611, 1965.
- [7] Donald E. Ingber. Cellular tensegrity: defining new of biological design that govern the cytoskeleton[J]. Journal of cell Science. 1993, 104(3):613-627.
- [8] Donald E. Ingber. Tensegrity: the architectural basis of cellular Mechanotransduction[J]. Annual Review of Physiology. 1997, 59(3):575-599.
- [9] Donald E. Ingber, M. D. Tensegrity and mechanotransduction[J]. Journal of Bodywork and Movement Therapies. 2008, 12(3):198-200.
- [10] Giovanni Gomez Estrada, Hans-Joachim Bungartz, Camilla Mohralieck. Numerical form-finding of 2D tensegrity Structures[C]. Proceeding of the 5th International Conference On Computation of Shell and Spatial Structures, Salzburg, Austria, 2005:1-4.
- [11] Milenko Masic, Robert E. Skelton, Philip E. Gill. Algebraic tensegrity form-finding[J]. International Journal of Solids and Structures. 2005, 42(16):4833-4858.
- [12] G. Gomez Estrada, H.-J. Bungartz, C. Mohrdieck. Numerical form-finding of tensegrity structures[J]. International Journal of Solids and Structures. 2006, 43(22):6855-6868.
- [13] Chandana. Paul, Hod. Lipson, Francisco. J. Valero. Cuevas. Evolutionary Form-finding of Tensegrity Structures[C]. Genetic And Evolutionary Computation Conferences. 2005, 25(29):3-10.
- [14] Tibert A. G, Pellegrino. S. Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures[J]. International Journal of Space Structures. 2003, 18(4):209-223.

- [15] Sergi Hernandez Juan, Josep M. Mirats Tur. Tensegrity frameworks: Static analysis review[J]. Mechanism and Machine Theory. 2008, 43(7):859-881.
- [16] Robert Connelly, Maria Slougher. Realizability of Graphs[J]. Discrete and Computational Geometry. 2007, 37(2):125-137.
- [17] Anthony Man-Choso, Yinyu Ye. A Semidefinite Programming Approach to Tensegrity Theory and Realizability of Graphs[A]. 2006 Proceedings of the Annual ACM-SIAM symposium on Discrete Algorithms[C]. 2006, 12:766-775.
- [18] Josep M. Mirats Tur, Segi Hernandez Juan. Tensegrity frameworks: Dynamic analysis review and open problems[J]. Mechanism and Machine Theory. 2009, 44(1):1-18.
- [19] 陈晓光. 张拉整体体系的形态思考及其动力特性分析[D]. 浙江大学. 2003.
- [20] Motto R. Tensegrity Structural Systems for the future[M]. An imprint of Kogan page science. 2003:14-135.
- [21] Pugh. A. An Introduction to Tensegrity[M]. University of California Press. 1976.
- [22] Chandana Paul, Hod Lipson. Redundancy in the Control of Robots with Highly Coupled Mechanical Structures[A]. 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems[C]. 2005, 8:3585-3591.
- [23] 赵宝成, 曹喜. 索穹顶结构的优化设计[J]. 工业建筑. 2002, 32(10):60-62.
- [24] 袁行飞. 索穹顶结构截面和预应力优化设计[J]. 空间结构. 2002, 8(3):51-56.
- [25] Chandana Paul, John William Roberts, Hod Lipson, Francisco Valero Cuevas. Gait Production in a Tensegrity Based Robot[A]. Proceedings of the 2005 International Conference on Advanced Robots[C]. 2005, 7:216-222.
- [26] Mizuho Shibata, Fumio Saijyo, Shinichi Hirai. Crawling by Body Deformation of Tensegrity Structure Robots[A]. 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. 2009, 5:4375-4380.
- [27] John Rieffel, Ryan James Stuk, Francisco J. Valero-Cuevas, Hod Lipson. Locomotion of a Tensegrity Robot via Dynamically Coupled Modules[A]. Proceedings of the 2007 International Conference on Morphological Computation[C]. 2007, 3:1220-1225.
- [28] Josep M. Mirats Tur, Segi Hernandez Juan, Albert Graells Rovira. Dynamic equations of motion for a 3-bar tensegrity based mobile robot[A]. 2007 IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation[C]. 2007, 12:1334-1339.
- [29] Albert Graells Rovira, Josep M. Mirats Tur. Control and simulation of a tensegrity-based mobile robot[J]. Robotic and Autonomous Systems. 2009,

- 57(5):526-535.
- [30] E. Fest, K. Shea, B. Domer, and I. F. C. Smith. Adjustable tensegrity structures[J]. Journal of Structural Engineering. 2003, 129(4):515-526.
- [31] Skelton R E, J P Pinaud, D.L. Mingori. Dynamics of the shell class of tensegrity structures[J]. Journal of the Franklin Institute. 2001, 2(3):255-320.
- [32] R. Motro, S Najari, P Jouanna. Static and dynamic analysis of tensegrity systems[C]. In Proceedings of the ASCE International Symposium. 1986, New-York: Springer-Verlag.
- [33] R. Motro. Tensegrity systems and geodesic domes[J]. International Journal of Space Structures. 1992, 5(3-4):341-351.
- [34] N. Kanchanasaratool, D. Williamson. Modelling and control of class NSP tensegrity structures[J]. International Journal of Control. 2002, 75:123-139.
- [35] Robert Skelton. Dynamics of Tensegrity Systems: Compact Forms[A]. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control[C]. 2006, 12:2276-2281.
- [36] 梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1985, 81-299.
- [37] Jack B. Kuipers. Quaternions and Rotation Sequences[A]. Geometry, Integrability and Quantization[C]. 1999, 9:127-143.
- [38] 李保坤, 曹毅, 黄真等. 基于单位四元数的Stewart机构姿态工作空间研究[J]. 机器人. 2008, 30(4):353-358.
- [39] 王琪, 黄克累, 陆启韶. 带约束多体系统动力学方程的隐式算法[J]. 计算力学学报. 1999, 16(4):410-415.
- [40] 张春慧, 吴简彤, 何昆鹏等. 四阶龙格-库塔法在捷联惯导系统姿态解算中的应用[J]. 应用科技. 2005, 32(6).
- [41] 刘卫刚. 环境探测球形机器人动力学建模及仿真[D]. 西安电子科技大学. 2010.
- [42] R. Motro. Structural Morphology of Tensegrity Systems[J]. International Journal of Space Structures. 1996, 11(1-2):233-240.
- [43] J. B. Aldrich, R. E. Skelton, K. Kreutz-Delgado. Control synthesis for a Class of Light and Agile Robotic Tensegrity Structures[D]. University of California. 2004.
- [44] 李团结, 张学锋, 陈永琴. 一种全向滚动球形机器人的运动分析与轨迹规划[J]. 西安电子科技大学学报, 2007, 34(1):23-30.

