

加权已实现极差四次幂变差分析及其应用

唐 勇, 刘 微

(福州大学 管理学院, 福州 350108)

摘 要 针对金融高频数据而开发的极差波动估计量因能更精确地度量波动率而备受关注. 根据方差有效性结合数值模拟, 推导出了已实现极差多幂次变差族中最优的波动估计量, 并依据无偏性和方差有效性给出了相应的加权估计量. 同时将这些估计量与已实现 GRACH 模型相结合, 并对模型进行扩展. 实证表明已实现极差四幂次变差是已实现极差多幂次变差族中最优的波动估计量, 加权的已实现极差四幂次变差能有效消除日历效应的影响, 扩展的已实现 GRACH 模型在拟合和预测效果上明显优于传统的 EGARCH 模型.

关键词 已实现极差多幂次变差; 日历效应; 已实现 GARCH; 预期不足

Analysis of weighted realized range-based quadpower variation and its application

TANG Yong, LIU Wei

(School of Management, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

Abstract Range-based volatility aiming at financial high-frequency data has attracted more and more attention for its more accurate estimation of financial asset's volatility. The paper derives the optimal volatility estimator in the family of realized range-based multipower variation, according to variance efficiency with numerical simulation and it also gives its weighted estimator, according to unbiasedness and variance efficiency. Meanwhile, the paper expands the realized GARCH model under the condition that the realized GARCH model is combined with these estimators. The empirical analyses show that realized range-based quadpower variation is the optimal volatility estimator in the family of realized range-based multipower variation, the weighted realized range-based quadpower variation does get rid of the influence of calendar effect and the expanded realized GARCH models outperform traditional EGARCH model in fit and forecasting.

Keywords range-based multipower variation; calendar effect; realized-GARCH model; expected shortfall

1 引言

波动率估计和建模一直是金融时间序列研究的核心内容之一, 这对金融资产组合投资、衍生品定价、风险管理等方面极其重要. 基于低频数据的 GARCH 类和 SV 类模型, 是研究波动率的主流工具和方法, 已取得了丰富的研究成果, 但遗憾的是这些模型不能直接应用于高频数据领域. 随着高频数据的易获性和广泛应用, 基于高频数据的已实现测量 (realized measures) 在波动率研究中越发占据重要位置, 各种非参数方法的已实现测量应运而生. 其中, 基于金融资产价格极差的波动率因拥有良好的统计性质而备受关注. 这领域的贡献首先归功于 Christensen 和 Podolskij^[1] 以及 Martens 和 Van Dijk^[2] 的工作, 他们利用日内价格极差给出已实现极差波动 (realized range volatility, RRV) 作为积分波动的估计量, 其稳健性也明显优于已实现波动 (realized volatility, RV). 唐勇等^[3] 根据波动率具有“日历效应”特点对 RRV 进行改进, 提出了加权的 RRV, 实证表明其性质均优于 RRV. 唐勇等^[4] 对 RRV 和 RV 进行比较研究, 理论上证明 RRV 是比 RV 更优的波动估计量, 但是实证发现, 除了 RRV 方差始终近似是 RV 方差的五分之一外, 其他统计指标两

收稿日期: 2013-03-15

资助项目: 国家自然科学基金 (71171056)

作者简介: 唐勇 (1970-), 男, 江苏洪泽人, 副教授, 博士, 硕士生导师, 研究方向: 金融计量与风险管理; 刘微 (1988-), 女, 福建三明人, 研究生, 研究方向: 风险管理.

者在不同情况下各有优缺点, 在实际中谁是更优的波动估计量主要依赖于交易强度和竞 - 要价差幅大小等因素. Christensen 等^[5] 在考虑微观结构噪声影响下对 RRV 进行纠偏, 实证表明纠偏的 RRV 有效性要好于 RRV. 最近, 沿袭已实现多幂次变差 (multipower variation, MPV) 思想^[6], Christensen 和 Podolskij^[7] 给出了对跳跃稳健的已实现极差多幂次变差 (realized range-based multipower variation, RMV) 估计量, 理论上证明了是积分波动一致估计量, 其实证也说明了其统计性质优于已实现多幂次变差估计量. RMV 是一族估计量, 随着滞后项的选择而有所不同, 每一个估计量并不是都是最优的. 但是到目前为止, 这方面研究并没有详细说明如何对滞后项进行选择, 进而获得最优积分波动估计量, 这在实际研究中是一个严重的挑战. 为此, 基于 RMV, 本文开展以下研究工作: 1) 详细给出滞后项选择方法从而获得最优的波动估计量, 同时考虑“日历效应”对波动率的影响, 给出了加权的波动估计量. 2) 将最优波动估计量及其加权的估计量与已实现 GARCH^[8] 相结合对波动建模, 并对模型进行扩展, 改变其扰动项正态分布的设定, 扩展到 t 分布、偏 t 分布和广义误差分布 (GED), 以寻求合适的模型拟合并采取适当方法对模型评价.

2 理论基础

2.1 已实现极差多幂次变差定义与收敛性

沿袭已实现多幂次变差思想^[6], Christensen 和 Podolskij^[7] 提出了已实现极差多幂次变差, 其定义如下:

$$RMV_{(q_1, q_2, \dots, q_k), t}^{n, m} = (n/n - k + 1)n^{q+/2-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=1}^k (S_{P_{(i+j-1)\Delta, \Delta, m}}^{q_j} / \lambda_{q_j, m}) \quad (1)$$

其中: $q+ = \sum_{j=1}^k q_j$, $q_1 = q_2 = \dots = q_k$ 为每一个极差的幂次, $\lambda_{q_j, m} = E(S_{W, m}^{q_j})$ 为布朗运动极差矩. n 为抽样频率 (次数), m 为每一个抽样间隔内样本数. Christensen 和 Podolskij^[7] 证明了对数价格服从布朗半鞅的假设下, 当抽样频率趋于无穷大时:

$$RMV_{(q_1, q_2, \dots, q_k), t}^{n, m} \xrightarrow{P} \int_0^1 |\sigma_u|^{q+} du \quad (2)$$

由上述收敛性可知, 当 $q+ = 2$ 时, $RMV_{(q_1, q_2, \dots, q_k), t}^{n, m}$ 收敛于积分波动且在大样本情况下有

$$RMV_{(q_1, q_2, \dots, q_k), t}^{n, m} = \sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=1}^k (S_{P_{(i+j-1)\Delta, \Delta, m}}^{q_j} / \lambda_{q_j, m}) \xrightarrow{P} \int_0^1 \sigma_u^2 du \quad (3)$$

由于金融市场高频数据都是大样本数据, 所以下研究都在式 (3) 情况下展开.

2.2 已实现极差多幂次变差幂次选择

由于滞后阶数不同, 会得到不同的 RMV 波动估计量, 但是 Christensen 和 Podolskij^[7] 并没有给出详细滞后阶数选择方法, 为此下面展开这方面的分析. 由已实现极差多幂次变差定义与收敛于积分波动可知: $q_j = 2/k, j = 1, 2, \dots, k$, 此时 RMV 可以改写为:

$$RMV_{(q_1, q_2, \dots, q_k), t}^{n, m} = RMV_t^{n, m} = \sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=1}^k (S_{P_{(i+j-1)\Delta, \Delta, m}}^{q_j} / \lambda_{q_j, m}), q_j = 2/k \quad (4)$$

当 $k = 1, 2, 3, 4$ 时, RMV 分别是已实现极差波动 (RV)、已实现极差二次幂变差 (RBV)、已实现极差三次幂变差 (RTV) 和已实现极差四次幂变差 (RQV).

设 $S_{P_{i\Delta, \Delta, m}}$ 为第 t 日的第 i 个抽样区间上对数价格极差且之间不相关, σ_t^2 为第 t 日的波动. 根据文献 [9] 给出的任意时间间隔 (Δ) 的极差矩期望表达式:

$$E(S_{P_{t, i}}^r) = \lambda_r \Delta^{r/2} \sigma_t^r.$$

则:

$$\begin{aligned} Var(RMV) &= Var \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=1}^k (S_{P_{(i+j-1)\Delta, \Delta, m}}^{q_j} / \lambda_{q_j, m}) \right] = (1/\lambda_{2/k, m}^{2k}) \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} Var \left(\prod_{j=1}^k S_{P_{(i+j-1)\Delta, \Delta, m}}^{q_j} \right) \right] \\ &= (1/\lambda_{2/k, m}^{2k}) \left\{ \sum_{i=1}^{n-k+1} \left[E \left(\prod_{j=1}^k S_{P_{(i+j-1)\Delta, \Delta, m}}^{4/k} \right) - E^2 \left(\prod_{j=1}^k S_{P_{(i+j-1)\Delta, \Delta, m}}^{2/k} \right) \right] \right\} \\ &= (1/\lambda_{2/k, m}^{2k}) \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} \left(\prod_{j=1}^k \lambda_{4/k, m} \Delta^{2/k} \sigma_t^{4/k} - \prod_{j=1}^k \lambda_{2/k, m}^2 \Delta^{2/k} \sigma_t^{4/k} \right) \right] = [(\lambda_{4/k, m}^k - \lambda_{2/k, m}^{2k}) / \lambda_{2/k, m}^{2k}] \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} \Delta^2 \sigma_t^4 \right] \quad (5) \end{aligned}$$

要使已实现极差多幂次变差的方差达到最小, 就是使 $G(k) = (\lambda_{4/k,m}^k - \lambda_{2/k,m}^{2k})/\lambda_{2/k,m}^{2k}$ 达到最小. 因为 $\lambda_{q_j,m}$ 没有一个确切的方程可以求解¹, 只能通过数值模拟的方法来得到数值解. 所以本文选取了表 1 中的 k 值, m 的取值从 1-500.

表 1 k 值的选取		
k	$4/k$	$2/k$
1	4	2
2	2	1
3	1.3333	0.6667
4	1	0.5

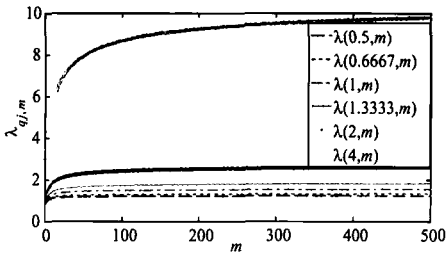


图 1 标准布朗运动极差的各阶矩

图 1 表示布朗运动极差矩 λ 与 m 关系, 图 2 表示 $G(k)$ 与 m 关系. 从图 1 和图 2 可以看出: 1) 布朗运动极差矩 λ 随着 m 的增加而增加并趋向一个常数; 上升最快的阶段是在 $m = 0-4$ 区域, 且矩的阶数越高 λ 值越高; 在 $m = 10$ 左右, λ 基本稳定了. 这说明了在现实中尽管价格无法全部观测, 但是只要每个抽样间隔内的样本数 m 达到 4 个以上, $\lambda_{q_j,m}$ 就近似为一个常数. 2) $G(k)$ 随着 k 的增加而递减, 最后也是趋于一个常数. 从开始阶段的衰减速率来看: $G(1)$ 衰减得最慢、幅度也最小, $G(4)$ 值总是最小. 这个结果同李胜歌和张世英^[10] 中理论分析结论是一致的: 滞后项 k 越大, 波动估计量的方差越小. 一般地, 越多的滞后项被加到极差估计量, 该估计量就越稳健. 但是若此时资产价格不存在跳跃, 则这些加进来的滞后项就会牺牲估计量本身的一些有效性, 可是从图 2 里看到的却不是我们想像的那样. 在信息利用有效性和方差有效性之间取得相对平衡, 本文选择 $K = 4$. 图 2 里表明 $G(4)$ 代表的是已实现极差多幂次变差族中最优的波动估计量. 所以本文选取 $k = 4$ 时的已实现极差多幂次变差作为接下来的研究对象, 即: 已实现极差四幂次变差 (realized range-based quadpower variation, RQV):

$$RQV_t^{n,m} = \sum_{i=1}^{n-3} \prod_{j=1}^4 (S_{P_{(i+j-1)\Delta, \Delta, m}}^{2/4} / \lambda_{2/4,m}) \tag{6}$$

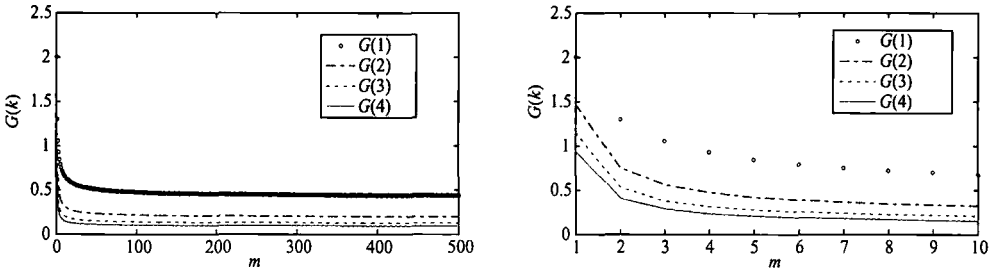


图 2 $G(k)$ 图 (左) 及 m 在 $[1, 10]$ 上的子图 (右)

2.3 加权已实现极差四幂次变差

由前面的分析知道, 尽管 RQV 是已实现极差多幂次变差族中最优的波动估计量, 但估计中对每一个极差交错项都赋了相同的权重, 即没有考虑日历效应的影响. 对于高频金融时间序列而言, 日历效应最重要的就是收益率、波动率等变量的日内“U”型模式 (更精确地说是一个偏斜的“L”型). 日历效应的存在, 意味着每个时段的波动水平对总波动水平的贡献度不一样. 没有考虑日历效应影响的 RQV, 显然是不能准确地度量波动率的真实水平. 我们在此基础上对其进行改进, 提出加权已实现极差四幂次变差.

2.3.1 加权已实现极差四幂次变差的定义

李胜歌和张世英^[11]、唐勇^[2] 分别对已实现双幂次变差 (bipower variation, BPV) 及已实现极差波动 (RRV) 进行了加权, 结果表明加权后的 BPV、RRV 很好地消除了日历效应的影响. 本文借鉴他们的思路对已实现极差四幂次变差进行加权, 定义如下:

$$WRQV_t^{n,m} = \sum_{i=1}^{n-3} w_i \prod_{j=1}^4 (S_{P_{(i+j-1)\Delta, \Delta, m}}^{2/4} / \lambda_{2/4,m}) \tag{7}$$

当权重 w_i 为 1 时, 加权已实现极差四幂次变差就退化成了已实现极差四幂次变差.

1. 当 $m = 1$ 和 $m = \infty$ 时才有明确的方程. 这里要感谢 Christensen 提供的模拟结果, 但是结果里只包含 $q_j = 0.5, 0.6667, 1, 1.3333, 2, 4$ 的情形, 相应地 k 就是从 1-4, 所以本文的比较范围限于已实现极差二、三、四幂次变差.

2.3.2 权重的确定

在大样本的情况下, 估计量优劣的评判标准是无偏性和最小方差性. 本文就通过这两个准则来确定 w_i . 设 $S_{p_{i\Delta,\Delta,m}} = \sigma_i S_{W,i} = \sqrt{\gamma_i} \sigma_t S_{W,i}$, 且 $S_{p_{i\Delta,\Delta,m}}$ 之间不相关, $S_{p_{i\Delta,\Delta,m}}, S_{W,i}, \sigma_i^2$ 分别指为第 t 日的第 i 个抽样区间上对数价格极差和相应的标准布朗运动极差以及波动, σ_t^2 为第 t 日的波动. 由标准布朗运动的性质知, 在无重叠的时间间隔上, 标准布朗运动的增量是相互独立的, 从而 $S_{W,i}$ 之间也相互独立, 且假设它们有相同的分布.

首先推导满足无偏性的条件, 由式 (7) 和假设条件可知:

$$WRQV_t^{n,m} = \sum_{i=1}^{n-3} \prod_{j=1}^4 [(\sqrt{\gamma_{i+j-1}} \sigma_t S_{W,i+j-1})^{2/4} / \lambda_{2/4,m}]$$

(8)

则:

$$E(WRQV_t^{n,m}) = (\sigma_t^2 / \lambda_{2/4,m}^4) \left[\sum_{i=1}^{n-3} w_i \left(\prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4} \right) E \left(\prod_{j=1}^4 S_{W,i+j-1}^{2/4} \right) \right].$$

根据前文布朗运动极差矩 $\lambda_{qj,m} = E(S_{W,m}^{qj})$ 以及 $S_{W,i}$ 独立性可得:

$$E(WRQV_t^{n,m}) = (\sigma_t^2 / \lambda_{2/4,m}^4) \left[\sum_{i=1}^{n-3} w_i \left(\prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4} \right) \lambda_{2/4,m}^4 \right] = \left(\sum_{i=1}^{n-3} w_i \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4} \right) \sigma_t^2 = \sigma_t^2,$$

所以 $\sum_{i=1}^{n-3} w_i \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4} = 1$.

其次推导满足最小方差性的条件:

$$\begin{aligned} Var(WRQV_t^{n,m}) &= (1/\lambda_{2/4,m}^{4*2}) \left\{ \sum_{i=1}^{n-3} w_i^2 \left[\prod_{j=1}^4 (\gamma_{i+j-1}^{1/2})^{2*2/4} \right] \sigma_t^{2*2} Var \left[\left(\prod_{j=1}^4 S_{W,i+j-1}^{2/4} \right) \right] \right\} \\ &= (\sigma_t^4 / \lambda_{2/4,m}^8) \left\{ \sum_{i=1}^{n-3} w_i^2 \left(\prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/2} \right) \left[E \left(\prod_{j=1}^4 S_{W,i+j-1}^{2*2/4} \right) - E^2 \left(\prod_{j=1}^4 S_{W,i+j-1}^{2/4} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

根据前文布朗运动极差矩 $\lambda_{qj,m} = E(S_{W,m}^{qj})$ 以及 $S_{W,i}$ 独立性可得:

$$Var(WRQV_t^{n,m}) = [(\lambda_{1,m}^4 - \lambda_{2/4,m}^8) / \lambda_{2/4,m}^8] \sigma_t^4 \left(\sum_{i=1}^{n-3} w_i^2 \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/2} \right).$$

要使方差最小, 只需最小化 $\sum_{i=1}^{n-3} w_i^2 \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/2}$ 即可, 因此设立拉格朗日函数:

$$L = \sum_{i=1}^{n-3} w_i^2 \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/2} + \theta \left(\sum_{i=1}^{n-3} w_i \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4} - 1 \right).$$

对 L 求一阶偏导, 并令其值为零, 得:

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = 2w_i \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/2} + \theta \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4} = 0.$$

所以 $w_i \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4} = -\theta/2$ (这意味着每一项 $w_i \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4}$ 都相等).

由 $\sum_{i=1}^{n-3} (w_i \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4}) = 1$ 可得:

$$w_i \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4} = 1/(n-3),$$

故

$$w_i = 1 / \left[(n-3) \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4} \right].$$

令 $\gamma'_i = \prod_{j=1}^4 \gamma_{i+j-1}^{1/4}$, 则由前文知, $\gamma_i = \sigma_i^2 / \sigma_t^2$, 因此, $\gamma'_i = \prod_{j=1}^4 \sigma_{i+j-1}^{1/2} / \sigma_t^2$. 根据 $\hat{\gamma}'_i = (\sum_{t=1}^T \prod_{j=1}^4 S_{P_{(i+j-1)\Delta,\Delta,m}}^{2/4}) / (\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{n-3} \prod_{j=1}^4 S_{P_{(i+j-1)\Delta,\Delta,m}}^{2/4})$, w_i 可由下式估计:

$$\hat{w}_i = \left(\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{n-3} \prod_{j=1}^4 S_{P_{(i+j-1)\Delta,\Delta,m}}^{2/4} \right) / \left[(n-3) \left(\sum_{t=1}^T \prod_{j=1}^4 S_{P_{(i+j-1)\Delta,\Delta,m}}^{2/4} \right) \right]$$

(9)

从这个推导过程可以看出, 加权已实现极差四幂次变差既满足无偏性和最小方差性, 又考虑日历效应, 从而在理论上是一个更有效的波动率估计量。

3 波动建模与评价

3.1 波动建模

在过去很长的一段时间里, GARCH 类、SV 类模型族为代表的模型, 在波动建模领域一直占据着主导地位。这些模型能够捕捉金融资产的波动聚集、杠杆效应及长记忆性等特征。但是, 对于波动率急剧变化的情形, 这些模型显得有些力不从心, 且它只用到了低频数据, 从现今广泛可得的高频数据的角度来看, 信息浪费严重。

Hansen 等 [8] 提出的已实现 GARCH 模型是 GARCH 类模型与高频数据相结合的典型代表, 实证表明该模型在刻画波动率方面比传统 GARCH 模型更具优势。相较于已实现 SV 模型 [12], 该模型在估计方法上更简便, 仅使用伪极大似然法 (QMLE) 估计即可。根据 Hansen 等 [8] 的建议, 采用对数线性的形式模型被误设的概率更低。因此, 本文只列出对数线性的已实现 GARCH(p, q) (简记: RG(p, q)) 模型:

$$\begin{aligned} R_t &= E(R_t | I_{t-1}) + \varepsilon_t, \varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t \\ \log h_t &= \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \log h_{t-i} + \sum_{j=1}^q \gamma_j \log x_{t-j} \\ \log x_t &= \mu + \varphi \log h_t + \tau(z_t) + u_t \end{aligned} \tag{10}$$

其中: $z_t = r_t / \sqrt{h_t} \sim \text{i.i.d. } N(0, 1)$, $u_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_u^2)$, $\tau(z)$ 是杠杆函数, 取为 Hermite 二次多项式 $\tau(z_t) = \tau_1 z_t + \tau_2 (z_t^2 - 1)$, 此时 $E\tau(z_t) = 0$ 。若 $\tau_1 < 0$, 当 $z_t < 0$ 时, $\log x_t$ 会比 $z_t > 0$ 时更大, 此时若 $\gamma_i > 0$, 则 $\log h_t$ 趋于更大。就是说今天的利空消息相较于利好消息会导致明天更大的波动, 这就是所谓的“杠杆效应”; 若 $\tau_1 > 0$, 当 $z_t > 0$ 时, $\log x_t$ 会比 $z_t < 0$ 时更大, 此时若 $\gamma_i > 0$, 则 $\log h_t$ 趋于更大。这意味着今天的利好消息相较于利空消息会导致明天更大的波动, 这就是所谓的“负杠杆效应”。 $\pi = \sum_{i=1}^{p+q} (\beta_i + \varphi \gamma_i)$ 是波动持续参数, 代表过去的波动对未来波动的影响程度。当模型为 RG(1, 1) 时, 信息冲击曲线为 $f(z_t) = \gamma_1 \tau(z_t)$, x_t 是已实现测量变量, 本文采用前文提到的 RQV、WRQV 以作比较。

此处对模型进行扩展, 除了 Hansen 等 [8] 提出的正态分布 (N) 作为扰动项设定外, 本文还选取采用了 t 分布 (T)、偏 t 分布 (Skew-T) 及广义误差分布 (GED) 作为扰动项设定, 以作比较。

3.2 模型评价

为了比较 RG(lnWRQV) 模型与 RG(lnRQV) 模型预测能力, 本文采用常用的以下三种方法来进行比较。

3.2.1 损失函数法

常用损失函数, 如平均绝对误差 (MAE)、平均相对误差 (MPE)、均方根误差 (RMSE) 等, 此处采用均方根误差:

$$RMSE = \sqrt{\left[\sum_{t=1}^T (\sigma_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2 \right] / T} \tag{11}$$

其中 σ_t^2 为真实的波动率, 由于其是潜在的 (latent)、无法观测的变量, 此处采用对微观结构噪声和跳跃都稳健的 QRV* [13] 波动估计量作为其值, QRV* 估计的参数选择详见唐勇和寇贵明 [14]。

3.2.2 M-Z 回归法

M-Z 回归 (Mincer-Zarnowitz regression) 方程形式如下:

$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta \hat{\sigma}_t^2 + u_t \tag{12}$$

可以通过观察回归方程的调整 R^2 等指标来判断模型预测效果的好坏, σ_t^2 值同式 (11)。

3.2.3 价值风险预测法

VaR 作为传统的风险度量方法, 已为金融风险管理领域广泛使用。但是, 它存在着致命的缺陷, 因此很多学者提出新的风险度量方法来弥补它的缺陷。Acerbi 等 [15] 提出的预期不足 (expected shortfall, ES) 作为 VaR 的替代, 是常用风险度量方法。它度量的是超出 VaR 的收益率的条件期望, 在显著性水平 α 下, 日收益率 R_t 的一步向前预测 ES 值为:

$$ES_t(\alpha) = E[R_t | R_t < VaR_t(\alpha), I_{t-1}] \tag{13}$$

本文使用基于前文波动率模型的计量方法来估计 VaR:

$$VaR_t = \hat{\mu}_t + \hat{\sigma}_t z_\alpha$$
 (14)

这里从多头角度考虑风险值预测, $\hat{\mu}_t$ 为条件均值估计值, z_α 为特定分布下的 α 分位数.

为了对 ES 预测结果的准确性和有效性进行检验, 本文采用 Embrechts 等^[16] 定义的统计量:

$$D(\alpha) = (|D_1(\alpha)| + |D_2(\alpha)|)/2, \quad D_1(\alpha) = \frac{1}{x(\alpha)} \sum_{t \in k(\alpha)} \delta_t(\alpha), \quad D_2(\alpha) = \frac{1}{y(\alpha)} \sum_{t \in \tau(\alpha)} \delta_t(\alpha)$$
 (15)

其中 $\delta_t(\alpha) = R_t - ES_t(\alpha)$, $x(\alpha)$ 为 $R_t < VaR_t(\alpha)$ 发生的次数, $k(\alpha)$ 为 $R_t < VaR_t(\alpha)$ 发生的时间集, $y(\alpha)$ 为 $\delta_t(\alpha)$ 小于其 α 分位数的次数, $\tau(\alpha)$ 为 $\delta_t(\alpha)$ 小于其 α 分位数的时间集.

$D_1(\alpha)$ 是 ES 的标准回验 (backtesting) 方法, 它的缺点在于过份地依赖 VaR 的估计值, 而不能充分反映 VaR 值的准确与否, 所以这里引入了 $D_2(\alpha)$ 作为惩罚函数, 一个好的 ES 估计值应有较低的 $D(\alpha)$.

4 实证分析

本文选取的金融原始数据是 2011/1/4-2012/12/31 期间沪深 300 指数日数据和 1 分钟数据. 这期间共有 486 个交易日, 即 $486 \times 240 = 116640$ 个高频数据. 前 380 个交易日为模型估计期, 后 106 个交易日为模型预测期, 使用的软件主要有 Matlab2010、Eviews6.0 等.

4.1 抽样频率的选择

这部分主要通过根据在不同抽样频率下已实现极差四幂次变差统计特征, 来选择最优抽样频率. 可供选择的抽样频率有 5-min、10-min、15-min、20-min、30-min、60-min 六种, 相应的 m 为 5、10、15、20、30、60, 结果见表 2.

表 2 不同抽样频率下波动估计量统计特征

抽样频率		估计量	均值	标准差	偏度	峰度	J-B*	P
原 序 列	5-min	RQV	1.14E-04	5.60E-05	1.970129	8.084144	837.8267	0
		WRQV	1.01E-04	1.27E-07	1.953110	8.045367	824.4643	0
	10-min	RQV	1.87E-04	9.16E-05	1.895960	7.569681	714.0281	0
		WRQV	1.62E-04	2.09E-07	1.879463	7.512142	698.4013	0
	15-min	RQV	2.55E-04	1.26E-04	1.860910	7.286187	652.5228	0
		WRQV	2.41E-04	2.89E-07	1.838085	7.198117	630.5527	0
	20-min	RQV	3.20E-04	1.60E-04	1.901867	7.542004	710.73800	0
		WRQV	3.11E-04	3.71E-07	1.875035	7.429418	682.0760	0
	30-min	RQV	4.48E-04	2.26E-04	1.919080	7.671202	740.1699	0
		WRQV	4.25E-04	5.30E-07	1.892472	7.557471	710.7009	0
	60-min	RQV	8.58E-04	3.96E-04	1.801834	7.278176	633.6066	0
		WRQV	8.39E-04	9.21E-07	1.801834	7.278176	633.6066	0
对 数 序 列	5-min	lnRQV	-9.1702	0.427822	0.520040	3.343382	24.29352	0.00000
		lnWRQV	-9.0835	0.419024	0.488175	3.279692	20.88764	0.00002
	10-min	lnRQV	-8.6816	0.429646	0.499805	3.235070	21.3532	0.00002
		lnWRQV	-8.5576	0.422644	0.468933	3.195673	18.58711	0.00009
	15-min	lnRQV	-8.3709	0.432554	0.494630	3.191901	20.56307	0.00003
		lnWRQV	-8.1618	0.426796	0.463549	3.153381	17.88151	0.00013
	20-min	lnRQV	-8.1457	0.435032	0.496440	3.214214	20.89185	0.00002
		lnWRQV	-8.0200	0.430268	0.466578	3.172793	18.23791	0.00011
	30-min	lnRQV	-7.8107	0.437929	0.471567	3.232522	19.10725	0.00007
		lnWRQV	-7.7017	0.434778	0.445093	3.202608	16.87801	0.00021
	60-min	lnRQV	-7.1479	0.407617	0.345243	3.592187	16.75599	0.00023
		lnWRQV	-7.0128	0.407617	0.345243	3.592187	16.75599	0.00023

注: “*” 表示 5% 的显著性水平. (同表 3)

首先来看表 2 的上半部分: 1) 标准差都随着抽样频率的提高而降低. 因为抽样频率越高, 信息利用越充分. 2) 不同抽样频率下, WRQV 的标准差总是比 RQV 标准差小. 这从 WRQV 权重的构造可以看出: 它的分子是总的波动, 而分母是某个间隔的波动, 对于开市和闭市这两个波动比较大的时段, 它们的分母就比较大, 相应的权重就小, 相当于把大的波动给熨平了, 所以总体上的波动会更小. 3) 不论在何种抽样频率下, 波动率序列都表现出明显的非正态特征.

其次来看表 2 的下半部分, 它是对原序列取对数后的统计特征. 可以发现: $\ln WRQV$ 的标准差依然小于 $\ln RQV$ 标准差. 虽然还未通过正态性检验, 各序列的正态化程度也显著提高, 且 $\ln WRQV$ 序列的正态化程度高于 $\ln RQV$ 正态化程度.

鉴于以上分析, 在微观结构噪声影响与信息充分利用中权衡, 同时考虑了极差估计量中的调整系数 λ 对 m 的要求, 选择 10-min 作为本文的抽样频率.

4.2 不同幂次下波动率估计量的比较

从表 3 可以看出: RRV^* 是二次变差的一致估计量, 其各阶矩都明显大于其他估计量的矩, 原因在于资产价格有跳跃的情况下, 其收敛于积分波动和跳跃方差之和. RBV 、 RTV 、 RQV 三个积分波动估计量四个阶矩差别不大, 但总体上看还是 RQV 统计特征最优. 相比 RQV , $WRQV$ 还是最有效的估计量, 这个结果和前文的理论分析是一致的.

此处使用 Christensen 和 Podolskij^[17] 提出的跳跃检测统计量来确定跳跃. 结果表明, 在样本期间内共有 49 天发生了跳跃. 图 3 的时间区间为 $[167, 187]$, 估计量值最大的时间是第 179 天, 也就是说该天发生跳跃的可能性最高. 所以这部分以该天为中心, 刻画了各统计量 21 天的情况 (前后各 10 天). 由于 RRV^* 是二次变差一致估计量, 在资产价格有跳跃情况下, 其估计包含了积分波动和跳跃方差, 而 RBV 、 RTV 、 RQV 是积分波动估计量, 这中间的差幅就是跳跃方差. 除了第 179 天, 统计量还检测到第 170、172、177、180、183 天都发生了跳跃. 从图 3 上也可以看出, 在跳跃时点上 RRV^* 与 RBV 、 RTV 、 RQV 的差幅是相当大. 这说明 RBV 、 RTV 、 RQV 估计量并没有因为跳跃的存在, 其估计量就大幅提升. 因此, 已实现极差多幂次变差对跳跃是稳健的, 这也验证了 Christensen 和 Podolskij^[7] 的观点. 从图 3 中还可以发现, 与 RBV 、 RTV 相比较, 总体上即使资产价格有跳跃情况下, $WRQV$ 和 RQV 估计值比 RBV 和 RTV 的值都小, 可以说明它们对跳跃更稳健.

综合表 3 和图 3 可以发现, 与 RBV 、 RTV 、 RQV 相比较, $WRQV$ 不仅是更有效的, 还是最稳健的.

表 3 不同幂次下波动率估计量统计特征						
	均值	标准差	偏度	峰度	J-B*	P
RBV	2.17E-04	9.30E-05	1.961334	8.034293	824.8115	0
RTV	1.89E-04	9.19E-05	1.928612	7.800620	767.9636	0
RQV	1.87E-04	9.16E-05	1.895960	7.569681	714.0281	0
WRQV	1.62E-04	2.09E-07	1.879463	7.512142	698.4013	0
RRV*	2.19E-04	9.87E-05	2.139730	9.415560	1204.332	0

注: RRV^* 是用式 (26)(Christensen 和 Podolskij^[7]) 计算的二次变差的一致估计量, 其它估计量是积分波动的估计量.

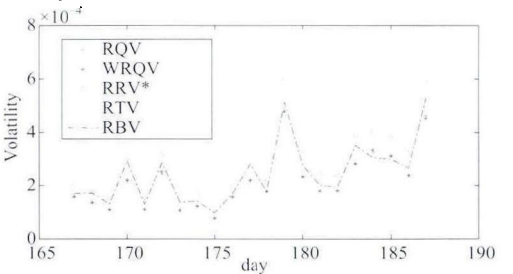


图 3 沪深 300 指数在 $[167, 187]$ 区间上的 RQV 、 $WRQV$ 、 RRV^* 、 RTV 、 RBV

4.3 日历效应分析

观察 10-min 日内对数价格极差相邻四项乘积的平方根的 240 阶 (即十天) 自相关图是否呈现规律性的变化. 从图 4(左) 可以明显地看出日内对数价格极差相邻四项乘积的平方根存在着周期性变化的特征, 以 24 期 (即一个交易日) 为一个周期, 每日呈现出 “U” 型变化规律.

本文对此进行了加权处理, 处理结果见图 4(右). 从图中可以看到, 经过加权以后的日内对数价格极差相邻四项乘积的平方根已不再呈现出 “U” 型变化特征, 从而证实了前文考虑日历效应的 $WRQV$ 估计量消除了日历效应的影响.

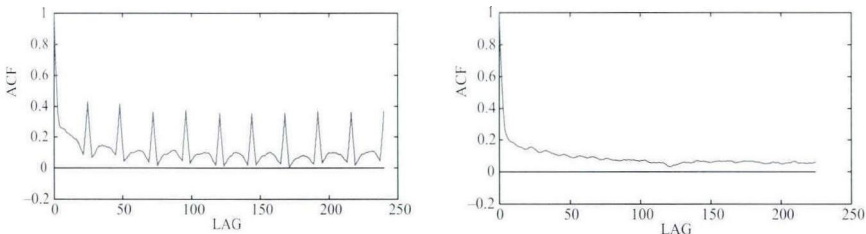


图 4 10-min 日内极差相邻四项乘积的平方根的自相关图 (左) 及加权后的自相关图 (右)

4.4 参数估计及分析

4.4.1 参数估计

由于篇幅限制, 本文不列出模型的阶数选择过程. 仅陈述结果: 不论在何种分布下, $RG(1, 1)$ 的似然值都

最大, 所以决定采用 $RG(1, 1)$ 作为下文的研究对象.

表 4 是 $\ln WRQV$ 、 $\ln RQV$ 作为已实现测量的不同分布下的 8 个已实现 GARCH 模型的参数估计结果及一些辅助性统计指标: π 是波动持续系数, $\rho+$ 、 $\rho-$ 分别是序列 $\tau(z_t) + u_t$ 与 z_t 的条件自相关系数, 解释

表 4 不同已实现度量下参数估计结果

	$\ln WRQV$	$\ln RQV$	$\ln WRQV$	$\ln RQV$
	N		GED	
ω	0.001714 (0.348000)	-1.03557 (1.236853)	-0.00193 (0.446944)	-1.0658 (1.604862)
β	0.836206 (0.070063)	0.796202 (0.171093)	0.829393 (0.093471)	0.789141 (0.229205)
γ	0.167438 (0.0578)	0.067071 (0.037892)	0.173993 (0.07948)	0.069883 (0.055628)
ν			1.607375 (0.180949)	1.501518 (0.157453)
μ	-1.37472 (0.52946)	1.88836 (1.025967)	-1.36151 (0.52488)	1.995721 (1.022112)
φ	0.828137 (0.057776)	1.550558 (0.111265)	0.829604 (0.057287)	1.562123 (0.110833)
τ_1	-0.04184 (0.017768)	0.061622 (0.039)	-0.04204 (0.017728)	0.061252 (0.038929)
τ_2	0.083597 (0.012746)	0.135264 (0.027055)	0.083391 (0.012716)	0.134738 (0.027019)
σ_u^2	0.119739 (0.0083)	0.467611 (0.025881)	0.11915 (0.008249)	0.465499 (0.025743)
对数似然值	1062.657	796.2811	1065.828	801.2612
π	0.974868	0.900199	0.973738	0.898307
$\rho+$	0.671629	0.462788	0.68579	0.478454
$\rho-$	-0.40787	-0.19331	-0.41988	-0.2011
ρ	0.349104	0.25928	0.35585	0.267491

	Skew-T		T	
	0	0		
ω	0.000006 (0.000006)	0 (0.000001)	0.023935 (0.451066)	-1.06049 (1.540908)
β	0.844297 (0.010723)	0.87854 (0.009397)	0.826927 (0.096521)	0.785277 (0.228441)
γ	0.155701 (0.009839)	0.090071 (0.017106)	0.179298 (0.086373)	0.073016 (0.060832)
ν	6.118792 (3.08054)	7.164797 (3.126074)	10.29607 (6.552249)	7.820743 (3.593454)
ξ	0.039734 (0.006897)	0.032866 (0.005015)		
μ	-1.10462 (0.542304)	-1.2474 (1.031363)	-1.4668 (0.514782)	1.988727 (1.018691)
ϕ	0.874214 (0.060489)	1.210000 (0.113314)	0.818532 (0.056221)	1.562939 (0.110575)
τ_1	-0.04571 (0.019179)	0.049535 (0.037159)	-0.04206 (0.017755)	0.060837 (0.039019)
τ_2	0.101904 (0.015194)	0.13028 (0.027116)	0.083708 (0.012753)	0.1354 (0.02731)
σ_u^2	0.117501 (0.008064)	0.418288 (0.023599)	0.118886 (0.008231)	0.463063 (0.025561)
对数似然值	1066.961	819.7979	1066.563	802.8607
π	0.980413	0.988000	0.973688	0.899397
$\rho+$	0.593777	0.446598	0.694486	0.486951
$\rho-$	-0.30735	-0.19289	-0.42823	-0.20521
ρ	0.331561	0.237742	0.36023	0.272423

注: $\rho+ = \text{corr}(\tau(z) + u, z|z > 0)$, $\rho- = \text{corr}(\tau(z) + u, z|z < 0)$, $\rho = \text{corr}(\tau(z) + u, z)$, 括号中为标准差.

波动率是否存在不对称性, ρ 是相应的自相关系数. 从表 4 可以看出: 1) RG(lnWRQV) 模型整体上估计效果要优于 RG(lnRQV) 模型, 所以未考虑噪音的 WRQV 在实践中具有一定可行性, 支持了 Watanabe^[18] 的观点: 已实现 GARCH 模型本身具有消除非噪音稳健已实现测量偏差的功能. 2) 偏 t 分布下模型拟合效果比较好, 尤其 RG(lnWRQV) 模型拟合效果更好, 因此以下实证部分都将只考虑偏 t 分布下的情形. 3) 各模型都无一例外地呈现出正的 ρ_+ , 负的 ρ_- 和正的 ρ, ρ_+ 的绝对值大于 ρ_- 的绝对值, 说明我国股市利好消息会造成股市更大的波动, 即在样本区间内我国股市实际上是具有“负杠杆效应”, 这从图 5 的信息冲击曲线可以明显地看出.

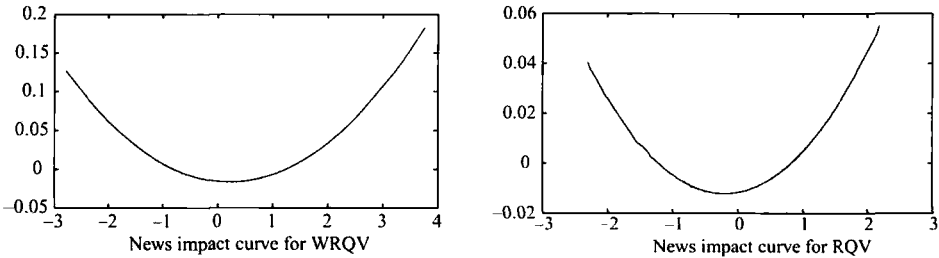


图 5 Skew-T 分布下信息冲击曲线

目前, 对于“负杠杆效应”还没有公认的解释, 这里我们从以下几方面尝试性给出简单说明. 第一: 代表股市走势的上证综指从 2007 年 10 月的 6124 点到 2012 年底 1949 点, 该离场的投资者早已出局, 剩下坚守的投资者对股市“利好”产生强烈的预期. 同时, 国际金融危机已经持续数年, “利空”已经逐渐被市场所消化, 投资者对“利空”信息的承受力也在逐渐加强, 而且以银行为代表的大盘蓝筹股风险已经充分释放, 估值趋于合理, 极具有投资价值. 第二: 尽管危机期间我国经济增长率放缓, 但仍是世界上经济增长最快的国家. 相比之下, 我国股市发展却不尽人意, 远远落后于主要国际经济体, 这与经济发展极不匹配, 没有体现股市是经济“晴雨表”的功能. 第三: 我国股市自身存在的问题, 如“三高”、“圈钱”等问题, 这些问题的存在促使投资者对股市健康发展产生强烈的预期. 同时, 这几年, 我国为了应对金融危机和治理股市, 不断出台利好的经济(金融)政策, 总体上“利好”的信息多于“利空”的信息.

综合这些因素, 一旦有“利好”信息, 投资者都会对股票市场后期走势作过度好的预期, 从而易导致股市波动的放大, 现象表现在“利好”消息会造成股市更大的波动.

4.4.2 模型评价

已实现 GARCH 模型作为标准 GARCH 模型的发展, 在理论上是优于后者的. 这部分将从实证角度验证已实现 GARCH 模型的理论优越性, 将选取具有对数形式且考虑杠杆效应的 EGARCH 来比较二者在模型预测效果上的表现. EGARCH 模型中条件方差为:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-1}^2) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left| \frac{u_{t-i}}{\sigma_{t-i}} - E\left(\frac{u_{t-i}}{\sigma_{t-i}}\right) \right| + \sum_{k=1}^r \gamma_k \frac{u_{t-k}}{\sigma_{t-k}} \tag{16}$$

偏 t 分布下 EGARCH 的参数估计见表 5. 运用式 (11)、(12)、(15) 对模型评价见表 6-7.

表 5 EGARCH 参数估计结果

ω	α_1	γ_1	β_1	ν	ξ	对数似然值
-0.13281 (0.02685)	0.012762 (0.06053)	-0.09644 (0.00082)	0.985493 (0.000323)	11.20113 (5.94974)	0.032823 (0.008173)	795.34

注: 括号中为标准差.

表 6 模型预测效果比较

	α	β	adj. R^2	S.E.	AIC	RMSE
EGARCH	3.04E-04 (7.5E-05)	0.217801 (0.051145)	0.451546	8.53E-05	-15.78241	1.46E-08
RG(lnRQV)	2.59E-04 (6.3E-05)	0.296230 (0.031525)	0.633353	8.29E-05	-15.81050	1.38E-08
RG(lnWRQV)	1.68E-04 (3.7E-05)	0.366094 (0.021678)	0.691479	8.16E-05	-15.99965	1.17E-08

注: 括号中为标准差.

表 7 不同已实现测量下 ES 预测效果比较

	D		
	1%	5%	10%
EGARCH	0.0134	0.0086	0.0107
RG(lnRQV)	0.0114	0.0076	0.0083
RG(lnWRQV)	0.0065	0.0049	0.0061

从表 4 和表 5 看出 RG 模型拟合效果要明显好于 EGARCH 模型. 从表 6 和表 7 可以看出: 1) RG 模型环境下的各项评价指标要优于 EGARCH 模型环境下的各项评价指标, 这也验证了观点: 已实现 GARCH

模型优于传统的 EGARCH 模型. 2) 在 RG 模型环境下, $RG(\ln WRQV)$ 模型环境下的各项评价指标要优于 $RG(\ln RQV)$ 模型环境下的各项评价指标, 这说明加权后的估计量能提高波动量估计与预测精度.

5 结语

本文基于已实现极差多幂次变差理论的框架下开展极差波动研究, 通过理论推导与实证分析, 在样本期间内得到如下简要结论: 1) 已实现极差四幂次变差 (RQV) 在已实现极差多幂次变差族中是最优的, 且是最稳健的. 2) 鉴于金融市场普遍存在日历效应这一特征, 在已实现极差四幂次变差 (RQV) 基础上提出的加权已实现极差四幂次变差 (WRQV), 实证结果表明它确实消除了日历效应的影响, 有助于提高波动率估计与预测的准确性. 3) 对已实现 GARCH 模型进行扩展, 实证表明偏 t 分布下的已实现 GARCH 模型能够提高模型的拟合程度和预测效果. 同时, 各项评价指标表明已实现 GARCH 模型都优于以 EGARCH 为代表的传统 GARCH 模型, 加权已实现极差四幂次变差 (WRQV) 与已实现 GARCH 相结合的 $RG(\ln WRQV)$ 模型在各项评价指标中是最优的.

由此可见, 加权已实现极差四幂次变差 (WRQV) 不但可以提高波动率估计精度, 而且对于资产定价、风险管理等方面也有重要的应用价值.

参考文献

- [1] Christensen K, Podolskij M. Realized range-based estimation of integrated variance[J]. *Journal of Econometrics*, 2007, 141(2): 323-349.
- [2] Martens M, Van Dijk D. Measuring volatility with the realized range[J]. *Journal of Econometrics*, 2007, 138(1): 181-207.
- [3] 唐勇, 张世英. 高频数据的加权已实现极差波动及其实证分析 [J]. *系统工程*, 2006, 24(8): 52-57.
Tang Y, Zhang S Y. Weighted realized range-based volatility based on high-frequency data and its empirical analysis[J]. *Systems Engineering*, 2006, 24(8): 52-57.
- [4] 唐勇, 张世英. 已实现波动和已实现极差波动的比较研究 [J]. *系统工程学报*, 2007, 22(4): 437-442.
Tang Y, Zhang S Y. Comparing research: Realized volatility and realized range-based volatility[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2007, 22(4): 437-442.
- [5] Christensen K, Podolskij M, Vetter M. Bias-correcting the realized range-based variance in the presence of market microstructure noise[J]. *Finance and Stochastics*, 2009, 13: 239-268.
- [6] Barndorff-Nielsen O E, Shephard N. Variation, jumps, market frictions and high frequency data in financial econometrics[C]// *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications*, Ninth World Congress, 2007, 3: 328-372.
- [7] Christensen K, Podolskij M. Asymptotic theory of range-based multipower variation[J]. *Journal of Financial Econometrics*, 2012, 10(3): 417-456.
- [8] Hansen P R, Huang Z, Shek H. Realized GARCH: A joint model of returns and realized measures of volatility[J]. *Journal of Applied Econometrics*, 2012, 27(6): 877-906.
- [9] Parkinson M. The extreme value method for estimating the variance of the rate of return[J]. *Journal of Business*, 1980, 53(1): 61-65.
- [10] 李胜歌, 张世英. “已实现”双幂次变差与多幂次变差的有效性分析 [J]. *系统工程学报*, 2007, 22(3): 280-286.
Li S G, Zhang S Y. Analysis of the efficiency of realized bipower variation and realized multipower variation[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2007, 22(3): 280-286.
- [11] 李胜歌, 张世英. 金融波动的赋权 “已实现”双幂次变差及其应用 [J]. *中国管理科学*, 2007, 15(5): 9-15.
Li S G, Zhang S Y. Weighted realized bipower variation of financial volatility and its application[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2007, 15(5): 9-15.
- [12] Takahashi M, Omori Y, Watannabe T. Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously[J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2009, 53(6): 2404-2426.
- [13] Christensen K, Oomen R, Podolskij M. Realized quantile-based estimation of integrated variance[J]. *Journal of Econometrics*, 2010, 159(1): 74-98.
- [14] 唐勇, 寇贵明. 股票市场微观结构噪声、跳跃与流动性关系分析 [J]. *中国管理科学*, 2012, 20(2): 11-19.
Tang Y, Kou G M. Analysis on the relationship among microstructure noise, jump and liquidity in stock market[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2012, 20(2): 11-19.
- [15] Acerbi C, Tasche D. Expected shortfall: A natural coherent alternative to value at risk[J]. *Economic Notes*, 2002, 31(2): 379-388.
- [16] Embrechts P, Kaufmann R, Patie P. Strategic long-term financial risks: Single risk factors[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2005, 32(1-2): 61-90.
- [17] Christensen K, Kodolskij M. Range-based estimation of quadratic variation[J]. *Journal of Econometrics*, 2010, 31(4): 58-105.
- [18] Watanabe T. Quantile forecasts of financial returns using realized GARCH models[J]. *Japanese Economic Review*, 2012, 63(1): 68-80.