量 子 场 论　引 言

王青　清华大学

2005年9月12日-2006年1月1日

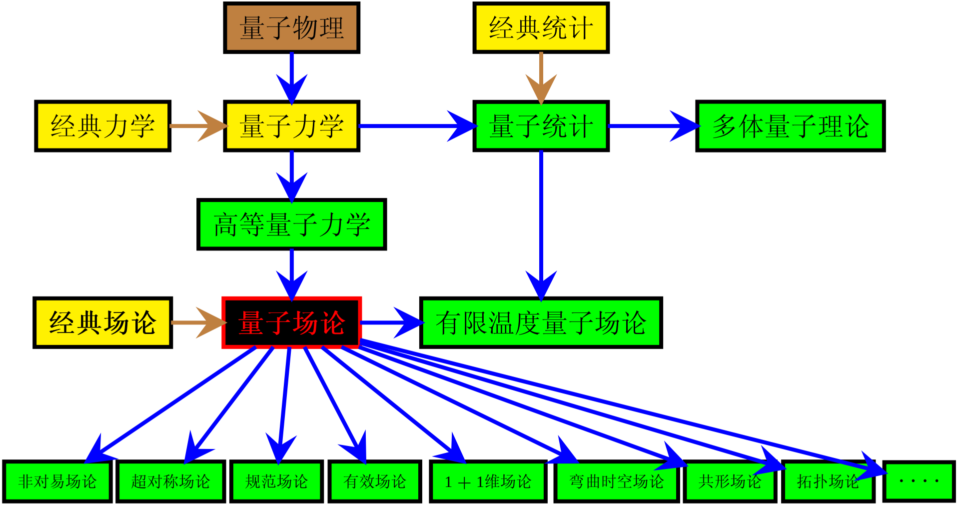
- 《The Quantum Theory of Fields》 Volume I <Foundations>
  Steven Weinberg(1995)
- 《Field Theory: A Modern Primer》 Pierre Ramond(1981)
- 《An Introduction to Quantum Field Theory》
  Michael E.Peskin, Daniel V.Schroeder (1995)
- 《Quantum Field Theory》
  Claude Itzykson, Jean-Bernard Zuber(1980)
- 《Quantum Field Theory and Critical Phenomena》
  Jean Zinn-Justin(Third Edition1996)
- 《Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics》
  Alexei M.Tsvelik(1995)
- 《Particles and Fields》 David Lurie(1995)
- 《Relativistic Quantum Fields》 James D.Bjorken, Sidney D.Drell (1965)
- ……

- 量子力学与狭义相对论量子力学基本原理与希尔伯特空间，对称性(群论ABC,对称性表示,连续对称性)，狭义相对论基本原理与非齐次洛伦兹变换(狭义相对论, 态矢量的洛伦兹变换)，单粒子态按非齐次洛伦兹变换和内部对称性变换分类(时空平移,时空转动, 有质量正能单粒子态,无质量正能单粒子态,空间反射,时间反演,$U(1)$内部对称性变换)
- 量子场，粒子与反粒子多粒子态，玻色子与费米子(多粒子态,玻色子与费米子)，进态、出态与S矩阵(进态和出态,S矩阵,S矩阵的微扰展开,反应率与碰撞截面)，量子场(产生与湮灭算符,产生与湮灭算符在坐标空间的表达,平移,推进与转动)，标量量子场(反粒子的引入,标量场的分立对称性变换性质,自由标量场的场方程、荷流矢量、哈密顿量和作用量、正则对易关系)，旋量量子场(γ矩阵,费米统计,旋量场的分立对称性变换性质,自由旋量场方程、哈密顿量和作用量、正则反对易关系)，矢量量子场(按自旋分类,矢量场的分立对称性变换性质,自由矢量场的场方程、哈密顿量和作用量、正则对易关系)

- 量子力学与狭义相对论
- 量子场，粒子与反粒子
- 格林函数与路径积分约化公式和格林函数的谱分解(三种绘景,约化公式,格林函数谱分解)，路径积分(量子场算符本征态的矩阵元, 时间演化算符的矩阵元,波函数)，格林函数与顶角生成泛函(玻色场的生成泛函,费米场的生成泛函, 拉格朗日体系)，$\lambda\phi^4$理论与四费米理论($\lambda\phi^4$理论,4费米理论)
- 量子电动力学理论基础(拉格朗日量,生成泛函与微扰论, 格林函数的相互关联)，一圈图(光子传播子,费米子传播子,相互作用顶角)，重整化(关于重整化的一般分析,一圈图的重整化,跑动耦合常数)，基本物理过程与物理量($e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$,电子磁矩)

- 课程的讲稿已贴到网络学堂上,pdf格式可下载.
- 每章都有作业，作业题上课前贴在网络学堂上. 作业要求用电子文件最好用Latex编辑,完成后发给老师.

  量子场论的建立需要进行大量的推导和演绎，这些工作一部分作为正文讲授，另一部分作为每章的作业，希望通过预习及作业和自己的思考熟悉和加深对课程正文内容的理解并提高的演绎技术和能力。
- 教师联系方式: 62772791(O), 62783615(H), wangq@mail.tsinghua.edu.cn 办公室: 理科楼3408房间
  需要答疑或讨论,请单独打电话联系约时间.
- 鼓励课堂上随时提问问题!
- 期末采用半开卷考试,内容限制在所有课程讲授的内容范围.
- 课程提供若干研究性问题,鼓励同学们对其和其它自选问题深入研究. 若某课题研究十分深入并有所创造,可以替代考试.
- 你对量子场论理解、掌握和运用的好坏完全取决于
  你时间和精力上对此课内容的投入及对课外相关资料的学习!


量子物理
经典统计
经典力学
量子力学
量子统计
多体量子理论
高等量子力学
经典场论
量子场论
有限温度量子场论
非对易场论
超对称场论
规范场论
有效场论
1＋1维场论
弯曲时空场论
共形场论
拓扑场论
· · · ·

对量子场论的感觉:

♣ 美妙无比

♢ 高深莫测

♡ 极其复杂

♠ 莫名其妙

¶ 不可思议

✠ 没有定义

自从海森堡和泡利关于一般量子场论的论文 W.Heisenberg and W.Pauli, Z.f.Phys.56,1(1929);*ibid* 59,168(1930) 发表起:

传统的量子场论介绍体系

- 承认场的存在
- 依赖于对电磁学的场论经验
- 将正则或路径积分量子化的规则应用于各种简单的场论

优点

- 高效率的尽快接近量子场论的核心主题
- 实用性，会算

留下太多的问题: 学了量子场论，甚至多年工作在需要应用量子场论的领域的人经常会疑问的问题

- 量子场论为什么是它今天的这个样子？
- 为什么如此之复杂？ 是否存在更简单的表述?
- 为什么要承认和相信应该有场论书中所提的那些场?
- 粒子为什么要有自旋?
- 为什么我们要相信正则或路径积分量子化的规则？
- 为什么我们要承认简单的量子场方程或文献中给出的拉氏量？

理论物理的目的不仅仅是描述我们所发现的世界，还需要依赖少数基本原理去解释为什么世界是它现在这个样子

利用公理体系 二十世纪物理学的两项最重大发现!

- 狭义相对论
- 量子力学

以Wigner把场的量子(粒子)定义为非奇次洛伦兹群的表示作为出发点:

- 量子力学规定场量子的粒子性
- 狭义相对论的非奇次洛伦兹变换确定这些粒子的分类

自然和谐地结合狭义相对论与量子力学

课程讲授思路:

- 从狭义相对论与量子力学演绎出所有结论 可能要引入部分实验结论
- 前半段强调基础(理解),后半段强调技术(会算). 注意 "保先!"
- 需要大量的演绎和推导 归纳与演绎

  建议不准备花大量时间和精力进行深入思考和复杂演绎的同学不要学此课!

- 希望大家多思考，争取能有很多的讨论

量子场论诞生之前,描述物质及其相互作用的理论:

- 描述波动的理论–经典场论 麦克斯韦经典电磁场理论; 广义相对论
- 描述粒子的理论–量子力学

波动理论

- 引入法拉第提出的场的观念: 充满并弥漫在空间的场作为波的载体, 它随时间的变化导致了波动.
- 为满足相对性原理,并且与光速不变的事实相符合,爱因斯坦提出了描述基本相互作用的波动理论必须满足的狭义相对论.

它不能描述波的粒子性.而对电磁波,光电效应实验显示出光所具有的粒子性.

粒子理论

- 经典力学$\xRightarrow{\text{量子化}}$量子力学
- 粒子不同时具有确定位置和动量,由德布罗意提出的几率波描述

如果将波函数看成是经典场,量子力学可被看成是一种经典场论, 似乎描述粒子和波的理论都被统一到经典场论的框架下来进行描述

经典场论对物质世界的波和粒子的描述并不是完备的

光波的粒子性在体系中并没有得到体现

波动理论中经典场不具有量子力学波函数作为几率幅的物理诠释

狭义相对论与量子力学简单地结合起来的相对论量子力学不完备:

- **负能问题:** $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$
  - 经典物理中假定只有带正能量的是物理粒子。正能解和负能解之间有限大的能隙，没有连续过程可以把粒子从正能移到负能态。
  - 相对论量子力学中的电子辐射相互作用可使电子通过辐射两个光子实现从正能到负能态的跃迁。

  为什么物质是稳定的？$\Rightarrow$"空穴理论":存在无穷大几乎被充满了的负能电子海, 泡利不相容原理禁戒正能电子落入负能态。负能电子海少数空穴态的行为就像具有相反量子数（正的能量和正的电荷）的粒子一样,由此预言了反粒子被以后安德森发现的正电子所证实。
  - 由负能电子的无穷大电荷密度所导致的电场在哪？狄拉克将麦克斯韦方程组中的电荷密度翻译成对世界上正常带电态的偏离。
  - 空穴理论只适用于解决费米子体系的负能困难,对玻色子体系中的负能困难仍无能为力.

经典场论对物质世界的波和粒子的描述并不是完备的

光波的粒子性在体系中并没有得到体现

波动理论中经典场不具有量子力学波函数作为几率幅的物理诠释

狭义相对论与量子力学简单地结合起来的相对论量子力学不完备:

- 负能问题: $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$
- 粒子数不守恒问题: 相对论量子力学⇒粒子数守恒⇒无法描述粒子数不守恒的物理过程
- 负几率问题: 波函数解释为"几率幅"导致负几率问题⇒狄拉克方程
  量子场论中波函数不被看成"几率幅",而只是描述粒子的产生与湮灭的各种模式的场算符. 从量子力学到量子场论, 不仅是对波函数的量子化, 还必须放弃原来的物理诠释.只把它看成普通的场.
  通常称之为"二次量子化"的提法是不妥当的!

所有这些问题通过对经典场论中的"经典场"进行"量子化"而得到解决!

现状

作为将量子力学和狭义相对论结合在一起的理论，量子场论所取得的成就:

- 波与粒子被自然地以场的概念为基础统一在一起. 场是物质世界的基本组分,波是其运动和变化,粒子是其激发,给出了对粒子的一种理论诠释.
- 克服了相对论量子力学中的负能、负几率和粒子数不守恒等问题.
- 加上因果性的要求,可以自然地导出自旋与统计的关系.
- 可以解释除引力外目前几乎所有的观测到的实验现象, 并且给出像轻子反常磁矩和兰姆位移等目前人类所能达到的与实验相符最精确的理论预言.
- 在量子场论框架下建立的粒子物理的标准模型给出了强、弱和电磁作用的统一的描述, 并且与实验符合得很好.
- 除引力外的基本相互作用目前都通过规范原理来引入, 它要求传递相互作用的规范粒子为零质量的自旋为1的粒子. 而在量子场论框架下,零质量的自旋为1的粒子满足规范原理是相对论的必然要求.

现状

量子场论碰到的困难:

- 发散困难: 紫外发散; 红外发散； 共线发散； $\cdots$ 紫外发散本质上由对更深层次的物理的无知导致. 一类称之为可重整的量子场论对更深层次的物理是不敏感,更深层次的物理效应在理论中可以被吸收到理论参数的重新定义之中. 而不可重整的量子场论对更深层次物理比较敏感，要求理论可重整既可以被看成是对理论简单性的一种要求,也可以看成是对不同层次的物理之间的弱关联的要求. 量子场理论的可重整性目前已经成为基本相互作用理论所必须满足的基本条件之一。
- 计算困难: 非微扰效应。 目前比较有效的只有微扰论，它依赖于存在小的展开参数。当不存在小的展开参数时，微扰论的计算不再可靠。目前还没有非常有效的解析地处理非微扰效应的方法。
  将量子场论放到分立的格点上，利用计算机进行数值计算是目前人们主要依赖的非微扰计算方法。

现状

量子场论碰到的困难:

- 发散困难: 紫外发散; 红外发散; 共线发散;
- 计算困难: 非微扰效应。
- 引力困难: 引力的量子理论至今未能成功建立，量子引力理论目前仍不可重整。 由于引力直接关联和影响时间和空间的结构，引力的量子理论不可重整也许反映人类对很小尺度区域的时空结构的无知，同时也指引着人们对小尺度区域的时空结构的探索.
  传统上人们相信引力的效应只到普朗克尺度$10^{19}GeV$或$10^{-33}cm$才起作用，但仔细的考察发现实际上目前并不存在对小于1mm的引力效应的实验验证，因此还存在在比较低的能量尺度或比较大的空间尺度，引力就开始起重要作用的可能性！

未来

量子场论是唯一将量子力学和狭义相对性原理和谐地结合在一起的方式!

温伯格的观点S. Weinberg: Physica, 96 A, 327 (1979)

Folk theorem: **any quantum theory that at sufficiently low energy and large distances looks Lorents invariant and satisfies the cluster decomposition principle will also at sufficiently low energy look like a quantum field theory !**

尽管存在问题，量子场论是最重要的物理理论体系

任何相对论性的量子理论在足够低的能量和足够大的距离下(在我们目前所观测到的范围内)都将以量子场论的形式出现(低能$\neq$低速). 量子场论在此意义上是狭义相对论和量子力学结合的必然产物. 它也指明: 我们现在在量子场论框架下建立的所有描述物质世界基本相互作用的理论都应该只是某种有效理论, 它只是那些也许不是以量子场论形式出现的更基本的相互作用理论的低能有效场论。存在一个特征的尺度或能量标度，当小过这个特征尺度或高过特征能标时，现在用的有效场论不再适用，只有更基本的相互作用理论才能起作用。

量子场论本身还有很大的发展空间!

已有很多理论反对量子场论作为一个基本理论

背后的基本理论可能不是一个场或粒子的理论，而是一种相当不同的东西，如弦的理论。按这种观点，量子电动力学和其它我们引以为自豪的量子场论，仅仅是某种更基本理论的低能有效场论。我们所用的场论工作的很好并不是因为他们是基本的真理，而是因为任何相对论性量子场论当被应用到足够低能量的粒子时都表现为场。

大量的尚未解决的问题和基本理论的未知为量子场论提供了巨大的发展空间

很多常年未能得到解决硬骨头问题，随着人类掌握的数学和物理知识的增加和计算机技术的快速发展，相信在未来都会得到解决。另一方面，天文观测和宇宙学的最新发展告诉我们，我们现在用量子场论所描述的宇宙间的物质最多只占宇宙总成分的4%,剩下那么大比例的物质是否能用现有的量子场论描述？如果可以，应该怎样描述？这些是未来量子场论可以大大发展的方面。

量子场论本身还有很大的发展空间!

已有很多理论反对量子场论作为一个基本理论

大量的尚未解决的问题和基本理论的未知为量子场论提供了巨大的发展空间

真空不再是渐近的Minkowski空间!

天文学观测数据精度的提高，确立了微小但大于零的宇宙常数。表明真空不再是渐近的**Minkowski**空间，而是渐近成为**de Sitter**空间，具有常曲率。**de Sitter**空间中的场论面临极大困难。

量子场论的重要性!

- 现代粒子物理的基础
- 未来宇宙学和天体物理学必须依赖的理论框架
- 对相对论效应不重要的物理领域,量子场论的结论可作为研究的出发点
- 为核物理、原子物理、凝聚态物理提供了必要的研究方法
- 为物理和数学之间的密切联系建立了桥梁

多数的物理学家都有需要要了解量子场论，
其他的人对它抱有好奇心。

量子场论 量子力学与狭义相对论

王青 清华大学

2005年9月12日-2006年1月1日

物理学基本单位

物理学的基本元素： 时间, 空间, 物质（能量） $\Rightarrow$ 三个物理学基本单位！

物理学基本理论:

- 狭义相对论: $c = 299792.458\ km\ s^{-1}$
- 量子力学: $\hbar = 6.5821220 \times 10^{-22}\ MeV\ s$

c 和 $\hbar$ 的理论计算超出理论物理学的范畴！ 基本物理学常数随时间的变化?

自然单位制: 只有一个基本单位

- $c = 1$ 长度单位和时间单位关联起来 1秒=299792.458公里
- $\hbar = 1$ 质量单位和时间单位关联起来 1秒$^{-1}$ $= 6.5821220 \times 10^{-22}$兆电子伏特

$$(10^{-15}\text{米})^{-1} = (1\text{费米})^{-1} = 197.327053\text{兆电子伏特}$$

物理学量纲的起源？ 维数转移! 没有基本物理单位 所有物理量都是无量纲的!

原理一: 物理状态用希尔伯特空间的态矢量描写. 相差一个复数因子的两个态矢量,描写同一物理状态.

希尔伯特空间:

- 它是∞维的复矢量空间
- 存在完备的基矢组
- 可以定义内积空间

物理态是"粒子的集合"!

态矢量是"抽象的东东"!

态矢量:

- 如果Φ和Ψ分别是希尔伯特空间的两个态矢量,那么,$\xi\Phi+\eta\Psi$也是这个空间的态矢量. 其中,ξ和η是两个任意复数.
- 对任意一对态矢量Φ和Ψ,存在复数内积(Φ,Ψ),满足:

$$(\Phi,\Psi)=(\Psi,\Phi)^*$$
$$(\Phi,\xi_1\Psi_1+\xi_2\Psi_2)=\xi_1(\Phi,\Psi_1)+\xi_2(\Phi,\Psi_2)$$
$$(\eta_1\Phi_1+\eta_2\Phi_2,\Psi)=\eta_1^*(\Phi_1,\Psi)+\eta_2^*(\Phi_2,\Psi)$$
$$(\Psi,\Psi)\geq 0 \qquad (\Psi,\Psi)=0 \xrightarrow{\text{当且仅当}} \Psi=0$$

希尔伯特空间

复矢量空间

元素(或称为矢量)$\{\psi, \phi, \chi, \cdots\}$的集合L在复数域C上定义了加法和数乘后,则称它为复矢量空间.

- 加法: 在集合L中定义了加法运算.任意两个元素可以相加,相加之后的和仍是集合中的元素.加法满足交换律和结合律; 加法存在单位元0矢量,使得$\psi+0=\psi$;加法还存在逆元,若记$-\psi$为ψ的逆元,则:$\psi+(-\psi)=0$.
- 数乘: 集合L中的任一矢量与数域C上的复数相乘将得到集合内的另一矢量.对$\psi, \phi \subset L, a, b \subset C$, 数乘运算满足:
$a(\psi+\phi)=a\psi+a\phi$, $(a+b)\psi=a\psi+b\psi$, $(ab)\psi=a(b\psi)$, $1\psi=\psi$, $0\psi=0$.

完备的基矢组

- 线性无关: 矢量集$\phi_i, i=1,2,\cdots,n$满足$\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i=0$仅对所有$a_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$才成立.则称此n个矢量线性无关.
- 完备集: n维矢量空间L中,n个线性无关的矢量集合称为L中的完备集.空间中任一矢量都可表为此完备集的线性组合$\phi=\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i$.
- 基矢: n维矢量空间中任一完备集的n个线性无关矢量称为此空间的基矢

希尔伯特空间

复矢量空间

元素(或称为矢量)$\{\psi, \phi, \chi, \cdots\}$的集合L在复数域C上定义了加法和数乘后,则称它为复矢量空间.

完备的基矢组

内积空间

存在一个共轭空间,其中的每个矢量与原空间的矢量有一一对应关系,并且定义了内积运算: $(\phi, \psi) = (\psi, \phi)^*$, $(\phi, \phi) \geq 0$, $(\phi, \psi + \psi') = (\phi, \psi) + (\phi, \psi')$, $(\phi + \phi', \psi) = (\phi, \psi) + (\phi', \psi)$, $(\phi, a\psi) = a(\phi, \psi)$, $(a\phi, \psi) = a^*(\phi, \psi)$.

如果两个矢量内积为零,则称它们相互正交.若矢量集合中的每个矢量都与相互正交,则称其为正交集. 任一矢量和它的共轭的内积称为此矢量的模.模为1的矢量称为归一化矢量.

原理二: 可观察物理量由厄米算符代表; 物理量测量所能取的值是相应算符的本征值.

算符:

希尔伯特空间的算符定义为将态空间变为它自己的映射.即:

若A和Ψ分别是希尔伯特空间的算符和态,则$A\Psi$也是希尔伯特空间的态.

通常选用线性算符,它满足

$$A(\xi\Psi + \eta\Phi) = \xi A\Psi + \eta A\Phi$$

算符A的厄米共轭算符$A^\dagger$定义为

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi) = (\Psi, A\Phi)^*$$

满足$A = A^\dagger$的算符叫厄米算符. 如果$A\Psi = \alpha\Psi$,则α叫算符A的本征值.

一个基本定理: 厄米算符的本征值是实数.

量子力学基本原理:

原理一： 物理状态用希尔伯特空间的态矢量描写. 相差一个复数因子的两个态矢量,描写同一物理状态.

原理二： 可观察物理量由厄米算符代表; 物理量测量所能取的值是相应算符的本征值.

原理三: 如果体系处于归一化的态Ψ(($\Psi,\Psi) = 1$), 通过实验测量它位于一组正交归一态$\Psi_1, \Psi_2, \ldots$的第n个态上的几率为$|(\Psi, \Psi_n)|^2$.

进一步假设态空间的完备性可以得到一个基本定理:

$$\sum_n |(\Psi, \Psi_n)|^2 = 1$$

对量子力学基本原理的感觉:

♣ 太数学化!

♢ 态的概念内藏玄机!

♡ 态的叠加?

♠ 态的内积?

¶ 复数的作用?

✠ 态的测量?

群的定义:

在集合$G = \{g, h, k, \cdots\}$上定义了一个二元运算: 对G中任意一对有序元素g, h,都有G中一个第三元素, 记为gh,与它对应. 如果这个二元运算满足如下条件:

- 在G中存在着称之为单位元的元素e它唯一, 它对所有$g \in G$有$ge = eg = g$
- 对每一个$g \in G$, 在G中存在一个逆元g^{-1}它唯一, 使$gg^{-1} = g^{-1}g = e$成立
- 对所有$g, h, k \in G$, 结合律$(gh)k = g(hk)$成立

那么我们称G是一个群.而称这个二元运算为该群的乘法.

- 若$gh = hg$,则元素g, h可换.如果G中所有元素都可换,称G为Abel群.
- G中元素的数目叫G的阶.阶数有限的叫有限群;阶数无限的叫无限群.
- 若G的子集H对于G中的乘法成为一个群,就把H成为是G的一个子群.

- $GL(n)$: 由$n \times n$非奇异的复矩阵形成的复一般线性群.
- $U(n)$: 由$n \times n$复幺正矩阵形成的幺群.特别地$U(1)$: $e^{i\theta}$
- $SO(n)$: 由模为一的$n \times n$实正交矩阵形成的n维空间转动群

群表示:

复的矢量空间V映射到自身上的所有非奇异线性变换所形成的群记为$GL(V)$.

G到$GL(V)$的同态两元乘积的像等于两元像的乘积$T: g \mapsto T(g)$, 称为群G的表示; V叫做表示空间; V的维数叫表示的维数.

$$T(g_1)T(g_2) = T(g_1g_2) \qquad g_1, g_2 \in G$$
$$T(g)^{-1} = T(g^{-1}) \qquad g \in G$$
$$T(e) = E$$

G到$GL(n)$的同态$T: g \mapsto T(g)$, 称为群G的n维矩阵表示

群G的任一表示空间为V的表示T定义了许多矩阵表示. 因为若$\{v_1, \cdots, v_n\}$是V的一个基底,即$T(g)v_k = T(g)_{jk}v_j$定义的矩阵$T(g)_{jk}$形成G的n维矩阵表示. V的基底的每一种不同选择,给出一个由T确定的G的新的矩阵表示.例, $v_i = S_{ij}v'_j$给出的新的基底$\{v'_1, \cdots, v'_n\}$所对应的矩阵表示$T'(g) = ST(g)S^{-1}$

- 两个复n维矩阵表示T和T'是等价的: 若$\forall S \in GL(n)$使得$T' = STS^{-1}$
- 空间V上的n维表示T和T'是等价的: 若$\forall S \in GL(V)$使得$T' = STS^{-1}$

物理体系具有对称性指不同观察者从不同的角度观察同一实验得到同样的实验结果

观察者$\mathcal{O}$通过实验测量处于归一化态Ψ的物理体系位于一组正交归一态Ψ_1, $\Psi_2, \ldots$第n个态的几率与另一个观察者$\mathcal{O}'$对同一个物理体系的状态(标记其为Ψ')通过实验测量位于对应的正交归一态$\Psi_1', \Psi_2', \ldots$ 第n个态上的几率相同,

$$|(\Psi, \Psi_n)|^2 = |(\Psi', \Psi_n')|^2$$

$\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$和$\Psi', \Psi_1', \Psi_2', \ldots$之间的联系称为对称性变换.

这样的变换形成群

- 存在单位变换,使Ψ变换成它自己,$\Psi' = \Psi$.
- 对任何一个变换T将Ψ变换成Ψ',存在逆变换T^{-1}将Ψ'变换成Ψ.
- 对两个变换T_1将Ψ变换成Ψ'和T_2将Ψ'变换成Ψ'',存在联合变换T_2T_1将Ψ变换成Ψ''.

有很多对称性在现实的物理世界中并不存在,这时虽然$|(\Psi, \Phi)|^2 \neq |(\Psi', \Phi')|^2$.
但仍可在理论上先去掉不对称的部分，讨论其对称性变换,再研究如何加入不对称效应？

E.P.Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren (Braunschweig, 1931): pp.251-3 (English translation, Academic Press, Inc,New York,1959).

只允许$\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$和$\Psi', \Psi'_1, \Psi'_2, \ldots$之间的联系通过幺正或反幺正算符联系

$$\Psi' = U\Psi \qquad \Psi'_1 = U\Psi_1 \qquad \Psi'_2 = U\Psi_2 \qquad \ldots$$

如果U是幺正算符,它必须满足$U^\dagger = U^{-1}$或

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi) \qquad U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi U\Phi + \eta U\Psi$$

如果U是反幺正算符,它必须满足

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi)^* \qquad U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi^* U\Phi + \eta^* U\Psi$$

反线性算符A采用如下的厄米共轭算符定义

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi)^* = (\Psi, A\Phi)$$

则能够保证幺正和反幺正算符同时都满足条件$U^\dagger = U^{-1}$.

对称性表示定理

正交归一的完备基矢ψ_i：$\Psi=\sum_i a_i\psi_i$，$a_i=(\psi_i,\Psi)$ 是展开系数。

做对称变换$U\Psi=\sum_i Ua_i\psi_i$ 记$\Psi'=U\Psi$，$\psi_i'=U\psi_i$。ψ_i'也是正交完备基矢

$|(\Phi',\Psi')|=|(\Phi,\Psi)|\Rightarrow|(\psi_i',\psi_j')|=|(\psi_i,\psi_j)|=\delta_{ij}\Rightarrow(\psi_i',\psi_j')=\delta_{ij}$，

ψ_i'的基矢数目同ψ_i一样多。由于ψ_i'构成正交完备集，Ψ'也可按其展开：

$\Psi'=\sum_i a_i'\psi_i'$,其中$a_i'=(\psi_i',\Phi')$是展开系数。

$|(\Phi',\Psi')|=|(\Phi,\Psi)|\Rightarrow|a_i'|=|(\psi_i',\Psi')|=|(\psi_i,\Psi)|=|a_i|$.

由它推出a_i'和a_i的关系只有两种可能：

第一种可能性： $\mathbf{a_i'=a_ie^{i\delta_i}}$

将相因子吸收到ψ_i'的定义之中，$\Psi'=\sum_i a_i\psi_i'$ $\Phi'=\sum_i b_i\psi_i'$

由于展开系数完全一样

$$U(\alpha\Psi+\beta\Phi)=\sum_i(\alpha a_i+\beta b_i)\psi_i'=\alpha\Psi'+\beta\Phi'=\alpha U\Psi+\beta U\Phi$$

它说明U是线性算符。进一步

$$(\Psi',\Phi')=(\sum_i a_i'\psi_i',\sum_j b_j'\psi_j')=\sum_i a_i^*b_i=(\sum_i a_i\psi_i,\sum_j b_j\psi_j)=(\Psi,\Phi)$$

说明U是幺正算符

对称性表示定理

正交归一的完备基矢ψ_i：$\Psi=\sum_i a_i\psi_i$，$a_i=(\psi_i,\Psi)$ 是展开系数。

做对称变换$U\Psi=\sum_i Ua_i\psi_i$ 记$\Psi'=U\Psi$，$\psi_i'=U\psi_i$。ψ_i'也是正交完备基矢

$|(\Phi',\Psi')|=|(\Phi,\Psi)|\Rightarrow|(\psi_i',\psi_j')|=|(\psi_i,\psi_j)|=\delta_{ij}\Rightarrow(\psi_i',\psi_j')=\delta_{ij}$，

ψ_i'的基矢数目同ψ_i一样多。由于ψ_i'构成正交完备集，Ψ'也可按其展开：

$\Psi'=\sum_i a_i'\psi_i'$,其中$a_i'=(\psi_i',\Phi')$是展开系数。

$|(\Phi',\Psi')|=|(\Phi,\Psi)|\Rightarrow|a_i'|=|(\psi_i',\Psi')|=|(\psi_i,\Psi)|=|a_i|$.

由它推出a_i'和a_i的关系只有两种可能：

第二种可能性：　$\mathbf{a_i'=a_i^*e^{i\delta_i}}$

将相因子吸收到ψ_i'的定义之中，$\Psi'=\sum_i a_i^*\psi_i'$　$\Phi'=\sum_i b_i^*\psi_i'$

$$U(\alpha\Psi+\beta\Phi)=\sum_i(\alpha^*a_i^*+\beta^*b_i^*)\psi_i'=\alpha^*\Psi'+\beta^*\Phi'=\alpha^*U\Psi+\beta^*U\Phi$$

它说明U是反线性算符。进一步

$$(\Psi',\Phi')=(\sum_i a_i'\psi_i',\sum_j b_j'\psi_j')=(\sum_i a_i^*b_i)^*=(\sum_i a_i\psi_i,\sum_j b_j\psi_j)^*=(\Psi,\Phi)^*$$

说明U是反幺正算符

投影表示

记描述对称性变换T的幺正或反幺正算符为$U(T)$,考虑态所具有的相角任意性

$$U(T_2)U(T_1)\Psi = e^{i\phi_\Psi(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi$$

$\phi_\Psi(T_2,T_1)$是相角.我们下面证明,它实际上是不依赖于态的.

将上式应用于$\Psi_{AB}\equiv\Psi_A+\Psi_B$,则

$$\begin{aligned}
e^{\pm i\phi_{AB}}\Psi_{AB} &= U^{-1}(T_2T_1)e^{i\phi_{AB}}U(T_2T_1)\Psi_{AB} = U^{-1}(T_2T_1)U(T_2)U(T_1)(\Psi_A+\Psi_B)\\
&= U^{-1}(T_2T_1)[U(T_2)U(T_1)\Psi_A + U(T_2)U(T_1)\Psi_B]\\
&= U^{-1}(T_2T_1)[e^{i\phi_A}U(T_2T_1)\Psi_A + e^{i\phi_B}U(T_2T_1)\Psi_B] = e^{\pm i\phi_A}\Psi_A + e^{\pm i\phi_B}\Psi_B
\end{aligned}$$

对任意的Ψ_A和Ψ_B,上式要求$e^{\phi_{AB}}=e^{i\phi_A}=e^{i\phi_B}$,也就是相因子与态无关

$$U(T_2)U(T_1)\Psi = e^{i\phi(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi$$

以下只讨论$\phi_\Psi(T_2,T_1)=0$的情况 **作业8**

$U=1$是一个恒等变换,它把态矢量变为它自己,是一个幺正的算符.

任何可通过参数的连续变化变成恒等变换的对称性变换由连续性要求一定要由幺正算符而不是反幺正算符来代表.

当无穷接近恒等变换时,可以引入无穷小的实参数ϵ来描述,

$$U=1+i\epsilon t$$

U的幺正性要求t必须是厄米算符,它是一个物理可观测量的候选者

一类由一组有限个实连续参数θ^a描述,所有变换都连续地连接到恒等变换的变换形成的群叫连通李群

对此类变换, 由θ描述的变换$T(\theta)$和由$\bar\theta$描述的变换$T(\bar\theta)$形成的联合变换和相应的幺正算符为:

$$T(\bar\theta)T(\theta)=T(f(\bar\theta,\theta)) \qquad U(T(\bar\theta))U(T(\theta))=U(T(f(\bar\theta,\theta)))$$

用$\theta^a=0$标志恒等变换 $f^a(\theta,0)=f^a(0,\theta)=\theta^a$ 它限制在恒等变换附近无θ^2项:

$$f^a(\bar\theta,\theta)=\theta^a+\bar\theta^a+f^a_{bc}\bar\theta^b\theta^c+\cdots \qquad U(T(\theta))=1+i\theta^aQ_a+\tfrac{1}{2}\theta^b\theta^cQ_{bc}+\cdots$$

Q_a,$Q_{bc}=Q_{cb}$是不依赖于θ和$\bar\theta$的作用到态矢量空间的厄米算符

$$[1+\bar\theta^aQ_a+\frac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^cQ_{bc}+\cdots][1+\theta^aQ_a+\frac{1}{2}\theta^b\theta^cQ_{bc}+\cdots]$$

$$=1+i(\theta^a+\bar\theta^a+f^a_{bc}\bar\theta^b\theta^c+\cdots)Q_a+\frac{1}{2}(\theta^b+\bar\theta^b+\cdots)(\theta^c+\bar\theta^c+\cdots)Q_{bc}+\cdots$$

李群

$$T(\bar\theta)T(\theta)=T(f(\bar\theta,\theta)) \qquad U(T(\bar\theta))U(T(\theta))=U(T(f(\bar\theta,\theta)))$$

如果将$\theta^a=0$取为恒等变换的参数 $f^a(\theta,0)=f^a(0,\theta)=\theta^a$ 它限制在恒等变换附近无θ^2项:

$$f^a(\bar\theta,\theta)=\theta^a+\bar\theta^a+f^a_{\ bc}\bar\theta^b\theta^c+\cdots \qquad U(T(\theta))=1+i\theta^a Q_a+\tfrac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc}+\cdots$$

Q_a,$Q_{bc}=Q_{cb}$是不依赖于θ和$\bar\theta$的作用到态矢量空间的厄米算符

$$[1+i\bar\theta^a Q_a+\frac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^c Q_{bc}+\cdots][1+i\theta^a Q_a+\frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc}+\cdots]$$

$$=1+i(\theta^a+\bar\theta^a+f^a_{\ bc}\bar\theta^b\theta^c+\cdots)Q_a+\frac{1}{2}(\theta^b+\bar\theta^b+\cdots)(\theta^c+\bar\theta^c+\cdots)Q_{bc}+\cdots$$

准到$\theta,\bar\theta$的二次幂,它导致 $Q_{bc}=-Q_bQ_c-if^a_{\ bc}Q_a$

$$[1+i\bar\theta^a Q_a+\frac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^c Q_{bc}+\cdots][1+i\theta^a Q_a+\frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc}+\cdots]$$

$$=1+i\bar\theta^a Q_a+i\theta^a Q_a-\bar\theta^b\theta^c Q_bQ_c+\frac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^c Q_{bc}+\frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc}+\cdots$$

$$1+i(\theta^a+\bar\theta^a+f^a_{\ bc}\bar\theta^b\theta^c+\cdots)Q_a+\frac{1}{2}(\theta^b+\bar\theta^b+\cdots)(\theta^c+\bar\theta^c+\cdots)Q_{bc}$$

$$=1+i\bar\theta^a Q_a+i\theta^a Q_a+\bar\theta^b\theta^c(if^a_{\ bc}Q_a+Q_{bc})+\frac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^c Q_{bc}+\frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc}+\cdots$$

李群

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta},\theta)) \qquad U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta)) = U(T(f(\bar{\theta},\theta)))$$

如果将$\theta^a = 0$取为恒等变换的参数 $f^a(\theta,0) = f^a(0,\theta) = \theta^a$ 它限制在恒等变换附近无θ^2项:

$$f^a(\bar{\theta},\theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f^a_{\ bc}\bar{\theta}^b\theta^c + \cdots \qquad U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a Q_a + \tfrac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots$$

Q_a,$Q_{bc} = Q_{cb}$是不依赖于θ和$\bar{\theta}$的作用到态矢量空间的厄米算符

$$[1 + \bar{\theta}^a Q_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b\bar{\theta}^c Q_{bc} + \cdots][1 + \theta^a Q_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots]$$

$$= 1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a + f^a_{\ bc}\bar{\theta}^b\theta^c + \cdots)Q_a + \frac{1}{2}(\theta^b + \bar{\theta}^b + \cdots)(\theta^c + \bar{\theta}^c + \cdots)Q_{bc} + \cdots$$

准到$\theta,\bar{\theta}$的二次幂,它导致 $Q_{bc} = -Q_bQ_c - if^a_{\ bc}Q_a$. Q_{bc}对指标b,c对称$\Rightarrow$ $0 = -Q_bQ_c + Q_cQ_b - if^a_{\ bc}Q_a + if^a_{\ cb}Q_a$

$$[Q_b, Q_c] = iC^a_{\ bc}Q_a \qquad C^a_{\ bc} \equiv -f^a_{\ bc} + f^a_{\ cb}$$

它是李代数关系,通过它可定出展开的所有高阶项. 将无穷多的无穷小变化迭加可得到有限大变换。例可以定义$T(\theta) \equiv \lim_{N\to\infty} T^N(\theta/N)$,

$$U(T(\theta)) = \lim_{N\to\infty}\left[U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right)\right]^N = \lim_{N\to\infty}[1 + \frac{i}{N}\theta^a Q_a]^N = e^{iQ_a\theta^a}$$

Q_a也叫生成内部对称性变换的生成元。

狭义相对论基本原理: 所有惯性参考系都等价+光速在所有惯性系中都不变

对称性的角度: 物理规律在非齐次洛伦兹变换下保持不变 相对性原理

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

变换参数$\Lambda^\mu{}_\nu$必须保证时空间隔的不变性 光速不变

$$g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

度规张量$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$是对角的，$g^\mu{}_\nu = g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^\mu_\nu$

$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ 度规选择与**S.Weinberg**书的选择相差一负号

时空间隔的不变性给出对变换参数$\Lambda^\mu{}_\nu$限制

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \xRightarrow{g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho = g_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu = g_{\nu\rho} g^{\mu\sigma} \Lambda^\rho{}_\sigma$$

它给出

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu (x'^\nu - a^\nu) \qquad \xRightarrow{x_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu (x'_\nu - a_\nu)} \qquad \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho g^{\sigma\rho} = g^{\mu\nu}$$

洛伦兹群

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

用$T(\Lambda, a)$代表用参数$\Lambda^\mu{}_\nu$和a^μ描述的非齐次洛伦兹变换

- 存在单位变换$T(I, 0)$, 使x^μ变换成它自己, $x'^\mu = x^\mu$.
- 对任何一个变换$T(\Lambda, a)$将x^μ变换成x'^μ, 存在逆变换 $T^{-1}(\Lambda, a) = T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ 作业1 将x'^μ变换成x^μ.
- 对两变换$T(\Lambda, a)$将x^μ变换成x'^μ和$T(\bar\Lambda, \bar a)$将x'^μ 变换成x''^μ,存在联合变换 $T(\bar\Lambda, \bar a)T(\Lambda, a) = T(\bar\Lambda\Lambda, \bar\Lambda a + \bar a)$ 作业2 将x^μ变换成x''^μ

将$\Lambda^\mu{}_\sigma\Lambda^\nu{}_\rho g^{\sigma\rho} = g^{\mu\nu}$取行列式$\Lambda^\mu{}_\sigma g^\sigma{}_\rho \Lambda_\nu{}^\rho = g^\mu{}_\nu$和取00分量

$$(\mathrm{Det}\Lambda)^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Det}\Lambda = \pm 1$$

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i \quad \longrightarrow \quad \Lambda^0{}_0 \geq +1; \ \Lambda^0{}_0 \leq -1$$

非齐次洛伦兹变换被$\mathrm{Det}\Lambda$和$\Lambda^0{}_0$的符号分为四叶:

- 第1叶: $\mathrm{Det}\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \geq +1$形成子群 作业3
- 第2叶: $\mathrm{Det}\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \geq +1$可以看成第1叶中的洛伦兹变换与空间反射变换$\mathcal{P}$的乘积 作业4 ，其中空间反射变换$\mathcal{P}$的非零元素定义为:

$$\mathcal{P}^0{}_0 = 1 \qquad \mathcal{P}^1{}_1 = \mathcal{P}^2{}_2 = \mathcal{P}^3{}_3 = -1$$

- 第3叶: $\mathrm{Det}\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \leq -1$可以看成第1叶中的洛伦兹变换与时间反演变换$\mathcal{T}$的乘积 作业5 ，其中时间反演变换$\mathcal{T}$的非零元素定义为:

$$\mathcal{T}^0{}_0 = -1 \qquad \mathcal{T}^1{}_1 = \mathcal{T}^2{}_2 = \mathcal{T}^3{}_3 = 1$$

- 第4叶: $\mathrm{Det}\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \leq -1$可以看成第1叶中的洛伦兹变换与时间反演变换$\mathcal{T}$和空间反射变换$\mathcal{P}$的联合乘积 作业6 。

无穷小行为：

在单位变换附近，变换参数可以写为

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \qquad a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$$

其中$\omega^{\mu}{}_{\nu}$和ϵ^{μ}是无穷小实参数

相应的第一叶的有限大的变换

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = (e^{\omega})^{\mu}{}_{\nu} \qquad a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$$

$\omega^{\mu}{}_{\nu}$和ϵ^{μ}可以为有限大。

限制:

$$g_{\sigma\rho} = g_{\mu\nu}(g^{\mu}{}_{\sigma} + \omega^{\mu}{}_{\sigma})(g^{\nu}{}_{\rho} + \omega^{\nu}{}_{\rho}) = g_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + O(\omega^2) \rightarrow \omega_{\sigma\rho} = -\omega_{\rho\sigma}$$

它把16个$\omega^{\mu}{}_{\nu}$实参数约束为只有6个是独立的:

三个代表坐标系之间的空间坐标架相对转动，三个代表坐标系之间的相对运动

希尔伯特空间中(不同参考系观察者对同一个态矢量描述之间的变换)： $\Psi \to U(\Lambda, a)\Psi$
其中，$U(\Lambda, a) \equiv U(T(\Lambda, a))$. 对在单位变换附近的$U(\Lambda, a)$一定是幺正算符，并且可将它写为

$$U(1+\omega, \epsilon) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\epsilon_\rho P^\rho + \cdots$$

$U(1+\omega, \epsilon)$的幺正性和$\omega_{\rho\sigma}$及ϵ_ρ为实参数要求$J^{\rho\sigma}$和P^ρ为厄米算符。

$\omega_{\rho\sigma}$对指标ρ和σ的反对称性要求$J^{\rho\sigma}$对指标ρ和σ也是反对称的

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}$$

非齐次洛伦兹变换的第1叶$\mathrm{Det}\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \geq +1$对非齐次洛伦兹变换参数
$\Lambda = e^\omega$和$a = \epsilon$可以写为：

$$U(e^\omega, \epsilon) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\epsilon_\rho P^\rho}$$

参数$\omega_{\rho\sigma}$和ϵ_ρ可以为有限大

厄米算符$J^{\rho\sigma}$和P^ρ在非齐次洛伦兹变换下的性质

$$T^{-1}(\Lambda,a)=T(\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a) \qquad T(\bar\Lambda,\bar a)T(\Lambda,a)=T(\bar\Lambda\Lambda,\bar\Lambda a+\bar a)$$

$$U(\Lambda,a)U(1+\omega,\epsilon)U^{-1}(\Lambda,a)=U\Big(\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1},\Lambda\epsilon-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a\Big)$$

准到ω和ϵ的一次幂，上式化为

$$U(\Lambda,a)[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}+\epsilon_\rho P^\rho]U^{-1}(\Lambda,a)=\frac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu}+(\Lambda\epsilon-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu$$

比较等式两边，注意到$J^{\rho\sigma}$对指标ρ和σ的反对称性质，

$$U(\Lambda,a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda,a)=\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma(J^{\mu\nu}+a^\mu P^\nu-a^\nu P^\mu)$$
$$U(\Lambda,a)P^\rho U^{-1}(\Lambda,a)=\Lambda_\mu{}^\rho P^\mu$$

对齐次洛伦兹变换（$a^\mu=0$,纯洛伦兹转动）：$J^{\rho\sigma}$是二阶张量， P^ρ是四矢量
对纯平移变换（$\Lambda^\mu{}_\nu=g^\mu{}_\nu$）：$P^\rho$是平移不变的， $J^{\rho\sigma}$不是。

对易关系

$$U(\Lambda,a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda,a)=\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma(J^{\mu\nu}+a^\mu P^\nu-a^\nu P^\mu)\qquad U(\Lambda,a)P^\rho U^{-1}(\Lambda,a)=\Lambda_\mu{}^\rho P^\mu$$

取$\Lambda^\mu{}_\nu=g^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu$ 和$a^\mu=\epsilon^\mu$,准到ω和ϵ的一阶

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}+\epsilon_\mu P^\mu,J^{\rho\sigma}]=\omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma}+\omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu}+\epsilon^\rho P^\sigma-\epsilon^\sigma P^\rho$$

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}+\epsilon_\mu P^\mu,P^\rho]=\omega_\mu{}^\rho P^\mu$$

比较等式两边$\omega_{\mu\nu}$和ϵ_μ前的量，注意$\omega_{\mu\nu}$和$J^{\mu\nu}$对指标$\mu\nu$的反对称性质

$$i[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]=g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu}+g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}$$

$$i[P^\mu,J^{\rho\sigma}]=g^{\mu\rho}P^\sigma-g^{\mu\sigma}P^\rho\qquad [P^\mu,P^\rho]=0$$

将$J^{\mu\nu}$的六个分量和P^μ的四个分量另外取名字

$$\vec{J}\equiv\{J^1,J^2,J^3\}=\{-J_1,-J_2,-J_3\}=\{-J^{23},-J^{31},-J^{12}\}\qquad H\equiv P^0$$

$$\vec{K}\equiv\{K^1,K^2,K^3\}=\{-K_1,-K_2,-K_3\}=\{-J^{10},-J^{20},-J^{30}\}\qquad \vec{P}\equiv\{P^1,P^2,P^3\}$$

$\vec{J}$是通常的角动量算符，$\vec{K}$是推进（**boost**）算符,$\vec{P}$是通常的动量算符 作业7,8

$$[J^i,J^j]=i\epsilon_{ijk}J^k\qquad [J^i,K^j]=i\epsilon_{ijk}K^k\qquad [K^i,K^j]=-i\epsilon_{ijk}J^k$$

i,j,k取值1,2,3,ϵ_{ijk}是三维全反对称张量,$\epsilon_{123}=1$

$$[J^i,P^j]=i\epsilon_{ijk}P^k\qquad [K^i,P^j]=-iH\delta_{ij}\qquad [J^i,H]=[P^i,H]=[H,H]=0\qquad [K^i,H]=+iP^i$$

对易关系续1

将$J^{\mu\nu}$的六个分量和P^μ的四个分量另外取名字

$$\vec{J} \equiv \{J^1, J^2, J^3\} = \{-J_1, -J_2, -J_3\} = \{-J^{23}, -J^{31}, -J^{12}\} \qquad H \equiv P^0$$
$$\vec{K} \equiv \{K^1, K^2, K^3\} = \{-K_1, -K_2, -K_3\} = \{-J^{10}, -J^{20}, -J^{30}\} \qquad \vec{P} \equiv \{P^1, P^2, P^3\}$$

$\vec{J}$是通常的角动量算符，$\vec{K}$是推进（**boost**）算符,$\vec{P}$是通常的动量算符作业7,8

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_{ijk}J^k \qquad [J^i, K^j] = i\epsilon_{ijk}K^k \qquad [K^i, K^j] = -i\epsilon_{ijk}J^k$$

i, j, k取值1,2,3,ϵ_{ijk}是三维全反对称张量,$\epsilon_{123} = 1$

$$[J^i, P^j] = i\epsilon_{ijk}P^k \qquad [K^i, P^j] = -iH\delta_{ij} \qquad [J^i, H] = [P^i, H] = [H, H] = 0 \qquad [K^i, H] = +iP^i$$

能、动量、角动量、推进算符的诠释

$$U(1+\omega, \epsilon) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\epsilon_\rho P^\rho + \cdots$$

- 能量H： 时间平移生成元
- 动量$\vec{P}$: 空间平移生成元
- 角动量$\vec{J}$: 空间转动生成元
- 推进$\vec{K}$: 坐标架相对运动生成元

对易关系续2

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + g^{\sigma\nu} J^{\rho\mu}$$

$$i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho} P^{\sigma} - g^{\mu\sigma} P^{\rho} \qquad [P^{\mu}, P^{\rho}] = 0$$

Pauli-Lubanski算符: $W^{\mu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{\nu} J_{\rho\sigma}$

$$W^1 = -P_0 J_{23} + P_2 J_{03} - P_3 J_{02} = P^0 J^1 + P^2 K^3 - P^3 K^2$$

$$W^2 = P_0 J_{31} + P_3 J_{01} - P_1 J_{03} = P^0 J^2 + P^3 K^1 - P^1 K^3$$

$$W^3 = -P_0 J_{12} + P_1 J_{02} - P_2 J_{01} = P^0 J^3 + P^1 K^2 - P^2 K^1$$

$$\vec{W} = P^0 \vec{J} + \vec{P} \times \vec{K} \qquad W^0 = P_1 J_{23} + P_2 J_{31} + P_3 J_{12} = \vec{P} \cdot \vec{J}$$

$$i[W^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho} W^{\sigma} - g^{\mu\sigma} W^{\rho} \qquad [P^{\mu}, W^{\rho}] = 0 \qquad P_{\mu} W^{\mu} = 0$$

$$i[W^{\mu}, W^{\nu}] = \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} W_{\rho} P_{\sigma}$$

Casimir算子: $P^{\mu} P_{\mu} \quad W^{\mu} W_{\mu}$

$$[P^{\mu} P_{\mu},\ P^{\rho}] = 0 \qquad [P^{\mu} P_{\mu}, J^{\rho\sigma}] = 0$$

$$[W^{\mu} W_{\mu},\ P^{\rho}] = 0 \qquad [W^{\mu} W_{\mu}, J^{\rho\sigma}] = 0$$

单粒子态

非齐次洛伦兹变换（至少是其第一叶$\mathrm{Det}\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \geq +1$）和某些可能的内部对称性变换是量子力学态空间应该具有的对称性

将物理态按其在非齐次洛伦兹变换下的行为分类, 此分类可以用来确定在非齐次洛伦兹变换和内部对称性变换下哪些态之间是相互联系的，哪些没有

将单粒子态定义为一组算符的本征态

能量和动量算符之间是相互对易的。而且由于时空对称性与内部对称性之间应该是没有关系的，它导致能量和动量算符应该与内部对称性变换的生成元算符$Q_a(a = 1, 2, \cdots)$对易 作业10 。一般说生成元算符Q_a之间不一定相互对易，我们考虑它其中的一个相互对易的子部分$Q_{\bar{a}}$,它们和能量动量算符之间可以有共同本征态。我们将单粒子态定义为它们的本征态$\Psi_{p,\sigma}$

$$P^\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu \Psi_{p,\sigma} \qquad Q_{\bar{a}} \Psi_{p,\sigma} = q_{\bar{a}} \Psi_{p,\sigma}$$

其中p^μ和$q_{\bar{a}}$是态$\Psi_{p,\sigma}$的能量动量和内部对称性生成元本征值。σ用来标记除能动量外所有其它的量子数(以后阐明).

σ取纯分立值的态定义为单粒子态。 $\left(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}\right) = \delta_{\sigma'\sigma}\delta(p' - p)$ 三维δ函数！

对单粒子态定义的感觉:

♣ 太简单!

♢ 没有大小的概念!

♡ 没有基本和复合(结构)的概念?

♠ 没有位置的概念?

¶ 本征态的含义?

✠ 分立性(量子性)是人为的?

纯时空平移变换$U(1,a)$是可以连续变形到单位变换的变换,

它只能是幺正算符,不可能是反幺正算符

利用

$$U(e^{\omega},\epsilon)=e^{\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}+i\epsilon_{\rho}P^{\rho}}$$

在纯时空平移变换下

$$U(1,a)\Psi_{p,\sigma}=e^{ia_{\mu}P^{\mu}}\Psi_{p,\sigma}=e^{ia_{\mu}p^{\mu}}\Psi_{p,\sigma}$$

物理诠释?

Casimir算符:

$$P^{\mu}P_{\mu}\Psi_{p,\sigma}=p^{\mu}p_{\mu}\Psi_{p,\sigma}=M^{2}\Psi_{p,\sigma}$$

$$W^{\mu}W_{\mu}\Psi_{p,\sigma}=?$$

见后!

纯时空转动变换$U(\Lambda,0)$是可以连续变形到单位变换的变换,

它只能是幺正算符,不可能是反幺正算符

定义由Λ和$a^\mu=0$导致的纯时空转动变换算符为$U(\Lambda)\equiv U(\Lambda,0)$,结合

$$U(\Lambda,a)P^\rho U^{-1}(\Lambda,a)=\Lambda_\mu{}^\rho P^\mu$$

在纯时空转动变换下

$$\begin{aligned}
P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= U(\Lambda)[U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)]\Psi_{p,\sigma}=U(\Lambda)[U(\Lambda^{-1})P^\mu U^{-1}(\Lambda^{-1})]\Psi_{p,\sigma} \\
&= U(\Lambda)(\Lambda_\rho^{-1\mu}P^\rho)\Psi_{p,\sigma}=\Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}
\end{aligned}$$

$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$是四动量本征值为$\Lambda p$的态.

单粒子态按动量进行分类

$p^2 \equiv g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$和$p^0$的符号(当$p^2 \geq 0$时)在洛伦兹变换下是不变的，并且任何两个具有同样的p^2值和p^0符号(当$p^2 \geq 0$时)的动量一定可以通过某个洛伦兹变换相联系，作业9可用这两个非齐次洛伦兹变换的不变量的取值标记不同的动量类

- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 > 0$ 描述的是有质量的正能态
- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 < 0$ 描述的是有质量的负能态
- $p^2 = 0, \quad p^0 > 0$ 描述的是无质量的正能态
- $p^2 = 0, \quad p^0 < 0$ 描述的是无质量的负能态
- $p^2 = -N^2 < 0$ 描述的是虚质量态
- $p^\mu = 0$ 描述的是真空态

$W^\mu W_\mu$以后讨论

单粒子态按动量进行分类

每类动量中引入基本参考动量k^μ,使这类动量中任意动量都可从此参考动量出发通过洛伦兹变换得到 $p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu$

$L^\mu{}_\nu(p)$依赖于动量p和参考动量k, 对的不同动量类，$k^\mu = (k^0, k^1, k^2, k^3)$选取为:

- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 > 0 \qquad k^\mu = (M, 0, 0, 0)$
- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 < 0 \qquad k^\mu = (-M, 0, 0, 0)$
- $p^2 = 0, \quad p^0 > 0 \qquad k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$ $\qquad \kappa$是频率!
- $p^2 = 0, \quad p^0 < 0 \qquad k^\mu = (-\kappa, 0, 0, \kappa)$
- $p^2 = -N^2 < 0 \qquad k^\mu = (0, 0, 0, N)$
- $p^\mu = 0 \qquad k^\mu = (0, 0, 0, 0)$

对每种参考动量k，研究使它不变的子洛伦兹变换$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$ W形成群:

- 存在单位变换$W = 1$.
- 存在逆变换W^{-1}.
- 对两个变换W'和W,存在联合变换$W" = W'W$.

Little Group W

对不同类的基本参考动量k^μ对应的W变换的内容不一定一样,它主要由参考动量为零的分量张开的空间的大小决定:

- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 > 0$ 产生3个空间坐标之间的所有转动变换和空间反射变换$k^\mu = (M, 0, 0, 0)$ 描述它的对称性群是SO(3)群
- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 < 0$ $k^\mu = (-M, 0, 0, 0)$ 同上SO(3)群
- $p^2 = 0, \quad p^0 > 0$ 产生2个空间坐标之间的所有转动变换 两维空间的反射变换可以用纯转动变换来生成 及那些不能化成纯2个空间坐标之间转动但保持$k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$不变的所有变换 对有质量的参考动量$k^\mu = (\pm M, 0, 0, 0)$,不存在这种情况，因为这时参考动量不为零的分量只有一个，不足以生成非平庸的不能化成纯3个空间坐标之间转动但保持$k^\mu = (\pm M, 0, 0, 0)$不变的变换. 描述它的对称性群是ISO(2)群

Little Group W

对不同类的基本参考动量k^μ对应的W变换的内容不一定一样,它主要由参考动量为零的分量张开的空间的大小决定:

- $p^2=0,\qquad p^0<0$ 产生**2**个空间坐标之间的所有转动变换及那些不能化成纯**2**个空间坐标之间转动但保持$k^\mu=(-\kappa,0,0,\kappa)$不变的所有变换.描述它的对称性群也是**ISO(2)群**

- $p^2=-N^2<0$ 产生**2**个空间坐标和**1**个时间坐标之间的所有转动变换和时间坐标的反演变换.描述它的对称性群是**SO(2,1)群**（**2+1**空间的洛伦兹群） $k^\mu=(0,0,0,N)$

- $p^\mu=0$ 产生**3**个空间坐标和**1**个时间坐标之间的所有转动变换及空间坐标的反射变换和时间坐标的反演变换. $k^\mu=(0,0,0,0)$描述它的对称性群是**SO(3,1)群**（**3+1**空间的洛伦兹群）

1. 对非齐次洛伦兹变换,证明$T^{-1}(\Lambda,a)=T(\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a)$.
2. 对非齐次洛伦兹变换,证明$T(\bar{\Lambda},\bar{a})T(\Lambda,a)=T(\bar{\Lambda}\Lambda,\bar{\Lambda}a+\bar{a})$.
3. 对非齐次洛伦兹变换,证明$\mathrm{Det}\Lambda=1,\Lambda^0{}_0\geq+1$这一叶形成子群。
4. 对非齐次洛伦兹变换,证明$\mathrm{Det}\Lambda=-1,\Lambda^0{}_0\geq+1$这一叶可以看成第1叶与空间反射变换$\mathcal{P}$的乘积。
5. 对非齐次洛伦兹变换,证明$\mathrm{Det}\Lambda=1,\Lambda^0{}_0\leq-1$这一叶可以看成第1叶与时间反演变换$\mathcal{T}$的乘积。
6. 对非齐次洛伦兹变换,证明$\mathrm{Det}\Lambda=-1,\Lambda^0{}_0\leq-1$这一叶可以看成第1叶与时间反演变换$\mathcal{T}$和空间反射变换$\mathcal{P}$的联合乘积。
7. 试从

$$\begin{aligned}
&i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}+\epsilon_\mu P^\mu,J^{\rho\sigma}]=\omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma}+\omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu}+\epsilon^\rho P^\sigma-\epsilon^\sigma P^\rho\\
&i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}+\epsilon_\mu P^\mu,P^\rho]=\omega_\mu{}^\rho P^\mu
\end{aligned}$$

出发证明

$$\begin{array}{lll}
[J^i,J^j]=i\epsilon_{ijk}J^k & [J^i,K^j]=i\epsilon_{ijk}K^k & [K^i,K^j]=-i\epsilon_{ijk}J^k\\
[J^i,P^j]=i\epsilon_{ijk}P^k & [K^i,P^j]=iH\delta_{ij} & \\
[J^i,H]=[P^i,H]=[H,H]=0 & & [K^i,H]=-iP^i
\end{array}$$

8. 试证明: 在下式中加入中心荷后,可以通过重新定义生成元将这些中心荷去掉.

$$\begin{aligned}
&i[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]=g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu}+g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}\\
&i[P^\mu,J^{\rho\sigma}]=g^{\mu\rho}P^\sigma-g^{\mu\sigma}P^\rho\\
&[P^\mu,P^\rho]=0
\end{aligned}$$

9. 试证明$p^2\equiv g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$和$p^0$的符号(在$p^2\geq0$时)在洛伦兹变换下是不变的，并且任何两个具有同样的p^2值和p^0符号(在$p^2\geq0$时)的动量一定可以通过某个洛伦兹变换相联系。
10. 试证明内部对称性生成元Q_a与非齐次洛伦兹群的生成元$J^{\rho\sigma}$和P^ρ对易。
11. 试证明

$$D_{\sigma'\sigma}(\overline{W}W)=\sum_{\sigma"}D_{\sigma'\sigma"}(\overline{W})D_{\sigma"\sigma}(W)$$

12. 如果对参考动量的态取正交归一条件$(\Psi_{k',\sigma'},\Psi_{k,\sigma})=\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})\delta_{\sigma'\sigma}$,证明在我们的归一化选择$N(p)=\sqrt{\frac{k^0}{p^0}}$下,参考动量态之间的正交归一条件可以推广到适用于所有单粒子态。即：$(\Psi_{p',\sigma'},\Psi_{p,\sigma})=\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})\delta_{\sigma'\sigma}$
13. 试证明参考动量的态取正交归一条件$(\Psi_{k',\sigma'},\Psi_{k,\sigma})=\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})\delta_{\sigma'\sigma}$将导致$U(W)\Psi_{k,\sigma}=\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}$中定义的矩阵$D(W)$为幺正矩阵$D^\dagger(W)=D^{-1}(W)$.
14. 试证明

$$\begin{array}{ll}
L^i_k(p)=\delta_{ik}+(\gamma-1)\hat{p}_i\hat{p}_k & L^i{}_0(p)=L^0{}_i(p)=\hat{p}_i\sqrt{\gamma^2-1}\\
L^0{}_0(p)=\gamma\equiv\dfrac{\sqrt{\vec{p}^2+M^2}}{M} & \hat{p}_i\equiv\dfrac{p^i}{|\vec{p}|}
\end{array}$$

给出的$L^\mu{}_\nu(p)$满足$g_{\mu\nu}L^\mu{}_\rho(p)L^\nu{}_\sigma(p)=g_{\rho\sigma}$和$p_\mu L^\mu{}_\nu(p)=k_\nu$.

15. 试证明对有质量的正能单粒子态,$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(e^{\Theta}) = (e^{\frac{i}{2}\Theta_{ik}J^{(j)}_{ik}})_{\sigma'\sigma}$ 给出的不可约表示$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R)$对参考动量的单粒子态$\Psi_{k,\sigma}$角动量z分量的本征态,公式$J^3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}$ 成立,并且进一步

$$(J^1 \pm iJ^2)\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\Psi_{k,\sigma\pm 1}$$

16. 试证明正能单粒子态$\Psi_{p,\sigma}$是算符T^2的本征值为$(-1)^{2j}$的本征态.(对无质量态$j = \sigma$)