信息论

——笔记整理

BarryMafu

2025 年 10 月 24 日

前言

2025 秋季，王立威教授的机器学习课程。

仍在施工中，请带好安全头盔！

BarryMafu

2025 年 10 月 24 日

目录

第一章 集中不等式 1

1.1 前置数学知识 1

1.2 Chernoff 界诱导的集中不等式 2

1.3 一则应用与推广 5

第二章 关于泛化的 VC 理论 6

2.1 机器学习的数学描述 6

2.2 有限假设空间下的结果 7

2.3 无穷假设空间下的放缩 8

2.4 VC 维度 10

附录 A 作业题目及解答 12

附录 B 学期课题 15

附录 C 往年题选及解答 16

第一章　集中不等式

1.1　前置数学知识

在介绍不等式前，先回顾一些概念. 以后会使用如下记号：

定义 1.1.1. 对于命题（或随机变量）u，定义**示性函数** *(indicator function)*

$$\mathbb{I}[u] = \begin{cases} 1 & ,u \text{ 成立} \\ 0 & ,\text{否则} \end{cases}$$

接下来，回顾一下概率论中的一些结论

定理 1.1.2. （*Markov* 不等式）随机变量 X 满足 $X \geqslant 0$，且 $\mathbb{E}[X] < \infty$，则对于任意 $k \geqslant 0$，都有

$$\Pr[X \geqslant k] \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{k}$$

定理 1.1.3. （*Chebyshev* 不等式）随机变量 X 满足 $\mathbb{E}[X] < \infty, \mathsf{Var}(X) = \sigma^2$，则对于任意 $k \geqslant 0$，都有

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant k] \leqslant \frac{\sigma^2}{k^2}$$

布置了练习：

练习 1.1.4. 已知随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$，定义

$$\Phi(t) := \Pr[X \geqslant t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-\tau^2/2} \, \mathrm{d}\tau$$

可以证明 Φ 并不是初等函数，现求一个初等函数 $f \sim \Phi$，即二者渐进等价。

推论 1.1.5.（*Markov* 不等式推论）随机变量 X，其矩 $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2], \ldots, \mathbb{E}[X^r]$ 均存在，则对于任意 $k \geqslant 0$，都有

$$\Pr[X \geqslant k] \leqslant \min_{t \in [r]} \frac{\mathbb{E}[X^t]}{k^t}$$

定义 1.1.6.（矩母函数）对于随机变量 X，定义矩母函数 *(MGT, Moment Generating Function)* 如下

$$M_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}[X^k]$$

定理 1.1.7.（*Chernoff* 界）对于随机变量 X，其矩母函数存在，则对于任意 $k \geqslant 0$

$$\Pr[X \geqslant k] \leqslant \inf_{t > 0} \frac{M_X(t)}{e^{tk}}$$

1.2 Chernoff 界诱导的集中不等式

现在考虑随机变量 $X, X_1, X_2, \cdots$ i.i.d.，服从 Bernoulli 分布 $B(1,p)$. 对于 $\delta > 0$，一方面使用 Chebyshev 不等式；另一方面使用中心极限定理 (CLT) 并结合**练习1.1.4**的结果，不难推出

$$\Pr\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geqslant \delta\right] \leqslant \begin{cases} \dfrac{p(1-p)}{n\delta^2} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right) & \text{(Chebyshev)} \\ e^{-\mathcal{O}(n)} & \text{(CLT)} \end{cases}$$

Chebyshev 仅使用了二阶矩的信息，得到的结果太松弛了. 而 CLT 利用了完整的分布信息，但其得到的结果在数学上并不严谨，因为 CLT 需要 $n \to \infty$. 接下来，我们借鉴 CLT 的方法使用 Chernoff 界给出一个紧致且严格的证明.

定理 1.2.1. 随机变量 $X, X_1, X_2, \cdots$ *i.i.d.* 服从 *Bernoulli* 分布 $B(1,p)$，则对于任意 $\delta > 0$

$$\Pr\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geqslant \delta\right] \leqslant e^{-\mathcal{O}(n)}$$

证明. 根据 Chernoff 界，有

$$\Pr\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - p \geqslant \delta\right] = \Pr\left[\sum_{i=1}^{n}X_i \geqslant n(p+\delta)\right] \leqslant \inf_{t>0} e^{-nt(p+\delta)}\mathbb{E}\left[e^{t\sum X_i}\right]$$

而计算可得

$$\mathbb{E}\left[e^{t\sum X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]\right)^n = \left(pe^t + (1-p)\right)^n$$

令 $A = e^{p+\delta}$，则有

$$\inf_{t>0} e^{-nt(p+\delta)}\mathbb{E}\left[e^{t\sum X_i}\right] = \left(\inf_{t>0}\frac{pe^t+1-p}{A^t}\right)^n = e^{-\mathcal{O}(n)}$$

至此证毕. □

下面介绍一些信息论相关的记号（熵）：

定义 1.2.2. （熵）对于随机变量 X，设其服从分布列 $p = (p_1, \ldots, p_n)$，则称其熵 *(entropy)* 为

$$H(X) := \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \text{ (bits)} = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \text{ (nats)}$$

定义 1.2.3. （相对熵，*KL* 散度）对于两个分布列 $P = (p_1, \ldots, p_n)$ 和 $Q = (q_1, \ldots, q_n)$，定义其相对熵 *(relative entropy)* 为

$$D(P\|Q) := \sum_{i=1}^{n} p_i \log\frac{p_i}{q_i}$$

定义 1.2.4. （*Bernoulli* 相对熵）对于两个 *Bernoulli* 分布的分布列 $P = (p, 1-p), Q = (q, 1-q)$，定义其 *Bernoulli* 相对熵为

$$D_{\mathrm{B}}(p\|q) := D(P\|Q)$$

有了这个定义，我们可以将**定理1.2.1**定量地写成

定理 1.2.5.（*Chernoff*）随机变量 $X, X_1, X_2, \cdots$ *i.i.d.* 服从 *Bernoulli* 分布 $B(1,p)$，则对于任意 $\delta > 0$

$$\Pr\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geqslant \delta\right] \leqslant e^{-n \cdot D_{\mathrm{B}}(p+\delta \| p)}$$

注意到如果 $\mathbb{E}[X] = p$ 且 $X \in [0,1]$，那么根据 Jensen 不等式有

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}[e^{t(X\cdot 1+(1-X)\cdot 0)}] \leqslant \mathbb{E}[Xe^{t\cdot 1}] + \mathbb{E}[(1-X)e^{t\cdot 0}] = pe^t + 1 - p$$

所以套用之前的方法能得到更普适的结果：

推论 1.2.6.（*Chernoff*）随机变量 $X, X_1, X_2, \cdots$ *i.i.d.* 满足 $X \in [0,1]$ 且 $\mathbb{E}[X] = p$，则对于任意 $\delta > 0$

$$\Pr\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geqslant \delta\right] \leqslant e^{-n \cdot D_{\mathrm{B}}(p+\delta \| p)}$$

事实上，继续使用 Jensen 不等式能否给出更宽泛的结果：

推论 1.2.7. 随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 两两独立，满足 $X_i \in [0,1]$. 记 $p_i = \mathbb{E}[X_i]$，$p = \frac{1}{n}\sum_i p_i$，则对于任意 $\delta > 0$

$$\Pr\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geqslant \delta\right] \leqslant e^{-n \cdot D_{\mathrm{B}}(p+\delta \| p)}$$

究其本质而言，这是由于中心极限定理保证了均值的分布趋于正态分布. 而正态分布的“拖尾”是指数级下降的，因而保证了整体指数级集聚.

另外，在实际应用当中，我们常常做放缩 $D_{\mathrm{B}}(p+\delta \| p) \geqslant 2\delta^2$. 这个放缩在 $p \approx \frac{1}{2}$ 时较为接近，而在 $p \approx 0$ 或 1 时较为松弛.

Chernoff 界还有一个著名的推广：

定理 1.2.8.（*Heoffding* 不等式）设随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 两两独立,满足 $X_i \in [a_i, b_i]$（其中 $-\infty < a_i < b_i < \infty$）. 记 $p_i = \mathbb{E}[X_i]$，$p = \frac{1}{n}\sum_i p_i$，则对于任意 $\delta > 0$

$$\Pr\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geqslant \delta\right] \leqslant \exp\left\{\frac{2n^2\delta^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right\}$$

值得强调的是，**独立**是集中不等式成立的重要条件，如果没有该条件（例如取 $X_1 = X_2 = \cdots$）那么平均分布就是原分布，并不会出现“集中”性的表现.

1.3 一则应用与推广

考虑这样一个场景：有 N 个比特（可考虑成球），$a_1, a_2, \ldots, a_N$ $(a_i \in \{0,1\})$. 现在希望随机抽取 n 次，我们有两种抽取方式：有放回 (draw with replacement) 和无放回 (draw without replacement). 我们记有放回的结果为 $X_1, \ldots, X_n$；无放回的结果为 $Y_1, \ldots, Y_n$.

对于有放回的情形 $\{X_i\}$，每次抽取都是独立同分布的 Bernoulli 采样，因此可以归约到 Chernoff 界. 但对于无放回的情形 $\{Y_i\}$，还有没有集中不等式呢？注意到这里我们打破了独立这一条件，$\{Y_i\}$ 之间应该是负相关的（直觉上也是容易想见的）.

不妨来比较 $\{X_i\}$ 和 $\{Y_i\}$ 的收敛情况，用一步 Chernoff 不等式，我们实际上希望比较

$$\mathbb{E}\left[e^{t(X_1+\cdots+X_n)}\right] \quad 和 \quad \mathbb{E}\left[e^{t(Y_1+\cdots+Y_n)}\right]$$

可以证明右式是小于等于左式的，意味着 $\{Y_i\}$ 有着更强的集中（收敛）性. 具体细节太繁琐了，以下是证明的大致思路：

$$\mathbb{E}\left[e^{t(X_1+\cdots+X_n)}\right] = 1 + t\sum_i \mathbb{E}[X_i] + \frac{t^2}{2}\sum_{i,j}\mathbb{E}[X_iX_j] + \frac{t^3}{6}\sum_{i,j,k}\mathbb{E}[X_iX_jX_k] + \cdots$$

$$\mathbb{E}\left[e^{t(Y_1+\cdots+Y_n)}\right] = 1 + t\sum_i \mathbb{E}[Y_i] + \frac{t^2}{2}\sum_{i,j}\mathbb{E}[Y_iY_j] + \frac{t^3}{6}\sum_{i,j,k}\mathbb{E}[Y_iY_jY_k] + \cdots$$

零阶和一阶项都是一样的，来关注二阶项. 其中形如 $\mathbb{E}[X_i^2]$ 和 $\mathbb{E}[Y_i^2]$ 的项是一样的，故只需比较

$$\sum_{i<j}\mathbb{E}[X_iX_j] \quad 和 \quad \sum_{i<j}\mathbb{E}[Y_iY_j]$$

而对于任意的 $i<j$ 都有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_iY_j] &= \Pr[Y_i=1, Y_j=1] = \Pr[Y_i=1]\Pr[Y_j=1|Y_i=1] \\ &\leqslant \Pr[Y_i=1]\Pr[Y_j=1] = \Pr[X_i=1]\Pr[X_j=1] = \mathbb{E}[X_iX_j]\end{aligned}$$

于是便可以证明原不等式，进而给出了 $\{Y_i\}$ 的集中不等式.

第二章　关于泛化的 VC 理论

泛化，指的是学习到的模型对于未知数据的预测能力. 半世纪前，Vapnik-Chervonenkis 理论（简称 VC 理论）被提出，尝试从数学角度定量地刻画了所谓泛化能力. 值得一提，现如今 VC 理论被指出并不能完整地刻画“泛化”，即仍有该理论未囊括的额外因素，但其思想是重要且值得介绍的.

2.1　机器学习的数学描述

首先介绍一个基本概念：

定义 2.1.1.（模型，函数类，假设空间）给定输入空间 $\mathcal{X}$ 和输出空间 $\mathcal{Y}$，那么由其确定的模型 *(Model)*，函数类 *(Function Class)* 或假设空间 *(Hypothesis Space)*（这三者是同义词）为

$$\mathcal{F} = \{f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}\}$$

例如：全体二次函数、线性函数或 CNN 都可以叫做模型.

现在考虑一个简单的有监督学习的模型，有数据集 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$，其中 $x_i \in \mathcal{X}, y_i \in \mathcal{Y}$，所有数据 i.i.d. 且服从 $D_{X,Y}$. 我们称每个 x_i 为**实例** (instance)，每个 y_i 为**标签** (label).

有了数据，便要进行训练. 这里便可以看出假设空间的重要性了，我们总是在假设空间中进行学习，而非天马行空毫无约束. 记假设空间为 $\mathcal{F}$，现在我们要选择 $\hat{f} \in \mathcal{F}$ 使得其在数据集 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ 上有一个较小的损失 (loss) 或误差 (error).

那么如何评判 $\hat{f}$ 的好坏？一个直观上的评估就是在 $D_{X,Y}$ 上的错误率.

定义 2.1.2. *（训练误差）有监督学习的情况下，对于数据集 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ 和假设 $\hat{f}$，训练误差 (Training Error) 为*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}[y_i \neq \hat{f}(x_i)]$$

定义 2.1.3. *（泛化误差）有监督学习的情况下，设数据 (X, Y) 服从分布 $D_{X,Y}$，对于假设 $\hat{f}$，泛化误差 (Generalization Error) 为*

$$\Pr_{(X,Y)\sim D_{X,Y}}\left[Y \neq \hat{f}(X)\right]$$

自然地，我们可以得到泛化差距

定义 2.1.4. *承之前所有记号，$\hat{f}$ 的泛化差距 (Generalization Gap) 为*

$$\Pr_{(X,Y)\sim D_{X,Y}}\left[Y \neq \hat{f}(X)\right] - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}[y_i \neq \hat{f}(x_i)]$$

如果我们记 $Z_i := \mathbb{I}[y_i \neq \hat{f}(x_i)]$ 以及 $Z := \mathbb{I}[Y \neq \hat{f}(X)]$. 那么泛化差距就可以写成 $\mathbb{E}[Z] - \frac{1}{n}\sum_i Z_i$. 由于每个 Z_i 和 Z 都服从某个 Bernoulli 分布，这看起来似乎就像是我们在前一章集中不等式当中描述的样子. 那么泛化差距应该随着数据集的大小 n 的增长指数级收敛至 0. 也就意味着泛化永远成立？但事实并非如此，这个 $\hat{f}$ 是由 $\mathcal{D} := \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ 确定的，因此 $\hat{f}$ 依赖于 $\mathcal{D}$. 此时 $Z_1, \ldots, Z_n$ 根本不独立，甚至某些程度上正相关，因此不能应用 Chernoff 界.（另外，回忆一下 **1.3 节**中负相关才能放缩，正相关时不一定成立）

接下来探讨何时泛化差距会比较小.

2.2　有限假设空间下的结果

先来考虑假设空间 $\mathcal{F}$ 是有限集的情况（$|\mathcal{F}| < \infty$）. 请注意该情况是过于简化的，因为线性模型都是无穷集. 记 $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_{|\mathcal{F}|}\}$，考虑算法最差的情况下对于任意 $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&\Pr_{\text{worst case}}\left[\Pr_{(X,Y)\sim D_{X,Y}}\left[Y\neq\hat{f}(X)\right]-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}[y_i\neq\hat{f}(x_i)]\geqslant\varepsilon\right]\\
\leqslant&\sum_{j=1}^{|\mathcal{F}|}\Pr\left[\Pr_{(X,Y)\sim D_{X,Y}}[Y\neq f_j(X)]-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}[y_i\neq f_j(x_i)]\geqslant\varepsilon\right]\\
\leqslant&|\mathcal{F}|\cdot e^{-2n\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

可以看到 $\mathcal{F}$ 有限时泛化误差几乎必然随着 n 增大而收敛到一个较小的值. 但这样的分析不足以支撑 $|\mathcal{F}|$ 是无穷的情况，这就需要使用 VC 理论了.

2.3　无穷假设空间下的放缩

现在考虑 $|\mathcal{F}|=\infty$ 的情况，依旧有

$$
\Pr_{\text{worst case}}\left[\Pr_{(X,Y)\sim D_{X,Y}}\left[Y\neq\hat{f}(X)\right]-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}[y_i\neq\hat{f}(x_i)]\geqslant\varepsilon\right] \tag{2.1}
$$

$$
\leqslant\Pr\left[\sup_{f\in\mathcal{F}}\Pr_{(X,Y)\sim D_{X,Y}}[Y\neq f(X)]-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}[y_i\neq f(x_i)]\geqslant\varepsilon\right] \tag{2.2}
$$

我们想区分假设空间的大小关系（需要一个比基数更好的度量方式），例如五次函数类应该比线性函数类要大. 逐步来讨论，先证明一个引理

引理 2.3.1. 设 $X,X_1,\ldots,X_n,X_{n+1},\ldots,X_{2n}$ 是 *i.i.d* 的随机变量且服从 *Bernoulli* 分布. 记 $\nu_1=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,\nu_2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=n+1}^{2n}X_i$，并设 $\mathbb{E}[X]=p$. 若 $n>\varepsilon^{-2}\ln 2$，则

$$
\frac{1}{2}\Pr\left[|\nu_1-p|\geqslant 2\varepsilon\right]\leqslant\Pr\left[|\nu_1-\nu_2|\geqslant\varepsilon\right]\leqslant 2\Pr\left[|\nu_1-p|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right]
$$

证明. 我们分两部分证明.

① 右半式较为简单，若 $|\nu_1-\nu_2|\geqslant\varepsilon$，那么必然有 $|\nu_1-p|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 或 $|\nu_2-p|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$，而后面二者概率相等，故

$$
\Pr\left[|\nu_1-\nu_2|\geqslant\varepsilon\right]\leqslant 2\Pr\left[|\nu_1-p|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right]
$$

② 再来看左半式，由于 ν_1 和 ν_2 是两个独立的随机变量，所以

$$\begin{aligned}\Pr\left[\,|\nu_1-\nu_2|\geqslant\varepsilon\right] &\geqslant \Pr\left[\,|\nu_1-p|\geqslant 2\varepsilon, |\nu_2-p|\leqslant\varepsilon\right]\\ &= \Pr\left[\,|\nu_1-p|\geqslant 2\varepsilon\right]\cdot\Pr\left[\,|\nu_2-p|\leqslant\varepsilon\right]\end{aligned}$$

而根据集中不等式**定理1.2.5**（加上放缩）可知

$$\Pr\left[\,|\nu_2-p|\leqslant\varepsilon\right]\geqslant 1-e^{-2n\varepsilon^2}\geqslant\frac{1}{2}$$

综上证毕. □

以上引理称作双重样本技巧 (Double Sample Trick)，使用该技巧可以将**公式2.2**进一步放缩为

$$\leqslant 2\Pr_{(x_i,y_i)_{i=1}^{2n}}\left[\sup_{f\in\mathcal{F}}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}[y_i\neq f(x_i)]-\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n}\mathbb{I}[y_i\neq f(x_i)]\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

现在不等式的形式看起来简单许多，记 $z_i := (x_i, y_i)$，及 $\phi_f(z_i) := \mathbb{I}[y_i \neq f(x_i)]$. 这个形式是极度对称的，想象我们施加一个随机的置换 $\sigma\in S_{2n}$，得到 $z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)},\dots,z_{\sigma(2n)}$，这边的前 n 项和后 n 项还是和原来一样 i.i.d，所以我们可以将上式展开成期望：

$$\begin{aligned}&\Pr_{z_1,\dots,z_{2n}}\left[\sup_{f\in\mathcal{F}}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_f(z_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n}\phi_f(z_i)\geqslant\varepsilon'\right]\\ =&\mathbb{E}_{z_1,\dots,z_{2n}}\left[\Pr_{\sigma\in S_{2n}}\left[\sup_{f\in\mathcal{F}}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_f(z_{\sigma(i)})-\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n}\phi_f(z_{\sigma(i)})\geqslant\varepsilon'\right]\right]\end{aligned}$$

抛开期望来看，考虑中间的概率，可以看作取定了数据 $\{z_i\}$，再随机打乱 (shuffle). 而随机打乱也可以看成逐个不放回地取出，即**小节1.3**的内容，应用该结论可知如果没有 sup 号的话，有 $\Pr\leqslant e^{-\mathcal{O}(n\varepsilon^2)}$.

引入记号：

$$N^{\mathcal{F}}(z_1,\dots,z_m) := \left|\left\{(\phi_f(z_1),\dots,\phi_f(z_m)) : f\in\mathcal{F}\right\}\right|$$

值得注意，由于集合中的每个元素可看作 0-1 比特串，故该集合显然有限. 这样一来就解决了放缩 sup 时问题，于是原期望可以进一步放缩

$$\leqslant \mathbb{E}_{z_1,\dots,z_{2n}}\left[N^{\mathcal{F}}(z_1,\dots,z_{2n})\cdot \Pr_{\sigma\in S_{2n}}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_f(z_{\sigma(i)})-\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n}\phi_f(z_{\sigma(i)})\geqslant\varepsilon'\right]\right]$$
$$\leqslant \mathbb{E}_{z_1,\dots,z_{2n}}\left[N^{\mathcal{F}}(z_1,\dots,z_{2n})\cdot e^{-\mathcal{O}(n\varepsilon'^2)}\right]$$
$$= e^{-\mathcal{O}(n\varepsilon'^2)}\mathbb{E}_{z_1,\dots,z_{2n}}\left[N^{\mathcal{F}}(z_1,\dots,z_{2n})\right]$$

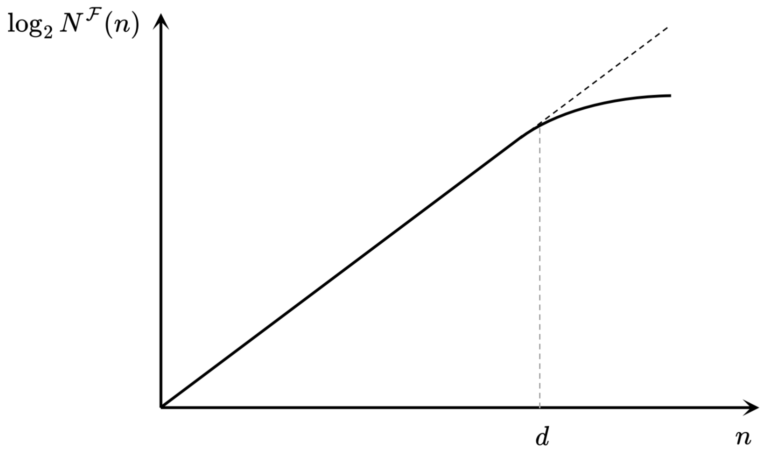
继续使用记号简化，记

$$N^{\mathcal{F}}(m):=\max_{z_1,\dots,z_m}N^{\mathcal{F}}(z_1,\dots,z_m)$$

最终可以给出**原式2.2**的一个上界 $2N^{\mathcal{F}}(2n)e^{-\mathcal{O}(n\varepsilon^2)}$.

2.4 VC 维度

很显然 $N^{\mathcal{F}}(n)\leqslant 2^n$，但可能从某一刻起可能就无法取到上界，变成 $N^{\mathcal{F}}(n)<2^n$（如下图）. 下面具体讨论这一现象.



我们设 d 是使得 $N^{\mathcal{F}}(n)=2^n$ 成立的 n 的上确界. 现在想要对于 $n>d$ 给出 $N^{\mathcal{F}}(n)$ 的一个上界. 我们可以不妨考虑 0^{d+1} 不能被取到的情况，直接得到以下命题（至于为什么可以如此不妨假设，等待之后详细补充，现暂时留作思考）

命题 2.4.1. 对于 $n > d$，有

$$N^{\mathcal{F}}(n) \leqslant \sum_{k=0}^{d} \binom{n}{k} = \mathcal{O}(n^d)$$

下面正式给出 VC 维度的定义

定义 2.4.2. （VC 维度）我们称 d 为假设空间 $\mathcal{F}$ 的 VC 维度 *(dimension)*，如果存在 $x_1, \ldots, x_d$ 使得

$$\left|\left\{(f(x_1), \ldots, f(x_d)) : f \in \mathcal{F}\right\}\right| = 2^d$$

但对于任意的 $x_1, \ldots, x_{d+1}$ 都有

$$\left|\left\{(f(x_1), \ldots, f(x_{d+1})) : f \in \mathcal{F}\right\}\right| < 2^{d+1}$$

不妨通过一个例子来感受，该例子成为了习题，详见**附录A**：

练习 2.4.3. 记

$$\mathcal{F} = \left\{\mathrm{sgn}(\boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{x} + b) : \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}\right\}$$

其中 $\mathrm{sgn}(\cdot)$ 是符号函数，定义为

$$\mathrm{sgn}(z) = \begin{cases} 1 & , z > 0 \\ -1 & , z \leqslant 0 \end{cases}$$

试证明：$\mathcal{F}$ 的 VC 维度是 $d+1$.

附录 A　作业题目及解答

练习 A.1. 已知随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$，定义

$$\Phi(t) := \Pr[X \geqslant t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-\tau^2/2}\,\mathrm{d}\tau$$

可以证明 Φ 并不是初等函数，现求一个初等函数 $f \sim \Phi$，即二者渐进等价。

分析　先分析一下这个问题：显然 $\Phi(t) \to 0$，所以要 $f \to 0$. 现在 Φ 的形式非初等不便于分析，不妨考虑 $\Phi'(t) = \varphi(t)$，为此可以运用 L'Hospital 法则：

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi(t)}{f(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi'(t)}{f'(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-Ce^{-t^2/2}}{f'(t)}$$

其中 C 是某常数. 我们希望 $f \sim \Phi$，也就是上述极限为 1，所以为了化简，我们希望 $f'(t)$ 中也出现 $e^{-t^2/2}$ 的形式. 回忆到

$$v(x)e^{u(x)} = \Big(v'(x) + u'(x)v(x)\Big) \cdot e^{u(x)}$$

因此我们不妨设 $f(t)$ 形如 $g(t)e^{-t^2/2}$，此时

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-Ce^{-t^2/2}}{f'(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-Ce^{-t^2/2}}{\big[g'(t) - tg(t)\big] \cdot e^{-t^2/2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-C}{g'(t) - tg(t)}$$

欲使上式为 1，就要

$$\lim_{t\to+\infty} tg(t) - g'(t) = \frac{1}{C}$$

简便起见只考虑 $C = 1$，之后再给 g 乘上系数. 注意！这里千万不要把其当作 $-g'(t) + tg(t) = 1$ 这样的一阶线性常微分方程求解，因为其解不保证初等. 如果你尝试求解 ODE 会发现解得 $f = \Phi$ 确实不初等. 在这里，我们只需要考虑到 $t \to +\infty$，所以我们令 $g(t) = t^{-1}$ 即合意.

解答. 构造初等函数

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-t^2/2}}{t}$$

根据 L'Hospital 法则，可以验证

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\Phi(t)}{f(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\Phi'(t)}{f'(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-e^{-t^2/2}}{\left(-\frac{1}{t^2}-t\cdot\frac{1}{t}\right)e^{-t^2/2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+t^2}{t^2}=1$$

因此 f 和 Φ 渐进等价. ■

事实上，我们上面给出的是 Mills 渐近展开的首项，完整的是：

$$\Phi(t)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}+\frac{1\cdot 3}{x^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^7}+\cdots\right)$$

练习 A.2. 记

$$\mathcal{F}=\left\{\operatorname{sgn}(\boldsymbol{w}^\top\cdot\boldsymbol{x}+b):\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^d,b\in\mathbb{R}\right\}$$

其中 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 是符号函数，定义为

$$\operatorname{sgn}(z)=\begin{cases}1 & ,z>0\\ -1 & ,z\leqslant 0\end{cases}$$

试证明：$\mathcal{F}$ 的 VC 维度是 $d+1$.

证明. 记 $f_{w,b}(\boldsymbol{x})=\operatorname{sgn}(\boldsymbol{w}^\top\cdot\boldsymbol{x}+b)\in\mathcal{F}$. 我们分两部分来证明：

① 现取一组 $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{d+1}$ 使得其可以在 $\mathcal{F}$ 下取到任意 $d+1$ 维比特串. 令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1&=(1,0,\ldots,0,0)^\top\\ \boldsymbol{x}_2&=(0,1,\ldots,0,0)^\top\\ &\vdots\\ \boldsymbol{x}_d&=(0,0,\ldots,0,1)^\top\\ \boldsymbol{x}_{d+1}&=(0,0,\ldots,0,0)^\top\end{aligned}$$

那么对于任意的 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_{d+1})\in\{\pm1\}^{d+1}$，取

$$\boldsymbol{w}_0=2\boldsymbol{y}_{1:d}^{\top}=(2y_1,\ldots,2y_d)^{\top},\quad b_0=y_{d+1}$$

则由于 $\boldsymbol{y}$ 的各个元素取值于 $\{\pm1\}$，不难证明

$$f_{\boldsymbol{w}_0,b_0}(\boldsymbol{x}_j)=\operatorname{sgn}(\boldsymbol{w}_0^{\top}\boldsymbol{x}_j+b_0)=\operatorname{sgn}(2y_j+y_{d+1})=y_j\qquad,j=1,\ldots,d$$

$$f_{\boldsymbol{w}_0,b_0}(\boldsymbol{x}_{d+1})=\operatorname{sgn}(\boldsymbol{w}_0^{\top}\mathbf{0}+b_0)=\operatorname{sgn}(y_{d+1})=y_{d+1}$$

至此我们说明对于任意 $d+1$ 维比特串，都存在 $f\in\mathcal{F}$ 使得 $(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{d+1})$ 在 f 的像是该比特串.

② 对于任意 $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{d+2}$，往证明一定有其取不到的比特串，不妨假设这些向量没有完全相同的，否则易证. 再不妨假设 $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{d+2}$ 均是在 d 维空间中的向量，可不妨假设 $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{d+1}$ 都不是零向量，那么根据向量空间基本定理可知这些向量线性相关，即存在一组不全为零的实数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{d+1}$ 使得

$$\sum_{j=1}^{d+1}\lambda_j\cdot\boldsymbol{x}_j=\mathbf{0}$$

现在任取 $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^d,b\in\mathbb{R}$，我们知道

$$\sum_{j=1}^{d+1}\lambda_j\cdot\left(\boldsymbol{w}^{\top}\boldsymbol{x}_j+b\right)=b\cdot\sum_{j=1}^{d+1}\lambda_j \tag{A.1}$$

因此，若 $b\cdot\sum\lambda_j>0$，则以下式子不可能取到（否则A.1 式左侧 $\leqslant 0$）

$$\left(f_{\boldsymbol{w},b}(\boldsymbol{x}_1),\ldots,f_{\boldsymbol{w},b}(\boldsymbol{x}_{d+1})\right)=\left(-\operatorname{sgn}(\lambda_1),\ldots,-\operatorname{sgn}(\lambda_{d+1})\right)$$

而若 $b\cdot\sum\lambda_j\leqslant 0$，则以下式子不可能取到（否则A.1 式左侧 >0）

$$\left(f_{\boldsymbol{w},b}(\boldsymbol{x}_1),\ldots,f_{\boldsymbol{w},b}(\boldsymbol{x}_{d+1})\right)=\left(\operatorname{sgn}(\lambda_1),\ldots,\operatorname{sgn}(\lambda_{d+1})\right)$$

至此我们说明了一定存在取不到的 $d+2$ 维比特串.

综上所述，我们证明了 $\mathcal{F}$ 的 VC 维度是 $d+1$. □

附录 B　学期课题

附录 C　往年题选及解答