ALGEBRA - Zestaw 3: Struktury algebraiczne

Zad 1) Sprawdź jakie własności mają w $\mathbb{Z}$ nestępujące działania:
$a \circ b = a - b, \quad a \circ b = a^2 + b^2, \quad a \circ b = 2(a+b), \quad a \circ b = -a - b.$

Zad 2) W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie: $x \circ y := x + y + xy$. Czy $(\mathbb{R}, \circ)$ jest grupą? Czy jest grupą para $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$?

Zad 3) W zbiorze liczb całkowitych określamy działanie: $x \circ y := x + y + 2$. Czy $(\mathbb{Z}, \circ)$ jest grupą?

Zad 4) Które z następujących zbiorów liczb są grupami:
a) liczby wymierne ze względu na dodawanie; ze względu na mnożenie,
b) liczby niewymierne ze względu na dodawanie; ze względu na mnożenie,
c) liczby zespolone o module równym 1 ze względu na mnożenie,
d) liczby zespolone o module równym 1 ze względu na następujące działanie: $z_1 \circ z_2 = |z_1| z_2$,
e) liczby całkowite ze względu na odejmowanie.

Zad 5) Niech E_n będzie zbiorem wszystkich pierwiastków n-tego stopnia (w $\mathbb{C}$) z jedności. Udowodnij, że $(E_n, \cdot)$ jest grupą.

Zad 6) Niech D będzie zbiorem wszystkich całkowitych potęg liczby 2. Sprawdź (i uzasadnij) czy struktura $(D, \circ)$, gdzie $a \circ b := \frac{a \cdot b}{2}$, jest grupą.
Czy struktura ta byłaby grupą, gdyby D było zbiorem całkowitych potęg liczby „-2" (a działanie się nie zmieniło)?

Zad7) Niech $\triangle$ ozacza różnicę symetryczną, tj., dla dowolnych zbiorów A i B, $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Sprawdź, czy dla dowolnie ustalonego zbioru $X \neq \emptyset$, para $(2^X, \triangle)$ jest grupą abelową.

Zad 8) Niech $(G, *)$ będzie grupą z elementem neutralnym e taką, że: $a * a = e$ dla każdego $a \in G$. Wykaż, że $(G, *)$ jest grupą abelową.

Zad 9) Czy następujące zbiory są ciałami ze względu na dodawanie i mnożenie:
a) $\{a + b\sqrt[3]{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$;
b) liczby wymierne, które nie są całkowite;
c) zbiór liczb zespolonych postaci $a + ib\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$.

Zad 10) W zbiorze $\mathbb{Z}/k$ (tj. zbiorze ilorazowym ze względu na relację przystawania modulo k) określamy działania $+, \cdot$ następująco:
$$[a] + [b] = [a + b], \qquad [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$
a) Sprawdź, czy $(\mathbb{Z}/12, +, \cdot)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką ale z dzielnikami zera;
b) Wykaż, że $(\mathbb{Z}/7, +, \cdot)$ jest pierścieniem całkowitym.

Zad 11) a) Wykaż, że zbiór $A = \{x = a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem;
b) Wykaż, że zbiór $B = \{x = a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem;

c) Udowodnij, że odwzorowanie $f : x = a + b\sqrt{3} \to \tilde{x} = a - b\sqrt{3}$ jest automorfizmem pierścienia $(A, +, \cdot)$ w siebie.

Zad 12) Dla danego zbioru $X \neq \emptyset$, definiujemy strukturę $(2^X, \triangle, \cap)$, gdzie „$\triangle$" oznacza różnicę symetryczną, a „$\cap$" – przecięcie zbiorów. Sprawdź, czy ta struktura jest:
- pierścieniem?
- pierścieniem przemiennym?
- pieścieniem z jednością?
- pierścieniem całkowitym?
- ciałem?

Zad 13) W zbiorze $\mathbb{R}^2$ wprowadzamy działania: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 + py_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ struktura $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ jest ciałem?

Zad 14) a) Wykaż, że zbiór $A = \{x = m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ jest grupą ze względu na dodawanie;
b) Wykaż, że zbiór $B = \{x = 2^n3^m : m, n \in \mathbb{Z}\}$ jest grupą ze względu na mnożenie;
c) Udowodnij, że A i B są izomorficzne.