**ALGEBRA - Zestaw 4: Przestrzenie wektorowe**

**Zad 1)** Niech $A = \{0, 1\}$. W zbiorze $A$ określamy działanie $\oplus$ przyjmując: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$, oraz działanie $\odot$ przyjmując: $0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0$, $1 \odot 1 = 1$.
a) Sprawdź, że $(A, \oplus, \odot)$ jest ciałem.
W zbiorze $A^2$ określamy działanie dodawania jako: $(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d)$, oraz mnożenie przez elementy z ciała $A$ następująco: $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b)$.
b) Sprawdź, czy $(A^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem $A$.
c) Wykaż, że przestrzeń $A^2$ posiada dokładnie pięć podprzestrzeni.

**Zad 2)** Sprawdź, które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
a) $A = \{(x, y, z) : x + y + z = a, a \in \mathbb{R}\}$ b) $B = \{(x, y, z) : x \geqslant 0\}$
c) $C = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$ d) $D = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$
e) $E = \{(x, y, z) : x = 2y \wedge z = 0\}$ f) $F = \{(x, y, z) : 3x+2y-8z = 0\}$

**Zad 3)** Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są jej podprzestrzeniami:
a) $A = \{f : f(2) = f(7)\}$ b) $B = \{f : f(7) = 2 + f(1)\}$
c) $C = \{f : f(x_0) = 3\}$

**Zad 4)** Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}[x]$ (przestrzeń wielomianów nad ciałem $\mathbb{R}$) są jej podprzestrzeniami:
a) $A = \{w : w(0)w(1) = 0\}$ b) $B = \{w : \text{ stopień } w \leqslant 6\}$
c) $C = \{w : \text{ stopień } w = 6\}$ d) $D = \{w : w(x) \text{ jest podzielne przez } x^2 + 1\}$

**Zad 5)** Zbadaj, które z układów wektorów należących do $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne:
a) $B_1 : (1, 4, 3), (-1, 2, 1), (0, 6, 4)$,
b) $B_2 : (2, 3, -1), (2, 0, 0), (0, 3, 1)$,
c) $B_3 : (2, -7, 2), (0, 2, 4), (2, -1, 5)$.
Znajdź współrzędne wektora $(1, 1, 1)$ względem tych $B_i$, które stanowią bazę w $\mathbb{R}^3$.

**Zad 6)** Sprawdź liniową zależność wektorów $\sqrt{2}$ i 2 w przestrzeni $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{Q}$ oraz w przestrzeni $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

**Zad 7)** Dla jakiej wartości parametru $k$ wektor $v = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ jest kombinacją liniową wektorów $u_1 = (1, 1, 1)$ i $u_2 = (1, 2, 3)$?

**Zad 8)** Sprawdź, czy następujące funkcje są liniowo niezależne w przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

a) $f = Id$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \cos x$;
b) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \cos x$, $p(x) = \sin^2 x$, $q(x) = \cos^2 x$.

**Zad 9)** W $\mathbb{R}^3$ dane są trzy wektory: $u = (0, 1, -1)$, $v = (-1, 0, 1)$, $w = (1, -1, 0)$.
a) Wykaż, że wektory te są parami niezależne.
b) Czy układ wektorów $u, v, w$ jest liniowo niezależny?
c) Podaj wymiar oraz bazę podprzestrzeni generowanej przez te wektory.

**Zad 10)** Udowodnij, że zbiór: $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2-3x_3-3x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wyznacz bazę tej podprzestrzeni oraz bazy podprzestrzeni z zadania 2.

**Zad 11)** Dane są dwa układy wektorów: $B_1 : (1, i, 1+i), (i, -1, 2-i), (0, 0, 3)$ i $B_2 : (2i, 1, 0), (2, -i, 1), (0, 1 + i, 1 - i)$.
a) Sprawdź, czy któryś z tych układów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ lub $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$.
b) Jaki wymiar mają przestrzenie $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$ i $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$?
c) Znajdź współrzędne wektora $(1, 0, 1)$ w bazie z podpunktu a).

**Zad 12)** Niech będzie dana następująca podprzestrzeń $U$ przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ (tj. przestrzeni $\mathbb{C}^2$ nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$), gdzie $p$ jest pewną liczbą rzeczywistą:
$$U := \text{Lin}\{(pi, (p - 1)i), (p - 2 - pi, p), (-1 - pi, 2p)\}.$$
Zbadaj dla jakich wartości parametru rzeczywistego $p$, zachodzi:
$$(3 - 2p, p - 1 + (1 - p)i) \in U.$$
Dla wszystkich takich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, wyznacz dim$U$.

**Zad 13)** Wyznacz bazę przesztrzeni $(P_{2n}, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie $P_{2n} := \{w \in \mathbb{R}[x]_{2n} : w(x) = w(-x)\}$.

**Zad 14)** W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]_2$ dana jest baza $B_1 = (1, x, x^2)$. Wykaż, że układ $B_2 = (1, x - 2, (x - 2)^2)$ stanowi bazę $\mathbb{R}[x]_2$. Podaj współrzędne wielomianu $P(x) = 2x^2 + 3$ względem obu baz. Czy zbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = p'(0)\}$ stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni? Jeżeli tak, wyznacz jej bazę i wymiar.

**Zad 15)** Wykaż, że zbiór liczb postaci $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} + e\sqrt{12} : a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}\}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem liczb wymiernych. Znajdź bazę tej przestrzeni.

**Zad 16)** Wiedząc, że wektory $u, v, w$ stanowią bazę przestrzeni liniowej $V$ (nad ciałem $\mathbb{R}$), zbadaj, który z poniższych układów także stanowi jej bazę:
a) $B_1 = (u-2v+w, 3u+w, u+4v-w)$, b) $B_2 = (u, 2u+v, 3u-v+4w)$.

Wyznacz współrzędne wektora $a = 2u - 3v + 8w$ względem tej bazy.

**Zad 17)** Wykaż, że dla dowolnych $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ takich, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, wielomiany $w_0, w_1, \dots, w_n$, zdefiniowane jako:

$$w_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$.

**Zad 18)** Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a $V_1, V_2$ będą podzbiorami $V$ składającymi się, odp., z odwzorowań nieparzystych oraz parzystych. Wykaż, że $V_1, V_2$ są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej $V$ oraz, że $V = V_1 \oplus V_2$.

**Zad 19)** Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Oznaczmy przez $F_a$ zbiór odwzorowań zerujących się w punkcie $a$.
a) Wykaż, że $F_a$ jest podprzestrzenią przestrzeni $V$;
b) Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$, to $V = F_a + F_b$, ale suma ta nie jest prosta.

**Zad 20)** Niech $X$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $K$ oraz $U$ i $V$ jej podprzestrzeniami.
a) Wykaż, że $U \cup V$ jest podprzestrzenią $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset V$ lub $V \subset U$;
b) Sprawdź, czy $\mathrm{Lin}(U \cup V) = U + V$.