

ALGEBRA - Zestaw 2: Relacje

Zad 1) Dane są relacje $R = (\mathbb{N}, \text{gr}R, \mathbb{N})$, $S = (\mathbb{N}, \text{gr}S, \mathbb{N})$, gdzie:

$$\begin{aligned}\text{gr}R &= \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 4), (3, 7), (2, 9), (5, 3)\}, \\ \text{gr}S &= \{(1, 2), (1, 7), (2, 5), (2, 4), (7, 9), (4, 10)\}.\end{aligned}$$

Znajdź dziedziny i przeciwdziedziny tych relacji. Utwórz relacje $R \circ S$, $S \circ R$, S^{-1} , R^{-1} , $S^{-1} \circ R^{-1}$, $(S \circ R)^{-1}$, $S^{-1} \circ R$. Sprawdź, że $S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1}$.

Zad 2) Udowodnij, że dla dowolnej relacji R zachodzi implikacja:

$$\text{gr}R^{-1} \subset \text{gr}R \Rightarrow \text{gr}R^{-1} = \text{gr}R.$$

Zad 3) Wykaż, że dla relacji zwrotnej R w danym zbiorze X , równość $R \circ R = R$ jest równoważna „przechodności” relacji R .

Zad 4) Wykaż, że dla zbioru X z relacją R :

$$R \text{ jest relacją równoważności} \Leftrightarrow R^{-1} \text{ jest relacją równoważności.}$$

Zad 5) Wykaż, że jeżeli relacja R określona w zbiorze X jest zwrotna i przechodnia, to $R \cap R^{-1}$ określa relację równoważności.

Zad 6) W zbiorze \mathbb{N}^2 dana jest relacja $R = (\mathbb{N}^2, \text{gr}R, \mathbb{N}^2)$ taka, że $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a+d = b+c$. Wykaż, że R jest relacją równoważności i znajdź zbiór ilorazowy.

Zad 7) Niech $k \in \mathbb{N}_+$. W zbiorze \mathbb{Z} wprowadzamy relację $m \equiv n \pmod k \Leftrightarrow k|(m-n)$. Wykaż, że relacja ta jest równoważnością. Zbiór ilorazowy tej relacji będziemy oznaczać przez \mathbb{Z}/k . Przyjmując $k = 7$ podaj:

- $[2], [5], [-5]$ (klasy równoważności);
- $\mathbb{Z}/7$.

Zad 8) Niech p będzie elementem zbioru X . W zbiorze 2^X podzbiorów zbioru X określmy relację $R = (2^X, \text{gr}R, 2^X)$:

$$\text{gr}R := \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : (A = B) \vee (p \notin A \cup B)\}$$

Czy R jest relacją równoważności?

Zad 9) Dane jest odwzorowanie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Niech $S = (\mathbb{R}, \text{gr}S, \mathbb{R})$ będzie relacją taką, że $\text{gr}S = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$.

- Wykaż, że S jest relacją równoważności;
- Niech $a \in \mathbb{R}$. Określ w zależności od a liczebność klasy równoważności $[a]$.

Zad 10) Wykaż, że jeżeli R jest relacją porządkującą na zbiorze X , to relacja R^{-1} jest również relacją porządkującą na zbiorze X .

Zad 11) Niech (X, \preceq) będzie zbiorem uporządkowanym, $A \subset X$. Udowodnij,

że jeżeli zbiór A ma element najmniejszy (największy), to ten element jest również kresem dolnym (odp. górnym) zbioru A .

Zad 12) Niech $R = (\mathbb{R}^2, \text{gr}R, \mathbb{R}^2)$, gdzie: $(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \wedge y \leq y'$.

- a) Wykaż, że R jest relacją porządku. Czy ten porządek jest liniowy?
- b) Znajdź zbiory minorant i majorant oraz kresy zbiorów $A = \{(1, 2), (3, 1)\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$;
- c) Czy zbiory A i B mają elementy największe i najmniejsze oraz minimalne i maksymalne?

Zad 13) Niech $S = (\mathbb{R}^2, \text{gr}S, \mathbb{R}^2)$, gdzie:

$$(x_1, y_1)S(x_2, y_2) \Leftrightarrow \ln(1 + x_1^2 + y_1^2) = \ln(1 + x_2^2 + y_2^2).$$

Czy tak określona relacja S jest porządkiem w \mathbb{R}^2 ?

Czy jest to relacja równoważności?

Zad 14) W zbiorze punktów płaszczyzny \mathbb{R}^2 określamy relację \preceq :

$$[(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)] \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)).$$

Wykaż, że \preceq porząduje zbiór \mathbb{R}^2 . Czy jest to porządek totalny w \mathbb{R}^2 ?

Zad 15) Dany jest uporządkowany zbiór (\mathbb{Q}, \leq) oraz podzbiór $A = \{x : x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}_+\}$. Znajdź kresy zbioru A oraz element największy i element najmniejszy (o ile istnieją). Czy zbiór A stanowi łańcuch?

Zad 16) Niech $X = \{1, \dots, n\}$ ($n > 2$). Rozważmy rodzinę Y tych podzbiorów zbioru X , które są niepuste i mają co najwyżej $n - 1$ elementów. Wyznacz elementy minimalne i maksymalne zbioru Y względem relacji inkluzji. Czy Y ma element największy lub element najmniejszy?

Zad 17) Niech będzie dany zbiór uporządkowany (X, \subset) , gdzie $X = \{[x, x+a] \times [y, y+a] : x, y, a \in \mathbb{R}, a \geq 0\}$ oraz zbiór $A = \{[1, 4] \times [1, 4]; [2, 5] \times [2, 5]; [2, 5] \times [3, 6]; [2, 6] \times [2, 6]\} \subset X$. Wyznacz (o ile istnieją) elementy najmniejsze, największe, minimalne, maksymalne, zbiory minorant, majorant oraz kres dolny i górny zbioru A względem zadanego porządku w X .