

## ALGEBRA - Zestaw 1: Liczby zespolone

**Zad 1)** Wykaż równości i nierówności dla liczb zespolonych:

- a)  $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$     b)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$     c)  $z \cdot \overline{z} = |z|^2$     d)  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$   
e)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$     f)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

**Zad 2)** Oblicz:

- a)  $\frac{2+3i}{1+i}$     b)  $\frac{(i+\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{1+2i}$     c)  $|3-4i|$     d)  $\arg(-2+2i)$     e)  $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ , dla  $n \in \mathbb{N}$

**Zad 3)** Przedstaw podane liczby zespolone w postaci trygonometrycznej:

- a)  $7+7i$     b)  $\sqrt{3}-i$     c)  $\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1+i}$     d)  $1+i \operatorname{tg} \alpha$     e)  $1+\cos \alpha+i \sin \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ )

**Zad 4)** Zilustruj na płaszczyźnie zespolonej następujące zbiory:

- a)  $\{z \in \mathbb{C} : |z-i+3| > 3\}$     b)  $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+1|\}$   
c)  $\{z \in \mathbb{C} : \frac{|z-2i|}{|z+3|} < 1\}$     d)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z-i)^2 \leq 0\}$   
e)  $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z-3+i) = \frac{2\pi}{3}\}$     f)  $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \arg(\overline{z}+i) \leq \pi\}$   
g)  $\{z \in \mathbb{C} : \arg \frac{i}{i-z} = \frac{4}{3}\pi\}$     h\*)  $\{z \in \mathbb{C} : \arg(\frac{i}{z}) \leq \frac{3\pi}{4}\}$   
i)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}((z-2i)^4) > 0\}$     j)  $\{z \in \mathbb{C} : \frac{z+4}{z-2i} \in \mathbb{R}\}$

**Zad 5)** Oblicz wartości podanych wyrażeń (wyniki podaj w postaci algebraicznej):

- a)  $(1-i)^6$     b)  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$     c)  $\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}$     d)  $\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^{14}$   
e)  $1+i+i^2+\dots+i^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**Zad 6)** Znajdź funkcję rzeczywistą  $f$  taką, że:

- a)  $\cos 3x = f(\cos x)$     b)  $\sin 5x = f(\sin x)$     c)  $\operatorname{ctg} 4x = f(\operatorname{ctg} x)$

**Zad 7)** Oblicz pierwiastki z liczb zespolonych:

- a)  $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$     b)  $\sqrt[4]{-4}$     c)  $\sqrt[6]{-64}$     d)  $\sqrt[4]{(-2+3i)^4}$     e)  $\sqrt[3]{(2-2i)^9}$

**Zad 8)** Rozwiąż równania:

- a)  $z^2+2iz+3=0$     b)  $z^2-(2+i)z-1+7i=0$     c)  $z^4-3iz^2+4=0$   
d)  $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \frac{z-i}{z+i} + 1 = 0$     e)  $(iz)^6 - 7(iz)^3 - 8 = 0$   
f)  $z^7 - iz^6 + 2z^4 - 2iz^3 + 2z - 2i = 0$  (wiedząc, że  $z=i$  jest pierwiastkiem)  
g)  $(2z-2)^4 = \left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)^8$

**Zad 9)** Znajdź pierwiastki następujących wielomianów w dziedzinie zespolonej:

$$f(z) = z^4 - (2i-1)^{12};$$

$g(z) = z^6 + 2z^5 + 4z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z + 2$ , jeżeli wiadomo, że  $z_0 = i$  jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu  $g$  (wykorzystaj odpowiednie twierdzenie).

**Zad 10)** Wykorzystując postać wykładniczą liczby zespolonej, rozwiąż równania:

a)  $|z|^3 = iz^3$     b)  $(\bar{z})^6 = 4|z|^2$     c)  $(\bar{z})^6 = -8z|z|\bar{z}$     d)  $i(\bar{z})^4 z^2 = -4|z|^2$   
e)  $z^n = n|z|$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**Zad 11)** Punkty  $z_1 = 1 - 3i$ ,  $z_3 = -1 + 5i$  są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Wyznacz położenia pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

**Zad 12)** Ile wynosi suma wszystkich pierwiastków zespolonych stopnia  $n$  z 1?

**Zad 13)** Wykaż, że:

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots$$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Oblicz  $\cos \frac{\pi}{5}$ .