

ALGEBRA - Zestaw 1: Liczby zespolone

Zad 1) Wykaż równości i nierówności dla liczb zespolonych:

- a) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ b) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ c) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
 e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ f) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

Zad 2) Oblicz:

- a) $\frac{2+3i}{1+i}$ b) $\frac{(i+\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{1+2i}$ c) $|3 - 4i|$ d) $\arg(-2 + 2i)$ e) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, dla $n \in \mathbb{N}$

Zad 3) Przedstaw podane liczby zespolone w postaci trygonometrycznej:

- a) $7 + 7i$ b) $\sqrt{3} - i$ c) $\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1+i}$ d) $1 + i \operatorname{tg} \alpha$ e) $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

Zad 4) Zilustruj na płaszczyźnie zespolonej następujące zbiory:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i + 3| > 3\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + 1|\}$
 c) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{|z-2i|}{|z+3|} < 1\}$ d) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z - i)^2 \leq 0\}$
 e) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z - 3 + i) = \frac{2\pi}{3}\}$ f) $\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \arg(\bar{z} + i) \leq \pi\right\}$
 g) $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg \frac{i}{i-z} = \frac{4}{3}\pi\right\}$ h*) $\{z \in \mathbb{C} : \arg \left(\frac{i}{z}\right) \leq \frac{3\pi}{4}\}$
 i) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}((z - 2i)^4) > 0\}$ j) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{z+4}{z-2i} \in \mathbb{R}\}$

Zad 5) Oblicz wartości podanych wyrażeń (wyniki podaj w postaci algebraicznej):

- a) $(1 - i)^6$ b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ c) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}$ d) $\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^{14}$
 e) $1 + i + i^2 + \dots + i^n$, $n \in \mathbb{N}$

Zad 6) Znайдź funkcję rzeczywistą f taką, że:

- a) $\cos 3x = f(\cos x)$ b) $\sin 5x = f(\sin x)$ c) $\operatorname{ctg} 4x = f(\operatorname{ctg} x)$

Zad 7) Oblicz pierwiastki z liczb zespolonych:

- a) $\sqrt{-1 + \sqrt{3}i}$ b) $\sqrt[4]{-4}$ c) $\sqrt[6]{-64}$ d) $\sqrt[4]{(-2 + 3i)^4}$ e) $\sqrt[3]{(2 - 2i)^9}$

Zad 8) Rozwiąż równania:

- a) $z^2 + 2iz + 3 = 0$ b) $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0$ c) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$
 d) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \frac{z-i}{z+i} + 1 = 0$ e) $(iz)^6 - 7(iz)^3 - 8 = 0$
 f) $z^7 - iz^6 + 2z^4 - 2iz^3 + 2z - 2i = 0$ (wiedząc, że $z = i$ jest pierwiastkiem)
 g) $(2z - 2)^4 = \left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)^8$

Zad 9) Znайдź pierwiastki następujących wielomianów w dziedzinie zespolonej:

$$f(z) = z^4 - (2i - 1)^{12};$$

g) $g(z) = z^6 + 2z^5 + 4z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z + 2$, jeżeli wiadomo, że $z_0 = i$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu g (wykorzystaj odpowiednie twierdzenie).

Zad 10) Wykorzystując postać wykładniczą liczby zespolonej, rozwiąż równania:

- a) $|z|^3 = iz^3$
- b) $(\bar{z})^6 = 4|z^2|$
- c) $(\bar{z})^6 = -8z|z|\bar{z}$
- d) $i(\bar{z})^4 z^2 = -4|z|^2$
- e) $z^n = n|z|$, $n \in \mathbb{N}$

Zad 11) Punkty $z_1 = 1 - 3i$, $z_3 = -1 + 5i$ są przeciwnymi wierzchołkami kwadratu. Wyznacz położenia pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

Zad 12) Ile wynosi suma wszystkich pierwiastków zespolonych stopnia n z 1?

Zad 13) Wykaż, że:

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots$$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Oblicz $\cos \frac{\pi}{5}$.