1. Dane są relacje $R = (\mathbb{N}, grR, \mathbb{N}), S = (\mathbb{N}, grS, \mathbb{N})$, gdzie:

$$grR = \{(1,1),(1,2),(3,2),(3,4),(3,7),(2,9),(5,3)\},$$
$$grS = \{(1,2),(1,7),(2,5),(2,4),(7,9),(4,10)\}$$

Znajdź dziedziny i przeciwdziedziny tych relacji. Utwórz relacje $R \circ S$, $S \circ R$, S^{-1}, R^{-1}, $S^{-1} \circ R^{-1}, (S \circ R)^{-1}, S^{-1} \circ R$. Sprawdź, że $S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1}$

$$R \circ S = \{(1,9),(2,3)\}$$
$$S \circ R = \{(1,2),(1,5),(3,5),(3,4),(3,9)\}$$
$$S^{-1} = \{(2,1),(7,1),\ldots\}$$

---

3. Wykaż, że dla relacji zwrotnej R, równość $R \circ R = R$ jest równoważna "przechodności" relacji R.

$$R \circ R = R \implies \forall (x,y),(y,z) \in X \times Y : (x,y) \in grR \ \ (x,z) \in grR$$

$$\text{Co jest definicją przechodności}$$

---

8) Niech p będzie elementem zbioru X. W zbiorze 2^X podzbiorów zbioru X określamy relację $R = (2^X, grR, 2^X)$. Czy jest ona relacją równoważności?

$$2^X = \{A : A \subseteq X\} \text{ - podzbiory zbioru X}$$

$$grR := \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : (A = B) \vee (p \notin (A \cup B))\}$$

Zbiory są ze sobą w relacji jeżeli są równe lub jakiś tam konkretny element nie należy do

Żeby to była relacja równoważności to:

$$\forall x \in 2^X : \ xRx$$

Jest to spełnione bo: $\forall A \in 2^X : A = A \Leftrightarrow ARA$

Musi być symetryczna:

$$\forall x, y \in 2^X : xRy \implies yRx$$

Jeżeli xRy to oznacza że $x = y \vee p \notin (x \cup y)$

$$x = y \implies y = x \wedge p \notin (x \cup y) \Leftrightarrow p \notin (y \cup x)$$

Oraz przechodnia:

$$\forall x, y, z \in 2^X : xRy \wedge yRz | x = y = z \vee p \notin (x \cup y \cup z) \implies x = z \vee p \notin (x \cup z)$$

---

9) Dane jest odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = x^3 - x + 2$. Niech $S = (\mathbb{R}, grS, \mathbb{R})$ będzie relacją taką, że $grS = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$

a) Wykaż że S jest relacją równoważności

$$(a, b) \in grS \Leftrightarrow a^3 - a + 2 = b^3 - b + 2$$

$$a^3 - a = b^3 - b$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(a) = f(a) \Leftrightarrow xRx \text{ - zwrotność}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(b) = f(a)) \leftrightarrow (aRb \leftrightarrow bRa)$$

$$\forall x, y, z : f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Leftrightarrow f(x) = f(z) \leftrightarrow xRz$$

b) Niech $a \in \mathbb{R}$. Określ w zależności od a liczebność klasy równoważności $[a]$

$$f(x) = x^3 - x + 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$3x^2 - 1 > 0$$
$$x^2 > \frac{1}{3}$$
$$x > \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{3}{3\sqrt{3}} + \frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

$$[a] = 3 \Leftrightarrow f(a) \in [\frac{4\sqrt{3}}{9}, \frac{8\sqrt{3}}{9}]$$
$$[a] = 1 \Leftrightarrow f(a) \notin [\frac{4\sqrt{3}}{9}, \frac{8\sqrt{3}}{9}]$$

---

13) Niech $S = (\mathbb{R}^2, grS, \mathbb{R}^2)$, gdzie:
$(x_1, y_1)S(x_2, y_2) \Leftrightarrow \ln(1 + x_1^2 + y_1^2) = \ln(1 + x_2^2 + y_2^2)$. Czy tak określona relacja S jest porządkiem w $\mathbb{R}^2$? Czy jest to relacja równoważności?

$$\ln(1+x_1^2+y_1^2) = \ln(1+x_2^2+y_2^2)$$

$$x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2$$

Zwrotność:

$$x_1^2+y_1^2 = x_1^2+y_1^2$$

$$\checkmark$$

Antysymetryczność:

$$(x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2) \wedge (x_2^2+y_2^2 = x_1^2+y_1^2) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)?$$

Nie, kontrprzykład:

$(2,3)R(3,2)$ bo: $2^2+3^2 = 3^2+2^2$, A $(3,2) \neq (2,3)$

Jest relacją równoważności

---

1. Sprawdź jakie własności mają w $\mathbb{Z}$ następujące działania:

Łączne:

$$a \circ b = a - b$$

$$(a \circ b) \circ z = a - b - z$$

$$a \circ (b \circ z) = a - (b - z) = a - b + z$$

Zatem:

$$(a \circ b) \circ z \neq a \circ (b \circ z)$$

Przemienne:

$$a \circ b = b \circ a$$

$$a - b \neq b - a$$

$$np.\, 2 - 3 \neq 3 - 2$$

Element neutralny:

Czy istnieje takie $e \in \mathbb{Z}$ że:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : a \circ e = e \circ a = e$$

$$a - e = e - a = a$$

$$a = e$$

Element neutralny zależny od a więc nie ma jednego stałego neutralnego

$$a \circ b = a^2 + b^2$$

$$\text{łączne:}$$
$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$
$$a^2 + (b^2 + c^2)^2 \neq (a^2 + b^2)^2 + c^2$$

$$\text{Przemienne:}$$
$$a \circ b = b \circ a$$
$$\checkmark$$

$$a \circ e = e \circ a = a$$
$$e = 0$$
$$ale\ nie\ ma\ el.\ symetrycznych$$

---

2) W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie $x \circ y = x + y + xy$. Czy $(\mathbb{R}, \circ)$ jest grupą? Czy jest grupą para $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$?

$$\text{Żeby to była grupa to:}$$
$$1) \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$
$$a \circ (b + c + bc) = (a + b + ab) \circ c$$
$$a + b + c + bc + ab + ac + abc = a + b + c + ab + ac + bc + abc$$
$$\checkmark$$

$$2) \exists e \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad x \circ e = e \circ x = x$$

$$x + e + xe = x + e + xe = x$$
$$e = 0$$

$$3) \exists x' \forall x \in \mathbb{R} : x \circ x' = x' \circ x = e$$
$$x + x' + xx' = x + x' + xx' = 0$$

$$x'(1 + x) = -x$$
$$x' = \frac{-x}{1 + x}$$

$$\text{Istnieje ale nie dla } x = -1$$

$$\text{Gdy wyrzucimy } x = -1 \text{ z zbioru, to tak jest to grupa.}$$

3) W zbiorze liczb całkowitych określamy działanie: $x \circ y = x + y + 2$. Czy $(\mathbb{Z}, \circ)$ jest grupą?

$$1) a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c???$$
$$a \circ (b + c + 2) = (a + b + 2) \circ c$$
$$a + b + c + 2 + 2 = a + b + 2 + c + 2$$
$$\checkmark$$

$$2) \exists e \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : \quad e \circ x = x \circ e = x$$

$$e + x + 2 = x + e + 2 = x$$
$$x + e + 2 = x$$
$$e = -2$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R} \ \ \exists x' : x \circ x' = x' \circ x = e$$

$$x + x' + 2 = x' + x + 2 = -2$$
$$x' + x + 2 = -2$$
$$x' + x = -4$$
$$x' = -4 - x$$
$$\checkmark$$

---

4) Które z następujących zbiorów liczb są grupami:

a) Liczby wymierne ze względu na dodawanie

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$\checkmark$$
$$\forall a \in \mathbb{Q} \ \ a + e = e + a = a \Leftrightarrow e = 0$$
$$\checkmark$$
$$\forall x \in \mathbb{Q} \ \ \exists x' \in \mathbb{Q} : x + x' = x' + x = 0$$
$$x' = -x$$
$$\checkmark$$

ze względu na mnożenie

też, mnożenie można łączyć / jest przemienne, można pomnożyć przez 1 zawsze otrzymując to samo i można pomnożyć razy 1/x otrzymując 1

b) liczby niewymierne ze względu na dodawanie

nie bo element neutralny jest wymierny (0)

na mnożenie:
tak samo

c) liczby zespolone o module równym 1 ze względu na mnożenie

$$1)\forall a,b,c \in \mathbb{C} : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

$$\text{Mnożąc liczby zespolone jeżeli zapiszemy je w postaci wykładniczej}$$
$$\text{Mnożymy moduły (1) i dodajemy do siebie kąty } \varphi$$
$$\text{Czyli wszystko sprowadza się do dodawania}$$
$$\text{A dodawanie jest grupą}$$

d) liczby zespolone o module równym 1 ze względu na następujące działanie:
$z_1 \circ z_2 = |z_1|z_2$

$$\forall a,b,c \in \mathbb{C} : a \circ (b \circ c) = a \circ (|b|c) = |a \cdot b| \cdot c = (a \circ b) \circ c = (|a|b) \circ c = |a \cdot b| \cdot c$$
$$\checkmark$$

$$\exists e \in \mathbb{C} : \forall a \in \mathbb{C} : a \circ e = e \circ a = a$$
$$|a|e = |e|a = a$$
$$|e|a = a \implies e = e^{i\varphi} \text{ Dowolne bo moduł miał być równy 1}$$
$$|a|e = a$$
$$e = a$$
$$\text{e zalezne od a wiec nie jest takie samo dla kazdego a wiec nie jest to grupa}$$

---

5) Niech E_n będzie zbiorem wszystkich pierwiastków n-tego stopnia (w $\mathbb{C}$) z jedności. Udowodnij że $(E_n, \cdot)$ jest grupą.

$$E_n = \{(\cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n})\}$$

$$bo: \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}))$$
$$a\ 1 = cos(0) + isin(0)$$

Czyli znowu wszystko sprowadza się do dodawania i mnożenia

$$\forall a, b, c \in E_n \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
$$\sqrt[n]{r_a \cdot r_b \cdot r_c} \cdot e^{i(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c)} = \sqrt[n]{r_a \cdot r_b \cdot r_c} \cdot e^{i(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c)}$$

$$\exists e \in E_n : \forall a \in E_n \quad a \cdot e = e \cdot a = a$$
$$e = 1$$

$$\forall x \in E_n\ \exists x' \in E_n : x \cdot x' = x' \cdot x = e$$
$$x' = \frac{1}{x}$$
$$\checkmark$$

---

7) Niech Δ oznacza różnicę symetryczną, tj. dla dowolnych zbiorów A i B, $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Sprawdź, czy dla dowolnie ustalonego zbioru $X \neq \emptyset$, para $(2^X, \Delta)$ jest grupą abelową.

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$1)\forall a, b, c \in 2^X, \forall X \neq \emptyset:$$
$$a\Delta(b\Delta c) = (a\Delta b)\Delta c$$
$$\checkmark$$
$$2)e = \emptyset$$
$$3)x' = x$$

---

9) Czy następujące zbiory są ciałami ze względu na dodawanie i mnożenie:

$$P = \{a + b\sqrt[3]{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$
$$(P, +, \cdot)$$

$$1)\ (P, +) \text{ - grupa}$$
$$2)\ (P, \cdot) \text{ - przemienne}$$

$$(a + b\sqrt[3]{5})(c + d\sqrt[3]{5}) = ac + ad\sqrt[3]{5} + bc\sqrt[3]{5} + bd(\sqrt[3]{5})^2$$

Ze względu na $bd\sqrt[3]{5}^2$ nie zawsze mnożenie jest "zamknięte" więc to nie jest pierścień a co za tym idzie ciało

---

$$P = \{a : a \in \mathbb{Q} \land a \notin \mathbb{Z}\}$$
$$1) \dots$$
$$2) \neg\forall a, b \in P \quad a \cdot b \in P \implies (P, +, \cdot) \text{ nie jest pierścieniem}$$
$$\text{kontrprzykład: } \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$P = \{a + ib\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$$
$$1)(P, +) \text{ grupa abelowa}$$
$$2) +, \cdot \text{ rozdzielne}$$
$$3)(P, \cdot) \text{ łączność}$$

Pozostaje się dowiedzieć czy jest jedynka

$$(a + ib\sqrt{2})(c + id\sqrt{2}) = 1$$
$$ac + iad\sqrt{2} + ibc\sqrt{2} - 2bd = 1$$
$$\begin{cases} ac - 2bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases} \begin{cases} ac - 2bd = 1 \\ d = \frac{-bc}{a} \end{cases} \begin{cases} c = \frac{1}{a + \frac{2b^2}{a}} \\ d = \frac{-bc}{a} \end{cases}$$

Istnieje element symetryczny działania multiplikatywnego

---

11) Udowodnij że odwzorowanie $f : x = a + b\sqrt{3} \to \overline{x} = a - b\sqrt{3}$ jest automorfizmem pierścienia $(A, +, \cdot)$ w siebie.

$$f(x+y) = f(x) + f(y)?$$
$$f((a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{3}) = a_1 - b_1\sqrt{3} + a_2 - b_2\sqrt{3}$$
$$a_1 + a_2 - b_1\sqrt{3} - b_2\sqrt{3} = a_1 - b_1\sqrt{3} + a_2 - b_2\sqrt{3}$$

$$\checkmark$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$
$$f(a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{3} + a_2b_1\sqrt{3} + 3b_1b_2) = a_1a_2 + 3b_1b_2 - \sqrt{3}(a_1b_2 + a_2b_1) =$$
$$= f(a_1 + b_1\sqrt{3}) + f(a_2 + b_2\sqrt{3})$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ Iniekcja}$$
$$\text{Suriekcja}$$

---

5) Zbadaj, które z układów wektorów należących do $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne:

a) $B_1 : (1,4,3,), (-1,2,1), (0,6,4)$

$$\alpha(1,4,3) + \beta(-1,2,1) + \gamma(0,6,4) = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \mathbf{0}?$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 4\alpha + 2\beta + 6\gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = -\gamma \\ 4\alpha - 4\alpha = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha = \beta = t \\ \gamma = -t \end{cases}$$

$$\text{Dla testa:}$$
$$3(1,4,3) + 3(-1,2,1) - 3(0,6,4) = (0,0,0)$$

$$B_1 \text{ nie stanowi układy wektorów liniowo niezależnych}$$

---

b) $B_2 : (2,3,-1), (2,0,0), (0,3,1)$

$$\alpha(2,3,-1)+\beta(2,0,0)+\gamma(0,3,1)=\overline{0}=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\alpha=\beta=\gamma=\mathbf{0}=0?$$

$$\begin{cases}2\alpha+2\beta=0\\3\alpha+3\gamma=0\\-\alpha+\gamma=0\end{cases}\begin{cases}\beta=0\\\alpha=0\\\gamma=\alpha=0\end{cases}$$

Tak B_2 stanowi układ wektorów liniowo niezleżnych

---

c) $B_3:(2,-7,2),(0,2,4),(2,-1,5)$

$$\alpha(2,-7,2)+\beta(0,2,4)+\gamma(2,-1,5)=\overline{0}=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\alpha=\beta=\gamma=\mathbf{0}=0?$$

$$\begin{cases}2\alpha+2\gamma=0\\-7\alpha+2\beta-\gamma=0\\2\alpha+4\beta+5\gamma=0\end{cases}\begin{cases}\alpha=-\gamma\\-6\alpha+2\beta=0\\-6\alpha+4\beta=0\end{cases}\begin{cases}\gamma=0\\\alpha=0\\\beta=0\end{cases}$$
Ta

$$\alpha(2,-7,2)+\beta(0,2,4)+\gamma(2,-1,5)=(1,1,1)$$

$$\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{2}\\\gamma=1\\\beta=-\frac{3}{4}\end{cases}$$

---

6) Sprawdź liniową zależność wektorów $\sqrt{2}$ i 2 w przestrzeni $(\mathbb{R},+,\cdot)$ nad ciałem $\mathbb{Q}$ oraz w przestrzeni $(\mathbb{R},+,\cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$

$$\alpha\cdot\sqrt{2}+\beta\cdot2=0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}$$
$$\alpha\cdot\sqrt{2}+\beta\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=0$$
$$\beta\sqrt{2}=\alpha\implies\alpha,\beta\notin\mathbb{Q}$$

Zatem jedyne rozwiązanie nie należy do zbioru ciała
Więc są to wektory liniowo niezależne w ciele o zbiorze $\mathbb{Q}$
jednakże istnieje rozwiązanie dla rzeczywistych

---

7) Dla jakiej wartości parametru k wektor $v = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ jest kombinacją liniową wektorów $u_1 = (1, 1, 1)$ i $u_2 = (1, 2, 3)$?

$$\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 = v$$
$$\alpha \cdot (1, 1, 1) + \beta \cdot (1, 2, 3) = (1, -2, k)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = -2 \end{cases} \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 4 \end{cases}$$

$$\alpha + 3\beta = k$$
$$4 + 3 \cdot -3 = -5 = k$$

---

8) Sprawdź czy następujące funkcje są liniowo niezależne w przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

a) $f(x) = x, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x$
b) $f(x) = 1, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x, p(x) = sin^2 x, q(x) = \cos^2 x$

$$ax + b\sin x + c\cos x = 0$$
$$a + b\cos x - c\sin x = 0$$
$$-b\sin x + c\cos x = 0$$
$$-b\sin 0 + c\cos 0 = 0 \implies c = 0$$
$$-b\sin\frac{\pi}{2} + c\cos\frac{\pi}{2} = 0 \implies b = 0$$
$$a + 0\cos x - c\sin x = 0 \implies a = 0$$

---

10) Udowodnij że zbiór $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \land x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Czy podprzestrzeń?

$$\forall a,b \in A \quad a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4):$$
$$a_1+b_1+a_2+b_2-3a_3-3b_3-3a_4-3b_4=$$
$$=(a_1+a_2-3a_3-3a_4)+(b_1+b_2-3b_3-3b_4)=0+0=0$$
$$\checkmark$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in A \quad \alpha \cdot x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3,\alpha x_4):\alpha(x_1+x_2-3x_3-3x_4)=0$$
$$\checkmark$$

Wyznacz bazę:

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-3x_4=0 \\ x_1-x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases} \begin{cases} x_1=x_4 \\ x_2=-2x_4-3x_3 \end{cases} \begin{cases} x_1=x_4=s \\ x_2=-2s-3t \\ x_3=t \end{cases}$$

$$s(1,-2,0,1)+t(0,-3,1,0)$$

$$B=\{(1,-2,0,1),(0,-3,1,0)\}$$

---

11) Dane są dwa układy wektorów: $B_1:(1,i,1+i),(i,-1,2-i),(0,0,3)$ **i** $B_2:(2i,1,0),(2,-i,1),(0,1+i,1-i)$**.**

a) Sprawdź czy któryś z tych układów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ lub $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$

$$\alpha(1,i,1+i)+\beta(i,-1,2-i)+\gamma(0,0,3)=(x,y,z)$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta i = x \\ \alpha i-\beta = y = i(\alpha+i\beta)=ix \end{cases}$$

Zatem ten układ wektorów generuje jedynie te z wektorów z przestrzeni $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ które spełniaja $ix=y$ zatem nie jest to baza

$$\alpha(2i,1,0)+\beta(2,-i,1)+\gamma(0,1+i,1-i)=(x,y,z)$$

$$\begin{cases} 2\alpha i+2\beta = x \\ \alpha-i\beta+\gamma+i\gamma = y \\ \beta+\gamma-i\gamma = z \end{cases} \begin{cases} 2\alpha i+2\beta = x \\ \gamma = \frac{y-x}{(2i-2)} \\ \beta+\gamma-i\gamma = z \end{cases}$$

Jest to baza

Można to było łatwiej udowodnić na podstawie tego że sa liniowo niezależne a z twierdzenia mówiącego że jeżeli zbiór wektorów liniowo niezależnych ma taki sam rozmiar jak wymiar zbioru to jest on bazą

$$\begin{cases} i\alpha = -\beta \\ \alpha-i\beta+(1+i)\gamma = 0 \\ \beta+\gamma(1-i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = i\beta \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

---

12) Niech będzie dana następująca podprzestrzeń U przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$, gdzie p jest pewną liczbą rzeczywistą:

$$U := Lin\{(pi,(p-1)i),(p-2-pi,p),(-1-pi,2p)\}$$

Zbadaj dla jakich wartości parametru rzeczywistego p, zachodzi:

$$(3-2p, p-1+(1-p)i) \in U$$

$$U = \alpha(pi, pi - i) + \beta(p - 2 - pi, p) + \gamma(-1 - pi, 2p), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \alpha pi + \beta p - 2\beta - 2\beta pi - \gamma - \gamma pi = 3 - 2p \\ \alpha pi - i\alpha + \beta p + 2\gamma p = p - 1 + i - pi \end{cases}$$

$$i(\alpha p - 2\beta p - \gamma p) - 2\beta - \gamma = 3 - 2p \implies$$
$$\implies (p = 0 \vee \alpha - 2\beta - \gamma = 0) \wedge -2\beta - \gamma = 3$$

$$\wedge$$
$$i(\alpha p - \alpha) + \beta p + 2\gamma p = p - 1 + i(1 - p) \implies$$
$$\alpha(p - 1) = 1 - p \wedge \beta p + 2\gamma p = p - 1$$

$$p(\beta + 2\gamma - p) = 1 \implies p \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ -2\beta - \gamma = 3 \\ \alpha(p - 1) = 1 - p \\ p(\beta + 2\gamma - 1) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ -2\beta - \gamma = 3 \\ (\alpha + 1)(p - 1) = 0 \implies p = 1 \vee \alpha = -1 \\ p(\beta + 2\gamma - 1) = -1 \end{cases}$$

z 1 i 2 równania wiemy że $\alpha \neq -1$zatem $p = 1$

$$\begin{cases} \alpha = -3 \\ \gamma = 1 \\ p = 1 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

Dla wszystkich takich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, wyznacz $\dim U$

$$p = 1$$
$$U := Lin\{(i,0),(-1-i,1),(-1-i,2)\}$$

$$\alpha(i,0) + \beta(-1-i,1) + \gamma(-1-i,2) = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0?$$

$$\begin{cases} \alpha i - \beta - i\beta - \gamma - i\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \begin{cases} i(\alpha - \beta - \gamma) - \beta - \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(\alpha - \beta - \gamma) = 0 \\ -\beta - \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\dim U = 3$$

---

14) W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]_2$ dana jest baza $B_1 = (1, x, x^2)$. Wykaż, że układ $B_2 = (1, x-2, (x-2)^2)$ stanowi bazę $\mathbb{R}[x]_2$. Podaj współrzędne wielomianu $P(x) = 2x^2 + 3$ względem obu baz. Czy zbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = p'(0)\}$ stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni? Jeżeli tak, wyznacz jej bazę i wymiar.

Wykaż, że układ $B_2 = (1, x-2, (x-2)^2)$ stanowi bazę $\mathbb{R}[x]_2$:

Na mocy twierdzenia że każdy zespół n wektorów liniowo niezależnych
w V generuje nam V.

Wystarczy że sprawdzimy czy są liniowo niezależne

$$\alpha \cdot 1 + \beta(x-2) + \gamma(x-2)^2 = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$
$$\alpha \cdot 1 + \beta(x-2) + \gamma(x-2)^2 = \alpha + \beta x - 2\beta + \gamma x^2 - 4\gamma x + 4\gamma$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \beta - 4\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

✓

Podaj współrzędne wielomianu $P(x) = 2x^2 + 3$ względem obu baz:

Względem pierwszej bazy:
$(3, 0, 2)$

$$\alpha \cdot 1 + \beta(x-2) + \gamma(x-2)^2 = 2x^2 + 3$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta + 4\gamma = 3 \\ \beta - 4\gamma = 0 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 11 \\ \beta = 8 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$(11, 8, 2)$

Czy zbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = p'(0)\}$ stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni?

$$p(1) = \alpha + \beta + \gamma$$
$$p'(0) = \beta$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \beta$$
$$\alpha = -\gamma$$
$$A = \{p : \mathbb{R}[x]_2 : p = \alpha + \beta x - \alpha x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\forall p_1, p_2 \in A \quad p_1 + p_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2)x - (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 \in A$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in A$$
$$\alpha \cdot p \in A$$

Wyznacz jej bazę i wymiar:

$$\alpha(1, 0, -x^2) + \beta(0, 1, 0) = p \implies \dim V = 2 \wedge B = \{(1, 0, -x^2), (0, 1, 0)\}$$

---

1) Zbadaj rzędy następujących macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$r(A) = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 66 \\ 0 & 0 & 0 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

2) Wyznacz rzędy następujących macierzy w zależności od parametru rzeczywistego $p$$:

$$A = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2p & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

$$r(A) = 1 \Leftrightarrow p = 1$$
$$r(A) = 3 \Leftrightarrow p \neq 1$$

3) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, rząd macierzy jest najmniejszy, a dla jakich największy.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1-a & 1 \\ a & 0 & -a \\ -1 & a+a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \; R_3 - aR_1, \; K_2 \leftrightarrow K_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1-a & -2 & 1 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -1+2a & 1-a \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \; K_2 + 2K_3$$

$$A = \begin{bmatrix} -1-a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$
$$a = -1 \implies r(A) = 2$$
$$a = 0 \implies r(A) = 2$$
$$a \notin \{-,1,0\} \implies r(A) = 3$$

---

4) Oblicz wyznacznik macierzy i jeśli jest ona nieosobliwa, znajdź macierz do niej odwrotną:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1+i & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2i$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}\right|$$

---

5) Niech A będzie macierzą kwadratową. Udowodnij że:

a) jeżeli $A^2 - A + I = 0$, to A jest nieosobliwa i $A^{-1} = I - A$

$$A(A - I) = -I$$

$$\begin{cases} A(I - A) = I \\ AA^{-1} = I \end{cases} \implies A^{-1} = I - A$$

b) jeżeli $A^k = \mathbf{0}$, to $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$

$$\begin{gathered} (I - A)(I - A)^{-1} = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = \\ = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} - A - A^2 \cdots - A^k = I \\ \checkmark \end{gathered}$$

6) Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n, jeżeli:

a) $A^2 = A^T$

$$\begin{gathered} \det A^2 = \det A^T \\ (\det A)^2 = \det A \\ d^2 - d = 0 \\ d(d-1) = 0 \\ d = 0 \lor d = 1 \end{gathered}$$

b) $A^T = A^{-1}$

$$\begin{gathered} A^T A = I \\ d^2 = 1 \\ d = 1 \lor d = -1 \end{gathered}$$

---

8) Niech będzie dany następujący podzbiór N zbioru $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Sprawdź, czy para $(N, \cdot)$, gdzie "$\cdot$" oznacza mnożenie macierzy, jest grupą abelową.

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Żeby pewna struktura była grupą abelową to:

1. musi być łączne działanie
2. musi istnieć element neutralny
3. element symetryczny dla każdego
4. przemienność

$$\begin{gathered} 1) \\ \text{Mnożenie macierzy jest łączne} \\ 4) \\ \begin{bmatrix} a & ia \\ -ia & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & ib \\ -ib & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a \cdot b) & 2i(a \cdot b) \\ -2i(a \cdot b) & 2(a \cdot b) \end{bmatrix} \end{gathered}$$

$$\text{więc przemienne bo mnożenie przemienne}$$

$$2)\ e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & i\frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$3) x' = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} & i\frac{x}{2} \\ -i\frac{x}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

ta to grupa abelowa

Dla dowolnych liczb zespolonych $z, z' \in \mathbb{C}$ oznaczamy:

$$\begin{gathered} z \circ z' = Im(z) \cdot Re(z') + Re(z) + i \cdot Im(z) \cdot Im(z') \\ \text{lub równoważnie:} \\ (x + iy) \circ (x' + iy') = yx' + x + iy'y \end{gathered}$$

Sprawdź, czy dla:

$$A := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \neq 0\}$$

para $(A, \circ)$ tworzy grupę

Żeby to była grupa to musi być łączne, el. neutr, i symetryczne:

$$z \circ e = e \circ z = z$$
$$(x + iy) \circ (e_x + ie_y) = ye_x + x + ie_y y$$
$$(e_x + ie_y) \circ (x + iy) = e_y x + e_x + iye_y$$

$$\begin{cases} ye_x + ie_y y = iy \\ e_y x + e_x + iye_y = x + iy \end{cases} \implies e_y = 1, e_x = 0$$

$$e = i$$

$$\text{Czy dla kazdego } x \exists x' : x \circ x' = x' \circ x = e$$
$$yx' + x + iy'y = y'x + x' + iyy' = i$$
$$\begin{cases} yx' + x + iy'y = i \\ y'x + x' + iyy' = i \end{cases} \implies y' = \frac{1}{y}$$
$$\begin{cases} yx' + x = 0 \\ \frac{1}{y}x + x' = 0 \end{cases} \implies x' \in \mathbb{C}$$

$$\forall x \in \mathbb{C} : x = (a + bi) \ \exists x' : x' = (c + \frac{1}{b}i)$$

Podaj definicje podprzestrzeni przestrzeni liniowej oraz twierdzenie o równoważnej charakterystyce podprzestrzeni. Udowodnij ich równoważność.

$$U - \text{przestrzeń liniowa o skalarach ze zbioru } A$$
$$K - \text{podprzestrzeń U}$$
$$\text{K jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej U} \Leftrightarrow \forall a, b \in K \ \ a + b \in K$$
$$K \subset U, \forall \alpha \in A, \forall v \in K \quad \alpha \cdot k \in K$$

$$\text{twierdzenie o równoważnej charakterystyce przestrzeni mówi że te warunki}$$
$$\text{możemy zredukować do warunków:}$$
$$K \subset U \wedge \forall \alpha, \beta \in A, \forall v_1, v_2 \in K \quad \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 \in K$$

$$\text{Dowód równoważności:}$$

$$\beta = 0 \implies \alpha v_1 + 0 \cdot v_2 \in K$$
$$\alpha, \beta = 1 \implies v_1 + v_2 \in K$$

1) Rozwiąż układy równań:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8 \\ x_1-x_2-x_3+x_4+x_5=0 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=7 \\ x_1-4x_2+x_3-2x_4-x_5=-9 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & -1 & -9 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_5=2 \\ x_4=1 \\ x_3=2 \\ x_2=2 \\ x_1=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8 \\ x_1-x_2-x_3+x_4+x_5=0 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=7 \\ x_1-4x_2+x_3-2x_4-x_5=-9 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & -1 & -9 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 10 & -6 & -4 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -150 \end{array}\right] \text{sprzeczny na podstawie twierdzenia kronecker-capallie}$$

$$\begin{cases} -3x+6y-3z=2 \\ 3x-6y+3z=-3 \end{cases} \text{sprzeczne}$$

$$\begin{cases} 2x+y=-3 \\ 3x+4y=1 \\ 5x-y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -\frac{40}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{14} \\ 1 & 0 & \frac{6}{14} \end{array}\right] \text{sprzeczny}$$

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

na podstawie twierdzenia mówiącego że jeżeli $r(A)=r(A|B)=r<n$ to układ jest nieoznaczony, zależnie od $n-r$ parametrów:

$$x_3=s, x_4=t$$
$$\begin{cases} 3x_1+5x_2+2s+2t=4 \\ 11x_2+5s-t=10 \\ x_3=s \\ x_4=t \end{cases}$$

---

2) Znajdź bazę podprzestrzeni wektorowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozwiązań następującego układu:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+7y-2z=0 \\ -x+3y+z=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_2=0 \\ x_1=x_3 \end{cases}$$

$$B=\{(1,0,1)\}$$

3) Zbadaj w zależności od parametru k ilość rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=k(k^2-1)-(k-1)+(1-k)=k(k-1)(k+1)-2(k-1)=$$

$$=(k-1)(k^2+k-2)$$

$$k=1 \vee k=-2$$

$$\text{Układ jest układem Cramera czyli } \det(A)\neq 0$$
$$\text{gdzie A to jest macierz niewiadomych (bez wyrazów wolnych)}$$
$$\text{dla } k=1 \vee k=-2$$
$$\text{a wtedy na podstawie twierdzenia ma dokładnie jedno rozwiązanie}$$

$$\text{Pozostało podstawić k=1,k=-2 do tego i sprawdzić ile ma wtedy rozwiązań.}$$

---

1) Sprawdź czy:

a) wektory $u=[-1,3,-5]$, $v=[1,-1,1]$, $w=[4,-2,0]$ są współpłaszczyznowe

$$(u \times v) \circ w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \circ w = [-2, -4, -2] \circ [4, -2, 0] = -16 \neq 0$$

$$\implies u, v, w \text{ nie są współpłaszczyznowe}$$

b) punkty $P = (0, 0, 0)$, $Q = (-1, 2, 3)$, $R = (2, 3, -4)$, $S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe

$$\vec{PQ} = [-1, 2, 3], \ \vec{PR} = [2, 3, -4], \ \vec{PS} = [2, -1, 5]$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -80 \neq 0$$

---

2) Trójkąt ABC rozpięty jest na wektorach $\vec{AB} = [1, 5, -3]$, $\vec{AC} = [-1, 0, 4]$. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.

$$d = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = [20, -1, 5]$$

$$|d| = \sqrt{426}$$

$$P_{\triangle} = \frac{|d|}{2}$$

$$|AB| = \sqrt{1 + 25 + 9} = \sqrt{35}$$

$$H = \frac{P_{\triangle}}{2|AB|}$$

---

3) Proste l_1 i l_2 dane są równaniami parametrycznymi:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad l_2 : \begin{cases} x = 6 + 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -6t \end{cases}$$

Wykaż, że l_1 i l_2 są równoległe. Oblicz odległość między nimi. Znajdź równanie ogólne ich wspólnej płaszczyzny.

$$t_1 = [-4, -2, 4], t_2 = [6, 3, -6]$$

$$t_1 = -\frac{3}{2} t_2, \text{zatem są równoległe}$$

$$\text{Jeżeli proste są równoległe to odległość między nimi jest odległością}$$
$$\text{punktu położonego na jednej z tych prostych do drugiej prostej}$$

$$d(P, l) = \frac{||\overrightarrow{P_0 P} \times v||}{||v||}$$

$$d(l_1, l_2) = d(P, l) = \frac{||[5, 4, -2] \times [6, 3, -6]||}{\sqrt{81}} = \frac{||[-18, 18, -9]||}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

---

5) Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad l_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

$$AB = (2, 0, -2)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{proste nie są współpłaszczyznowe}$$

---

6) Napisz równanie ogólne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (-1, 2, 4), B = (2, 1, 3), C = (3, -1, 5)$. Wyznacz odległość punktu $Q = (5, 0, 8)$ od płaszczyzny π oraz znajdź punkt symetryczny od punktu Q względem tej płaszczyzny.

$$AB = [3, -1, -1],\ AC = [4, -3, 1]$$

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = [-4, -7, -5]$$

$$\pi : [x - 3, y + 1, z + 1] \circ [-4, -7, -5] = 0$$

$$-4x + 12 - 7y - 7 - 5z - 5 = 0$$
$$-4x - 7y - 5z = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{60}{\sqrt{90}} = 2\sqrt{10}$$

normalizacja wektora do długości $4\sqrt{10}$ czyli odległości punktu Q pomnożonej razy 2

o ile trzeba pomnożyć wektor n by był tej długości?

$$a \cdot \sqrt{90} = 4\sqrt{10}$$
$$a \cdot 3\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$
$$a = \frac{4}{3}$$

$$Q' = Q + \frac{4}{3} \cdot n$$

$$Q' = (5, 0, 8) + [-4, -7, -5] \cdot \frac{4}{3} = (5, 0, 8) + [\frac{-16}{3}, -\frac{28}{3}, -\frac{20}{3}] = (-\frac{1}{3}, -\frac{28}{3}, \frac{4}{3})$$

---

2) Dane są w przestrzeni E_3 wierzchołki czworościanu $ABCD$

$$A = (1, 3, 2),\ B = (1, 5, 4),\ C = (3, 3, 4),\ D = (4, 6, 2)$$

Wyznacz miarę kąta wewnętrznego trójkąta ABC przy wierzchołku A

$$\vec{AB} = (0, 2, 2),\ \vec{AC} = (2, 0, 2)$$

$$\cos\varphi = \frac{u \circ v}{||u|| \cdot ||v||}$$

$$\cos\angle A = \frac{0 + 0 + 4}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{2} \implies \angle A = \frac{\pi}{3}$$

Wyznacz równanie ogólne płaszczyzny π zawierającej podstawę ABC danego czworościanu oraz rzut prostokątny D' wierzchołka D na tę płaszczyznę.

$$\begin{cases} x = 1 + t(0, 2, 2) + s(2, 0, 2) \\ y = 3 + t(0, 2, 2) + s(2, 0, 2) \\ z = 2 + t(0, 2, 2) + s(2, 0, 2) \end{cases}$$

$$n = t \times s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = [4, 4, -4]$$

$$\pi : (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \circ n = 4x - 4 + 4y - 4 - 4z + 4 = 4x + 4y - 4z - 4 = 0$$

$$d(D, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d(D, \pi) = \frac{|16 + 24 - 8 - 4|}{\sqrt{16 + 16 + 16}} = \frac{28}{4\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$a \cdot |n| = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$
$$a \cdot 4\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$
$$a = \frac{7}{12}$$

$$D' = D + n \cdot 2a = (4, 6, 2) + \frac{7}{6} \cdot [4, 4, -4] =$$

$$(\frac{24}{6}, \frac{36}{6}, \frac{12}{6}) + \frac{7}{6}[4, 4, -4] = (\frac{52}{6}, \frac{64}{6}, -\frac{16}{6})$$

Oblicz ile razy dłuższa jest wysokość główna danego czworościanu wychodząca z wierzchołka D od odległości między prostymi zawierającymi krawędzie AB i CD.

$$H = d(D, \pi) = \frac{|16 + 24 - 8 - 4|}{\sqrt{16 + 16 + 16}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(v_1 \times v_2) \circ \overrightarrow{P_1P_2}|}{||v_1 \times v_2||}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [3 - 1, 3 - 3, 4 - 2] = [2, 0, 2]$$

$$(v_1 \times v_2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = [-10, 2, -2]$$

$$d(l_1, l_2) = \frac{24}{6\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{H}{d(l_1, l_2)} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{7}{4}$$