Macierz odwzorowania liniowego

2025-01-30

Poprzednia: Algebra - 12

Następna: [[]]

Zadania: [[]]

#macierze #macierz_odwzorowania #algebra

Definicja

Niech $B_v = (e_1, e_2, \ldots, e_n), B_W = (I_1, I_2, \ldots, I_m)$ będą (ustalonymi) bazami (reperami bazowymi) przestrzeni wektorowych, V i W nad tym samym ciałem K (więc $\dim V = n, \dim W = m$). Niech $f : V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym, gdzie:

$$\begin{gathered} f(e_1) = a_{11}I_1 + a_{21}I_2 + \cdots + a_{m1}I_m \\ f(e_2) = a_{12}I_1 + a_{22}I_2 + \cdots + a_{m2}I_m \\ \ldots \end{gathered}$$

Macierzą odwzorowania liniowego f w bazach B_V, B_W nazywamy macierz:

$$M_f(B_V, B_W) := [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Def. Niech $f : V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym, a $B_V = (e_1, e_2, \ldots, e_n), B_W = (I_1, I_2, \ldots, I_m)$ pewnymi (ustalonymi) bazami przestrzeni, odp. V i W:

Niech $y = f(x)$, gdzie $x \in V, y \in W$ oraz:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{B_V}, y = [y_1, y_2, \dots, y_m]_{B_W}$$

Równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

gdzie A jest macierzą odwzorowania f w bazach B_V, B_W nazywamy **macierzową postacią odwzorowania liniowego**.

Przyjmując oznaczenia:

$$X = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

gdzie X, Y są kolumnowymi macierzami (wektorami) współrzędych wektorów x, y w odpowiednich bazach, możemy równanie zapisać w postaci:

$$Y = AX$$

Uwaga:
Przy ustalonych bazach w przestrzeniach V i W, danemu **odwzorowaniu liniowemu** odpowiada **dokładnie jedna macierz** spełniająca powyższe równanie dla wszystkich x, y

Przykład:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \ f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + 3x_3)$$
$$B_1' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)), \ B_2' = ((1,2),(2,1))$$

Wyznacz macierz odwzorowania f w bazach B_1', B_2'

$$f(e_1) = f((1,1,1)) = (2,2)$$

$$a_{11}(1,2) + a_{21}(2,1) =$$

$$\begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Korzystając z macierzy M_f wyznacz wartość odwzorowania f dla $x = (1, 2, 1)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = AX$$

Def.
Macierzą endomorfizmu $f : V \to V$ w bazie B (przestrzeni V) nazywamy macierz $M_f(B) = M_f(B, B)$

Twierdzenie:
Niech $f : V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym B_V, B_W dowolnymi ustalonymi bazami przestrzeni V, W i niech $A = M_f(B_V, B_W)$ Wówczas:

$$r(f) = r(A), r(f) = \dim Imf$$

Wniosek:
Rzędy macierzy tego samego odwzorowania ale w różnych bazach są takie same.

$$M_{f+g} = M_f + M_g$$
$$M_{\alpha f} = \alpha M_f$$

Macierz przejścia

Def.
Macierzą przejścia $P_{B \to B'}$ od (starej) bazy $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ do nowej bazy $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ przestrzeni wektorowej V nazywamy macierz odwzorowania identycznościowego przestrzeni V w bazach B', B tj:

$$P_{B \to B'} = M_{Idv}(B', B)$$

(j-tą kolumnę macierzy przejścia od bazy B, do bazy B' stanowią współrzędne j-tego wektora nowej bazy względem starej bazy)

Odwrotnością tej macierzy jest macierz przejścia z bazy B' do bazy B.

Wniosek:
Jeżeli X, X' są kolumnowymi macierzami **współrzędnych** wektora $x \in V$ względem

baz, odpowiednio B, B' wówczas:

$$X = P_{B \to B'} \cdot X' \wedge X' = (P_{B \to B'})^{-1} X$$

Twierdzenie: O zmianie macierzy odwzorowania przy zmianie baz

Niech $f : V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym, B_V, B'_V bazami przestrzeni V, a B_W, B'_W bazami przestrzeni W Wówczas jeżeli:

$$A = M_f(B_V, B_W), \;\; B = M_f(B'_V, B'_W)$$
$$P = P_{B_V \to B'_V}, \;\; Q = P_{B_W \to B'_W}$$

to:

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$
