Geometria analityczna

2024-12-18

Lekcja: Algebra - 11

#algebra #geometria_analityczna

---

1. Sprawdź, czy:

wektory $u = [-1, 3, -5], v = [1, -1, 1], w = [4 - 2, 0]$ są współpłaszczyznowe

$$(u \times v) \circ w = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 12 + 10 - 20 - 2 = 0 \implies tak$$

punkty $P = (0, 0, 0), Q = (-1, 2, 3,), R = (2, 3, -4), S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe

$$\overrightarrow{PQ} = [-1, 2, 3],\ \overrightarrow{PR} = [2, 3, -4],\ \overrightarrow{PS} = [2, -1, 5]$$

$$(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \circ \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 16 - 6 - 18 + 20 + 4 = -33 \neq 0$$
$$nie\ sa\ wspolplaszczyznowe$$

---

2. Trójkąt ABC rozpięty jest na wektorach $\overrightarrow{AB} = [1, 5, -3], \overrightarrow{AC} = [-1, 0, 4]$. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = [20, -1, 5]$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|[20, -1, 5]| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{400 + 1 + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{426}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot H \cdot |AB| = \frac{1}{2} H \cdot \sqrt{35}$$

$$H = \sqrt{\frac{426}{35}}$$

---

3. Proste l_1 i l_2 dane są równaniami parametrycznymi:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = 6 + 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -6t \end{cases}$$

Wykaż że l_1 i l_2 są równoległe. Oblicz odległość między nimi. Znajdź równanie ogólne ich wspólnej płaszczyzny.

$$P_1 = (1, 0, 2), \quad P_2 = (6, 4, 0)$$
$$v_1 = [-4, -2, 4], \quad v_2 = [6, 3, -6]$$

$$v_1 \times v_2 = [0, 0, 0] = \overline{0}$$

$$d(P_1, l_2) = \frac{||\overrightarrow{P_0 P} \times v_2||}{||v_2||} = \frac{||[5, 4, -2] \times [6, 3, -6]||}{\sqrt{36 + 9 + 36}} = \frac{||[-18, 18, -9]||}{9} = \frac{\sqrt{729}}{9} = 3$$

---

4. Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1:\begin{cases}x=2-t\\ y=3+2t\\ z=-3t\end{cases}\quad l_2:\begin{cases}x=-3+2t\\ y=1+2t\\ z=-3\end{cases}$$

$$P_1=(2,3,0),\quad P_2=(-3,1,-3)$$
$$v_1=[-1,2,-3],\quad v_2=[2,2,0]$$

$$v_1\times v_2=[-6,-6,-6]\neq\bar{0}$$
$$\begin{cases}2-t=-3+2t\\ 3+2t=1+2t\\ -3t=-3\end{cases}\quad 3+2t=1+2t\implies 3=1,\ sprzeczne$$

$$Proste\ sa\ skosne\ wiec\ nie\ generuja\ plaszczyzny$$

Znajdź równanie normalne ich wspólnej płaszczyzny (jeżeli istnieje).

---

5. Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1:\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=2\end{cases}\quad l_2:\begin{cases}x=3\\ y=t\\ z=-t\end{cases}$$

$$P_1=(1,0,2),\quad P_2(3,0,0)$$
$$v_1=[2,1,0],\quad v_2=[0,1,-1]$$

$$v_1\times v_2=\begin{bmatrix}i&j&k\\2&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}[-1,-2,2]\neq\bar{0}$$
$$\begin{cases}1+2t=3\\ t=t\\ 2=-t\end{cases}\begin{cases}1+2t=3\\ t=t\\ -2=t\end{cases}\begin{cases}1-4=3\\ t=t\\ -2=t\end{cases},\ sprzeczne$$
$$Proste\ sa\ skosne\ nie\ generuja\ plaszczyzny.$$

$$d(l_1,l_2)=\frac{||(v_1\times v_2)\circ\overrightarrow{P_1P_2}||}{|v_1\times v_2|}=\frac{|[-1,-2,2]\circ[2,0,-2]|}{\sqrt{9}}=\frac{|-2-4|}{3}=2$$

---

6. Napisz równanie ogólne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (-1, 2, 4),\ B = (2, 1, 3)$ i $C = (3, -1, 5)$. Wyznacz odległość punktu $Q = (5, 0, 8)$ od płaszyzny π oraz znajdź punkt symetryczny do punktu Q względem tej płaszczyzny.

$$\overrightarrow{AB} = [3, -1, -1], \ \ \overrightarrow{AC} = [4, -3, 1]$$
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} = [-4, -7, -5]$$

$$-4(x-3) - 7(y+1) - 5(z-5) = 0$$
$$-4x + 12 - 7y - 7 - 5z + 25 = 0$$
$$-4x - 7y - 5z + 30 = 0$$

$$d(Q, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d(Q, \pi) = \frac{|-4 \cdot 5 - 7 \cdot 0 - 5 \cdot 8 + 30|}{\sqrt{16 + 49 + 25}} = \frac{|-30|}{\sqrt{90}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$Q' = (x', y', z')$$
$$\begin{cases} x' = 5 - 4t \\ y' = 0 - 7t \\ z' = 8 - 5t \end{cases} \sqrt{(-4t)^2 + (-7)^2 + (-5t)^2} = 2\sqrt{10}\sqrt{90t^2} = 2\sqrt{10}$$
$$3\sqrt{10}|t| = 2\sqrt{10}t = \frac{2}{3}$$
$$x' = 5 - \frac{8}{3}$$
$$\ldots$$