Przestrzeń wektorowa ciąg dalszy - bazy, reper bazowy, sumy podprzestrzeni

2024-11-10

Poprzednia: Algebra - 6

Następna: Algebra - 8

Zadania: [[]]

#baza_przestrzeni_wektorowej #algebra

Baza przestrzeni wektorowej:

Liniowa powłoka

Def. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K.
Liniową powłoką zbioru $A \subset V, A \neq \emptyset$, nazywamy zbiór:

$$Lin\ A := \{v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in K,\ v_1, v_2, \ldots, v_k \in A\}$$

(Czyli zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów ze zbioru A).

Uw.
$Lin\ A$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V i nazywamy ją *(pod)przestrzenią generowaną przez zbiór A*.

Baza

Def.
Zbiór $B \subset V$ nazywamy *bazą przestrzeni wektorowej V*, jeżeli:

1. $Lin\ B = V$ (zbiór B generuje całą przestrzeń V, czyli każdy wektor z V daje się przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów z B).

$$Wiemy\ ze:\ B \subset V \implies Lin\ B \subset V$$
$$I\ dodatkowo\ mowimy\ ze:\ V \subset Lin\ B$$
$$Wiec\ Lin\ B = V$$

2. $\forall v_1, v_2, \ldots, v_k \in B : \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ jest zbiorem wektorów *liniowo niezależnych*. (Jeżeli B jest zbiorem skończonym, to ten warunek jest równoważny warunkowi: B jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych)
3. No i żeby nie pominąć założeń definicji przy zadaniach *B ZAWIERA SIĘ W V*

Ja to rozumiem tak że baza to minimalna ilość wektorów która generuje nam całą przestrzeń V.

Wniosek:

Zbiór $B \subset V$ jest bazą przestrzeni $V \Leftrightarrow$ każdy wektor $v \in V$ można w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów z B.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią wektorową, $B \subset V$.
Następujące zdania są równoważne:

1. B jest *bazą* przestrzeni V
2. B jest *maksymalnym* (w sensie inkluzji - nie istnieje żaden zbiór różny od B który zawierałby B i byłby niezależny liniowo) No bo dodanie cokolwiek sprawi że to nie będzie liniowo niezależne, bo B już generuje przecież całe V.
3. B jest *minimalnym* (w sensie inkluzji) zbiorem wektorów *rozpinających* V: ($LinB = V$) (Nie możemy pozbyć się żadnego wektoru bo wtedy nie będziemy gernerować całej przestrzeni V)

Uw.

Dla dowolnego zbioru *M liniowo niezależnego* w przestrzeni V, istnieje w V *baza* B taka że $M \subset B$, oraz dla dowolnego zbioru *N rozpinającego* V, istnieje *baza* B' przestrzeni V taka, że $B' \subset N$.

W sensie jak już mamy jakiś liniowo niezależny zbiór wektorów to możemy tam coś dorzucić i otrzymać baze. A jeśli mamy taki zbiór którego kombinacja generuje całą przestrzeń, ale jest liniowo zależny, to można usunąć jakiś wektor z niego i otrzymać baze.

Def. Niech B będzie bazą przestrzeni wektorowej V.

1. Jeżeli B jest zbiorem *skończonym* $(|B| < +\infty)$, to mówimy, że przestrzeń jest skończenie wymiarowa, a liczbę wektorów w bazie nazywamy *wymiarem* przestrzeni i oznaczamy *dimV* (np. dla $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot), \dim \mathbb{R}^n = n)$
2. Jeżeli baza B składa się z *nieskończonej* liczby wektorów, to V jest przestrzenią nieskończenie wymiarową i piszemy $\dim V = +\infty$ np. $(f(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$
3. Jeżeli $V = \{\bar{0}\}$, przyjmujemy $\dim V = 0$

Ważna *uwaga* (wynikająca z poniższego przykładu dla bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$)
Jeżeli V jest przestrzenią wektorową *wymiaru n* to:

- każdy zespół *n+1* wektorów jest liniowo *zależny* w V
- każdy zespół *n* wektorów które *generują* przestrzeń V jest liniowo *niezależny* (więc stanowi *bazę* tej przestrzeni)
- każdy zespół *n* wektorów liniowo *niezależnych* w V *generuje* przestrzeń V (więc stanowi bazę tej przestrzeni)

Przykład $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ sprawdź czy baza.

$$B=\{u=(3,2,-1),v=(1,-2,1),w=(1,1,1)\}$$
$$1. B\subset\mathbb{R}^3$$

$$2. Lin\ B\subset\mathbb{R}^3$$
$$\wedge$$
$$t=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3-dowolnie\ ustalone\ t$$
$$\exists\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\alpha(3,2-1)+\beta(1,-2,1)+\gamma(1,1,1)=(x,y,z)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(3\alpha+\beta+\gamma,2\alpha-2\beta+\gamma,-\alpha+\beta+\gamma)=(x,y,z)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}3\alpha+\beta+\gamma=x\\2\alpha-2\beta+\gamma=y\\-\alpha+\beta+\gamma=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}z\\\beta=\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{12}z\\\gamma=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z\end{cases}\Rightarrow\ istnieja\ \alpha,\beta,\gamma$$
$$\Leftrightarrow$$
$$LinB=\mathbb{R}^3$$

$$3. Liniowa\ niezaleznosc$$
$$\alpha(3,2-1)+\beta(1,-2,1)+\gamma(1,1,1)=(0,0,0)\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}3\alpha+\beta+\gamma=0\\2\alpha-2\beta+\gamma=0\\-\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}\Rightarrow LinB-liniowo\ niezalezne$$

Reper bazowy i współrzędne wektora

Def. *Reperem bazowym* (a czasem po prostu bazą) danej przestrzeni wektorowej nazywamy dowolną jej bazę, w której ustaliliśmy kolejność wektorów.

Def Niech $B=(e_1,e_2,\dots e_n)$ będzie reperem bazowym przestrzeni wektorowej V nad ciałem K.
Dla dowolnego wektora $v=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n\in V$, skalary $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in K$ nazywamy *współrzędnymi* wektora v względem bazy B (w bazie B) i stosujemy zapis $v=[\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n]_B$.

Przykładowe zadania

a) Znajdź współrzędne wektora $(4,4,8)$ względem bazy B.

Czyli tak naprawdę w poleceniu pytają nas o wyrażenie wektora $(4, 4, 8)$ za pomocą bazy B.
(Tak jak wyrażamy współrzędne punktu na płaszczyźnie, przy bazie $(u = (1, 0), v = (0, 1))$

$$B = (u = (3, 2, -1), v = (1, -2, 1), w = (1, 1, 1))$$
$$\alpha(3, 2, -1) + \beta(1, -2, 1) + \gamma(1, 1, 1) = (4, 4, 8)$$
$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + \gamma = 4 \\ 2\alpha - 2\beta + \gamma = 4 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \gamma = \frac{20}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$
$$(4, 4, 8) = (-1) \cdot (3, 2, -1) + \frac{1}{3} \cdot (1, -2, 1) + \frac{20}{3} \cdot (1, 1, 1)$$
$$Czyli\ naszymi\ wspolrzednymi\ sa\ (\alpha = -1, \beta = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{20}{3})$$

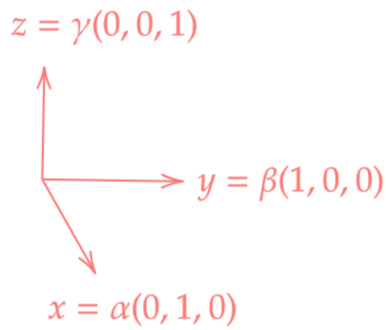
b) Znajdź wektor, którego współrzędne w bazie B wynosza $1, -1, 2$

$$[1, -1, 2]_B = 1(3, 2, -1) - 1(1, -2, 1) + 2(1, 1, 1) = (3 - 1 + 2, 2 + 2 + 2, -1 - 1 + 2) =$$

Typowe bazy i ich oznaczenia:

Def. Przestrzeń $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ oznaczamy w skrócie $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ (lub $\mathbb{R}^n$, a bazę tej przestrzeni: $B_k := (e_1 = (1, 0, \ldots., 0), e_2 = (0, 1, 0.., , 0), \ldots e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)))$ nazywamy *bazą kanoniczną*.

Tak jak $B_k := (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$ wyznacza nam każdy punkt przestrzeni trójwymiarowej $(LinB_k = \mathbb{R}^3)$



Wniosek
$\dim \mathbb{R}^n = n$

Ważna *uwaga*.
Jeżeli V jest przestrzenią wektorową *wymiaru n* to:

- każdy zespół *n+1* wektorów jest liniowo *zależny* w V
- każdy zespół *n* wektorów które *generują* przestrzeń V jest liniowo *niezależny* (więc stanowi *bazę* tej przestrzeni)
- każdy zespół *n* wektorów liniowo *niezależnych* w V *generuje* przestrzeń V (więc stanowi bazę tej przestrzeni)

Przykład:

Wiedząc że $B = (e_0(x) = 1, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2)$
$(e_i, \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ jest (standardową) bazą w $\mathbb{R}[x]_2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}[x]_2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ sprawdź czy:
$B' = (w_0(x) = 1 + x^2, w_1(x) = x, w_2(x) = x - x^2)$ też jest bazą w $\mathbb{R}[x]_2$

Tutaj wystarczy sprawdzić czy te wektory są niezależne na mocy powyższej uwagi, $(DimB = 3 = |B'|)$ wyjdzie nam wtedy rozpiętość na zbiór wielomianów co najwyżej stopnia drugiego co implikuje że będzie to baza.

Czy $\alpha(1 + x^2) + \beta(x) + \gamma(x - x^2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$?

$$\begin{cases} \alpha \cdot 1 = 0 \\ (\beta + \gamma)x = 0 \\ (\alpha - \gamma)x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Tak, liniowo niezależne. Rozpinają nam też całą przestrzeń wektorów (wielomianów co najwyżej stopnia drugiego) zatem jest to baza.

Twierdzenie
Niech V będzie przestrzenią *skończenie wymiarową* a U jej podprzestrzenią. Wówczas:

- $dimU \leq dimV$
- $dimU = dimV \Leftrightarrow U = V$

Sumy podprzestrzeni

Definicja
Sumą podprzestrzeni V_1, V_2 przestrzeni wektorowej V nazywamy zbiór:

$V_1 + V_2 = \{v \in V \mid \exists v_1 \in V_1 \ \exists v_2 \in V_2 : v = v_1 + v_2\} = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_2, \ v_2 \in V_2\}$
Czyli jest to zbiór sum wektorów (każdy z każdym).

Przykład:

$$\begin{matrix} A = \{0, 3\} \\ B = \{0, 2, 4\} \end{matrix} \quad A + B = \{0, 2, 4, 3, 5, 7\}$$

Twierdzenie
Jeżeli V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V, to:

- $V_1 + V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V
- $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V