Układy równań

2024-12-15

Poprzednia: Algebra - 9

Następna: Algebra - 11

Zadania: [[]]

#uklady_rownan #algebra

Układ równań liniowych

Definicja:

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi ma postać:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} , \quad gdzie:$$

$$a_{ij} - wspolczynniki\ (dane - ustalone)$$
$$b_i - wyrazy\ wolne\ (dane - ustalone)$$
$$x_j - niewiadome/zmienne\ (szukane)$$
$$rozwiazanie -\ kazda\ n-ka\ (elementow\ z\ ciala\ \mathbb{K})\ x_1, x_2, \ldots, x_n$$
$$spelniajacych\ wszystkie\ rownania\ ukladu\ (*)$$

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą współczynników (macierzą główną)* układu (*),

Macierz

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą (kolumną) wyrazów wolnych*, a macierz:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

nazywamy *macierzą uzupełnioną układu* (*).

Zapis macierzowy układu

Układ (*) zapisujemy *macierzowo* jako:

$$A \cdot X = B$$

gdzie:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

jest *macierzą (kolumną) niewiadomych*.

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Definicja:
Jeżeli wszystkie wyrazy wolne układu (*) są zerami, tj:

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0 \; (B = \overline{0})$$

to taki układ nazywamy *jednorodnym*. W przeciwnym wypadku, tj. gdy choć jeden wyraz wolny jest różny od zera, to taki układ nazywamy *niejednorodnym*.

Definicja:
Układ (*) nazywamy:

1. *oznaczonym*, jeżeli ma dokładnie jedno rozwiązanie
2. *nieoznaczonym*, jeżeli ma więcej niż 1 rozwiązanie
3. *sprzecznym*, jeżeli nie ma rozwiązań

Układy kwadratowej

Definicja:
Jeżeli w układzie (*) liczba niewiadomych jest równa liczbie równań ($m = n \Leftrightarrow A$ jest macierzą kwadratową), to nazywamy go *układem kwadratowym*.

Definicja:
Układ (*) nazywamy *układem Cramera*, jeżeli jest *układem kwadratowym* i $\det A \neq 0$.

Twierdzenie Cramera

Jeśli układ (*) jest *układem Cramera*, to:

1. ma *dokładnie jedno* rozwiązanie
2. jedyne jego rozwiązanie wyraża się następującymi *wzorami Cramera*

   $x_j = D_{xj} \cdot \frac{1}{\det A}, \;\; j = 1, 2, \ldots, n$
   gdzie D_{xj} jest *wyznacznikiem* macierzy powstałej z A poprzez *zastąpienie j-tej kolumny* przez *kolumne wyrazów wolnych*.

Przykład:

$$\left\{\begin{bmatrix} x-3y+z=0 \\ x-4y+z=-3 \\ -2x+6y-z=-7 \end{bmatrix}\right.$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \end{vmatrix}=4+6+6-8-3-6=-1\neq 0$$

$$D_x=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -7 & 6 & -1 \end{bmatrix}=21-18-28+9=-16$$

$$D_y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -7 & -1 \end{bmatrix}=3-7-6+7=-3$$

$$D_z=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}=28-18-21=7$$

$$x=\frac{-16}{-1}=16,\quad y=\frac{-3}{-1}=3,\quad z=\frac{7}{-1}=-7$$

$$\begin{cases} x=16 \\ y=3 \\ z=-7 \end{cases}$$

Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Układ

$$(*)\ AX=B$$

ma *co najmniej 1 rozwiązanie* wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A)=r([A|B])$.

Wniosek:
Układ (*) jest sprzeczny ⇔ $r(A) \neq r([A|B])$

Twierdzenie:

- Układ (*) ma *dokładnie 1 rozwiązanie* ⇔, gdy $r(A) = r([A|B]) = n$, gdzie n jest liczbą niewiadomych
- Jeżeli $r(A) = r([A|B]) = r$, gdzie $r < n$ to układ (*) jest *nieoznaczony* i ma rozwiązania zależne od *n-r parametrów*.

Uwaga:
Układ jednorodny ma zawsze przynajmniej jedno rozwiązanie,
$X = \overline{0}, \;\; (x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0)$, zatem jest oznaczony lub nieoznaczony.

Intuicja:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$Jedno\ z\ mozliwych\ rozwiazan\ bedzie\ zawsze\ \ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

Uwaga:
Jeżeli mamy dany układ *kwadratowy* (*) rozmiaru $n \times n$, dla którego:

1. $\det A = 0$ oraz dla pewnego $j \in \{1, \ldots, n\}, \;\; D_{xj} \neq 0$ to jest on *sprzeczny*
2. $\det A = 0 = D_{x1} = \cdots = D_{xn}$ to jest on *nieoznaczony* albo *sprzeczny*

Rozwiązywanie układów równań metodą Gaussa

Uwaga:
Układy równań można rozwiązywać używając *metody Gaussa*, polegającej na stosowaniu do (wierszy) macierzy $[A|B]$ *operacji elementarnych* w celu sprowadzenia jej do *postaci schodkowej*.

Przykład:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z=-3 \\ 4x-5y-3z=-7 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & -5 & -3 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -9 & -7 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$r(A)=3=r([A|B])=n \quad \textit{Uklad jest oznaczony}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -2y-3z=-3 \\ 2z=2 \end{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Metoda macierzy odwrotnej:

Metodę macierzy odwrotnej stosujemy jako jeden z sposobów na rozwiązanie układu równań. Polega ona na tym że po pewnym przekształceniu równania układu otrzymamy wzór na macierz niewiadomych.

$$\text{Mając układ równań zapisany macierzowo:}$$

$$A \cdot X = B$$

$$\text{Mnożymy go od lewej strony przez } A^{-1}$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Przykład:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 3 - 2 = 1 \neq 0 \text{ zatem istnieje macierz odwrotna}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right],\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
