7) Znajdź rzut prostokątny punktu $P = (6, 4, 0)$ na prostą oraz punkt symetryczny do P względem tej prostej

$$\begin{cases} x = 6 + 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -6t \end{cases}$$

$$v = [6, 3, -6]$$
$$PQ(t) = (6t, 3t, -6t)$$
wzór na wektor od punktu na prostej wyznaczonego przez t do punktu P

$$PQ(t) \circ v = 36t + 9t + 36t = 81t = 0 \implies t = 0$$
$$Q(t) = (6 + 6t, 4 + 3t, -6t)$$
$$Q(0) = (6, 4, 0)$$

P leży na prostej więc P' też.

---

9) Znajdź odległość prostej $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ od płaszczyzny:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - s + t \\ y = 2 - 2s - 2t \\ z = -1 + s - t \end{cases}$$

$$l: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

$$\begin{cases} x = 2 + t_l \\ y = -3 + 2t_l \\ z = 2 - t_l \end{cases}$$

$$P_l = (2, -3, 2)$$
$$P_\pi = (1, 2, -1)$$

$$d(l, \pi) = \frac{|n \circ (P_\pi - P_l)|}{|n|}$$

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = [4, 0, 4]$$

$$d(l, \pi) = \frac{|[4, 0, 4] \circ (-1, 5, -3)|}{\sqrt{32}} = \frac{16}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

---

10) Dana jest prosta l oraz płaszczyzna π_1. Znajdź równanie ogólne płaszczyzny π zawierającej prostą l i prostopadłej do płaszczyzny π_1. Zbadaj wzajemne położenie prostej l i krawędzi k przecięcia się płaszczyzn π i π_1

$$l:\begin{cases}3x-2y+z=3\\ x-2z=0\end{cases},\quad \pi_1: x+y+z+8=0$$

$$n_{\pi_1}=[1,1,1]$$
$$n_{l_1}=[3,-2,1]$$
$$n_{l_2}=[1,0,-2]$$

$$\begin{cases}3x-2y+z=3\\ x-2z=0\end{cases}\begin{cases}\frac{7z-3}{2}=y\\ x=2z\end{cases}\implies P_1=(2,1,2)$$

$$v_l=P_2-P_1=(4,2,\frac{11}{2})-(2,1,2)=(2,1,\frac{7}{2})$$

$$n_\pi=n_{\pi_1}\times v_l=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & \frac{7}{2}\end{vmatrix}=(\frac{5}{2},-\frac{3}{2},-1)$$

$$\pi:[x-2,y-1,z-2]\circ n_\pi=0$$
$$\pi:\frac{5}{2}x-5-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}-z+2=0$$

$$\pi: 5x-10-3y+3-2z+4=0$$

$$\pi: 5x-3y-2z-3=0$$

$$k:\begin{cases}5x-3y-2z-3=0\\ x+y+z+8=0\end{cases}\begin{cases}\frac{-7z-43}{8}=y\\ x=\frac{-z-21}{8}\\ z=z\end{cases}$$

---

11) Znajdź punkt symetryczny do punktu $P=(2,3,-1)$ względem prostej:

$$P \notin l$$

$$l: \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -y \\ z = -y \\ y = y \end{cases} \implies v_l = [-1, 1, -1]$$

$Q(t)$ - punkt na prostej zależnie od t

$$Q(t) = t(-1, 1, -1)$$

$PQ(t)$ - wektor od punktu P do punktu Q(t)

$$PQ(t) = [-t - 2, t - 3, -t + 1]$$

Sprawdzamy kiedy wektor $PQ(t)$ jest prostopadły do prostej l

$$PQ(t) \circ v_l = 0$$
$$[-t - 2, t - 3, -t + 1] \circ [-1, 1, -1] = 0$$
$$t + 2 + t - 3 + t - 1 = 0$$
$$3t - 2 = 0$$
$$t = \frac{2}{3}$$

$$Q' = P + 2[-\frac{2}{3} - 2, \frac{2}{3} - 3, -\frac{2}{3} + 1] = (2, 3, -1) + 2[-\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{1}{3}] =$$

$$= (2, 3, -1) + [-\frac{16}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{2}{3}] = [-\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}]$$

---

12) Zbadaj wzajemne położenie prostej l prostopadłej do płaszczyzny $\pi: y = 2 + z$ i przechodzącej przez punkt $A = (1, 2, 0)$ oraz prostej k przechodzącej przez punkt $B = (0, 3, -1)$ i równoległej do prostej, wyznacz odległość prostych l i k. Wyznacz objętość równoległościanu rozpiętego przez wersory prostych l i k oraz wektor $\overrightarrow{AB}$.

$$k' : \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$l = (1, 2, 0) + t(v_l)$$
$$v_l = (0, -1, 0)$$
$$l = (1, 2, 0) + t(0, -1, 0)$$

$$k = (0, 3, -1) + t_k(v_k)$$
$$v_k = v_{k'} :$$
$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases} \begin{cases} y = -1 \\ x = z \end{cases} \implies v_{k'} = [1, 0, 1]$$

$$k = (0, 3, -1) + t_k[1, 0, 1]$$
$$\nexists a : a \cdot t_k = t \implies l \nparallel k$$

$$\begin{cases} t_k = 1 \\ -1 = t \quad \checkmark \\ 0 = -1 + t_k \end{cases} \implies P = (0, 3, -1) + [1, 0, 1] = [1, 3, 0]$$

Skoro proste mają punkt przecięcia,ich odlełość jest równa 0

$$\text{wersor prostej} l : a \cdot |v_l| = 1 \implies a \cdot 1 = 1 \implies a = 1$$
$$w_l = 1 \cdot v_l = [0, -1, 0]$$

$$\text{wersor prostej } k : a \cdot |v_k| = 1$$
$$a \cdot \sqrt{2} = 1$$
$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\implies$$
$$w_k = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, 0, 1] = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$V_r = |(w_l \times w_k) \circ \overrightarrow{AB}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \circ [-1, 1, -1] =$$

$$= |[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}]| = \sqrt{1} = 1$$

1) Sprawdź, które z podanych odwzorowań są liniowe:

a) L: $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $(Lp)(x) = xp'(x) + p(1)$

$$(Lp)(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)p'(x_1 + x_2) + p(1)$$

$$(Lp)(x_1) + (Lp)(x_2) = x_1 p'(x_1) + x_2' p'(x_2) + p(1) + p(1)$$

$$\text{Różne np dla:}$$
$$f(x) = x$$
$$(Lp)(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 + 1$$
$$(Lp)(x_1) + (Lp)(x_2) = x_1 + x_2 + 1 + 1$$

---

b) $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], (Lp)(x) = p(x)p'(x)$