Odwzorowania liniowe

2025-01-30

Poprzednia: Algebra - 11

Następna: Algebra - 13

Zadania: [[]]

#odwzorowania_liniowe #algebra

Definicja

Def.
Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad **tym samym ciałem** K.
Odwzorowanie:

$$f : V \to W$$

nazywamy **liniowym** jeżeli:

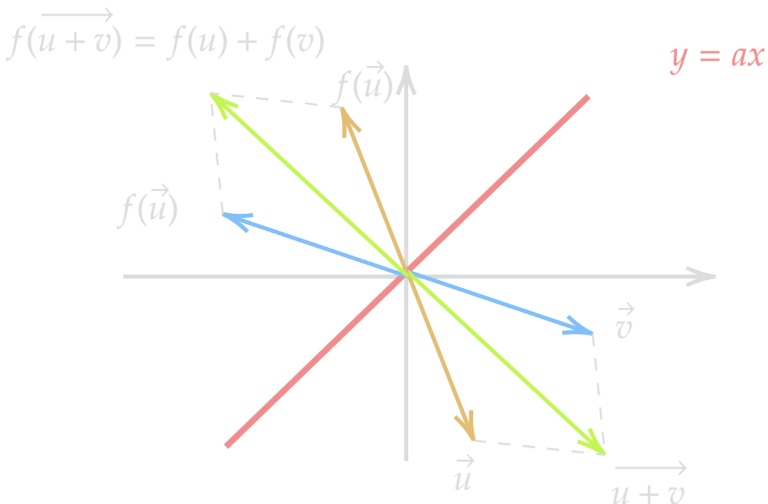
$$\forall u, v \in V : f(u+v) = f(u) + f(w)$$
$$\forall v \in V, \forall \alpha \in K : f(\alpha v) = \alpha \cdot f(v)$$

Wniosek:
Jeżeli $f : V \to W$ jest odwzorowaniem **liniowym**, to:

$$\text{wektor zerowy pierwszej przestrzeni zamienia się na wektor zerowy drugiej}$$
$$f(\overline{0}_v) = \overline{0}_w$$

$$\forall v \in V : f(-v) = -f(v)$$

Prosty przykład odwzorowania liniowego: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - symetria względem osi y=x



Przykład:

Sprawdź dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = ax + b$, określa odwzorowanie liniowe:

$$1)\ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$
$$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) + b = ax_1 + b + ax_2 + b \implies b = 0$$

$$2) f(\alpha x) = \alpha f(x)$$
$$f(\alpha x) = a\alpha x + b = \alpha a x + b \implies a \in \mathbb{R}$$

Równoważne założenia odwzorowania liniowego:

Podobnie jak w podprzestrzeniach wektorowych dwa warunki związane z sumą i iloczynem przez skalar zawarliśmy w jednym warunku tutaj również można tak zrobić:

$$f : V \to W - odwzorowanie\ liniowe \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

Dowód analogiczny do tego z podprzestrzeni:

$$\text{Zakładając } \alpha = \beta = 1 :$$
$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \rightarrow f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$\text{Zakładając } x_2 = \overline{0}$$
$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = \alpha f(x_1) + \beta \overline{0}_W = \alpha f(x_1) = f(\alpha x_1)$$

Przykład:
Sprawdź czy $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie $f(x, y, z) = (2x + y - z, x - 3z)$ określa odwzorowanie liniowe:

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = f([\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2]) =$$
$$= (2\alpha x_1 + 2\beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 - \alpha z_1 - \beta z_2, \alpha x_1 + \beta x_2 - 3\alpha z_1 - 3\beta z_2)$$

$$\alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = \alpha[2x_1 + y_1 - z_1, x_1 - 3z_1] + \beta[2x_2 + y_2 - z_2, x_2 - 3z_2] =$$
$$= [2\alpha x_1 + \alpha y_1 - \alpha z_1 + 2\beta x_2 + \beta y_2 - \beta z_2, \alpha x_1 - 3\alpha z_1 + \beta x_2 - 3\beta z_2]$$

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) \checkmark \implies f - \textit{odwzorowanie liniowe}$$

Twierdzenie:

Pierwotną definicje można bardziej rozciągnąć korzystając z własności przestrzeni wektorowych, sumy i iloczynu skalarów z wektorami:

$$\forall v_1, v_2, \dots v_n \in V \ \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K :$$

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n)$$

Wniosek:
Odwzorowanie liniowe f jest **jednoznacznie określone** przez **wartości f na wektorach bazowych z dziedziny** bo możemy wybrać wektory z bazy, z których kombinacją liniową tworzymy każdy wektor należący do podprzestrzeni V.

Obraz i jądro

Def.

Niech $f : V \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym.

- **Jądrem** odwzorowania f nazywamy zbiór:

$$Ker f := \{v \in V : f(v) = \overline{0}_W\}$$

- **Obrazem odwzorowania** f (**zbiorem wartości**) nazywamy zbiór:

$$Im f := \{w \in W : \exists v \in V : w = f(v)\}$$

Twierdzenie:
$Ker f$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V
$Im f$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni W

Wymiary obrazu i jądro

Wniosek:
Jeżeli $f : V \rightarrow W$ jest odwzorowaniem liniowym, a B jest bazą przestszeni V, to:

$$Im f = Lin f(B)$$

(bo przecież z bazy możemy wygenerować każdy wektor z V)

Def.

Wymiar obrazu odwzorowania liniowego f (jeżeli jest skończony) nazywamy **rzędem odwzorowania** f i oznaczamy $r(f)$, gdzie $r(f) = \dim Im f$

Przykład:
Wyznacz jądro i obraz, oraz ich bazy i wymiary, odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie $f(x, y, z) = (2x + y - z, x - 3z)$

$$Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = \overline{0}_W = (0,0)\}$$

$$(2x + y - z, x - 3z) = 0$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -5z \\ x = 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$Kerf = \{(3z, -5z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(3, -5, 1) : z \in \mathbb{R}\} = Lin(\{3, -, 5, 1\})$$

$$B_{Kerf} = \{(3, -5, 1)\} \implies dimKerf = 1$$

$$Imf = \{w \in W : \exists v \in V : f(v) = w\}$$

$$Imf = \{(2x + y - z, x - 3z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$Imf = \{x(2,1) + y(1,0) + z(-1,-3) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = Lin\{(2,1), (1,0), (-1,3)\}$$

$$gdzie : (-1, 3)\ mozna\ wygenerowac\ za\ pomoca\ (2,1), (1,0)$$

$$\text{zatem}$$
$$B_{Imf} = \{(2,1), (1,0)\} \implies \dim Imf = 2$$

Twierdzenie:

Zakładając że V, W to przestrzenie wektorowe nad ciałem K, $\dim V < \infty$, a $f : V \to W$ to odwzorowanie liniowe:

$$\dim V = \dim Kerf + \dim Imf$$

Rodzaje odwzorowań liniowych

Mówimy że odwzorowanie $f : V \to W$ jest:

- **monomorfizmem**, jeżeli jest **injektywne** (różnowartościowe)
  Czyli $f(v_1) = f(v_2) \Leftrightarrow v_1 = v_2$

- **epimorfizmem**, jeżeli jest **surjektywne** ($Imf = W$)
  Dla każdego wektora w w W istnieje wektor v w V taki że $f(v) = w$
- **izomorfizmem**, jeżeli jest **bijektywne**
  Czyli takie które jest jednocześnie monomorfizmem i epimorfizmem
- **endomorfizmem**, jeżeli $V = W$
  Po prostu działamy na tych samych zbiorach.
- **automorfizmem**, jeżeli jest **endomorfizmem bijektywnym**
  Czyli taki endomorfizm który jest jednocześnie izomorfizmem, oraz istnieje takie odwzorowanie które cofnie pierwotne odwzorowanie.
- **formą liniową**, jeżeli $W = K$
  Czyli wektor z podprzestrzeni ze zbioru V którego skalary są K to jest to odwzorowanie które taki wektor zamienia na skalar. Np takie odwzorowanie które zwraca sume składowych wektora. $f((x, y, z)) = x + y + z$

Twierdzenia:

Niech $f : V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym, gdzie $\dim V = n, \dim W = m$.
Wówczas:

1. f jest **epimorfizmem** $\Leftrightarrow r(f) = m$
2. następujące warunki są równoważne:
   - f jest **automorfizmem**
   - $Kerf = \{\overline{0}\}$
   - $r(f) = n$

Przestrzenie izomorficzne

Def.
Dwie przestrzenie wektorowe V i W nad tym samym ciałem K nazywamy **izomorficznymi**, jeżeli **istnieje izomorfizm** (dwa wektory wygenerują to samo tylko wtedy kiedy są równe i każdy wektor z W da się wygenerować) jednej przestrzeni na drugą, co zapisujemy V~W.

Uwaga:
Jeżeli $f : V \to W$ jest **izomorfizmem** to $f^{-1} : W \to V$ też jest **izomorfizmem**

Twierdzenie:

Z: V, W - przestrzenie wektorowe o skończonych wymiarach nad ciałem K
T: V~$W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Twierdzenie:

Niech V, W będą (ustalonymi) przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Struktura $(L(V, W), K, +, \cdot)$, gdzie:

$$L(V, W) := \{f : V \to W | f - odwzorowanie\ liniowe\}$$

+, oznacza dodawanie odwzorowań, a $\cdot$ mnożenie odwzorowań przez skalary z ciała K, jest **przestrzenią wektorowymi**.

Uwaga:

Złożeniem odwzorowań liniowych jest odwzorowaniem liniowym.
