Liczby zespolone

2024-10-02

Zadania: Algebra - liczby zespolone

Następna: Algebra - 2

#Liczby_zespolone #algebra #informacje

Elżbieta Bratuszewska bratusze@agh.edu.pl 502-511-256 b7 p.17 konsultacje

---

- zapoznać się z sylabusem (co ma być wypracowane)
- wejdź na organizacje roku

2025-02-01 - sesja

Warunki zaliczenia :

- 2 kolokwia / semestr 40pkt
- aktywność 4pkt (2plusy = 1 punkt)
- obecność 4 pkt

50% zaliczenie, 2 nb max

do tygodnia zaległe kolokwium uzupełnić

Skoczylas !, Jurkiewicz

W zbiorze liczb zespolonych nie są wprowadzone nierówności.
Część Re z=x i Im z=y - to liczby rzeczywiste. Mnożenie i dodawanie liczb zespolonych

jest przemienne i łączne, lecz mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Wniosek: wszystkie własności i twierdzenia wynikające z powyższych własności dodawania i mnożenia w $\mathbb{R}$, są również prawdziwe w $\mathbb{C}$.

#postać_trygonometryczna

Jednostka urojona

$$\sqrt{-1} = i$$

Postacie liczby zespolonej

$$(x, y) = (x, 0) \oplus [(y_1 0) \oplus (0, 1)]$$
$$(x, y) = x + iy$$
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$

Oraz: Algebra - 2 postać wykładnicza.

Działania na liczbach zespolonych

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$\frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \rho_2\right)\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left(\cos\left(\varphi_1 - \rho_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right)$$

Twierdzenia

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$
$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$
$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$
$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$$

Wzór de Moivre'a - (potęgowanie w postaci tryg.)

#wzor_de_Moivrea

$$z^n = |z|^n(cos(n\varphi) + i \cdot sin(n\varphi)),\ \geq 1$$

$$Przykład\ potęgowania:$$
$$z = -2\sqrt{3} - 2i$$
$$|z| = \sqrt{12+4} = 4$$
$$z^{16} = 4^{16}(16 * \frac{7\pi}{6} + isin(16 * \frac{7\pi}{6}))$$
$$z^{16} = 4^{16}(cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot sin(\frac{2\pi}{3}))$$
$$z^{16} = 2^{32}(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Przydatne własności:

- $arg(-z) = arg(z) + \pi, 0 \leq arg(z) < \pi$
- $arg(-z) = arg(z) - \pi,\ \ \pi \leq arg(z) < 2\pi$
  Wynika z tego że zmieniamy zarówno część rzeczywistą i urojoną, ale jeżeli mamy pod osią ox to odejmujemy pi żeby wrócić na górną część a jeżeli nad ox to dodajemy pi by zejść na dolną część.
- $arg(\frac{1}{z}) = 2\pi - arg(z)$
  Wynika to z własności dzielenia w postaci trygonometrycznej (odejmujemy argumenty)

- $arg(\overline{z}) = 2\pi - arg(z)$
  Wynika to z symetrii względem osi Ox którą dostajemy przy zamianie znaku części urojonej