Lekcja: Algebra - 4

#algebra #relacje

2024-10-16

Z ćwiczeń:

---

1)

$$Tw.\,R = (A, grR, A)$$

$$Z: R - \ zwrotna, \forall a \in A: aRa$$
$$T: R = R \circ R \leftrightarrow R - \ przechodnia, \forall a, b, c \in A: (aRb \wedge bRc \implies aRc)$$
$$D: (\implies)\ zakl.\ ze\ R - \ zwrotna\ i\ zakl.\ ze\ R \circ R = R$$
$$[\forall (a, b) \in A \times A: ((a, b) \in R \circ R \leftrightarrow (a, b) \in R)]$$

$$Mam\ pokazac\ ze\ wtedy\ R - \ przechodnia\ czyli: \forall a, b, c \in A: (aRb \wedge bRc \implies aRc)$$
$$Niech\ \ a, b, c \in A\ beda\ dowolnie\ ustalone\ i\ zakladam,\ ze\ aRb \wedge bRc \leftrightarrow (a, c) \in R$$

Dowód równoważności:
$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \implies q \wedge q \implies p)$

---

2. Wykaż że dla zbioru X z relacją R: R jest relacją równoważności $\leftrightarrow$ R^{-1} jest relacją równoważności.

$$Z : R - \text{ relacja rownowaznosci}$$

$$\begin{gathered} zatem: \\ 1. \ \forall x \in A : xRx \\ 2. \ \forall x, y \in A : xRy \implies yRx \\ 3. \ \forall x, y, z \in A : xRy \ \wedge \ yRz \implies xRz \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \forall (x, y) : (x, y) \in R \implies (y, x) \in R^{-1} \\ Zatem \\ \forall x : xRx \wedge xR^{-1}x \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \forall (x, y) \in R \implies (y, x) \in R \ \wedge (y, x) \in R^{-1} \\ \forall (y, x) \in R \implies (x, y) \in R \ \wedge (x, y) \in R^{-1} \\ wiec \\ \forall (x, y) \in R^{-1} \implies (y, x) \in R^{-1} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} yR^{-1}x \ \wedge zR^{-1}y \implies zR^{-1}x \\ Dowod \ w \ przeciwna \ strone \ gdzie \ na \ poczatku \ zakladamy \\ ze \ to \ R^{-1} \ jest \ rownowazne \ i \ udowadniamy \ ze \ wtedy \ R \ tez \ jest \ przebiega \ analogicznie \end{gathered}$$

---

3. Wykaż że jeżeli relacja R określona w zbiorze X jest zwrotna i przechodnia to $R \cap R^{-1}$ określa relację równoważności.

$$\begin{gathered} S = R \cap R^{-1} \\ S = \{\forall (x, y) : (x, y) \in R \ \wedge (x, y) \in R^{-1}\} \\ gdzie \\ (x, y) \in R^{-1} \implies (y, x) \in R \\ wiec \\ S = \{\forall (x, y) : (x, y) \in R \ \wedge (y, x) \in R\} \ - \ symetryczna \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Mamy \ z \ zal. \ ze \ zwrotna \ i \ przechodna \ a \ teraz \ udowodnilismy \ symetrycznosc. \\ Wiec \ \ S = R \cap R^{-1} - rownowazna \end{gathered}$$

Zbiór zadań:

1.

$$grR = \{(1,1),(1,2),(3,2),(3,4),(3,7),(2,9),(5,3)\}$$
$$grS = \{(1,2),(1,7),(2,5),(2,4),(7,9),(4,10)\}$$

$$D_R = \{1,3,2,5\}$$
$$D_R^{-1} = \{1,2,3,4,7,9\}$$

$$D_S = \{1,2,7,4\}$$
$$D_S^{-1} = \{2,7,5,4,9,10\}$$

$$grR^{-1} = \{(1,1),(2,1),(2,3),(4,3),(7,3),(9,2),(3,5)\}$$
$$grS^{-1} = \{(2,1),(7,1),(5,2),(4,2),(9,7),(10,4)\}$$

$$gr(S^{-1} \circ R^{-1}) = \{(9,1),(3,2)\}$$
$$gr(R \circ S) = \{(1,9),(2,3)\}$$
$$gr(R \circ S)^{-1} = gr(S \circ R) = \{(9,1),(3,2)\}$$

\begin{gathered} Sprawdz \ ze:\\ S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1}\\\\ S^{-1} \circ R^{-1

---

4. Niech $k \in \mathbb{N}_+$. W zbiorze $\mathbb{Z}$ wprowadzamy relację $m \equiv n(mod k) \leftrightarrow k|(m-n)$. Wykaż że relacja ta jest równoważnością. Zbiór ilorazowy tej relacji będziemy ozaczać przez $\mathbb{Z}/k$. Przyjmującc $k=7$ podaj:

$$(zapis\ \ m \equiv n(mod\ k)\ oznacza\ ze\ m\ i\ n\ daja\ ta\ sama\ reszte\ z\ dzielenia\ przez\ k)$$

$$R = (\mathbb{Z}, grR),\ grR = \{\forall m, n \in \mathbb{Z} : m \equiv n(mod\ k)\}$$
$$m \equiv n(mod\ k) \Leftrightarrow \exists\ q \in \mathbb{Z} : m - n = k \cdot q$$

$$Dowod\ rownowaznosci:$$
$$1.\forall m \in \mathbb{Z} : mRm\ bo\ m - m = k \cdot 0$$
$$Zwrotnosc\ spelniona\ \forall m \in \mathbb{Z} : mRm$$

$$2.\forall m, n : m - n = k \cdot q \implies n - m = k \cdot (-q)$$
$$innymi\ slowy\ jesli\ m\ i\ n\ daje\ ta\ sama\ reszte\ to\ n\ i\ m\ oczywiscie\ tez$$
$$Symetrycznosc\ spelniona\ \forall m, n \in \mathbb{Z} : mRn \implies nRm$$

$$3.\forall n, p, m : nRp \wedge pRm \Leftrightarrow n - p = k \cdot q\ \wedge\ p - m = k \cdot q',\ \ q, q' \in \mathbb{Z} \implies$$
$$\implies\ n - m = (n - p) + (p - m) = k \cdot (q + q'),\ \ q + q' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow nRm$$
$$Przechodnosc\ spelniona\ \forall n, p, m \in \mathbb{Z} : nRp \wedge pRm \implies nRm$$

Wykazaliśmy że jest równoważnością.

$[2], [5], [-5]$ **(klasy równoważności przyjmując** $k = 7$**),** $\mathbb{Z}/7$

$$[2] = \{7k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[5] = \{7k + 5 : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[-5] = [5] = \{7k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Z}/7 = \{[0], [1], [2], \ldots, [6]\}$$

---

5. Dane jest odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **takie że** $f(x) = x^3 - 3x + 2$**. Niech** $S = (\mathbb{R}, grS, \mathbb{R})$ **będzie relacją taką, że** $grS = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$**.**

a) Wykaż, że S **jest relacją równoważności:**

$$1.\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x) \implies \forall x \in \mathbb{R}\ \ xRx$$
$$2.\forall x, y \in \mathbb{R} : (f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x)) \Leftrightarrow (xRy \Leftrightarrow yRx)$$
$$3.\forall x, y, z \in \mathbb{R} :\ \ [f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \implies f(x) = f(z)] \Leftrightarrow [xRy \wedge yRz \implies xRz]$$

b) Niech $a \in \mathbb{R}$**. Określ w zależności od** a **liczność klasy równoważności** $[a]$**.**

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$
$$f(x) = (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2)$$
$$x_1 = 1 \;\; (dwukrotny), \;\; x_2 = -2$$

$$[a] = 1, \;\; a < -2 \;\; (bo\ z\ samym\ soba)$$
$$[a] = 2, \;\; a \in \{-2, 1\}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$
$$x^2 = 1, \;\; x = 1 \;\lor\; x = -1$$
$$[a] = 2, \; a \in \{-1, 1\}$$
$$[a] = 3, \; a \in (-2, 1) \setminus \{-1\}$$
$$[a] = 1, \; a \in (1, +\infty)$$

Niech $R = (\mathbb{R}^2, grR, \mathbb{R}^2)$, gdzie: $(x,y)R(x',y') \leftrightarrow x \leq x' \;\land\; y \leq y'$.

a) Wykaż, że R jest relacją porządku. Czy ten porządek jest liniowy?

$$1.\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x \leq x \ \wedge \ y \leq y \implies \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 (x,y)R(x,y)$$

$$2.\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : \ \ (x \leq x' \wedge x' \leq x) \ \wedge \ (y \leq y' \ \wedge \ y' \leq y) \implies (x = x' \ \wedge \ y = y')$$
$$\Leftrightarrow (x,y) = (x',y')$$
$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y)R(x',y') \wedge (x',y')R(x,y) \implies (x,y) = (x',y')$$

$$3.\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2 : (x \leq x' \wedge y \leq y') \ \wedge \ (x' \leq x'' \ \wedge \ y' \leq y'') \implies$$
$$\implies x \leq x'' \wedge y \leq y''$$
$$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2 : (x,y)R(x',y') \wedge (x',y')R(x'',y'') \implies (x,y)R(x'',y'')$$

$$Nie\ jest\ spojny\ bo\ moze\ byc\ tak\ ze\ np.\ tylko\ x\ mniejszy\ a\ y\ wieksze :$$
$$(3,4),(4,2) \ \neg\,(3,4)R(4,2) \ \wedge \ \neg\,(4,2)R(3,4) \ \wedge \ \neg\,(4,2) = (3,4)$$

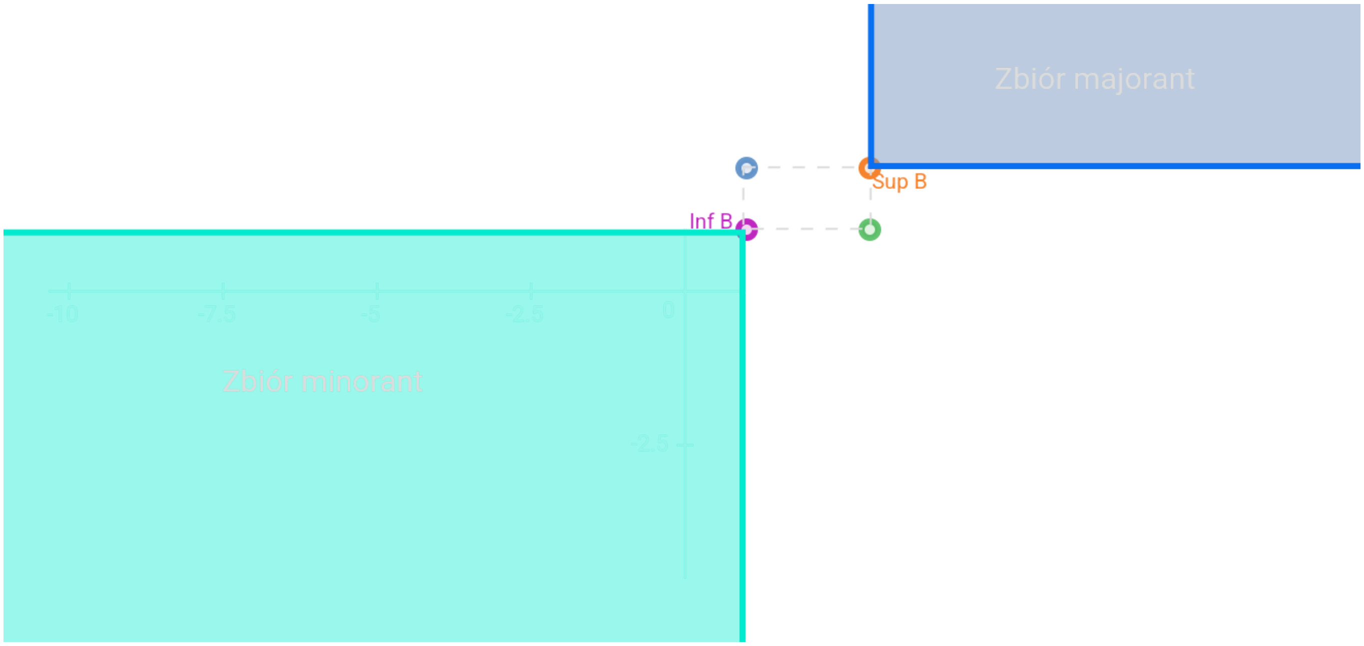
b) Znajdź zbiory minorant i majorant oraz kresy zbiorów $A = \{(1,2),(3,1)\}$, $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Dla przypomnienia:

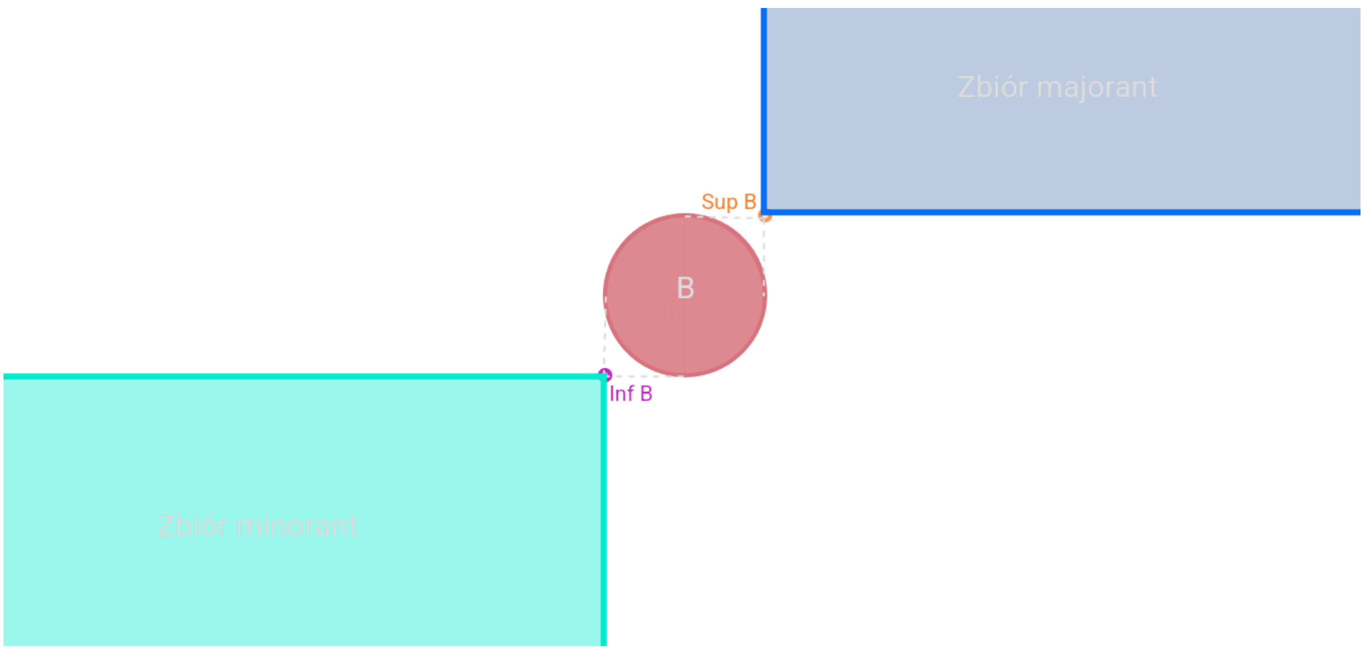
W relacji $(M, \leq)$

- Majoranty to takie elementy $M \in X: \ \forall x \in A : x \leq M$. Czyli taki element, który jest "większy" od każdego z elementów w A (to znaczy w relacji xRy jest tym y dla każdego x w A)
- Minoranty to takie elementy $m \in X : \forall x \in A : m \leq x$. Czyli taki element, który jest "mniejszy" od każdego z elementów w A (to znaczy w relacji xRy jes tym x dla każdego y w A)
- Supremum (Kres górny) to "najmniejsza" z majorant zbioru A (oznaczamy $Sup.\,A$)
- Infimum (Kres dólny) to "największa" z minorant zbioru A (Oznaczamy $Inf.\,A$)

$A = \{(1,2),(3,1)\}$



$B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$



---

7. Niech $S = (\mathbb{R}^2, grS, \mathbb{R}^2)$, gdzie:
$(x_1, y_1)S(x_2, y_2) \Leftrightarrow ln(1 + x_1^2 + y_1^2) = ln(1 + x_2^2 + y_2^2)$ **Czy tak określona relacja S jest porządkiem w $\mathbb{R}^2$?**

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2\ \ ln(1+x_1^2+y_1^2)=ln(1+x_2^2+y_2^2)\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2=x_2^2+y_2^2$$

$$Zatem\ grS\ mozemy\ przedstawic\ jako:$$
$$grS=\{((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in\mathbb{R}^2: x_1^2+x_2^2=x_2^2+y_2^2\}$$

$$1. Zwrotnosc:$$
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \ x^2+y^2=x^2+y^2\Leftrightarrow (x,y)R(x,y)$$

$$2. Antysymetria:$$
$$x^2+y^2={x'}^2+{y'}^2\wedge {x'}^2+{y'}^2=x^2+y^2\ nie\ implikuje\ ze:\ \ x=x'\ i\ y=y'\ np:$$
$$(x,y)=(3,1),\ \ (x',y')=(1,3)$$
$$3^2+1^2=1^2+3^2,\ \ pomimo\ tego\ ze\ x\neq x'\ \ y\neq y'$$

$$Zatem\ to\ nie\ jest\ porzadek.$$

---

8. Dany jest uporządkowany zbiór $(\mathbb{Q},\leq)$ oraz podzbiór $A=\{x: x=\frac{1}{n}+\frac{1}{m},\ n,m\in\mathbb{N}_+\}$. Znajdź kresy zbioru A oraz elementy największy i najmniejszy (o ile istnieją). Czy zbiór A stanowi łańcuch?

Dla przypomnienia:

- Element najmniejszy - to taki element który jest "mniejszy" od każdego innego elmentu w X (coś jak minoranta ale nie podzbioru tylko całej naddziedziny) ozn. $\overline{m}$
- Element największy - to taki element który jest "większy" od każdego innego elmentu w X (coś jak majoranta ale nie podzbioru tylko całej dziedziny) ozn. $\overline{M}$
- Łańcuch - taki podzbiór który jest liniowo uporządkowany

Element największy i najmniejszy nie istnieją.
Kresy zbioru A:

- $inf.A$ = 0
- $sup.A$ = 2

Łańcuch:
zwrotność jest oczywista x=x
antysymetryczność też $x\leq y\ \wedge\ y\leq x\implies x=y$
przechodność też $x\leq y\ \wedge\ y\leq z\implies x\leq z$
spójność też bo $x\leq y\ \vee\ x\geq y$

Więc A to łańcuch bo: $A \in \mathbb{Q} \ \wedge \ (A, R_{|A \times A})$ liniowo uporządkowane.

---

9. W zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ określona jest następująca relacja $S : zSz' \Leftrightarrow z - z' \in \mathbb{R}_+$ Sprawdź, że relacja S porządkuje zbiór $\mathbb{C}$. Dla zbioru $A = \{1 + 2i, 2 + 2i, 3 + 2i, 2 + i\} \subset \mathbb{C}$ znajdź elementy wyróżnione oraz najliczniejszy łańcuch złożony z elementów zbioru A.

$$zakladajac\ ze\ 0\ nie\ nalezy\ do\ \mathbb{R}_+$$

$$1. \forall z \in \mathbb{C} \ \ z - z = 0 \notin \mathbb{R}_+$$
$$wiec\ nie\ porzadkuje$$
$$Nie\ ma\ zadnego\ elmentu\ wyroznionego.$$

---

3. Wykaż, że dla relacji zwrotnej R, równość $R \circ R = R$ jest równoważna "przechodności" relacji R