Geometria analityczna

2024-12-17

Poprzednia: [[Algebra - 10]]

Następna: [[Algebra - 12]]

Zadania: [[]]

#geometria_analityczna #algebra

Przestrzenie euklidesowe

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przyjmujemy *prawokrętny (zgodny z regułą prawej ręki)* układ współrzednych, którego osie rozpięte są przez *wersory* (wektory długości 1):

$$\vec{i} = (1,0,0),\ \vec{j} = (0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,1)$$

Dowolny element $P = (x, y, z)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ *interpretować* będziemy *geometrycznie* na trzy sposoby, jako:

- punkt
- wektor zaczepiony w środku układu współrzędnych ($\vec{OP}$)
- wektor swobodny o współrzędnych x,y,z

Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ (składającą się z punktów i wektorów), gdzie w przestrzeni wektorów swobodnych określony jest iloczyn skalarny $\circ$ nazywamy *przestrzenia euklidesową* i oznaczamy E_n.

Oznaczenie:
$P = (x, y, z)$ - punkt $v = [x, y, z]$ - wektor

$\vec{\mathbb{R}^n}$ - zbiór (przestrzeń wektorów $\mathbb{R}^n$ - zbiór punktów E_n - przestrzeń euklidesowa.

Definicja:
Uporządkowana trójka *liniowo niezależnych* wektorów:

$u = [u_1, u_2, u_3],\ v = [v_1, v_2, v_3],\ w = [w_1, w_2, w_3] \in \overrightarrow{E_3}$ tworzy układ *prawoskrętny*, jeżeli:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > 0$$

Odległość punktów, długość wektora

Definicja:
Odległością euklidesową punktów $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $Q = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę:

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

Przykład:

$$P = (1, 7, -4), \ \ Q = (-3, 2, 10)$$
$$d(P, Q) = \sqrt{(1+3)^2 + (7-2)^2 + (-4-10)^2}$$

Uwaga:
Dla dowolnych punktów

$$P = (x_1, \ldots, x_n), \quad Q = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\overrightarrow{PQ} = [y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n]$$

Długość wektora (norma Euklidesowa):
Wynika z powyższych:

$$v = [v_1, \ldots, v_n] \in \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$$

$$||v|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Przykład

$$v = [8, -3, 2]$$
$$||v|| = \sqrt{64 + 9 + 4}$$

Zatem:

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$$

Własności normy:

1. $||u|| \geq 0$, przy czym $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = \overline{0}$
2. $||\alpha u|| = |\alpha| \cdot ||u||$
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (analogia do nierówności trójkąta)

Iloczyn skalarny

Definicja:
Standardowym *iliczynem skalarnym wektorów* $u = [u_1, \ldots, u_n]$ i $v = [v_1, \ldots, v_n]$ w przestrzeni $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ nazywamy liczbę:

$$u \circ v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

Przykład:

$$u = [9, -2, 3], \quad v = [2, -1, 3]$$
$$u \circ v = 18 + 2 + 9$$

Własności iloczynu skalarnego:

1. $u \circ v = v \circ u$
2. $(\alpha u) \circ v = \alpha(u \circ v)$
3. $(u + v) \circ w = u \circ w + v \circ w$
4. $v \circ v \geq 0$, gdzie $v \circ v = 0 \Leftrightarrow v = \overline{0}$, oraz $||v|| = \sqrt{v \circ v}$

Nierówność Cauchy'ego, Buniakowskiego, Schwarza

Dla dowolnych wektorów $u = [u_1, \ldots, u_n],\ v = [v_1, \ldots, v_n] \in \overrightarrow{E_n}$

$$|u \circ v| \leq ||u|| \cdot ||v||$$

gdzie *równość* zachodzi wtw, gdy u, v są *liniowo zależne*.

Kąt

Definicja:

Kątem między *niezerowymi* wektorami $u, v \in \overrightarrow{E_n}$ nazywamy taką liczbę $\varphi \in [0, \pi]$, dla której:

$$\cos \varphi = \frac{u \circ v}{||u|| \cdot ||v||}$$

Oznaczamy ją zazwyczaj jako $\angle(u, v)$
(*dokładnie jedna* taka liczba zawsze istnieje, gdyż na podstawie nierówności Schwarza:

$$-1 \leq \frac{u \circ v}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1$$

Definicja:

Niezerowe wektory $u, v \in \overrightarrow{E_n}$ nazywamy *prostopadłymi*, jeżeli $\angle(u, v) = \frac{\pi}{2}$ natomiast równoległymi gdy $\angle(u, v) = 0 \vee \angle(u, v) = \pi$. Piszemy wówczas, odpowiednio $u \perp v$ lub $u \parallel v$. Ponadto, przyjmujemy, że wektor *zerowy* jest zarówno *prostopadły*, jak i *równoległy* do wszystkich innych wektorów.

$$\begin{gathered} Zatem: \\ u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0 \end{gathered}$$

Iloczyn wektorowy

Twierdzenie:

Dla dowolnych wektorów $u = [u_1, u_2, u_3],\ v = [v_1, v_2, v_3] \in \overrightarrow{E_3}$:

$$u \times v = \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}, \right]$$

Uwaga:
W praktyce wygodnie jest liczyć iloczyn wektorowy w następujący sposób:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Własności iloczynu wektorowego:

1. $u \times v = -(v \times u)$
2. $(\alpha u) \times v = \alpha(u \times v)$
3. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
4. $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$
5. $||u \times v|| \leq ||u|| \cdot ||v||$

Twierdzenie:

Niech $u, v \in \overrightarrow{E_3}$. Wówczas u, v są *liniowo zależne* (równoległe) $\Leftrightarrow u \times v = \overline{0}$

Twierdzenie:

Dla dowolnych $u, v \in \overrightarrow{E_3}$, liczba $||u \times v||$ określa *pole równoległoboku* rozpiętego przez wektory u i v.

Wniosek:

Pole trójkąta rozpiętego przez wektory $u, v \in \overrightarrow{E_3} = \frac{1}{2}||u \times v||$

Iloczyn mieszany

Definicja:

Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów $u, v, w \in \overrightarrow{E_3}$ nazywamy liczbę:

$$(u \times v) \circ w$$

Uwaga:

Dla dowolnych $u, v, w \in \overrightarrow{E_3}$ liczba $|(u \times v) \circ w|$ określa *objętość równoległościanu* rozpiętego przez wektory u, v oraz w

Wniosek:

Objętość czworościanu rozpiętego przez $u, v, w \in \overrightarrow{E_3}$ wyraża się wzorem $\frac{1}{6}|(u \times v) \circ w|$

Twierdzenie:

Jeżeli $u = [u_1, u_2, u_3],\ v = [v_1, v_2, v_3], w = [w_1, w_2, w_3] \in \overrightarrow{E_3}$ to:

$$(u \times v) \circ w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Przykłady:

Sprawdź, czy punkty są współliniowe, jeżeli nie wyznacz pole $\triangle ABC$:

$$A(-1,1,1),\ B(2,-1,0),\ C(1,-1,3)$$

$$v = \overrightarrow{AB} = (3,-2,-1),\ \ u = \overrightarrow{AC} = (2,-2,2)$$

$$v \times u = \begin{vmatrix} k & i & j \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = [-4-2, -2-6, -6+4] = [-6,-8,-2] \neq \bar{0}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}||v \times u] = \frac{1}{2}\sqrt{36+64+4} = \sqrt{26}$$

Sprawdź, czy punkty są współpłaszczyznowe, jeżeli nie wyznacz długość wysokości głównej czworościanu ABCD wychodzącej z wierzchołka D.

$$A(-1,1,1),\ B(2,-1,0),\ C(1,-1,2),\ D(3,2,-1)$$

$$v=\overrightarrow{AB}=[3,-2,-1],\ \ u=\overrightarrow{AC}=[2,-2,1],\ \ w=\overrightarrow{AD}=[4,1,-2]$$

$$v\times u=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=[-2-2,-2-3,-6+4]=[-4,-5,-2]$$

$$(v\times u)\circ w=[-4,-5,-2]\circ[4,1,-2]=-16-5+4=-17\neq 0$$

$$P_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot||(v\times u)\circ w||=\frac{17}{6}$$

$$P_p=\frac{1}{2}||[-4,-5,-2]||=\frac{1}{2}\sqrt{16+25+4}=\frac{1}{2}\sqrt{45}$$

$$V=\frac{1}{3}p_pH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{45}\cdot H=\frac{17}{6}$$

$$H=\frac{17}{\sqrt{45}}$$

Płaszczyzna w E_3:

Definicja:

Dla ustalonego punktu $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in E_3$ oraz wektora $n=[A,B,C]\in\overrightarrow{E_3},\ n\neq\bar{0}$, zbiór punktów:

$$\pi=\{P=(x,y,z)\in E_3:\overrightarrow{P_0P}\perp n\}$$

nazywamy *płaszczyzną* (w przestrzeni E_3), a wektor n *wektorem normalnym płaszczyzny* (prostopadłym do płaszczyzny)

Uwaga:

$\overrightarrow{P_0P}\perp n\Leftrightarrow\overrightarrow{P_0P}\circ n=0$

Czyli płaszczyzne możemy zdefiniować poprzez ustalenie punktu oraz pewnej prostej prostopadłej do tej płaszczyzny. Każdy punkt naszej płaszczyzny musi tworzyć prostą z tym punktem która jest prostopadła do tamtej prostej

---

Definicja:
Współrzędne punktów $P = (x, y, z) \in E_3$ tworzących daną płaszczyznę π określone mogą być poprzez następujące równania:

Równanie normalne płaszczyzny (wynikające z iloczynu skalarnego i prostopadłości prostych)
gdzie $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi, n = [A, B, C] \perp \pi, n \neq \overline{0}$:

$$\pi : [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \circ [A, B, C] = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

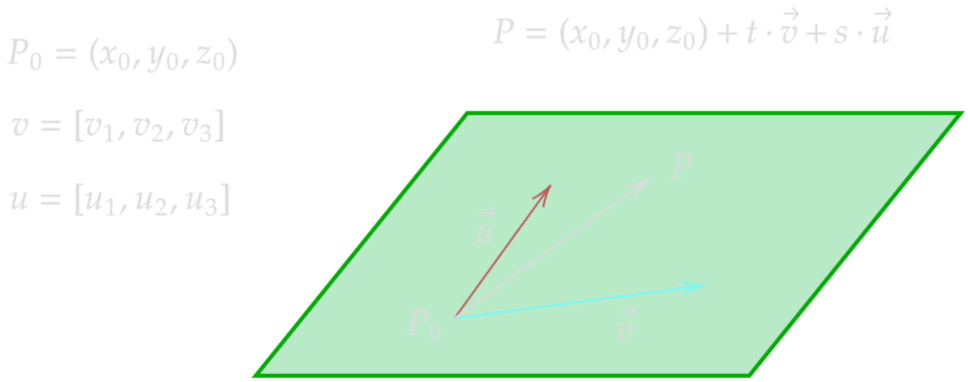
Równanie ogólne płaszczyzny (wynikające z przekształcenia równania normalnego)
gdzie $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi, n = [A, B, C] \perp \pi, n \neq \overline{0}$:

$$\pi = Ax + By + Cz + D = 0,\ D \in \mathbb{R}$$

Równanie parametryczne płaszczyzny (wynikające z dwóch wektorów rozpinających płaszczyzne i wskazujących na każdy punkt)
gdzie

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi, u = [u_1, u_2, u_3], v = [v_1, v_2, v_3] \in \overrightarrow{E_3}$ są *liniowo niezależne* i $u \parallel \pi, v \parallel \pi$

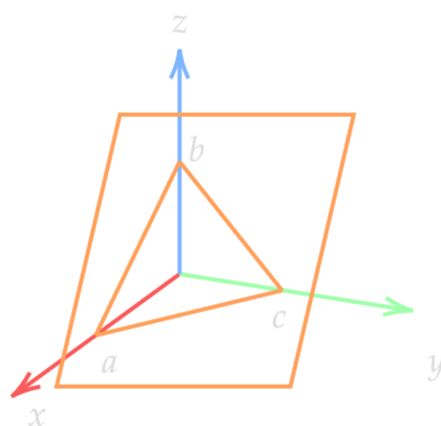
$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1 \\ y = y_0 + su_2 + tv_2 \quad s, t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + su_3 + tv_3 \end{cases}$$



Równanie odcinkowe płaszczyzny: (można po prostu przekształcić ogólne/normalne)

$$\pi = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad a, b, c \neq 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \overset{Ax+}{bcx} + \overset{By+}{acy} + \overset{Cz+}{abz} - \overset{D}{abc} = 0$$



Przykłady:

Znajdź równania normalne, ogólne, parametryczne i odcinkowe płaszczyzny π zawierającej punkty:

$$A = (-1, -2, 2), \quad B(0, -2, 4), \quad C = (-1, -3, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} = [1, 0, 2] \parallel \pi, \quad \overrightarrow{AC} = [0, -1, 3] \parallel \pi$$

$$n = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} k & i & j \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = [2, -3, -1] \neq \overline{0} \implies \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - liniowo\, niezalezne$$

$$Rownanie\ normalne:$$
$$\pi : 2(x+1) - 3(y+2) - 1(z-2) = 0$$

$$Rownanie\ ogólne:$$
$$\pi : 2x - 3y - z - 2 = 0$$

$$Rownanie\ parametryczne:$$
$$\pi : \begin{cases} x = -1 + 1 \cdot s + 0 \cdot t \\ y = -2 + 0 \cdot s - 1 \cdot t \\ z = 2 + 2 \cdot s + 3 \cdot t \end{cases}$$

$$Rownanie\ odcinkowe:$$
$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-\frac{2}{3}} + \frac{z}{-2} = 1$$

Prosta w E_3

Definicja:
Prostą l (w przestrzeni E_3) *przechodzącą przez punkt* $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in E_3$ i *równoległą do wektora* $v = [a, b, c] \in \overrightarrow{E_3}, v \neq \overline{0}$ nazywamy zbiór punktów postaci:

$$P = (x, y, z) = P_0 + tv = (x_0, y_0, z_0) + t[a, b, c]$$

Wektor v nazywamy *wektorem kierunkowym rozpinającym/tworzącym* prostej l.

Definicja:
Współrzędne punktów $P = (x, y, z) \in E_3$ tworzących daną prostą l określone mogą być przez następujące równania:
Równanie parametryczne prostej gdzie $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in l, v = [a, b, c] \parallel l, v \neq \overline{0}$

$$l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Równanie kierunkowe prostej $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in l, v = [a, b, c] \parallel l, a, b, c \neq 0$:

$$l: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} (= t)$$

Równanie krawędziowe prostej (gdzie
$l \subset \pi_1, l \subset \pi_2, \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\ \pi_1, \pi_2\ n$

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Przykład:

Znając równanie krawędziowe prostej l:

$$l: \begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$I\ sposób:$$

$$l: \begin{cases} z = t \\ y = -2 + 2t \\ x = 2 - t \end{cases}$$

$$II\ sposób:$$
$$n_1 = [1, 2, -3] \perp \pi_1$$
$$n_2 = [-1, -1, +1] \perp \pi_2$$
$$v = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [-1, 2, 1] \parallel l$$

$$P_0: z = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ -x - y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Odległości

Odległość punktu od płaszczyzny

Dane: płaszczyzna $\pi = Ax + By + Cz + D = 0$ i punkt $Q = (x_1, y_1, z_1)$

$$d(Q, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Odległość płaszczyzn równoległych

Dane: płaszczyzny $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$ i $\pi_2 = Ax + By + Cz + D_2 = 0$.

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_2, \pi_1) = \frac{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Odległość punktu od prostej:

$$d(P, l) = \frac{||\overrightarrow{P_0P} \times v||}{||v||}$$

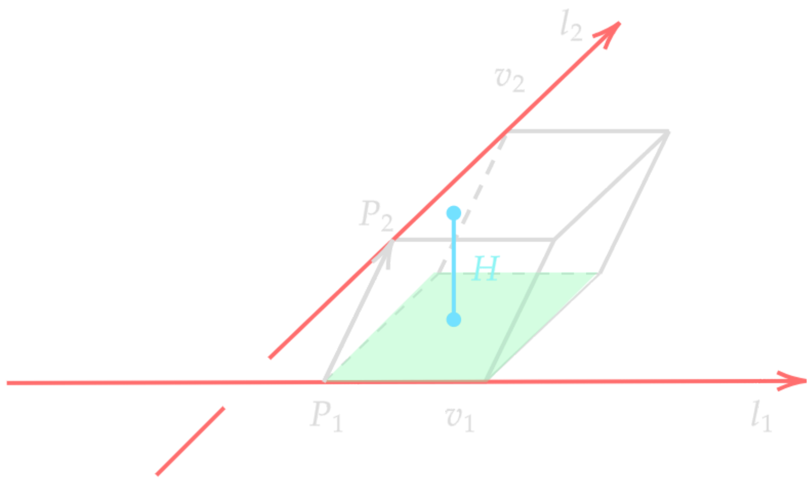
Wzajemne położenie 2 prostych w E_3

- *równoległe* (wliczamy tu przypadek, gdy się pokrywają)
- *przecinające się* (w jednym punkcie)
- *skośne* (nierównoległe i nieprzecinające się)

2. Jeżeli proste są *skośne*, to odległość między nimi, równa długości najkrótszego odcinka łączącego obie proste, można wyrazić wzorem:

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(v_1 \times v_2) \circ \overrightarrow{P_1P_2}|}{||v_1 \times v_2||}$$

Ten wzór wynika z tego że gdy zbudujemy sobie równoległościan i zrobimy mu wysokość, to ta wysokość będzie stała, a w pewnym miejscu będzie łączyć te obie proste.



3. Jeżeli $l_1 \parallel l_2$, to $d(l_1, l_2) = d(P_1, l_2)$ - czyli po prostu odległość punktu od prostej, niezależnie od punktu będą takie same.

Wzajemne położenie płaszczyzn w E_3

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \end{cases}$$

Jeżeli powyższy układ stworzony z płaszczyzn o równaniach ogólnych ma:

- 0 rozwiązań to płaszczyzny są *równoległe* i nie są takie same
- ∞ rozwiązań zależnie od 1 parametru, to przecinają się wzdłuż prostej
- ∞ rozwiązań zależnie od 2 parametrów to płaszczyzny się pokrywają