Pierwiastki liczb zespolonych

2024-10-10

Zadania: Algebra - liczby zespolone

Poprzednia: Algebra - 2

Następna: Algebra - 4

#Liczby_zespolone #wzory_viete #algebra #pierwiastki_zespolone #wielomiany_zespolone

---

Jak obliczyć $\cos \frac{\pi}{5}$?

$$\cos\frac{\pi}{5} = ?$$

$$\begin{cases} \cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5} \\ \cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 \\ -\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \cos\frac{\pi}{5} \\ B = \cos\frac{2\pi}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 2A^2 - 1 \\ -A = 2B^2 - 1 \end{cases}$$

$$B - (-A) = 2A^2 - 1 - 2B^2 + 1 = 2A^2 - 2B^2$$

$$A + B = 2(A - B)(A + B)$$

$$B = A - \frac{1}{2}$$

$$2A^2 - 1 = A - \frac{1}{2}$$

$$2A^2 - A - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Delta 4 + 16 = 20 = 2^2 \cdot 5$$

$$A1 = \frac{2 + 2\sqrt(5)}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$A2 = \frac{2 - 2\sqrt(5)}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4},\ sprzeczne$$

Pierwiastek stopnia n liczby zespolonej:

a) gdy liczba ma dostępną postać trygonometryczną

Sposób

b) gdy nie ma to rozwiązujemy z definicji:

$$\sqrt{3-4i} = x + i \cdot y \leftrightarrow (x + i \cdot y)^2 = 3 - 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \ rzeczywiste \\ 2xy = -4, \ imaginaries \\ x^2 + y^2 = 5, \ wynika \ z \ |z| \end{cases}$$

$$x^2 + x^2 + y^2 - y^2 = 5 + 3$$
$$2x^2 = 8$$
$$y = \frac{-2}{x}, x \neq 0$$
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Uogólnione wzory Viete'a

$$Dla\ wielomianu:$$

$$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \ \ a_n \neq 0$$

$$1. \ \ z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$
$$Czyli\ analogicznie\ do\ wzorow\ Viete'a\ z\ funkcji\ kwadratowej:$$
$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$2. \ \ (z_1 z_2) + (z_1 z_3) + \ldots + (z_1 z_n) + \ldots + (z_{n-1} zn) = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$
$$Czyli\ analogicznie\ do\ wzorow\ Viete'a\ z\ funkcji\ kwadratowej:$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$3. \ \ z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Rozpisany wzór na $\cos n\varphi$

$$Kroki\ na\ dowod:$$

$$1.\ \begin{cases}(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi \\ (x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^n y^i\end{cases}$$

$$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \binom{n}{0}cos^n\varphi sin^0\varphi + \ldots +$$

$$\downarrow bo\ sie\ redukuje\ przez\ i$$

$$\cos n\varphi = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}(-1)^i\cdot\cos^{n-2i}\varphi\sin^{2i}\varphi$$

Zadania

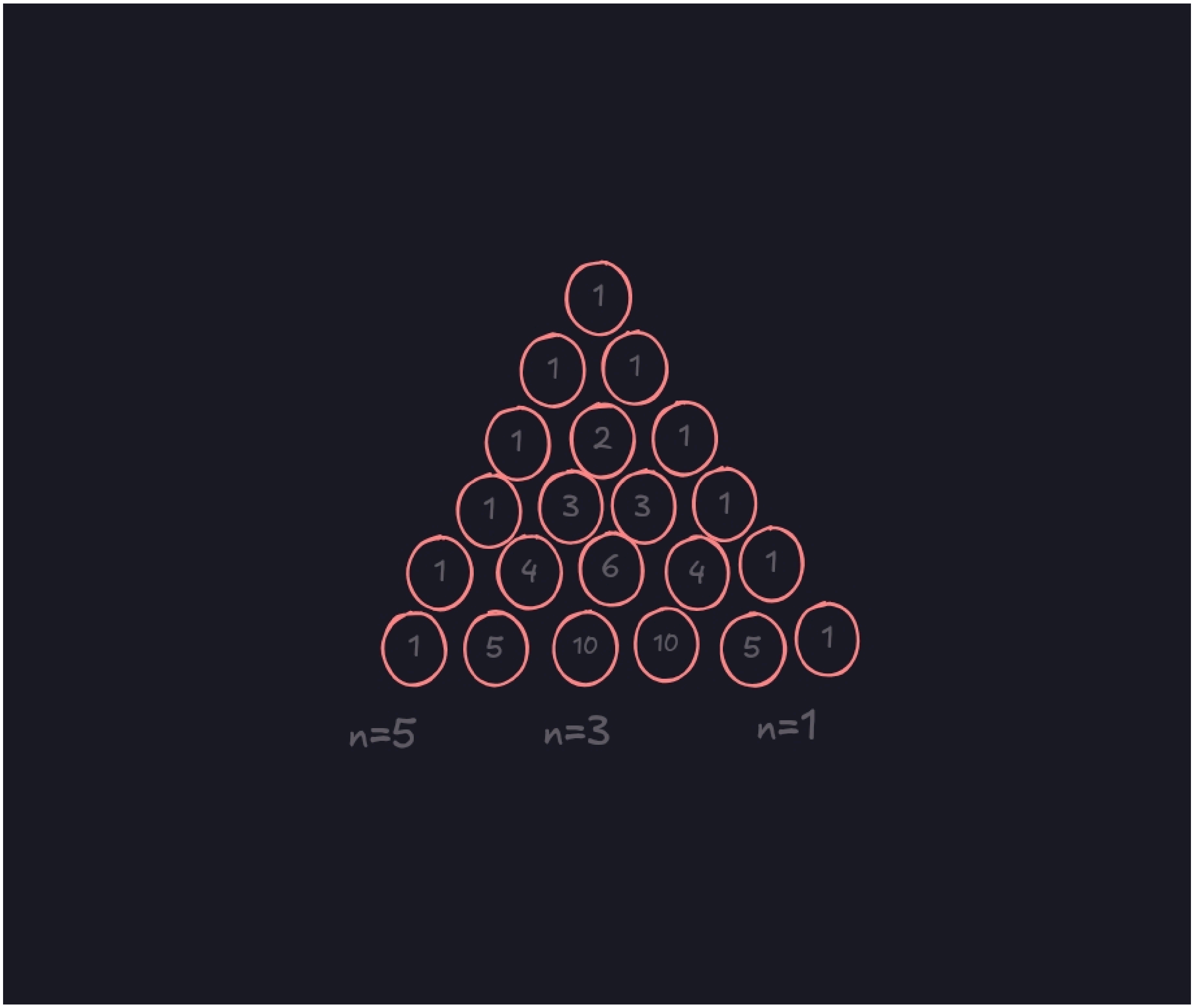
Podaj ile to $\cos 5\varphi$

Liczone ze wzoru:

$$cos5\varphi = ?$$

$$\begin{gathered}cos5\varphi = 1cos^5 - 10cos^3(1-cos^2) + 5cos^1(1-cos^2)^2 = \\ = 1cos^5 - 10cos^3 + 10cos^5 + 5cos^1(1-2cos^2+cos^4) = \\ = 5cos - 10cos^3 + 5cos^5 + 10cos^5 + 1cos^5 - 10cos^3 = 16cos^5 - 20cos^3 + 5cos^1\end{gathered}$$

Z trójkąta Pascala:



Wielomiany:

Tw. Bezout'a:
Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian P (stopnia o 1 mniejszego od W) taki, że:
$W(z) = (z - z_0)P(z)$

Tw. (o pierwiastkach wymiernych wielomianu):
Niech:
$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach **CAŁKOWITYCH**, oraz niech licza wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są względnie pierwszymi (w sensie sie nie skracają) liczbami całkowitymi, będzie pierwiastkiem wielomianu W. Wówczas p jest dzielnikiem współczynnika a_0 a q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

Tw. (zasadnicze twierdzenie algebry):
Każdy wielomian zespolony stopnia $n \geq 1$ ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Tw. (o przedstawieniu wielomianu w postaci iloczynu dwumianów):
Każdy wielomian zespolony:
$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$
stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma DOKŁADNIE n pierwiastków zespolonych (uwzględniając krotności).
Zatem każdy wielomian zespolony można przedstawić w postaci iloczynu dwumianów i nierozkładalnych trójmianów:
$W(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2)} \ldots (z - z_m)^{k_m}$

Tw. (o pierwiastkach zespolonych wielomainu rzeczywistego):
Jeżeli z_0 jest k krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(z)$ to $\overline{z}$ również jest k krotnym pierwiastkiem tego wielomianu.