Macierze

2024-11-19

Poprzednia: Algebra - 7

Następna: Algebra - 9

Zadania: [[]]

#macierze #algebra

Macierz

Macierze

Macierzą o elementach ze zbioru K nazywamy dowolne odwzorowanie:
$\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \ni (i, j) \to a_{ij} \in K$
gdzie zbiór wartości zapisujemy w formie

$$\begin{array}{cc} m\ wierszy & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ & n\ kolumn \end{array}$$

Ten zbiór (tę tablicę) utozsamiamy z macierzą.
Macierz o m wierszach i n kolumnach nazywamy macierzą *o wymiarach* $m \times m$.
Ozn. $A = [a_{ij}] = [a_{ij}]_{m \times n} = A_{m \times n}$

Macierz transponowana

Macierzą transponowaną do macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy macierz $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$ gdzie $b_{ij} = a_{ij}$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}$.

Σ Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

Czyli po prostu odwracamy tą macierz. Kolumny stają się wierszami, wiersze kolumnami.

Macierz zerowa

Macierz nazywamy *macierzą zerową* jeżeli wszystkie jej elementy równe są zero. *Ozn.* $\mathbf{0}, \mathbf{0}_{m \times n}$

Σ Przykład

$$\mathbf{0}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz kwadratowa

Jeżeli liczba wierszy macierzy równa jest liczbie jej kolumn $(m = n)$, to macierz taką nazywamy *macierze kwadratową*.

Σ Przykład

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi \\ e & 7 & -\pi \\ 9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Przekątna główna

O elementach $a_{ij}, i = 1, 2, \ldots, n$, mówimy, że tworzy *przekątną główną* macierzy A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz diagonalna

Macierz A nazywamy *macierzą diagonalną*, jeżeli wszystkie jej elementy poza przekątną główną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Co prawda jedna z wartości w przekątnej głównej to 0, ale to nas nie obchodzi. Najważniejsze że reszta jest równa 0.

Macierz jednostkowa

Macierz jednostkowa to *macierz diagonalna*, w której wszystkie elementy na głównej przekątnej są równe 1. A reszta elementów równa 0. *Ozn.* I, I_n

Σ Przykład

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wszystkie elementy oprócz przekątnej głównej są równe 0, a wszystkie elementy w przekątnej głównej są równe 1.

Macierz trójkątna górna/dolna

Macierz A nazywamy *trójkątną górną/dolną*, jeżeli wszystkie jej elementy poniżej/powyżej głównej przekątnej są równe 0.

Σ Przykład

$$Ponizej: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Powyzej: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

W drugim przykładzie ponownie, mamy w przekątnej głównej 0 ale to nas nie obchodzi. Najważniejsze że powyżej przekątnej są 0.

Macierz symetryczna

Macierz A nazywamy *symetryczną*, jeżeli $A = A^T$.

∑ **Przykład**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A^T$$

Działania na macierzach

Równość dwóch macierzy

Równość dwóch macierzy zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy macierze mają takie same wymiary i odpowiednie ich elementy są sobie równe

Tak symbolicznie to:

$$[a_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{l\times p} :\Leftrightarrow (m = l \wedge n = p \\ \wedge \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} : a_{ij} = b_{ij})$$

Suma dwóch macierzy

Suma dwóch macierzy zdefiniowana jest jedynie dla macierzy o tych samych wymiarach jako:
$[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} := [c_{ij}]_{m\times n}$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ dla $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$.

Czyli dodajemy do siebie każde elementy na tych samych pozycjach po prostu.

∑ **Przykład**

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy przez liczbę (skalar)

Mnożenie macierzy przez liczbę (skalar) - mnożąc macierz przez liczbę (skalar), mnożymy każdy element macierzy przez tę liczbę (skalar).

$A = [a_{ij}], \quad \alpha A := [\alpha a_{ij}]$

Σ Przykład

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Mnożenie dwóch macierzy

Mnożenie dwóch macierzy $A \cdot B$, jest wykonalne tylko wtedy, gdy *liczba kolumn* macierzy *A* równa jest *liczbie wierszy* macierzy *B*, czyli dla:

$A = [a_{ij}]_{m \times p}, B = [b_{ij}]_{p \times n}$ i jest definiowane jako:
$A \cdot B := [c_{ij}]_{m \times n}$, gdzie $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1i} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj}$

Σ Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Bo np dla lewego górnego rogu w wyniku tego mnożenia (-1):
$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 = -1$

A np dla pierwszego wiersza, drugiej kolumnie (5):
$1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 = 5$

Czyli jeżeli chcemy w wyniku obliczyć wartość i wiersza j kolumny to musimy pomnożyć każdy składnik i wiersza z A z każdym elementem z j kolumny z B.

! Uwaga

Mnożenie macierzy *nie* jest przemienne, $B \cdot A$ może być niewykonalne, albo wyjdzie po prostu inny wynik.

Własności działań na macierzach

Oznaczenie

$M_{m \times n}(K)$ - zbiór macierzy o wymiarach $m \times n$, o elementach z ciała przemiennego K, $|K| \geq 2$

1. Dla ustalonych m, n, K
   $(M_{m \times n}(K), K, +, \cdot)$ - *przestrzeń wektorowa*
   z tego wynikają różne własności które również wynikają z przestrzeni wektorowej np:
   - $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
   - $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
2. $\exists l' - mac. \forall A \in M_{m \times n}(K) : l' \cdot A = A$ - istnieje jedynka mnożenia macierzy $(I' = I_m)$
   $\exists l' - mac. \forall A \in M_{m \times n}(K) : A \cdot I'' = A \quad (I'' = I_n)$
3. Ponadto, o ile dane działania są wykonalne, to:
   $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
   $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
5. $(A + B)^T = A^T + B^T$
   $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
   $(AB)^T = B^T A^T$