Lekcja: Algebra - 9

#algebra #macierze

15.12.2024

---

5. Niech A będzie macierzą kwadratową. Udowodnij że:

a) Jeżeli $A^2 - A + I = 0$, to A jest nieosobliwa i $A^{-1} = I - A$

$$
\begin{gathered}
A \cdot A^{-1} = I \ \wedge \ A^{-1} = I - A \\
A \cdot (I - A) = I \\
-A^2 + IA = I \\
-A^2 + I(A - 1) = 0 \\
A^2 + I - IA = 0 \\
\wedge \\
A^2 - A + I = 0 \\
A^2 + I - IA = A^2 - A + I \\
-IA = -A \\
c.k.d
\end{gathered}
$$

b) jeżeli $A^k = 0$, to $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}, k \geq 1$

$$I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} = S$$

$$
\begin{gathered}
(I - A)S = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = \\
= I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} - A - A^2 - A^3 - \cdots - A^k = \\
= I - A^k = I \implies S = (I - A)^{-1}
\end{gathered}
$$

---

6. Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n, jeżeli:

a) $A^2 = A^T$

Skoro $A^2 = A^T \implies \det A^2 = \det A^T$

Wiemy z własności wyznaczników że:

1. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ co implikuje że $\det A^2 = (\det A)^2$
2. $\det A^T = \det A$

Zatem podstawiając $a = \det A$:

$$
\begin{gathered}
a^2 = a \;\; / - a \\
a^2 - a = 0 \\
a(a-1) = 0
\end{gathered}
$$

Zatem wyznacznik równy 0 albo 1.

---

b) $A^T - A^{-1} = \mathbf{0}$

Czyli $A^T = A^{-1}$:

$\det A^T = \det A \; \wedge \; \det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

Podstawiając $a = \det A$

$$
\begin{gathered}
a = a^{-1} \\
a = \frac{1}{a} \\
a^2 = 1 \\
a = 1 \vee a = -1
\end{gathered}
$$

---

c) $A^2 + A^{-1} = \mathbf{0}$

Czyli $A^2 = -A^{-1}$

$(\det A)^2 = -(\det A)^{-1}$

Podstawiając $a = \det A$

$$
\begin{gathered}
a^2 = -\frac{1}{a} \\
a^3 = -1
\end{gathered}
$$