Wyznacznik macierzy, rząd macierzy, macierz odwrotna

2024-12-14

Poprzednia: Algebra - 8

Następna: Algebra - 10

Zadania: [[]]

#macierze #algebra #wyznacznik_macierzy #rząd_macierzy #macierz_odwrotna

---

Wyznacznik macierzy

Oznaczenie

Wyznacznik macierzy oznacza się $\det A$ lub:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Czyli pionowe kreski zamiast nawiasów kwadratowych.

Metoda Sarrusa

Wyznacznik macierzy $A = [a_{ij}]_{2\times 2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
Dla macierzy 3×3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Czyli przekątne z lewej do prawej minus przekątne z prawej do lewej z doklejeniem macierzy jeśli przekątna wyjdzie poza macierz tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Permutacje

Dwa elementy permutacji $\sigma(i), \sigma(j)$ tworzą *inwersję* jeżeli $i < j, \wedge \sigma(i) > \sigma(j)$

Liczbę inwersji w permutacji σ oznaczamy przez $[\sigma]$, a *znak permutacji* jako $\epsilon(\sigma) = (-1)^{[\sigma]}$.
Permutację nazywamy *parzystą* jeśli $\epsilon(\sigma) = 1$ i *nieparzystą* jeśli $\epsilon(\sigma) = -1$.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Własności wyznaczników

1. $\det A^T = A$
2. $\det I = 1$
3. Jeżeli któraś z kolumn/wierszy jest wypełniona samymi zerami to $\det A = 0$
4. $\det[k_1, \dots, k_i' + k_i'', \dots, k_n] = \det[k_1, \dots, k_i', \dots, k_n] + \det[k_1, \dots, k_i'', \dots, k_n]$
   Przykład:

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & (2+3) \\ 4 & (5+6) \end{bmatrix}$$

   Druga kolumna to suma $k_i' \ i \ k_i''$, gdzie:

   $$k_i' = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad k_i'' = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix},$$

   Wzór mówi, że:

   $$\det \begin{bmatrix} 1 & (2+3) \\ 4 & (5+6) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Analogicznie w przypadku wierszy

6. Jeżeli *pomnożymy* wiersz/kolumne przez skalar α, wówczas wyznacznik tej nowej macierzy to $\alpha \cdot \det A$
7. Wniosek z poprzedniego: $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$
8. Przestawienie dwóch wierszy/kolumn macierzy zmienia znak wyznacznika na przeciwny.
9. Wniosek z poprzedniej własności - jeśli macierz ma dwa takie same wiersze/kolumny to $\det A = 0$
10. Wartość wyznacznika nie zmieni się, jeżeli do wiersza/kolumny dodamy kombinacje liniową pozostałych wierszy/kolumn.

Twierdzenie Cauchy'ego

Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(K)$ zachodzi:

$$\det(A \cdot B) = detA \cdot detB$$

Minory

Minorem stopnia k macierzy $A_{m\times n}$ nazywamy *wyznacznik* dowolnej *(pod)macierzy kwadratowej wymiaru* $k \times k, k \leq min\{m, n\}$ powstałej z macierzy A poprzez wykreślenie z niej $n-k$ kolumn i $m-k$ wierszy.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ -1 & 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Minor\ to\ \det A'$$

Jeżeli $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ jest macierzą kwadratową, to wyznacznik macierzy powstałej poprzez wykreślenie z A i-tego wiersza i j-tej kolumny nazywamy *minorem macierzy A* *odpowiadającym elementowi* a_{ij} i oznaczamy przez M_{ij} są to minory stopnia $(n-1)$ macierzy A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ 8 & 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det A'$$

Twierdzenie Laplace'a

Dopełnienie algebraiczne

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę (skalar).

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Czyli $\pm$ minora macierzy A odpowiadającemu elementami a_{ij}.

Twierdzenie:
Założenia: $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(K)$
A to macierz kwadratowa.

Twierdzenie:
$\forall j \in \{1, \ldots, n\} : \det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$
$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$

Przykład:

$$j = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \cdots + 0 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ważny wniosek:
Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów na przekątnej głównej.

Rząd macierzy

Twierdzenie:

Maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn dowolnej macierzy $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ jest równa *maksymalnej liczbie liniowo niezależnych wierszy* tej macierzy.

Rzędem macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy *maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych kolumn* (lub *wierszy*).

Wniosek:
Jeżeli $A \in M_{m \times n}$ to

1. $r(A) \leq min\{m, n\}$, no bo maksymalnie niezależne mogą być tyle ile ich jest kolumn/wierszy minimum
2. $r(A^T) = r(A)$, bo na to samo wychodzi jak sie macierz odwróci bo sie zamienia wiersze na kolumny

---

Postać schodkowa macierzy

Definicja: Mówimy, że macierz A ma *postać schodkową*, jeżeli wszystkie jej niezerowe wiersze występują kolejno (jeden pod drugim), począwszy od pierwszego, a pierwsze niezerowe elementy (tzw. *schodki*) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach (lub A jest macierzą zerową).

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 0 & |\underline{-1} & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uwaga: Rząd macierzy w postaci schodkowej *równy* jest *liczbie* jej *schodków*.
W tym przypadku $r(A) = 3$.

Operacje elementarne

Definicja: Następujące przekształcenia nazywamy *operacjami elementarnymi* na macierzach:

1. *zamiana* miejscami *wierszy* (*kolumn*) macierzy
2. *dodanie* do wiersza (kolumny) kombinacji liniowej *pozostałych wierszy* (odpowiednio: kolumn)
3. *pomnożenie* wiersza (kolumny) przez *skalar* $\alpha \neq 0$

Rząd macierzy *nie zmienia się* pod wpływem operacji elementarnych wykonanych na wierszach bądź kolumnach.
No bo czemu miałby się zmienić skoro mowa o liniowo niezależnych wierszach/kolumnach.

Algorytm Gaussa

Uwaga: Każdą macierz A można doprowadzić do postaci schodkowej B za pomocą operacji elementarnych stosując *algorytm Gaussa* na wierszach (wówczas $r(A) = r(B)$).

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix} \overset{\Longrightarrow}{w_1 \Leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix} \overset{\Longrightarrow}{w_3 - 2w_1, w_4 + w_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \overset{\Longrightarrow}{w_2 \Leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \overset{\Longrightarrow}{w_4 - 3w_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \overset{\Longrightarrow}{w_4 + 2w_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3 = r(B) = r(A)$$

Twierdzenie:

Rząd dowolnej macierzy A jest równy *największemu ze stopni minorów niezerowych* tej macierzy.

Macierz odwrotna

Definicja: Niech A będzie macierzą kwadratową. Macierz (kwadratową) B taką, że $A \cdot B = B \cdot A = I$, nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy A. Jeżeli taka macierz istnieje, to oznaczamy ją przez A^{-1}, a A nazywamy macierzą *odwracalną*.

Uwaga: Macierz odwrotna do danej macierzy, o ile istnieje, jest jednoznacznie określona.

Twierdzenie:
Jeżeli $A_{n \times n}$ jest macierzą odwracalną, to:

1. $\det A \neq 0 \quad \wedge \quad \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
2. $A^{-1} = (\det A)^{-1} \, (A^D)^T$,
   gdzie A^D jest *macierzą dopełnień algebraicznych* macierzy A.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det A = -2 - 2 + 3 = -1 \neq 0 \implies A - \ \textit{odwracalna}$$

$$A^D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^D)^T = -1 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Definicja: Macierz kwadratową A nazywamy *osobliwą*, jeżeli $\det A = 0$, lub *nieosobliwą*, jeżeli $\det A \neq 0$.

Wniosek: Macierz $A_{n \times n}$ jest *nieosobliwa* (*odwracalna*) wtedy i tylko wtedy gdy $r(A) = n$.

Twierdzenie: Własności macierzy odwrotnej
Niech $A, B, \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ będą macierzami *nieosobliwymi*, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$. Wówczas $A^{-1}, A^T, \alpha A, AB, A^n$ dla $n = 1, 2, \ldots,$ też są nieosobliwe, oraz:

1. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$
5. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
6. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Uwaga: Do znalezienia macierzy odwrotnej do danej można wykorzystać *algorytm Gaussa* opierający się na operacjach elementarnych wykonywanych na wierszach.

Przykład: Znajdź macierz odwotną do:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\Longrightarrow}{w_2 - \frac{1}{2}w_1, w_3 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\Longrightarrow}{\frac{1}{2}w_1, 2 \cdot w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\Longrightarrow}{w_3 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 & 1 \end{array}\right] \overset{\Longrightarrow}{w_1 - \frac{1}{2}w_3, w_2 + w_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 & 1 \end{array}\right] \overset{\Longrightarrow}{w_1 + \frac{3}{2}w_2, (-1) \cdot w_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & -1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Można też poprzez rozwiązanie układu równań z macierzy tzn:

$$\begin{cases} x - 31y + 10z = 3 \\ 4x + 6y + 4z = 9 \\ 78x + 2y + 4z = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \\ z = \dots \end{cases}$$
