Relacje

2024-10-15

Poprzednia: Algebra - 3

Następna: Algebra - 5

Zadania: Algebra - relacje

#relacje #algebra

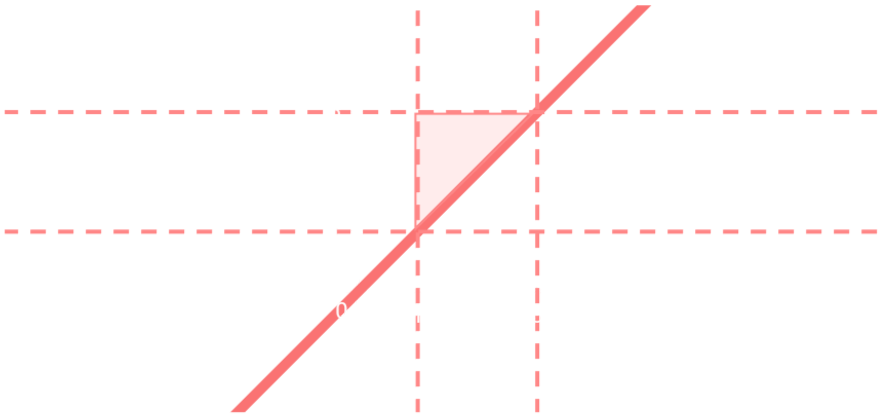
Relacje

Def.
Uporządkowaną trójkę $R = (X, grR, Y)$ gdzie X, Y są zbiorami, a $grR \subset X \times Y$, nazywamy *relacją* (dwuargumentową) określoną między elementami zbiorów X i Y (lub w zbiorze X, gdy $Y = X$):

- X nazywamy *naddziedziną*
- Y nazywamy *zapasem*
- grR nazywamy *wykresem* relacji
  Elementy $x \in X,\ y \in Y$ *są ze sobą w relacji* $R :\leftrightarrow (x, y) \in grR$ - co zapisujemy xRy.

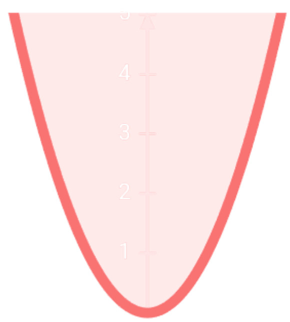
Dziedziną relacji R nazywamy zbiór:
$D_R := \{x \in X : \exists y \in Y : xRy\}$
Przeciwdziedziną relacji R nazywamy zbiór:
$D_R^{-1} := \{y \in Y : \exists x \in X : xRy\}$

Prz.
$X = [1, 3],\ Y = [1, 3],\ grR = \{(x, y) \in X \times Y : x \leq y\}$



Prz. 2

$S = (\mathbb{R}, grS, \mathbb{R}),\ grS = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$



Tutaj dziedziną będzie $D_S = \mathbb{R}$, a przeciwdziedziną $D_S^{-1} = [0, +\infty]$.

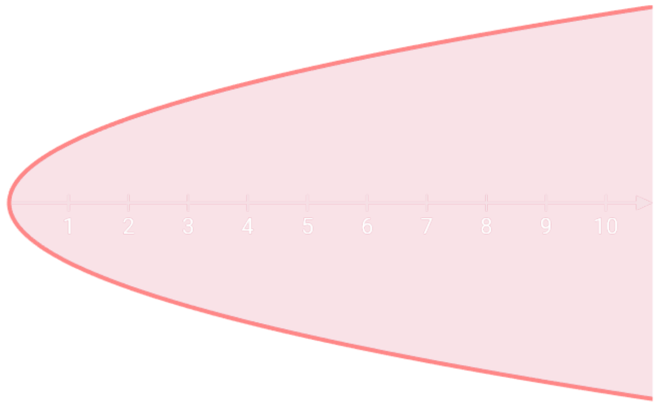
Def.

Relacją odwrotną do relacji $R = (X, grR, Y)$ nazywamy relację $R^{-1} = (Y, grR^{-1}, X)$, gdzie: $grR^{-1} := \{(x, y) \in Y \times X : (y, x) \in grR\}$.

Prz.

$S^{-1} = (\mathbb{R}, grS^{-1}, \mathbb{R})$

$grS^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y, x) \in grS\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}$ (x nam się zamienił z y - wcześniej warunek był $y \geq x^2$ a teraz $x \geq y^2$).



Jest to ten sam wykres co przy S ale odbity względem prostej $y = x$.

Innymi słowy:
Jeżeli mamy jakąś relacje T gdzie grT mówi nam o tym że x jest dzieckiem y to: relacja T^{-1} czyli relacja odwrotna ma takie grT^{-1} że y jest dzieckiem x (x jest rodzicem y).

Złożenie relacji:

Def.
Złożeniem relacji $R = (X, grR, Y)$ z relacją $S = (Y, grS, Z)$ nazywamy relację:

$$S \circ R := (X, gr(S \circ R), Z)$$

gdzie:

$$gr(S \circ R) := \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y : xRy \wedge ySz\}$$

Prz.
$R = (\mathbb{N}, grR, \mathbb{N})$
$grR = \{(2, 1), (3, 1), (4, 2), (4, 5), (5, 3)\}$

$S = (\mathbb{N}, grS, \mathbb{N})$
$grS = \{(1, 3), (4, 1), (3, 6), (6, 8), (6, 7)\}$

$S \circ R = (\mathbb{N}, gr(S \circ R), \mathbb{N})$
$gr(S \circ R) = \{(2, 3), (3, 3), (5, 6)\}$

Relacja równoważności:

Ozn.
Przez (X, R) oznaczamy zbiór X z relacją R, gdzie $R = (X, grR, X)$.
Def.
Relację $R = (X, grR, X)$ nazywamy relacją równoważności, gdy:

1. R jest *zwrotna*: $\leftrightarrow \forall x \in X : xRx$ (wszystkie elementy z X występują w parze)
2. R jest *symetryczna*: $\leftrightarrow \forall x, y \in X : xRy \implies yRx$
3. R jest *przechodnia*: $\leftrightarrow \forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \implies xRz$

Prz.
$X = \mathbb{R}^2 : (x_1, y_1)R(x_2, y_2) :\leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$
(W tym przykładzie naszą naddziedziną a zarazem zapasem jest płaszczyzna $\mathbb{R}^2$, zatem relacje mamy pomiędzy punktami a nie np: x,y)

Ten przykład jest idealnym przykładem relacji równoważności, mówi nam o tym że tworzymy relacje między punktami których odległość od środka układu współrzędnych jest taka sama. Czyli na tym przykładowym kole każdy punkt jest z każdym innym w relacji zatem:

1. R jest zwrotna bo punkt jest sam ze sobą w relacji.
2. R jest symetryczna bo jeżeli (x_1, y_1) jest w relacji z (x_2, y_2) to (x_2, y_2) jest w relacji z (x_1, y_1).
3. R jest przechodnia, bo jeżeli (x_1, y_1) jest w relacji z (x_2, y_2) a (x_2, y_2) jest w relacji z (x_3, y_3) to punkt (x_1, y_1) musi być w relacji także z punktem (x_3, y_3). (tworzy się nam

taki "łańcuszek relacyjny")

Klasa równoważności

Def.
Jeżeli (X, R) jest zbiorem z relacją równoważności i $x \in X$, to *klasą równoważności / abstrakcji* elementu x nazywamy zbiór:

$$[x] := \{y \in X : xRy\}$$

Zbiór wszystkich y w których x jest w relacji.
Każdy element $y \in [x]$ nazywamy *reprezentantem* tej klasy.
(Czyli dla powyższego przykładu klasą równoważności punktu np (x_1, y_1) jest cały tamten okrąg)

Zbiór ilorazowy

Def.
Zbiór klas równoważności relacji R nazywamy *zbiorem ilorazowym* i oznaczamy $X/_R$.
Zatem $X/_R := \{[x] : x \in X\}$

Twierdzenie.
Z: (X, R) - zbiór. z relacją równoważności

1. $\forall x \in X : [x] \neq \emptyset$ (wynika z zwrotności tzn. $[x]$ musi zawierać przynajmniej samego siebie)
2. $\forall x, y, z \in X : y \in [x] \land z \in [x] \implies yRz$ - wynika z przechodniości
3. $\forall x, y \in X : [x] \neq [y] \leftrightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$ - wynika z symetryczności
4. $X - \bigcup_{x \in X} [x]$ - oczywiście po dodaniu każdej klasy abstrakcji dostaniemy całą naddziedzinę bo dla każdego x klasa abstrakcji to co najmniej $\{x\}$

Czyli klasy abstrakcji dzielą nam zbiór X na podzbiory niepuste, rozłączne, dające w sumie cały zbiór X.

Zbiory uporządkowane

Def. Dla danego zbioru z relacją (X, R), mówimy że:

4. R jest *antysymetryczna*: $\leftrightarrow \forall x, y \in X : xRy \land yRx \implies x = y$

5. R jest *asymetryczna* $\leftrightarrow \forall x, y \in X : xRy \implies \sim yRx$
6. R jest *spójna*: $\leftrightarrow \forall x, y \in X : xRy \vee yRx \vee x = y$

Def. Relacja R określona w zbiorze X nazywana jest *porządkiem* lub relacją *słabego porządku (częściowego)*, jeżeli jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Wówczas X nazywamy zbiorem (częściowo) uporządkowanym (przez R). Jeżeli R jest dodatkowo spójna, to nazywamy ją relacją porządku *totalnego* albo *liniowego*, a zbiór X nazywamy uporządkowanym totalnie (liniowo).

Dodatkowo jeżeli $(X, \leq)$ - zbiór uporządkowany:
$\forall x, y \in X : x \leq y :\leftrightarrow (x \leq y \wedge x \neq y)$ Czyli elementy nie mogą być w relacji z samymi sobą - Relacja ta jest nazywana *silnym porządkiem* w X (jest asymetryczna i przechodnia).

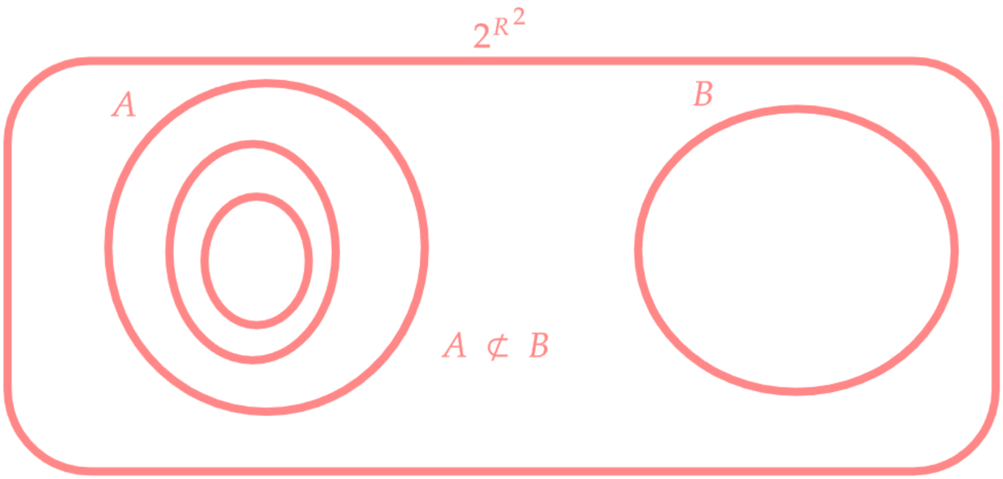
Elementy $x, y \in X$ nazywamy *porównywalnymi*, jeżeli: $xRy \vee yRx$.

Uw. Jeżeli relacja R porządkuje X i $A \subset X$ to zbiór A jest również uporządkowany przez R. $(R|_{A\times A})$

Przykład takiego porządku to po prostu taka relacja $(R, \leq)$ która przyporządkowuje każdemu elementowi mniejsze bądź równe elementy.
"Bądź równe" - zatem jest zwrotność.
Antysymetryczność również tu działa $a \leq b \wedge b \leq a \Leftrightarrow a = b$.
Przechodnia oczywiście też bo jeśli $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$
No i spójność bo w ten sposób można porównać każdą liczbę.
Zatem jest to relacja liniowego porządku.

Inny popularny przykład to $(2^{R^2}, \subset)$ gdzie 2^{R^2} oznacza zbiór podzbiorów płaszczyzny. *Ale nie będzie to wtedy porządek liniowy* bo możemy mieć takie podzbiory które się w sobie nie zawierają (ani pierwszy w drugim ani drugi w pierwszym, zatem nie ma relacji pomiędzy każdym elementem).

Rysunek dla zwizualizowania:



Elementy wyróżnione zbioru uporządkowanego

Elementy max/min, najw/najm

Def. $(X, \leq)$ - zbiór uporządkowany (nieoficjalny zapis tylko po to żeby go teraz użyć)

1. Element $\overline{M} \in X$ nazywamy *elementem największym* zbioru X: $\leftrightarrow \forall x \in X : x \leq \overline{M}$.
2. Element $\overline{m} \in X$ nazywamy *elementem najmniejszym* zbioru X: $\leftrightarrow \forall x \in X : \overline{m} \leq x$.
3. Element $M_{max} \in X$ nazywamy *elementem maksymalnym* zb. X:
   $\leftrightarrow \forall x \in X : (M_{max} \leq x) \implies (M_{max} = x)$.
4. Element $m_{min} \in X$ nazywamy *elementem minimalnym* zb. X:
   $\leftrightarrow \forall x \in X : (x \leq m_{min}) \implies (m_{min} = x)$.

Innymi słowy element największy/najmniejszy to taki który jest w relacji z *każdym* elementem bądź *każdy* element jest w relacji z nim.
A element maksymalny/minimalny to taki dla którego nie jest w relacji z *żadnym* innym elementem poza sobą lub *żaden* nie jest z nim poza sobą.

Łańcuch

Podzbiór $C \subset X$ nazywamy *łańcuchem*, jeżeli $(C, R|_{C\times C})$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym.

(np. $C = \{1, 2, 4, 8\}) \subset B,\ gdzie\ B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},\ grB : \forall x, y \in B : x \leq y$)

Czyli po prostu dowolny poukładany podzbiór zbioru, poukładany według tej samej techniki (wykresu grB).

Majoranty i minoranty

1. Element $M \in X$ nazywamy *majorantą* zbioru A: $\leftrightarrow \forall x \in A : x \leq M$.
2. Element $m \in X$ nazywamy *minorantą* zbioru A: $\leftrightarrow \forall x \in A : m \leq x$.

gdzie: $(X, \leq)$ - zbiór uporządkowany $A \subset X$

WAŻNE - zauważ że majoranta/minoranta należy do X ale jest sprawdzana ($\leq$) tylko dla tego podzbioru (A). Zatem tych majorant/minorant może być nieskończenie wiele. Tak dla zobrazowania to jest coś w stylu jak ograniczenie ciągu, nad/pod granicą można również ustawić "granice".

Def. Jeżeli zbiór A posiada co najmniej jedną majorantę (minorantę), to mówimy, że jest on ograniczony od góry (lub od dołu). Jeżeli ma i minorante i majorantę, mówimy że jest ograniczony.

Kres górny i dolny

1. *Kresem górnym* zbioru A (w zbiorze X) nazywamy, o ile istnieje - element najmniejszy zbioru majorant i oznaczamy to: $supA$.
2. *Kresem dolnym* zbioru A (w zbiorze X) nazywamy, o ile istnieje - element największy zbioru minorant i oznaczamy jako: $infA$.

Prz. $(\mathbb{R}, \leq),\ A = [-1, 5)$

Funkcja jako przykład relacji:

Funkcja przekształcająca zbiór. X w zbiór. Y definiowana jest jako relacja (X, grR, Y), która jest prawostronnie jednoznaczna, to znaczy:

$$\forall x \in X\ \ \forall y, z \in Y :\ (xRy \land xRz) \implies y = z$$

Innymi słowy jednemu argumentowi (x) możemy przypisać tylko jedną wartość (y). Ale nie na odwrót to znaczy z powyższego nie wynika że (y) może mieć tylko jednego (x).

Wówczas możemy sobie normalnie napisać $f(x) = y$, zamiast xRy.