Struktury algebraiczne

2024-10-24

Poprzednia: Algebra - 4

Następna: Algebra - 6

Zadania: [[]]

#struktury_algebraiczne #algebra

Działania

Wewnętrzne:

Def. A - zbiór, $A \neq \emptyset$
(Dwuelementowym) *działaniem wewnętrznym*, lub po prostu *działaniem*, określonym w zbiorze A nazywamy każde odwzorowanie:

$$h : A \times A \rightarrow A$$

Wartość tego odwzorowania, $h(a, b)$, nazywamy wynikiem działania.
(Czyli po prostu dajmy na to dodajemy 3+2 i otrzymujemy 5) - $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Oznaczenia: $(A, h)\ lub\ (A, \circ)$ - zbiór z określonym działaniem;
w drugim przypadku piszemy $a \circ b$ zamiast $h(a, b)$.
Prz.
$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\ h(n, k) = n + k$

Lub:
$(Z_+, h) \quad h(n, k) = \frac{n}{k}$

h tutaj *nie określa* działania (wewnętrznego) (w tym zbiorze) bo $\frac{n}{k}$ nie koniecznie jest w $\mathbb{Z}_+$
O działaniu *wewnętrznym* możemy mówić tylko wtedy kiedy wynik także należy do danego zbioru.

Zewnętrzne:

Def. F, X - zbiory, $F, X \neq \emptyset$
Działaniem zewnętrznym w zbiorze X nazywamy każde odwzorowanie

$$g : F \times X \to X$$

Ozn. $g(\alpha, x) = \alpha * x$ - wynik działania, gdzie $\alpha \in F, \quad x \in X$.
Prz. X - zbiór wektorów na płaszczyźnie
F = $\mathbb{R}$
$*$ - mnożenie wektora przez liczbę (wynik - wektor)

Własności działania wewnętrznego

Def. $(A, \circ)$ - zbiór z działaniem wewnętrznym

1. Działanie $\circ$ jest *łączne*, jeżeli:

$$\forall x, y, z \in A : \ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

2. Działanie $\circ$ jest *przemienne*, jeżeli

$$\forall x, y \in A : x \circ y = y \circ x$$

3. $e \in A$ jest *elementem neutralnym* działania, jeżeli:

$$\forall x \in A : x \circ e = e \circ x = x$$

   Tw. Jeżeli w zbiorze A z działaniem wewnętrznym $\circ$ istnieje element neutralny, to jest on jedyny.

$$\begin{gathered} D : e_1, e_2 \in A : e_1, e_2 \ - \ el.\ neutralne \circ \ w\ zb.\ A \\ e_1 \ - \ el.\ neutralny \implies e_2 \circ e_1 = e_2 \\ e_2 \ - \ el.\ neutralny \implies e_1 \circ e_2 = e_1 \\ z\ def.\ el.\ neutralnego\ x \circ e = e \circ x = x\ wynika\ ze\ e_1 = e_2 \end{gathered}$$

4. Jeśli istnieje element neutralny $e \in A$ działania $\circ$, to *elementem symetrycznym (przeciwnym/odwrotnym)* do $x \in A$ nazywamy taki element: $x' \in A$, że $x \circ x' = e = x' \circ x$ **Ważnym jest żeby pamiętać o drugiej stronie warunku**
   Tw. Jeśli działanie $\circ$ jest *łączne* w zbiorze A i istnieje element neutralny $e \in A$ tego działania, wówczas jeśli jakiś element $x \in A$ ma element symetryczny, to jest on jedyny oraz: $(x')' = x$.

Prz. $(\mathbb{Z}, +)$
Działanie + jest łączne bo: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : (x + y) + z = x + (y + z)$
Działanie + jest przemienne bo: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x + y = y + x$
Elementem neutralnym działania + jest 0: $x + 0 = 0 + x = 0$
Elementem symetrycznym do każdego $x \in \mathbb{Z}$ jest $-x$.

Grupa

Def. $(A, \circ), \quad A \neq \emptyset$, $\circ$ - działanie wewnętrzne w zb. A:
Strukturę $(A, \circ)$ nazywamy *grupą*, jeżeli spełnione są warunki:

1. $\forall x, y, z \in A : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ - *Łączność*
2. $\exists e \in A \; \forall x \in A : x \circ e = x = e \circ x$ - *El. neutralny*
3. $\forall x \in A \; \exists x' \in A : x \circ x' = e = x' \circ x$ - *El. symetryczny dla każdego x*
   Jeżeli dodatkowo:
4. $\forall x, y \in A : x \circ y = y \circ x$ - *Przemienność*
   to grupę nazywamy *grupą przemienną / abelową*.

Pierścień

Def. $P \neq \emptyset$, $\circ, *$ - działania wewnętrzne w zbiorze P
Strukturę $(P, \circ, *)$ nazywamy *pierścieniem*, jeżeli spełnionne są warunki:

1. Struktura $(P, \circ)$ jest grupą abelową
2. $\forall x, y, z \in P : \; (x * y) * z = x * (y * z)$ - Łączność *
3. $\forall x, y, z \in P : (x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z) \; \wedge \; x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$ - *prawo i lewo stronna rozdzielność $*$ względem $\circ$*
   Jeżeli dodatkowo:
4. $\forall x, y \in P : x * y = y * x$ - *Przemienność $*$*
   To pierścień nazywamy *pierścieniem przemiennym*.

Prz. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ - pierścień przemienny

Uw. $(P, \circ, *)$ - pierścień
Pierwsze działanie $\circ$ nazywamy *działaniem addytywnym* i oznaczamy (zazwyczaj) +

Element neutralny tego działania nazywamy *zerem* i oznaczamy *0* (a element symetryczny do $x \in P$ względem tego działania nazywamy *przeciwnym* i oznaczamy *-x*). Drugie działanie nazywamy *działaniem multiplikatywnym*, oznaczamy je zazwyczaj ·)

Def. $(P, +, \cdot)$ - pierścień

- Jeżeli dodatkowo istnieje w P element neutralny ze względu na działanie multiplikatywne, to element ten nazywamy *jedynką*, oznaczamy *1*, a pierścień nazywamy *pierścieniem z jednością*.
- $x, y \in P$ nazywamy *dzielnikami 0*, jeżeli $x, y \neq 0$ i $x \cdot y = 0$
- Pierścień przemienny z jednością i bez dzielników zera nazywamy *pierścieniem całkowitym*.

Ciało

Def. Pierścień z jednością $(K, +, \cdot)$ nazywamy *ciałem*, jeżeli:
$\forall x \in K \ \setminus \ \{0\} \ \exists x^{-1} \in K : x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$
Czyli istnieje element symetryczny działania multiplikatywnego dla każdego x różnego od elementu neutralnego działania addytywnego.

Jeżeli ponadto:
$\forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$
to ciało nazywamy *ciałem przemiennym*.

Uwagi. Równoważnie, struktura $(K, +, \cdot)$ jest ciałem (przemiennym), jeżeli:

1. struktura $(K, +)$ jest grupą abelową.
2. struktura $(K \ \setminus \{0\}, \cdot)$ jest grupą (odpowiednio przemienną).
3. $\forall x, y, z \in K : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \ \wedge \ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Obs. W ciele nie ma dzielników zera.

Homomorfizmy struktur

Def. Odwzorowanie $h : A_1 \rightarrow A_2$ nazywamy *homomorfizmem* grupy $(A_1, +)$ w grupę $(A_2, \oplus)$ jeżeli $\forall x, y \in A_1 : h(x + y) = h(x) \oplus h(y)$.

Prz. $(\mathbb{R},+),(\mathbb{R}_+,\cdot)$
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ h(x)=e^x$ - homomorfizm

Tw. Z: $h:A_1\to A_2$ - homomorfizm grupy $(A_1,+)$ w grupę $(A_2,\oplus)$
T: (a) e_1 - el. neutralny w $A_1 \implies h(e_1)$ - el. neutralny w A_2
b) $\forall x\in A_1 : h(x')=(h(x))'$

Def. Dwie struktury nazywamy *izomorficznymi*, jeżeli istnieje *izomorfizm*, tj. *homomorfizm bijektywny*, jednej struktury na drugą.
