## Liczby zespolone

#### 2024-10-08

Zadania: Algebra - liczby zespolone

Następna: Algebra - 3

Poprzednie: Algebra - 1

#Liczby\_zespolone #algebra #postać\_trygonometryczna

### Odwrotność liczby zespolonej

$$|z|(cos(arphi)+i\cdot sin(arphi))\cdot rac{1}{|z|}(cos(-arphi)+i\cdot sin(-arphi))=1,\; z
eq 0$$

#### Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$\sqrt[n]{z}=w:\Leftrightarrow w^n=z \ w^n=z, |w|^n(cos(narphi)+i\cdot sin(narphi))=|z|(cos(arphi)+i\cdot sin(arphi)) \ |w|^n=|z|\wedge \exists k\in \mathbb{Z}: k=narphi=2k\pi|w|=\sqrt[n]{|z|}, \ lpha=rac{arphi+2k\pi}{n}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(cos(rac{arphi+2k\pi}{n}) + i\cdot sin(rac{arphi+2k\pi}{n}))$$

# Formalnie $\sqrt[n]{z}$ definiuje sie jako zbiór wszystkich tych $w_k$ :

$$\sqrt[n]{z}:=\{w_0,w_1,\ldots,w_{n-1}\}$$

#### Przykład:

$$egin{aligned} \sqrt[3]{1}, \ z &= 1 = 1(cos(0) + i \cdot sin(0)), \ w_0 &= \sqrt[3]{1}(cos(rac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}) + i \cdot sin(rac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3})) \ w_1 &= \sqrt[3]{1}(cos(rac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}) + i \cdot sin(rac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3})) \ w_2 &= \sqrt[3]{1}(cos(rac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}) + i \cdot sin(rac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3})) \end{aligned}$$

Pierwiastków  $\sqrt[n]{z},\ z\neq 0$  jest n i leżą one na okręgu o środku w (0,0) i promieniu  $\sqrt[n]{|z|}$ , dzieląc ten okrąg na n równych części.

(Rysunek)

#### Postać wykładnicza liczb zespolonych:

Postać wykładnicza jest jedną z postaci liczb zespolonych

$$Dla\ dowolnej\ liczby\ arphi\in\mathbb{R},\ oznaczamy: \ e^{iarphi}=\cosarphi+i\cdot\sinarphi$$

 $Z\ wzorow/tozsamosci\ z\ postaci\ trygonometrycznej\ wynikaja\ ponizsze.$ 

$$egin{aligned} e^{i(arphi_1+arphi_2)}&=e^{iarphi_1}\cdot e^{iarphi_2}\ e^{i(arphi_1-arphi_2)}&=rac{e^{iarphi_1}}{e^{iarphi_2}}\ (e^{iarphi})^k&=e^{ikarphi}\ e^{iarphi_1}&=e^{iarphi_2} \leftrightarrow arphi_1\equiv arphi_2\ (mod\ 2\pi)\ Zatem:\ z=re^{iarphi},\ gdzie\ r=|z|\geq 0 \end{aligned}$$

 $To\ wlasnie\ re^{iarphi}\ -\ nazywamy\ postacia\ wykladnicza.$ 

$$egin{aligned} \overline{z} &= r e^{-i arphi} \ -z &= r e^{i (arphi + \pi)} \ rac{1}{z} &= rac{1}{r} e^{-i arphi} \ z^k &= r^k e^{i k arphi} \ z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i (arphi_1 + arphi_2)} \ rac{z_1}{z_2} &= rac{r_1}{r_2} e^{i (arphi_1 - arphi_2)} \end{aligned}$$