Liczby zespolone

2024-10-08

Zadania: Algebra - liczby zespolone

Następna: Algebra - 3

Poprzednie: Algebra - 1

#Liczby_zespolone #algebra #postać_trygonometryczna

Odwrotność liczby zespolonej

$$|z|(cos(\varphi)+i\cdot sin(\varphi))\cdot\frac{1}{|z|}(cos(-\varphi)+i\cdot sin(-\varphi))=1,\ z\neq 0$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$\sqrt[n]{z}=w:\Leftrightarrow w^n=z$$
$$w^n=z, |w|^n(cos(n\varphi)+i\cdot sin(n\varphi))=|z|(cos(\varphi)+i\cdot sin(\varphi))$$
$$|w|^n=|z|\wedge\exists k\in\mathbb{Z}:k=n\varphi=2k\pi|w|=\sqrt[n]{|z|},\ \alpha=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}(cos(\frac{\varphi+2k\pi}{n})+i\cdot\sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n}))$$

Formalnie $\sqrt[n]{z}$ definiuje sie jako zbiór wszystkich tych w_k:

$$\sqrt[n]{z}:=\{w_0,w_1,\dots,w_{n-1}\}$$

Przykład:

$$\sqrt[3]{1},\ z = 1 = 1(cos(0) + i \cdot sin(0)),$$
$$w_0 = \sqrt[3]{1}(cos(\frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}) + i \cdot sin(\frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}))$$
$$w_1 = \sqrt[3]{1}(cos(\frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}) + i \cdot sin(\frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}))$$
$$w_2 = \sqrt[3]{1}(cos(\frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}) + i \cdot sin(\frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}))$$

Pierwiastków $\sqrt[n]{z},\ z \neq 0$ jest n i leżą one na okręgu o środku w (0,0) i promieniu $\sqrt[n]{|z|}$, dzieląc ten okrąg na n równych części.

(Rysunek)

Postać wykładnicza liczb zespolonych:

Postać wykładnicza jest jedną z postaci liczb zespolonych

$$Dla\ dowolnej\ liczby\ \varphi \in \mathbb{R},\ oznaczamy:$$
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

$$Z\ wzorow/tozsamosci\ z\ postaci\ trygonometrycznej\ wynikaja\ ponizsze.$$
$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$$
$$e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$$
$$(e^{i\varphi})^k = e^{ik\varphi}$$
$$e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \leftrightarrow \varphi_1 \equiv \varphi_2\ (mod\ 2\pi)$$
$$Zatem:\ z = re^{i\varphi},\ gdzie\ r = |z| \geq 0$$
$$To\ wlasnie\ re^{i\varphi}\ -\ nazywamy\ postacia\ wykladnicza.$$

$$\overline{z} = re^{-i\varphi}$$
$$-z = re^{i(\varphi + \pi)}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$$
$$z^k = r^k e^{ik\varphi}$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$