Obliczenia Naukowe

Podstawy przetwarzania sygnałów

Bartek Wilczyński
bartek@mimuw.edu.pl

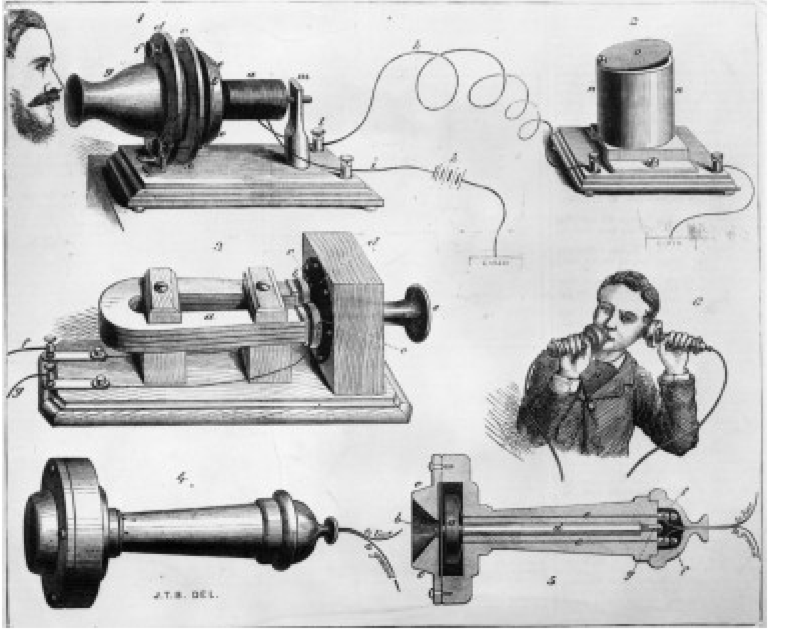
21. marca 2022

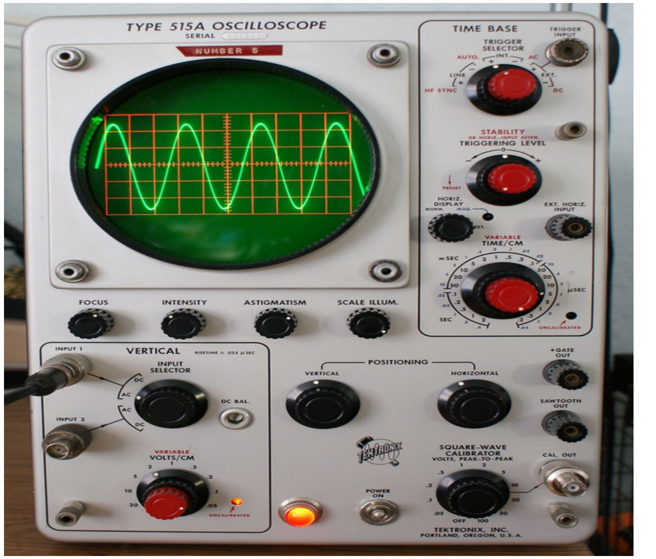
Plan na dziś

- Sygnały analogowe i cyfrowe
- Konwersja analogowo-cyfrowa, próbkowanie, rozdzielczość
- Porównywanie sygnałów, normalizacja
- Sploty sygnałów, filtry
- Wygładzanie sygnałów
- Szeregi Fourier'a, szybka transformata Fourier'a (FFT)
- Filtry górno-, dolno-przepustowe,

Przetwarzanie sygnałów analogowych

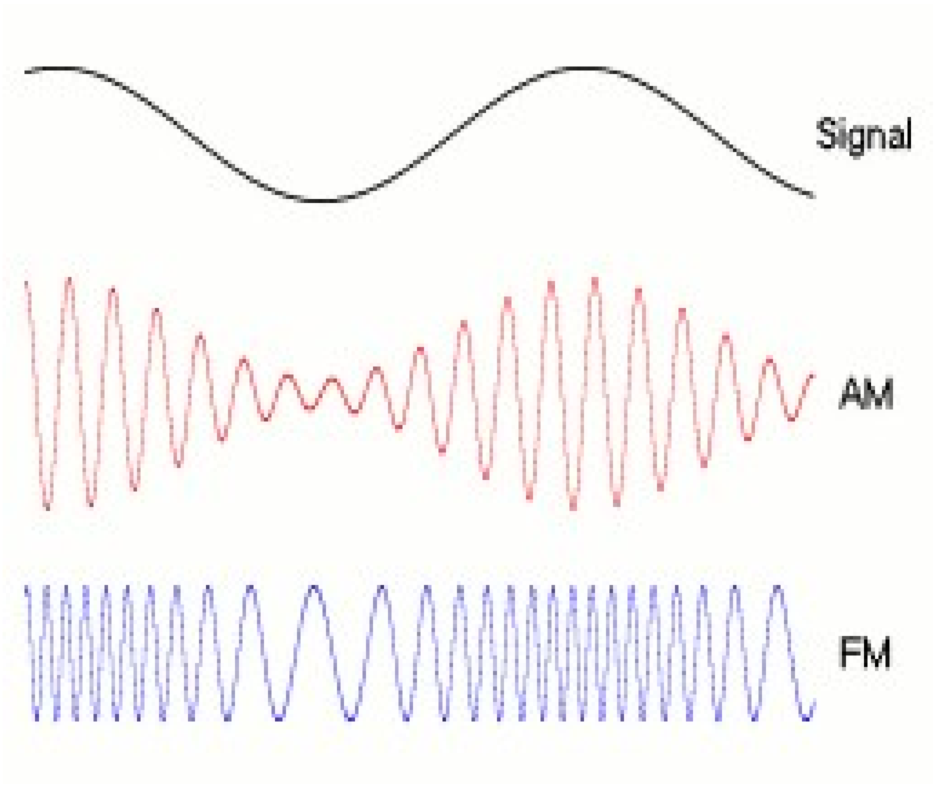
- Bogate doświadczenia w budowie obwodów przetwarzających sygnały od czasów wynalazku telefonu przez Bella w 1876
- Przetwarzanie sygnałów radiowych, telewizyjnych, efekty gitarowe, syntezatory analogowe, komunikacja wojskowa, itp.





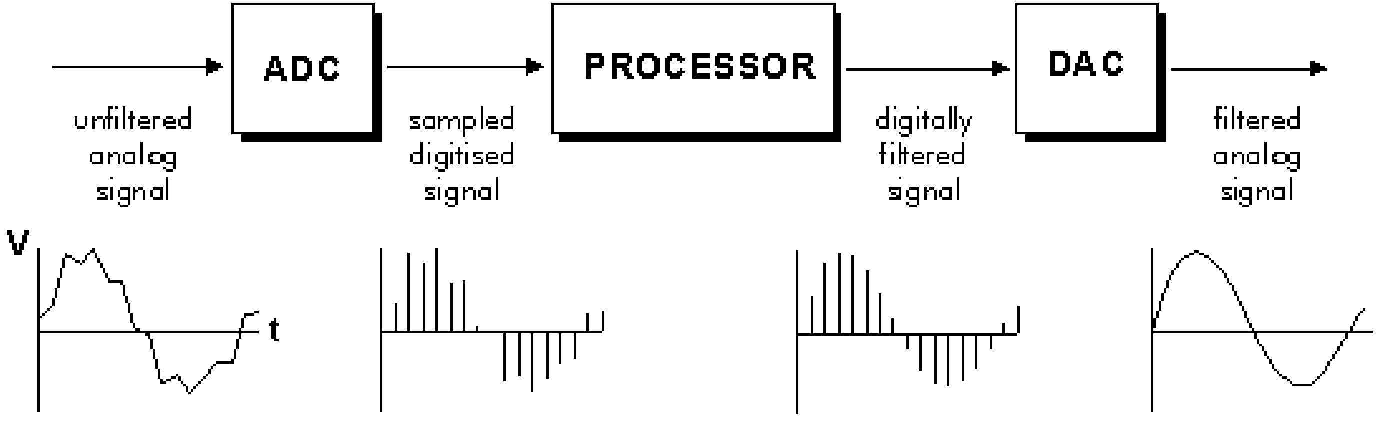
Modulacja AM/FM

- Dobrym przykładem jest modulacja amplitudowa (AM) lub częstotliwościowa (FM) stosowana do przesyłania wielu stacji radiowych jednocześnie



Cyfrowe przetwarzanie sygnałów (digital signal processing, DSP)

- Komunikacja wojskowa bardzo szybko przyjęła formę cyfrowych komunikatów
- Przy sygnale cyfrowym, nie interesuje nas forma sygnału, ale treść komunikatu
- Sygnał analogowy można zamienić na cyfrowy poprzez próbkowanie

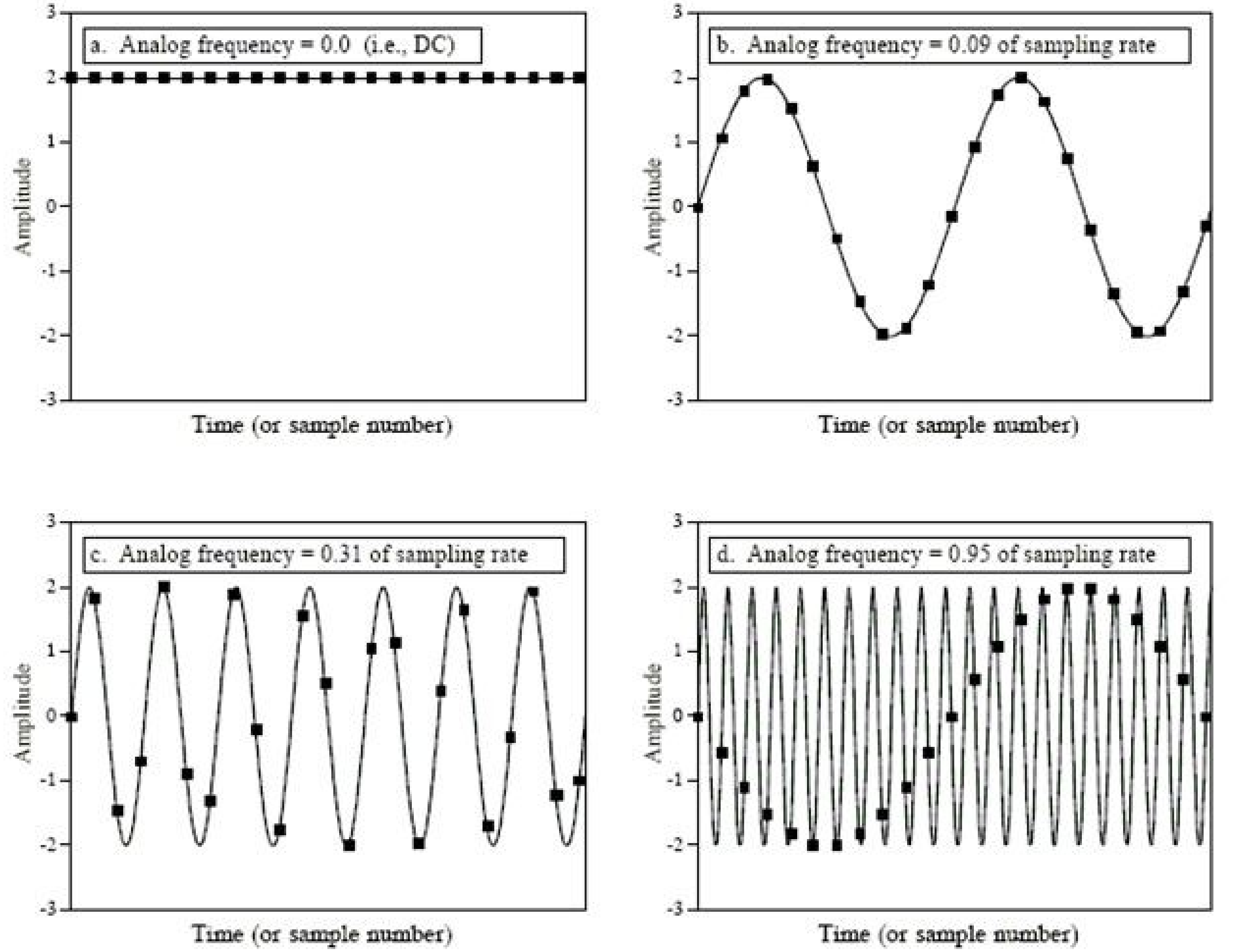


Przykłady zastosowań DSP

- Przetwarzanie dźwięku – muzyka, telefonia,
- Przetwarzanie obrazów – USG, kamery cyfrowe, obrazy mikroskopowe,
- Dane sygnałów 3D – geologia, pogoda, EEG, MRI, fMRI
- Przetwarzanie ruchomych obrazów – filmy, komunikacja online, systemy CCTV, wykrywanie obiektów na obrazach (foto radary, monitorowanie lotnisk itp)
- Kompresja sygnałów (MP3, AVI, ZIP, etc...)

Próbkowanie

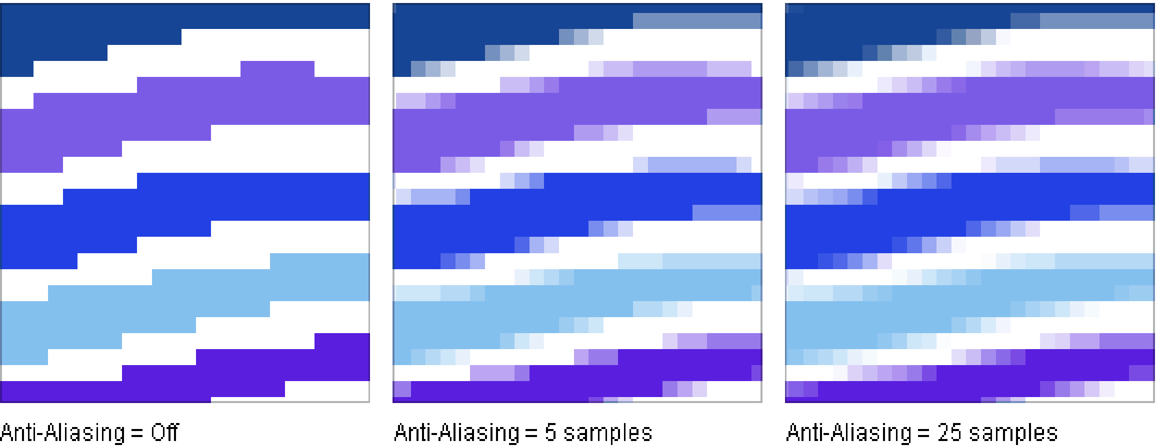
- Podczas przetwarzania analogowo-cyfrowego, musimy wybrać częstotliwość próbkowania:



Twierdzenie Nyquista-Shannona

- Aby wiernie odtworzyć składowe sygnału analogowego o częstotliwości **T Hz**, z próbek sygnału cyforwego, potrzebne jest próbkowanie o częstotliwości wyższej niż **2*T Hz**
- Dowód Shannona korzysta z własności szeregów Fouriera, przy założeniu zerowych składowych wysokich częstotliwości
- Stosowanie częstotliwości krytycznej 2T może prowadzić do niejednoznaczności

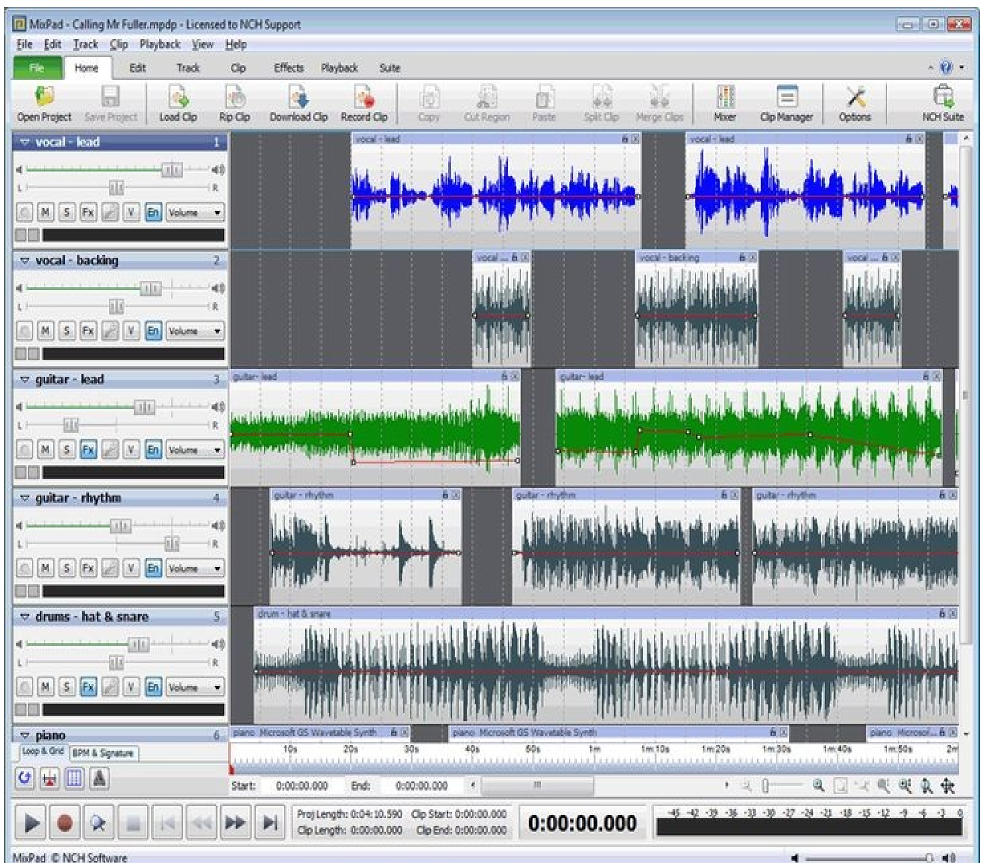
Artefakty próbkowania - antyaliasing

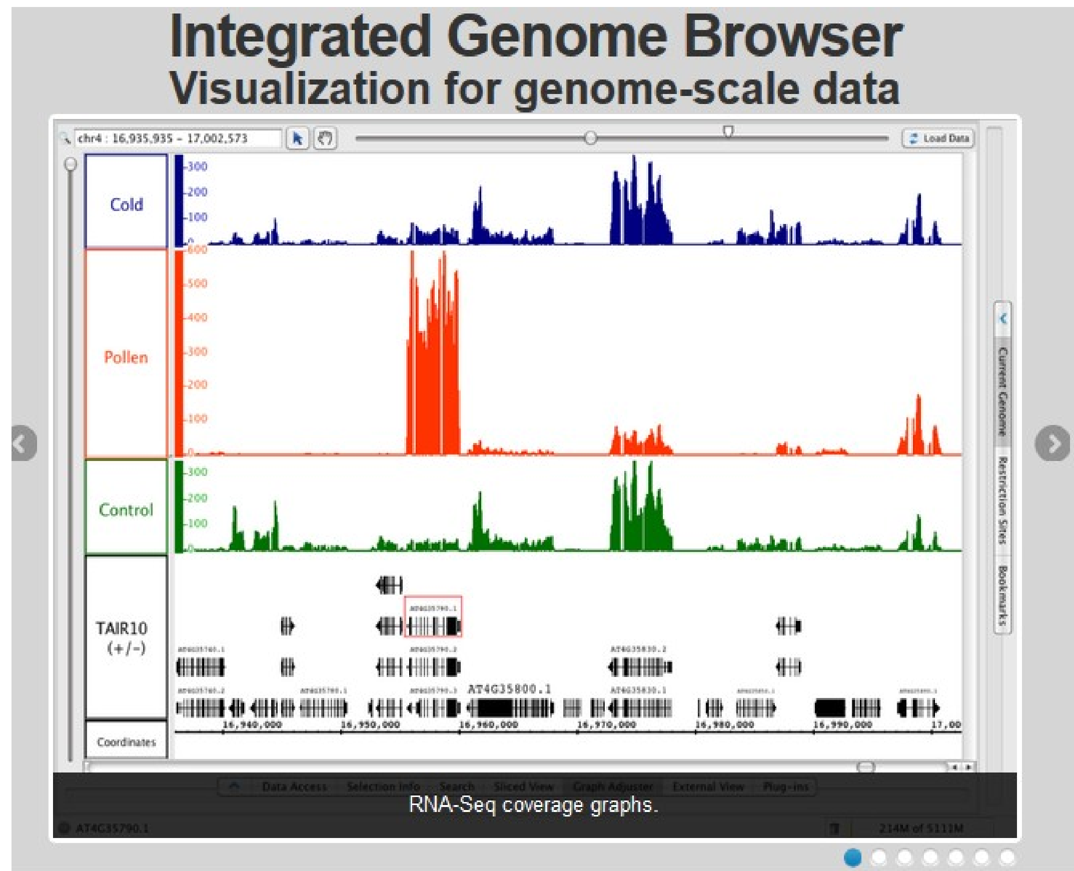


- Często nawet sygnał, który jest już cyfrowy, musimy próbkować na nowo, np. Żeby go wyświetlić, lub odtworzyć w inny sposób
- Często prowadzi to do problemów takich jak np. Prążki Moiré

Sygnały w bioinformatyce

- Porównanie wielościeżkowej edycji dźwięku z przeglądarką sygnału mRNA-Seq wzdłuż genomu





Sygnały - definicja

- Z naszego punktu widzenia, sygnał analogowy to po prostu funkcja $R^n \rightarrow R$, przy czym gdy n=1, mamy sygnał jedno-wymiarowy (radio, dźwięk itp), gdy n=2 mamy sygnał dwu-wymiarowy (np. Obrazy)
- Tego typu sygnały zwykle rozważamy na całej osi R
- Sygnał cyfrowy to po prostu lista wartości próbek sygnału w skończonej liczbie punktów, najczęściej równo odległych, w przypadku 1 wymiarowym daje nam to wektor, w przypadku 2 wymiarowym: macierz, w przypadku 3-wymiarowym, macierz 3-wymiarową

Porównywanie sygnałów

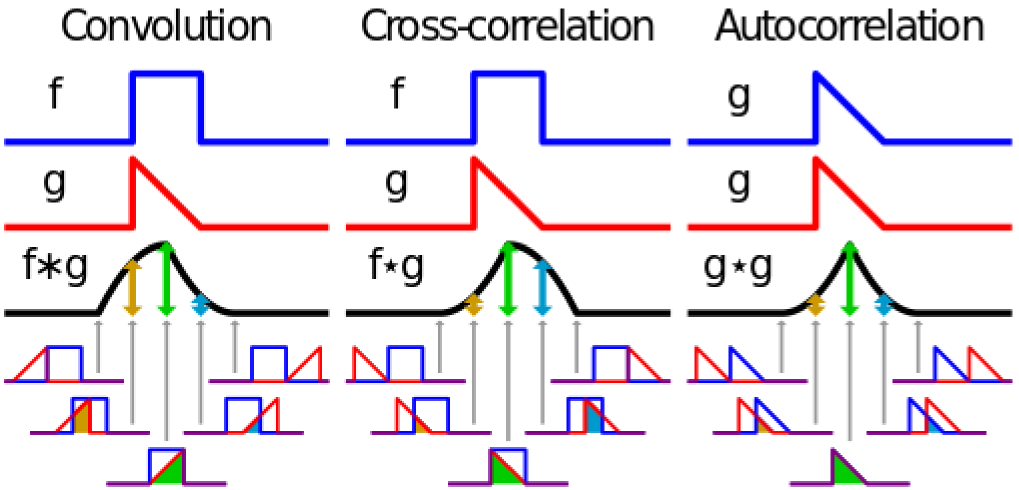
- Często aby porównać sygnał, potrzebujemy sprowadzić je do podobnej amplitudy
- Gdy mówimy o sygnale cyfrowym, często stosuje się normalizację obszaru pod wykresem, czyli dzielimy sygnał przez sumę wartości $f(x_i)/\Sigma f(x_j)$
- Ta transformacja nie zachowuje dobrze zmienności sygnału, zwłaszcza gdy sygnał zawiera też wartości ujemne
- Naprawia to tzw. Transformacja normalna, albo inaczej z-score: $[f(x_i)-\mu]/\sigma$, gdzie μ to średnia wartość $f(x_i)$, a σ to ich odchylenie standardowe
- Sygnał przetworzony w ten sposób, ma zawsze średnią 0 i wariancję 1

Sploty sygnałów

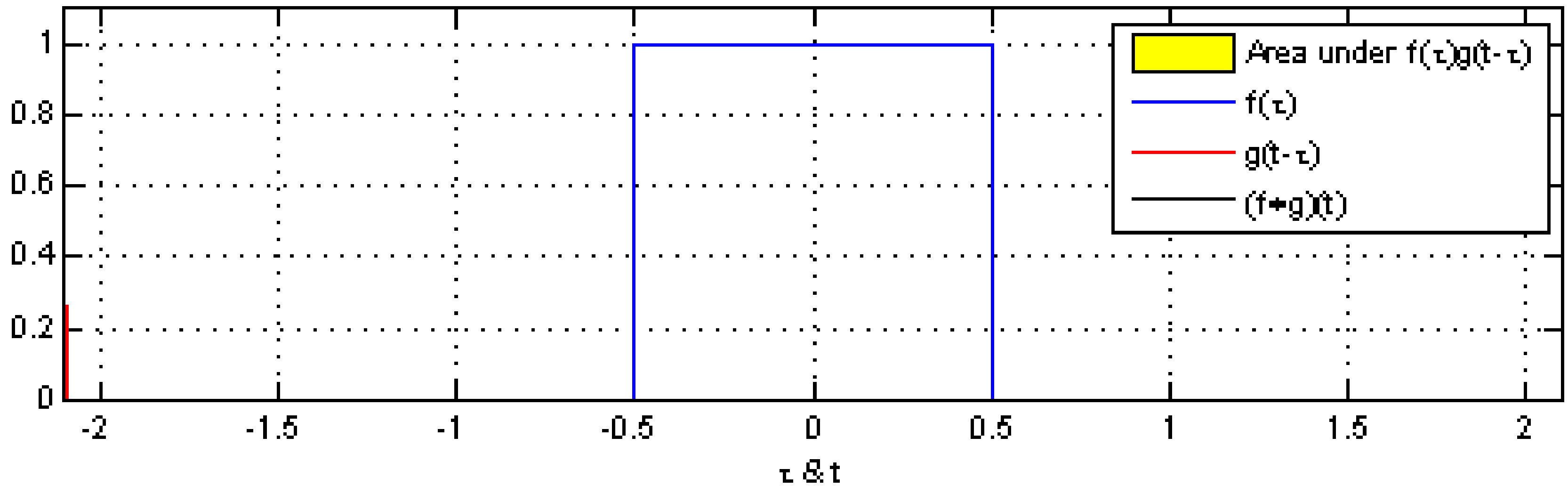
- Weźmy taką operację na dwóch sygnałach:

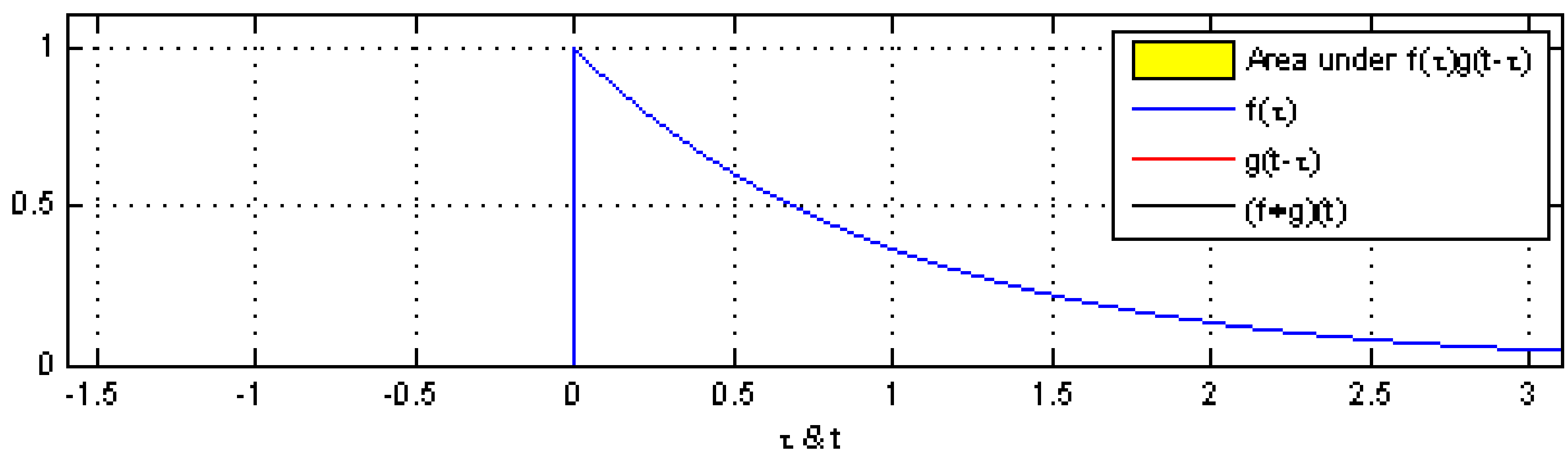
$$\int f(u) \cdot g(x-u)du$$

- Jest to splot sygnałów f z g



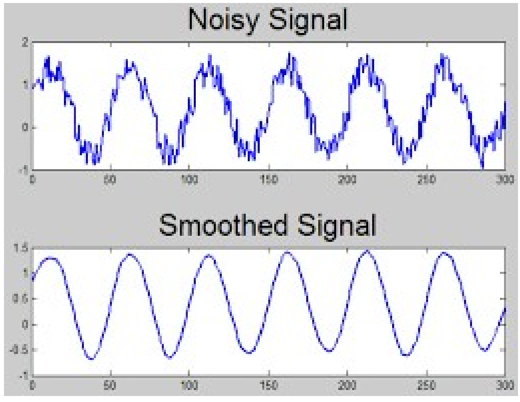
- Najczęściej stosuje się sploty z sygnałami o niewielkim nośniku, zwane filtrami


Area under f(τ)g(t-τ)
f(τ)
g(t-τ)
(f*g)(t)
τ & t


Area under f(τ)g(t-τ)
f(τ)
g(t-τ)
(f*g)(t)
τ & t

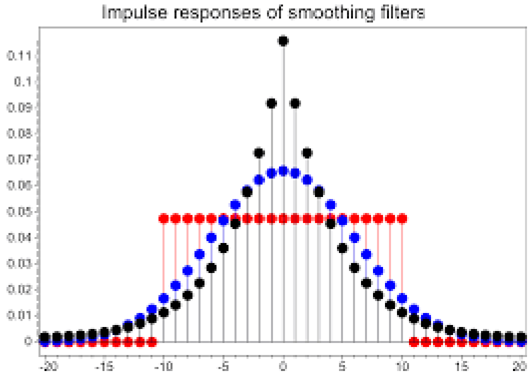
Wygładzanie sygnału

- Podobnie jak w zagadnieniu aproksymacji funkcji, często chcielibyśmy uzyskać sygnał pozbawiony losowych składowych o dużej częstotliwości, czyli szumu
- Spotykamy taki problem np. W notowaniach giełdowych, gdzie standardowo stosuje się tzw. Średnią kroczącą `sum(f[i-k:i+k])/(2*k)`

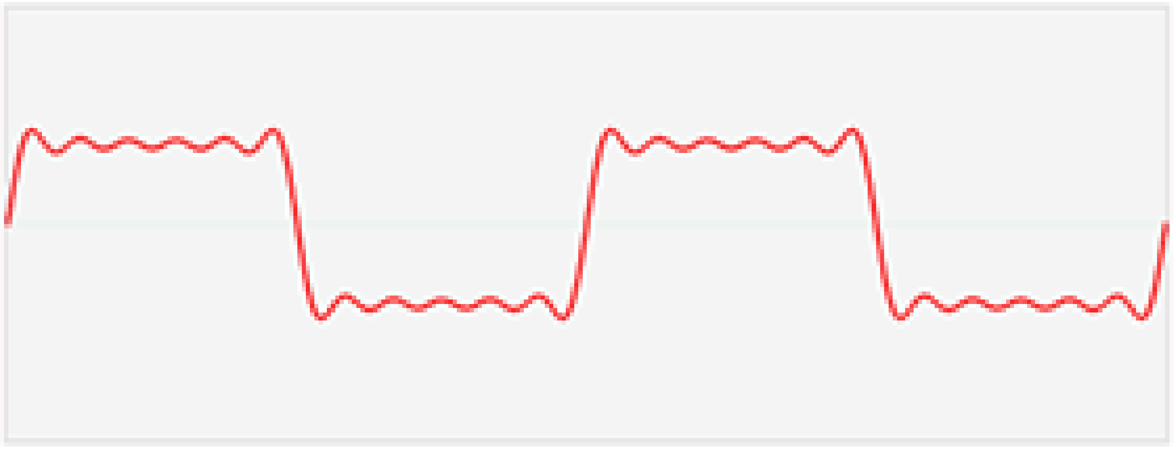


Średnia krocząca, a filtry

- Zaleta średniej kroczącej względem np. aproksymacji splajnami jest taka, że jest to operacja lokalna, nie wymagająca wszystkich wartości funkcji
- Można ten pomysł uogólnić, stosując różnego rodzaju filtry: kwadratowy, trójkątny lub Gaussowski, co odpowiada różnym kroczącym średnim ważonym



Transformata Fourier'a



Dyskretna transformata Fouriera

- Dla sygnałów dyskretnych (skończonych ciągów liczb zespolonych X_i możemy zdefiniować transformatę DFT x_i

$$
\begin{aligned}
X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N}kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)\right],
\end{aligned}
\qquad \text{(Eq.1)}
$$

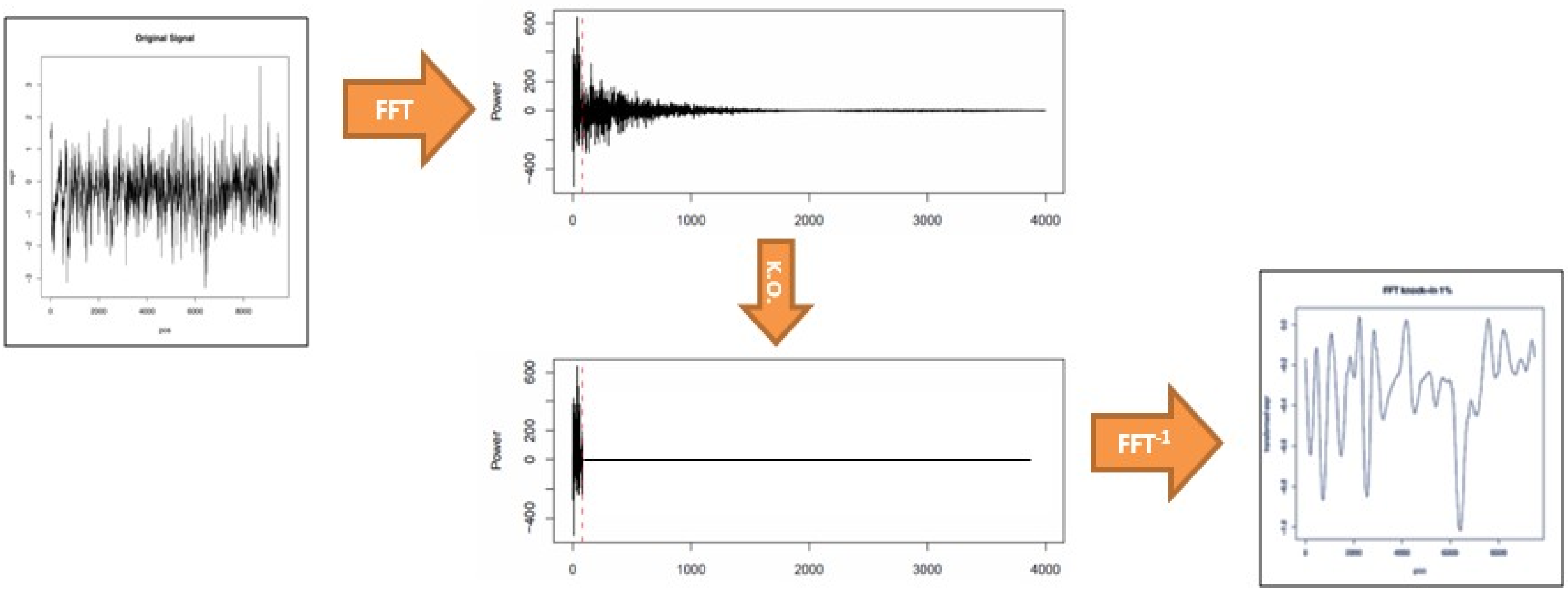
Szybka transformata Fouriera

- Proste wyliczenie widma DFT wymaga $O(n^2)$ operacji
- Już C.F. Gauss w 1805 zauważył, że można wyliczać niezależnie parzyste i nieparzyste współczynniki, sprowadzając wyliczanie DFT rozmiaru N, do wyliczenia dwukrotnie DFT rozmiaru N/2, prowadząc algorytmu o koszcie wyliczenia $O(n \log(n))$

$$X_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N}(2m)k} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(2m+1)k}$$

- W 1967, Cooley&Tukey odkryli ten algorytm ponownie do użytku w programie komputerowym, większość implementacji FFT wykorzystuje jakiś wariant tego algorytmu

Użycie szybkiej transformaty Fourier'a do wygładzania sygnału



- Przekształcamy sygnał na widmo częstotliwości
- “Ucinamy” wyższe częstotliwości
- Stosujemy odwrotną tranformatę

Zastosowanie FFT do pozycjonowania nukleosomów