

**Sprawozdanie**  
**Bartłomiej Jurga**  
**311576**

**Lokalne układy odniesienia**

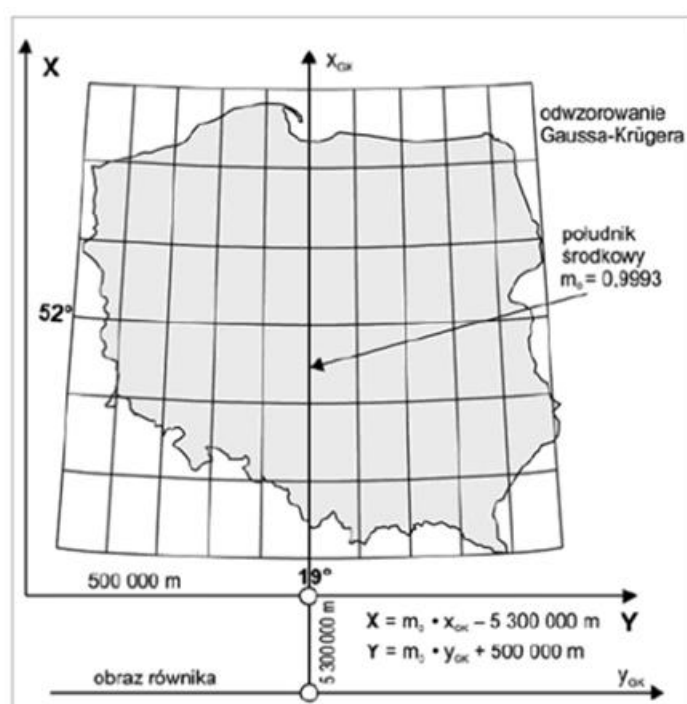
Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z lokalnymi układami 1992 oraz 2000 i odwzorowaniem Gaussa-Krügera. Porównanie różnic we wartościach współrzędnych, pól powierzchni i zniekształceń dla danych z poprzedniego zadania.

## Wstęp teoretyczny

Południk osiowy – linia odwzorująca się z danego układu lokalnego na mapę bez żadnych zniekształceń. Im dalej się odsuniemy od niego, tym większe będą zniekształcenia odwzorowawcze.

Odwzorowanie Gaussa-Krügera – odwzorowanie kartograficzne pasów południkowych na walec styczny do południka osiowego każdego odwzorowywanego pasa. Jest ono wiernokątne i poprzeczne. Południk styczności (osiowy) wyznacza oś X, równik oś Y.

## Układ „1992”



Układ 1992 opiera się na odwzorowaniu walcowym Gaussa-Krügera elipsoidy lokalnej GRS80. Układ współrzędnych jest jednolity dla całego kraju.

Elementarna skala długości południka środkowego  $m_0 = 0.9993$ .

Zniekształcenie waha się od -70cm/km do +90cm/km.

Obraz Polski jest przesunięty o 5 300 000m w stosunku do obrazu równika, zatem wzory na współrzędne kartezjańskie X Y wyrażają się wzorami:

$$X = m_0 * X_{GK} - 5\,300\,000\text{m}$$

$$Y = m_0 * Y_{GK} + 500\,000\text{m}$$

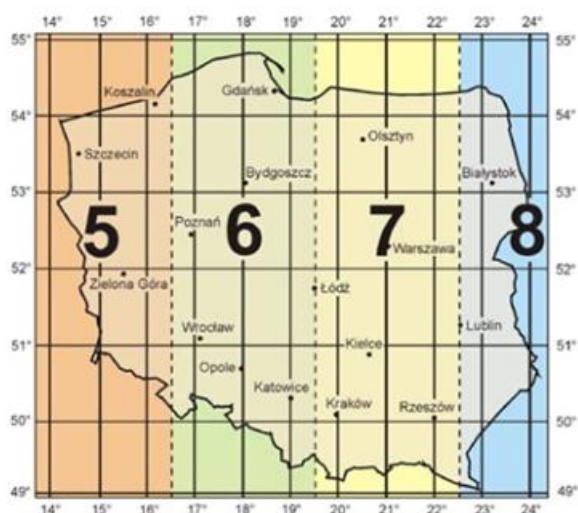
$X_{GK}$ ,  $Y_{GK}$  – współrzędne odwzorowania Gaussa-Krügera

Odwzorowanie jest równokątne (konforemne), walcowe i poprzeczne.

Początek układu znajduje się w punkcie przecięcia południka  $L_0 = 19^\circ$  z obrazem równika

Układ 1992 stanowi podstawę do sporządzania map w skalach 1:10000 i mniejszych, ze względu na duże zniekształcenia (w porównaniu do na przykład układu 2000) nie jest używany do opracowań map w większych skalach.

## Układ „2000”



Układ 2000 opiera się na odwzorowaniu walcowym Gaussa-Krügera elipsoidy lokalnej GRS80. Kraj jest podzielony na cztery pasy południkowe o szerokości  $3^\circ$  i południkach osiowych  $15^\circ, 18^\circ, 21^\circ, 24^\circ$  długości geograficznej wschodniej, ponumerowane odpowiednio numerami 5,6,7,8.

Południk osiowy każdej ze stref odwzorowuje się na linię prostą z elementarną skalą  $m_0 = 0.999923$ .

Zniekształcenia wynoszą od  $-7.7\text{cm/km}$  do  $+7\text{cm/km}$ .

Początkiem układu współrzędnych dla każdej ze stref jest punkt przecięcia obrazu równika z obrazem południka osiowego, otrzymuje on współrzędną  $x = 0\text{m}$ .

Układ został stworzony w celu wprowadzenia mapy zasadniczej (Podstawowej Mapy Kraju).

Wzory na współrzędne kartezjańskie:

$$X_{2000} = m_0 * X_{GK}$$

$$Y_{2000} = m_0 * Y_{GK} + nr\_strefy * 1\,000\,000 + 500\,000$$

## Przebieg zadania

Zadanie rozpoczęto od napisania algorytmu przeliczającego współrzędne krzywoliniowe  $\varphi, \lambda$  na płaskie współrzędne w odwzorowaniu Gaussa-Krügera na podstawie poniższych wzorów:

Zależności między współrzędnymi G-K a geodezyjnymi  $\varphi, \lambda$

### 2. Wzory robocze $x, y = f(B, L)$

Formuły odwzorowawcze przeliczające współrzędne krzywoliniowe na płaskie współrzędne w odwzorowaniu G-K (współrzędne lokalne w strefie odwzorowawczej)

$$x = \sigma + \frac{l^2}{2} \cdot N \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \left\{ 1 + \frac{l^2}{12} \cos^2 \varphi \cdot (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \frac{l^4}{360} \cos^4 \varphi \cdot (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2) + \dots \right\}$$

$$y = l \cdot N \cos \varphi \cdot \left\{ 1 + \frac{l^2}{6} \cos^2 \varphi \cdot (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l^4}{120} \cos^4 \varphi \cdot (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) + \dots \right\}$$

gdzie:  $t = \tan B$ ,  $\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2 B$ ,  $l = L - L_0$  jest wyrażone w radianach.

Wartość  $\sigma$  - długości łuku południka otrzymujemy z równania:

$$\sigma = a(A_0 \varphi - A_2 \sin 2\varphi + A_4 \sin 4\varphi - A_6 \sin 6\varphi + \dots)$$

gdzie  $A_0 = 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256}$ ,  $A_2 = \frac{3}{8} \cdot \left( e^2 + \frac{e^4}{4} + \frac{15e^6}{128} \right)$ ,  $A_4 = \frac{15}{256} \cdot \left( e^4 + \frac{3e^6}{4} \right)$ ,  $A_6 = \frac{35e^6}{3072}$ .

Współrzędne  $x, y$  będziemy nazywać współrzędnymi lokalnymi na płaszczyźnie Gaussa-Krügera.

Gdzie  $e'^2 = 0.00673949677548$  kwadrat drugiego mimośrod

$L_0 = 19^\circ$  dla G-K i układu 1992 lub  $15^\circ/18^\circ/21^\circ/24^\circ$  dla układu 2000

Jako dane przyjęto punkty z poprzedniego zadania.

Następnie napisano algorytm przeliczający współrzędne płaskie z odwzorowania G-K na układy 1992 i 2000, oraz algorytmy odwrotne, oparte na teorii podanej na początku sprawozdania.

Ostatni został napisany algorytm odwrotny do Gaussa-Krügera, zamieniający poprzez iterowanie współrzędne płaskie na krzywoliniowe ( $\varphi, \lambda$ ):

### 3.3. Algorytm

1. Iteracyjne wyznaczenie pierwszego przybliżenia szerokości geodezyjnej  $\varphi_1$ :

$$\varphi_1^{i=0} = \frac{x_{gk}}{aA_0}; \quad \sigma^i = f(\varphi_1^i) - \text{na podstawie wzoru pkt. 2.3.3;}$$

$$\varphi_1^i = \varphi_1^{i-1} + \frac{x_{gk} - \sigma^{i-1}}{aA_0}; \quad \text{Warunek zakończenia iteracji: } |\varphi_1^i - \varphi_1^{i-1}| < 0''.000001$$

2. Wielkości pomocnicze (obliczone w funkcji  $\varphi_1$ ):

$$N_1; \quad M_1; \quad t_1; \quad \eta_1;$$

3. Współrzędne geodezyjne:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{y_{gk}^2 t_1}{2M_1 N_1} \cdot \left\{ 1 - \frac{y_{gk}^2}{12N_1^2} \cdot (5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2 - 4\eta_1^4) \right. \\ \left. + \frac{y_{gk}^4}{360N_1^4} \cdot (61 + 90t_1^2 + 45t_1^4) + \dots \right\};$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{y_{gk}}{N_1 \cos \varphi_1} \cdot \left\{ 1 - \frac{y_{gk}^2}{6N_1^2} \cdot (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) \right. \\ \left. + \frac{y_{gk}^4}{120N_1^4} \cdot (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4 + 6\eta_1^2 + 8\eta_1^2 t_1^2) + \dots \right\};$$

Od razu obliczane też są elementarne skale długości i zniekształcenia odwzorowawcze dla każdego punktu oraz pola prostokąta ABDC.

**Skala** długości ( $m_{92}$ ) w układzie współrzędnych PL-1992 wynosi:

$$m_{92} = m_{092} \cdot m_{GK} = 0,9993 \, m_{GK} \quad (59)$$

zaś zniekształcenia długości ( $Z_{92}$ ):

$$Z_{92} = m_{92} - 1 \quad (60)$$

**Skala** pól ( $p_{GK}$ ) na płaszczyźnie Gaussa-Krügera obliczana jest ze wzoru:

$$p_{GK} = m_{GK}^2 \quad (61)$$

natomiast w układzie współrzędnych PL-1992 wg wzoru:

$$p_{92} = m_{092}^2 \cdot p_{GK} = m_{092}^2 \cdot m_{GK}^2 = 0,9993^2 \cdot m_{GK}^2. \quad (62)$$

# Zestawienie wyników

1. Zestawienie współrzędnych						
	X <sub>gk</sub>	Y <sub>gk</sub>	X <sub>2000</sub>	Y <sub>2000</sub>	X <sub>1992</sub>	Y <sub>1992</sub>
A	5570120.598	124812.240	5568256.030	7482170.562	266221.513	624724.871
B	5542315.026	125464.213	5540450.350	7482077.452	238435.406	625376.388
C	5571077.962	160469.933	5568256.030	7517829.438	267178.207	660357.604
D	5543273.894	161308.310	5540450.350	7517922.548	239393.602	661195.394
S	5556666.778	143014.258	5554323.110	7500000.000	252777.112	642914.148
M	5556696.771	143059.016	5554351.883	7500045.531	252807.084	642958.875

2. Zestawienie pól powierzchni(km <sup>2</sup> )			
Pelipsoidalne	P <sub>gk</sub>	P <sub>2000</sub>	P <sub>1992</sub>
994.265196067564	994.761149108003	994.108283724926	993.368970932222

3. Elementarna skala długości i zniekształcenia (cm/km)						
	m <sub>gk</sub>	K <sub>gk</sub> (1km)	m <sub>2000</sub>	K <sub>2000</sub> (1km)	m <sub>1992</sub>	K <sub>1992</sub> (1km)
A	1.000191	0.19	0.999927	-0.07	0.999491	-0.51
B	1.000193	0.19	0.999927	-0.07	0.999493	-0.51
C	1.000316	0.32	0.999927	-0.07	0.999616	-0.38
D	1.000319	0.32	0.999927	-0.07	0.999619	-0.38
S (średniej szerokości)	1.000251	0.25	0.999923	-0.08	0.999551	-0.45
M (środkowy)	1.000251	0.25	0.999923	-0.08	0.999551	-0.45

4. Elementarna skala długości i zniekształcenia (cm/ha)						
	$m^2_{gk}$	$K^2_{gk}(1ha)$	$m^2_{2000}$	$K^2_{2000}(1ha)$	$m^2_{1992}$	$K^2_{1992}(1ha)$
A	1.000383	3.83	0.999854	-1.46	0.998982	-10.18
B	1.000387	3.87	0.999854	-1.46	0.998986	-10.14
C	1.000632	6.32	0.999854	-1.46	0.999232	-7.68
D	1.000639	6.39	0.999854	-1.46	0.999239	-7.61
S (średniej szerokości)	1.000502	5.02	0.999846	-1.54	0.999102	-8.98
M (środkowy)	1.000503	5.03	0.999846	-1.54	0.999102	-8.98



## Wnioski

Zniekształcenia w układzie 2000 są zdecydowanie mniejsze od tych w układzie 1992 (maksymalnie 0.08 cm/km zniekształcenia w układzie 2000 to ponad sześć razy mniejsze zniekształcenie niż 0.51 cm/km w układzie 1992). Dokładność samego Gaussa-Krügera plasuje się pośrodku tych dwóch układów.

Różnica ta powiększa się jeszcze bardziej, gdy weźmiemy większą jednostkę odległości, w tym przypadku będzie to hektar.

Zniekształcenie pola na jeden hektar w układzie 1992 wynosi 10.18 cm/ha. Jest to prawie siedem razy większe zniekształcenie niż w układzie 2000. To doświadczenie potwierdza fakt, że układ 2000 jest zdecydowanie dokładniejszy i co za tym idzie, lepszy do odwzorowywania map wielkoskalowych.