

TD5 : Homomorphismes et systèmes à base de règles d'ordre 1

Exercice 1. Calcul d'homomorphismes

Soit Q et F deux ensembles d'atomes (représentant respectivement une requête conjonctive et une base de faits). On n'a donc pas de règles.

$Q = \{ p(x,y), p(y,z), p(x,u), p(z,z), r(x), r(u) \}$ où x, y, z et u sont des variables

$F = \{ p(a,b), p(a,c), p(b,c), p(b,d), p(b,e), p(d,e), p(e,e), r(a), r(b), r(c) \}$ où a, b, c, d et e sont des constantes.

- 1- L'application suivante des variables de Q dans les constantes de F est-elle un homomorphisme de Q dans D ?

$$x \rightarrow a \quad y \rightarrow b \quad z \rightarrow d \quad u \rightarrow c$$

Justifier votre réponse.

- 2- Donner tous les homomorphismes de Q dans F selon le format ci-dessous :

	x	y	z	u
Homomorphisme 1				
.....				

Exercice 2. Chaînage avant avec des règles d'ordre 1

On considère la base de connaissances suivante :

- Règles (les quantificateurs universels sont implicites)

$$R1 : r(x1,y1,z1) \wedge p(x1,y1) \rightarrow p(y1,z1)$$

$$R2 : p(x2,y2) \wedge p(y2,z2) \rightarrow p(x2,z2)$$

- Faits $r(a,b,c) \quad r(b,b,c) \quad r(b,c,d)$
 $p(a,b) \quad p(c,d) \quad p(e,f) \quad p(e,e)$

- Si on instancie la base de règles avec les constantes de la base de connaissances de façon à se retrouver avec une base de connaissances d'ordre 0, combien obtient-on de règles ?
- On considère maintenant la base de règles d'ordre 1 sur laquelle on veut effectuer un chaînage avant d'ordre 1. Saturer la base de faits avec les règles, en procédant en largeur (à chaque étape, calcul de tous les nouveaux homomorphismes des hypothèses de règles dans la base de faits courante, puis application des règles selon ces homomorphismes avant de passer à l'étape suivante). Présenter les résultats selon le format suivant :

Etape	Règle applicable	Homomorphisme	Fait produit	Application utile ?
n° étape	n° règle	oui/non

Exercice 3. De CSP à Homomorphisme et réciproquement

Le problème **CSP** (*satisfaction de contraintes*) prend en entrée un réseau de contraintes et demande si ce réseau admet une solution. Un réseau de contraintes est composé d'un ensemble $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de variables, d'une fonction D qui associe un domaine D_i à chaque variable x_i , et d'un ensemble C de contraintes portant sur les variables de X . On se restreint ici à des contraintes données en extension (c'est-à-dire par énumération des tuples de valeurs compatibles).

Le problème **HOM** (*homomorphisme*) prend en entrée 2 ensembles d'atomes représentant des formules existentielles conjonctives de la logique du premier ordre (soient Q et F), et demande s'il existe un homomorphisme de Q dans F . On suppose que F ne contient pas de variable.

Nous allons voir dans cet exercice que les deux problèmes sont réductibles l'un à l'autre par des transformations assez naturelles. Intuitivement, une solution au réseau (X,D,C) est une application de X dans D qui respecte les contraintes de C , et un homomorphisme de Q dans F est une application des variables de Q dans les termes (constantes) de F qui « respecte les atomes de Q ».

1) De CSP à HOM

- a) On considère le réseau de contraintes (X,D,C) suivant :

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \\ D(x_i) &= \{a, b\} \text{ pour tout } i : 1 \dots 4 \\ C &= \{C_1, C_2, C_3\} \text{ avec :} \\ C_1[x_1, x_2, x_3] &= \{[a, a, b], [a, b, a], [b, a, a]\} \\ C_2[x_2, x_3, x_4] &= \{[a, b, a], [b, a, b]\} \\ C_3[x_1, x_4] &= \{[a, b], [b, b]\} \end{aligned}$$

Convertir ce réseau en une instance (Q,F) du problème HOM de façon à ce que le réseau ait une solution ssi il existe un homomorphisme de Q dans F . De plus, on voudrait que les solutions du réseau correspondent exactement aux homomorphismes de Q dans F .

- b) Définir une réduction de CSP à HOM dans le cas général.

2) De HOM à CSP

On considère Q et F de l'exercice 1 :

$$Q = \{ p(x,y), p(y,z), p(x,u), p(z,z), r(x), r(u) \}$$

$$F = \{ p(a,b), p(a,c), p(b,c), p(b,d), p(b,e), p(d,e), p(e,e), r(a), r(b), r(c) \}$$

- a) Transformer Q et F en un réseau de contraintes au plus binaires $P = \langle X, D, C \rangle$ de façon à ce que tout homomorphisme de Q dans F soit une solution à P , et réciproquement. Penser à traiter le cas où une variable apparaît deux fois dans le même atome de Q (cf. $p(z,z)$).
- b) Définir une réduction de HOM à CSP dans le cas général. Ne pas oublier que Q peut comporter des constantes.

Exercice 4. Chaînage avant et arrière avec des règles d'ordre 1 (extrait examen)

On considère la base de connaissances suivante :

- Règles

$$R1: \text{flat}(x1,y1) \rightarrow \text{sg}(x1,y1)$$

$$R2 : \text{up}(x2,y2) \wedge \text{sg}(y2,z2) \wedge \text{up}(t2,z2) \rightarrow \text{sg}(x2,t2)$$

- Faits (où a,b,c,d,e,f,g sont des constantes)

$$\text{flat}(a,b) \text{ flat}(b,c) \text{ flat}(a,c)$$

$$\text{up}(d,a) \text{ up}(d,b) \text{ up}(e,c) \text{ up}(f,d) \text{ up}(g,e)$$

1) **Saturez** la base de faits avec les règles, en procédant **en largeur**. A chaque étape, on ne considère que les **nouveaux** homomorphismes. On rappelle qu'une application de règle est dite utile si elle produit un fait qui n'appartient pas à la base de faits courante.

Présentez les résultats dans un tableau selon le **format suivant** :

Etape	Règle applicable	Homomorphisme	Fait produit	Application utile ?
n° étape	n° règle	oui/non
...

2)

- a. Comment reconnaît-on qu'un homomorphisme est *nouveau* ?
- b. On dit qu'un prédicat est *calculé* s'il apparaît au moins une fois en conclusion de règle : ici, *sg* est un prédicat calculé, et c'est le seul. L'ensemble de règles ci-dessus a une particularité : la condition (l'hypothèse) de chaque règle contient au plus un prédicat calculé. Un tel ensemble de règles est appelé *linéaire*. Comment exploiter le fait qu'un ensemble de règles soit linéaire pour ne calculer que les homomorphismes nouveaux à chaque étape de largeur ?

3)

- a. Soit la requête qui demande si « il existe x, y et z tels que $\text{sg}(x,y) \wedge \text{up}(y,z) \wedge \text{flat}(z,c)$ » où *c* est une constante. La base de connaissances répond-elle positivement à cette requête ? Justifiez votre réponse en vous basant sur le mécanisme de *chaînage avant*.
- b. Traitez cette requête par un mécanisme de *chaînage arrière*. Vous considérerez les faits avant les règles, et les règles dans l'ordre R1 puis R2. En ce qui concerne les atomes des buts, vous indiquerez quelles heuristiques vous font choisir un atome plutôt qu'un autre. Vous ferez la trace du chaînage arrière en indiquant les substitutions trouvées à chaque pas.