3 - Triangulation

1) triangulation simple d'un ensemble de points selon la méthode incrémentale

Cet exercice consiste implémenter l'algorithme incrémental vu en cours pour le calcul d'une triangulation simple d'un ensemble fini de points du plan.

Vous pouvez tester votre implémentation sur les exemples suivants: triangulation-1, triangulation-2, triangulation-3

2) test de validité d'arêtes

Angle inscrit et angle au centre (rappels): on considère trois points non alignés A,B,C, et leur cercle circonscrit de centre Ω. Si C se trouve du même côté de la droite (AB) que Ω alors l'angle AΩB, appelé angle au centre est égal à deux fois l'angle ACB appelé angle inscrit.

1. Pour un triangle ABC, on considère un point P se trouvant du même côté que C de la droite AB. Montrer que P est dans(*) le cercle circonscrit si et seulement si $\gamma \leq \varphi$ où γ est l'angle ACB et φ est l'angle APB. (*) dans = à l intérieur du cercle ou sur le cercle.
2. En déduire une procédure testant si un point P se trouve à l'intérieur du cercle circonscrit à un triangle ABC en se passant du calcul des coordonnées du centre du cercle.
3. Comparer cette approche avec l'approche qui consiste à calculer les coordonnées du centre du cercle et la distance à ce centre.
4. En déduire deux versions du test de validité d'une arête d'une triangulation de Delaunay. On rappelle que chaque arête intérieure est partagée par deux triangles et que pour être valide une arête doit être telle qu'aucun sommet de l'un des triangles auquel elle participe ne doit se trouver dans le cercle circonscrit de l'autre triangle dont elle fait partie.
5. Concevoir une structure de donnée permettant de réaliser le test de validité d'arête de manière optimale.
6. Intégrer le test de validité dans l'algorithme de construction incrémentale de triangulation afin de construire une triangulation de Delaunay à partir d'un ensemble de points quand c'est possible.

3) filtrage des triangles

Dans cet exercice, on considère V, un ensemble de points et T, la triangulation de l'ensemble des points de V. On propose de filtrer les triangles dont le rayon du cercle circonscrit est inférieur à un seuil α.

1. Proposer les structures de données permettant de faciliter ce filtrage.
2. Faire varier α de min au max qui représentent respectivement le plus petit et le plus grand des rayons des cercles circonscrits des triangles de la triangulation T.

4) nombre d'arêtes et nombre de triangles d'une triangulation

Rappel de la formule d'Euler: dans le cas d'un graphe planaire pour lequel n est le nombre de sommets du graphe, a est le nombre d'arêtes et f est le nombre de faces, alors : $n - a + f = 2$. Remarque: le nombre f tient compte de la face extérieure.

1. Pour un ensemble quelconque V de n points ayant une enveloppe convexe EC de k points, quel est le nombre a d'arêtes et le nombre t de triangles de toute triangulation de V, en fonction de n et k ?
2. Implémenter et intégrer un test qui vérifie cette propriété, en pratique sur les triangulations construites aux exercices précédents.

5) arbre couvrant Euclidien minimal d'un ensemble de points

L'arbre couvrant Euclidien minimal d'un ensemble V de n points du plan est un arbre connectant tous les points de V et pour lequel la somme des longueurs des arêtes est minimale.

1. Dans une triangulation de Delaunay de V chaque sommet est-il adjacent à son plus proche voisin?
2. A partir du graphe formé des arêtes d'une triangulation de Delaunay d'un ensemble V de points, peut-on trouver un arbre couvrant minimal de V?
3. Si oui, proposer un algorithme permettant de construire un arbre couvrant minimal de V, à partir d'une triangulation de Delaunay de V.

6) Retour sur l'idée de base de construction d'une triangulation de Delaunay

Proposer un algorithme permettant de construire une triangulation de Delaunay à partir d'un ensemble de sommets V en vous inspirant simplement de l'idée de base et en essayant de garder une construction relevant d'une complexité en taille et temps raisonnable.

Rappel de l'idée de base de la construction à partir d'un ensemble V de points donnés:

- Entrée: V, un ensemble de points
- Sortie: T, triangulation
- Répéter
  - A := un point quelconque de V
  - B := le point de V le plus proche de A
  - C := un point de V tel qu'aucun sommet de V ne se trouve dans le cercle circonscrit au triangle ABC (en dehors des points A,B,C).
  - Ajouter le triangle ABC à la triangulation T
- tant qu'il reste des triangles à créer