Géométrie Discrète

I. Espaces discrèts

Christophe Fiorio

LIRMM
UMR CNRS-UMII

Master Imagina

1. L'espace discret à 2 dimensions

2. Différentes méthodes de discrétisation d'une courbe

L'espace discret à 2 dimensions

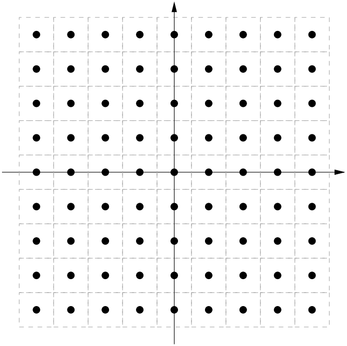
espace discret $\mathbb{Z}^n$

L'*espace discret* de dimension n est le groupe discret $\mathbb{Z}^n$.

espace discret $\mathbb{Z}^n$

L'*espace discret* de dimension n est le groupe discret $\mathbb{Z}^n$.

Les éléments de $\mathbb{Z}^2$ sont appelés des *pixels*. Il est d'usage de les représenter par des carrés d'arête 1 centrés en les points de $\mathbb{Z}^2$



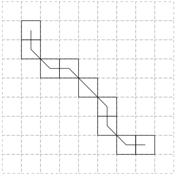
Pour tous $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} \in \mathbb{Z}^2$ et $\forall \mathbf{y} = y_1\mathbf{e_1} + y_2\mathbf{e_2} \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{aligned} d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \\ d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}. \end{aligned}$$

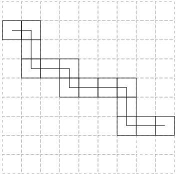
Definition

- d_1 est appelée *grid distance* ou encore *city block distance*
- d_∞ est appelée *lattice-point distance*, *chessboard distance* ou encore *diamond distance*

Une suite finie $\omega = (\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ de pixels est appelée un *chemin k-connexe* ($k \in \{0, 1\}$), si pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\mathbf{x_j}$ et $\mathbf{x_{j+1}}$ sont k-voisins. On dit que le chemin ω relie le pixel $\mathbf{x_1}$ au pixel $\mathbf{x_n}$.

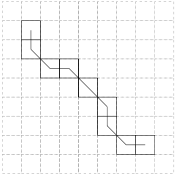


0-connexe

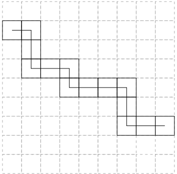


1-connexe

Une suite finie $\omega = (\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ de pixels est appelée un *chemin k-connexe* ($k \in \{0, 1\}$), si pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\mathbf{x_j}$ et $\mathbf{x_{j+1}}$ sont k-voisins. On dit que le chemin ω relie le pixel $\mathbf{x_1}$ au pixel $\mathbf{x_n}$.



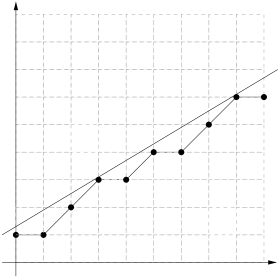
0-connexe



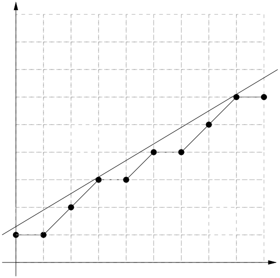
1-connexe

Une ensemble $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ de pixels est dit *k-connexe* ($k \in \{0, 1\}$), si pour tout couple $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$ de pixels dans E, il existe un chemin k-connexe dans E reliant $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.
Un ensemble $\mathcal{C}$ de pixels est une *courbe k-connexe* ($k \in \{0, 1\}$) s'il est k-connexe et si chacun de ses pixels possède exactement 2 k-voisins.

La méthode **OBQ** (*Object Boundary Quantization*), ou méthode des parties entières consiste à ne retenir que les pixels situés au dessous ou sur la courbe à chaque fois que la courbe coupe une arête verticale du maillage carré.



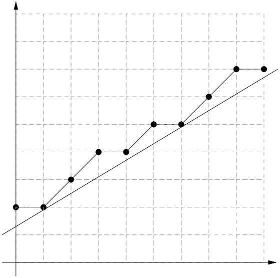
La méthode **OBQ** (*Object Boundary Quantization*), ou méthode des parties entières consiste à ne retenir que les pixels situés au dessous ou sur la courbe à chaque fois que la courbe coupe une arête verticale du maillage carré.



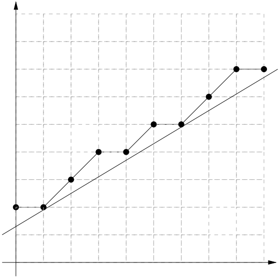
La discrétisation de la droite réelle $\mathcal{D}$ par la méthode OBQ est l'ensemble $\mathfrak{D}$ défini par :

$$\mathfrak{D}(\alpha, \beta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \alpha x_1 + \beta - x_2 < 1\}.$$

La méthode **BBQ** (*Background Boundary Quantization*), ou méthode des parties entières supérieures consiste à ne retenir que les pixels situés au dessus ou sur la courbe à chaque fois que la courbe coupe une arête verticale du maillage carré.



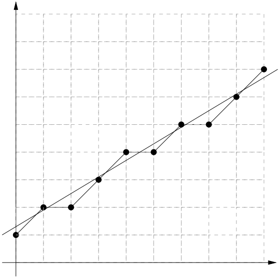
La méthode **BBQ** (*Background Boundary Quantization*), ou méthode des parties entières supérieures consiste à ne retenir que les pixels situés au dessus ou sur la courbe à chaque fois que la courbe coupe une arête verticale du maillage carré.



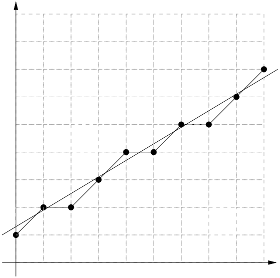
La discrétisation de la droite réelle $\mathcal{D}$ par la méthode BBQ est l'ensemble $\mathfrak{D}$ défini par :

$$\mathfrak{D}(\alpha, \beta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \alpha x_2 - x_1 - \beta < 1\}.$$

La méthode **GIQ** (*Grid Intersect Quantization*) ou *méthode du meilleur ajustement* est celle utilisée par Bresenham, Freeman et Reveillès. Chaque fois que la courbe coupe une arête verticale du maillage, on retient le pixel le plus proche de la courbe.



La méthode **GIQ** (*Grid Intersect Quantization*) ou *méthode du meilleur ajustement* est celle utilisée par Bresenham, Freeman et Reveillès. Chaque fois que la courbe coupe une arête verticale du maillage, on retient le pixel le plus proche de la courbe.



La discrétisation de la droite réelle $\mathcal{D}$ par la méthode BBQ est l'ensemble $\mathfrak{D}$ défini par :

$$\mathfrak{D}(\alpha, \beta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid -1/2 \leq \alpha x_2 - x_1 - \beta < 1/2\}.$$