

TD3 : Arc-Consistance et Forward Checking

Exercice 1. Arc-consistance

On considère le réseau de contraintes $(X=\{x1, x2, x3\}, D, C=\{C1, C2\})$ où :

$$D(x1) = D(x3) = \{0, 1\}$$

$$D(x2) = \{0, 1, 2\}$$

C1 exprime la contrainte $x1 < x3$

C2 exprime la contrainte $x3 < x2$

- 1- Ce réseau est-il arc-consistant ? Justifiez votre réponse. S'il ne l'est pas admet-il une fermeture arc-consistante ? Justifiez votre réponse
- 2- En prenant l'exemple de la 2-coloration d'un graphe réduit à un triangle (une clique de taille 3), montrer que l'arc-consistance ne garantit pas l'existence d'une solution.

Exercice 2. Les 3-reines

On modélise le problème des 3 reines à l'aide d'un CSP binaire $P=(X,D,C)$ avec :

- $X = \{R1, R2, R3\}$ où Ri représente la colonne de la reine de la ligne i
- $D(R1)=D(R2)=D(R3) = \{1,2,3\}$
- C est un ensemble de 7 (ou 9) contraintes binaires exprimant que :
 - 3 contraintes exprimant que toutes les reines sont sur des colonnes différentes ;
 - 2 ou 4 contraintes exprimant que deux reines sur deux lignes consécutives ne doivent pas avoir leurs colonnes consécutives ;
 - 2 contraintes exprimant que les reines des lignes 1 et 3 ne doivent pas avoir leurs colonnes décalées de deux, autrement dit les contraintes sont respectivement : $R1 + 2 \neq R3$ et $R3 + 2 \neq R1$

- 1) Donnez l'ensemble des 7 (ou 9) contraintes binaires en extension.
- 2) Dessinez le graphe des contraintes
- 3) Appliquez l'algorithme de backtrack en choisissant $R1, R2, R3$ pour l'ordre des variables et 1,2,3 pour les valeurs. Vous indiquerez bien à chaque backtrack les contraintes violées. Précisez l'ensemble de solutions obtenues.
- 4) Appliquez l'algorithme de Forward Checking (avec un ordre quelconque sur les variable et les valeurs). Vous indiquerez bien à chaque étape comment les domaines de chaque variable évoluent. Précisez l'ensemble de solutions obtenues.
- 5) Appliquez l'algorithme d'arc-consistance AC3. Vous précisez comment évoluent les domaines des variables à chaque étape et Q l'ensemble de couple (var.,cont.). Le résultat permet-il de calculer l'ensemble des solutions ? Justifiez.

Exercice 3. Résolution de CSP

Soit le réseau $P=(X, D, C)$ où :

- $X = \{T, U, V, W\}$
- $D(T)=\{1,2\}$ $D(U)=D(V)=\{1,2,3\}$ $D(W) = \{1,2,3,4\}$
- $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ avec :

C ₁		C ₂			C ₃		C ₄		C ₅	
T	V	T	U	W	T	W	V	W	T	U
1	1	1	2	2	1	3	2	1	1	2
2	1	1	3	3	2	1	2	3	2	1
2	2	2	1	1	2	3	2	4	2	2
		2	1	4	2	4	1	2		
		2	2	3			3	3		

- 1) Dessinez le graphe (le biparti d'incidence) du réseau de contraintes
- 2) Développez l'arbre représentant l'application de l'algorithme de backtrack en vous arrêtant à la première solution trouvée et en choisissant l'ordre alphabétique pour les variables T , U , V , W et l'ordre croissant pour les valeurs.
- 3) Développez l'arbre représentant l'application de l'algorithme de Forward Checking à la recherche de l'ensemble des solutions en utilisant l'heuristique (dynamique) $dom+deg+alpha$ pour l'ordre des variables et en considérant les valeurs dans l'ordre croissant. Vous indiquerez bien à chaque étape comment les domaines de chaque variable évoluent. On rappelle que dom consiste à sélectionner en priorité la variable ayant le plus petit domaine (dynamique), que deg consiste à sélectionner en priorité la variable impliquées dans le plus grand nombre de contraintes et $alpha$ correspond à l'ordre alphabétique ; $dom+deg+alpha$ consiste à utiliser dom puis deg pour départager et finalement $alpha$ s'il reste des variables de priorité équivalente.
- 4) Donnez la liste des solutions obtenues.
- 5) Calculez la fermeture arc-consistante du réseau P.
- 6) Cette fermeture garantit-elle que les valeurs restant dans les domaines de chaque variable appartiennent forcément à une solution du CSP ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4. Configuration

Une firme automobile élabore un nouveau modèle de voiture fabriquée dans toute l'Europe :

- les portières et le capot sont fabriqués à Lille où le constructeur ne dispose que de peinture rouge, jaune et noire ;
- la carrosserie est faite à Hambourg où l'on a de la peinture blanche, jaune, rouge et noire ;
- les pare-chocs, réalisés à Palerme, sont toujours blancs ;
- la bâche du toit ouvrant, faite à Madrid, ne peut être que blanche, jaune ou rouge ;
- les enjoliveurs sont fabriqués à Athènes où l'on a de la peinture rouge et jaune.

Le constructeur de la voiture a les exigences suivantes :

- la carrosserie doit être de la même couleur que les portières, qui doivent être de la même couleur que le capot ;
- les enjoliveurs, les pare-chocs et la bâche du toit ouvrant doivent être (strictement) plus clairs que la carrosserie (on considère que jaune est plus clair que rouge ; blanc et noir étant les deux extrêmes).

- 1) Représenter ce problème de configuration par un problème de satisfaction de contraintes (CSP) binaires utilisant des contraintes en extension (c'est-à-dire par énumération des couples de valeurs compatibles).
- 2) Représentez par un arbre de recherche l'exécution de l'algorithme de Forward Checking pour trouver toutes les solutions du problème. Vous indiquerez bien sur chaque nœud de l'arbre les noms des variables dont les domaines sont susceptibles d'évoluer suite à l'extension faite de l'assignation courante et leur domaine courant associé. L'ordre d'assignation des variables sera fait en utilisant l'heuristique dom puis en cas d'égalité l'heuristique deg (et finalement l'ordre lexicographique $alpha$ s'il reste des égalités). Les valeurs seront considérées dans l'ordre lexicographique.
- 3) Combien y a-t-il de configurations possibles ?