- Examen d'algorithmique géométrique -

Durée : 2h00

Tous documents interdits.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barème est indicatif.
Toutes vos réponses doivent être soignées et, sauf mention contraire, justifiées.

Tous les ensembles de points du plan considérés sont en position générale : ils ne contiennent pas 3 points alignés ni 4 points cocycliques (i.e. sur un même cercle).

- Exercice 1 - Test d'appartenance à un polygone convexe - 8 pts -

Le but de l'exercice est de fournir un test rapide pour décider si un point appartient à l'intérieur d'un polygone convexe ou non.
On considère $\mathcal{P} = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$ un polygone convexe à n sommets du plan donné par la suite de ses sommets dans le sens direct (avec $p_{n+1} = p_1$). Soit aussi p un point du plan de coordonnées (x, y).

1. *Question de cours :* en notant (x_i, y_i) les coordonnées du point p_i, rappeler le test numérique à effectuer pour savoir si p est à droite ou à gauche du segment $[p_1, p_2]$ orientée de p_1 vers p_2 (votre réponse doit utiliser x, y, x_1, y_1, x_2 et y_2...).
2. En déduire un test fonctionnant en $O(n)$ qui décide si p est à l'intérieur de $\mathcal{P}$ ou non.
3. Ce test fonctionne-t-il encore si le polygone $\mathcal{P}$ n'est pas convexe ? (Si oui, donner une preuve, si non proposer un contre-exemple).
4. Proposer un algorithme qui vérifie que $\mathcal{P}$ est bien un polygone convexe. Quelle est la complexité de votre algorithme ?
5. Donner un exemple de configuration, avec $n = 6$, dans laquelle p est à gauche de tous les segments $[p_i, p_{i+1}]$ orientés de p_i à p_{i+1} sauf un.
6. On suppose que le point p est à droite d'un segment $[p_i, p_j]$ orienté de p_i vers p_j avec $i < j$ (p_i et p_j ne sont pas forcément consécutifs ici). On note $k = \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor$. Montrer qu'en temps $O(1)$, on peut savoir que p est à droite de $[p_i, p_k]$ orienté de p_i à p_k, ou que p est à droite de $[p_k, p_j]$ orienté de p_k à p_j, ou conclure directement que p est à l'intérieur de $\mathcal{P}$.
7. Écrire précisément un algorithme fonctionnant en $O(\log n)$ qui permet de savoir si p est à l'intérieur de $\mathcal{P}$ ou non. On pourra commencer par tester si p est à droite du segment $[p_1, p_n]$ orienté de p_1 à p_n puis se servir de la question précédente. Justifier la complexité de votre algorithme.

- Exercice 2 - α-shape - 4 pts -

Dans tout l'exercice $\mathcal{P}$ désigne un nuage de n points du plan.
On rappelle le lemme suivant, vu en cours.

Lemme 1 *Si il existe un disque contenant p et q, deux point de $\mathcal{P}$, sur son bord et aucun autre point de $\mathcal{P}$ dans son intérieur, alors pq forme une arête de la triangulation de Delaunay de $\mathcal{P}$.*

1. *Question de cours :* pour un réel $\alpha > 0$, rappeler la définition de l'α-shape de $\mathcal{P}$.
2. Donner un exemple d'ensemble $\mathcal{P}$ contenant 4 sommets et dont l'α-shape contient exactement 5 segments pour une valeur de α bien choisie.
3. Si $\alpha < \frac{1}{2} \min\{pq \ : \ p \in \mathcal{P}, \ q \in \mathcal{P}, \ p \neq q\}$, où pq désigne la distance de p à q, que dire de l'α-shape de $\mathcal{P}$. Justifier votre réponse.
4. Justifier qu'une arête de l'*alpha*-shape de $\mathcal{P}$ est une arête de la triangulation de Delaunay de $\mathcal{P}$.
5. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des triangles de Delaunay de l'ensemble $\mathcal{P}$, et pour un triangle T, r_T désigne le rayon du cercle circonscrit de T. Si $\alpha > \max\{r_T \ : \ T \in \mathcal{T}\}$, que dire de l'$\alpha$-shape de $\mathcal{P}$. Justifier votre réponse.

- Exercice 3 - Arbre euclidien minimum - 8 pts -

On rappelle que l'*algorithme de Kruskal* permet de calculer un arbre couvrant de poids total minimal d'un graphe connexe G dont chaque arête possède un poids. Il existe de plus des implémentation de cet algorithme ayant un temps de calcul $O(m \log n)$ où n et m désignent respectivement le nombre de sommets et d'arêtes de G.

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de n points du plan. Un *arbre couvrant euclidien minimum* (*ACEM*) de $\mathcal{P}$ est un arbre connectant tous les points de $\mathcal{P}$ et de longueur totale minimum.

1. Dessiner rapidement un exemple d'ensemble $\mathcal{P}$ de 6 points ayant 4 points sur son enveloppe convexe, la triangulation de Delaunay de $\mathcal{P}$, le diagramme de Voronoï de $\mathcal{P}$ et un ACEM de $\mathcal{P}$. Dans la mesure du possible, essayer d'avoir un exemple convaincant.
2. Expliquer comment calculer un ACEM de $\mathcal{P}$ en temps $O(n^2 \log n)$.
3. Soit $\mathcal{D}$ un disque de diamètre $[AB]$ et C un point de l'intérieur de $\mathcal{D}$. Justifier que $AC < AB$ (on pourra considérer O le centre de $\mathcal{D}$).
4. Montrer que le segment reliant les deux points les plus proches de $\mathcal{P}$ est un segment de la triangulation de Delaunay de $\mathcal{P}$ (on pourra utiliser la question précédente ainsi que le Lemme 1).
5. On veut généraliser la question précédente et prouver que le graphe formé par la triangulation de Delaunay de $\mathcal{P}$ contient un ACEM de $\mathcal{P}$. Pour cela on peut considérer T un ACEM de $\mathcal{P}$ et pq une arête de T et montrer que pq est une arête de la triangulation de Delaunay de $\mathcal{P}$.
6. En sachant qu'il existe un algorithme pour calculer la triangulation de Delaunay en temps $O(n \log n)$, déduire de la question précédente un algorithme en $O(n \log n)$ pour calculer un ACEM de $\mathcal{P}$.