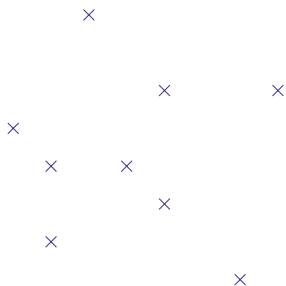


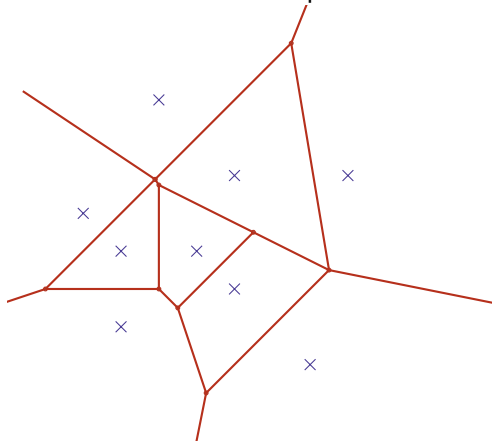
Soit un ensemble \mathcal{P} de n points de \mathbb{R}^d



Cellule de Voronoï : $V(p_i) = \{x : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \forall j\}$

Diagramme de Voronoï \mathcal{P} : $\{\text{ensemble des cellules } V(p_i), p_i \in \mathcal{P}\}$

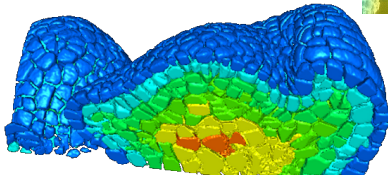
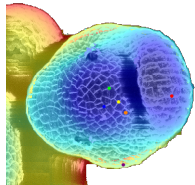
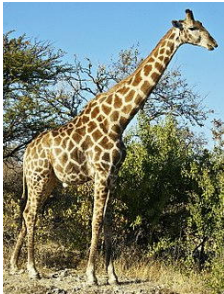
Soit un ensemble \mathcal{P} de n points de \mathbb{R}^d



Cellule de Voronoï : $V(p_i) = \{x : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \forall j\}$

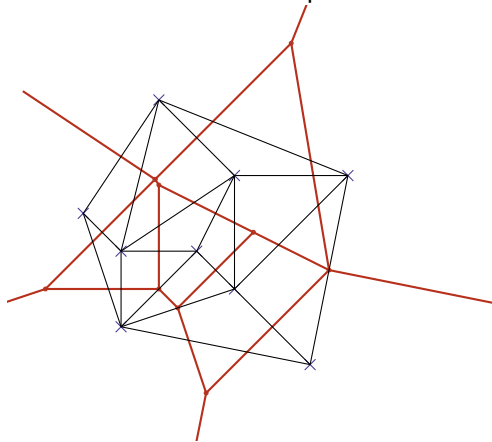
Diagramme de Voronoï \mathcal{P} : $\{\text{ensemble des cellules } V(p_i), p_i \in \mathcal{P}\}$

Soit un ensemble \mathcal{P} de n points de \mathbb{R}^d



Cellule de Voronoï : $V(p_i) = \{x : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \forall j\}$
Diagramme de Voronoï \mathcal{P} : $\{\text{ensemble des cellules } V(p_i), p_i \in \mathcal{P}\}$

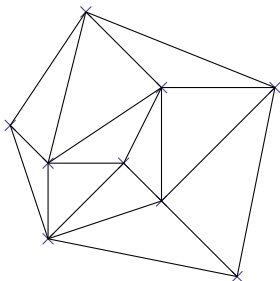
Soit un ensemble \mathcal{P} de n points de \mathbb{R}^d



Cellule de Voronoï : $V(p_i) = \{x : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \forall j\}$

Diagramme de Voronoï \mathcal{P} : $\{\text{ensemble des cellules } V(p_i), p_i \in \mathcal{P}\}$

Soit un ensemble \mathcal{P} de n points de \mathbb{R}^d

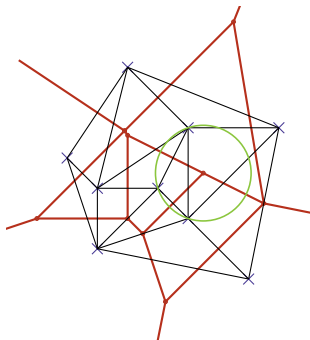


Cellule de Voronoï : $V(p_i) = \{x : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \forall j\}$

Diagramme de Voronoï \mathcal{P} : $\{\text{ensemble des cellules } V(p_i), p_i \in \mathcal{P}\}$

Triangulation de Delaunay : Dual de Voronoï : $Del(\mathcal{P})$ est le *nerf* de $Vor(\mathcal{P})$

Soit un ensemble \mathcal{P} de n points de \mathbb{R}^d



Théorème

Si aucune hypersphère ne contient $d + 2$ points de \mathcal{P} , alors $\text{Del}(\mathcal{P})$ est une triangulation de \mathcal{P} .

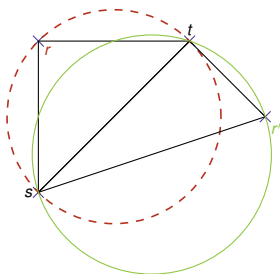
Si chaque simplexe d'une triangulation peut être circonscrit par une boule telle que cette boule ne contienne pas de sommet d'un autre simplexe, cette triangulation est une triangulation de Delaunay.

Soit \mathcal{P} un ensemble de n points du plan, et \mathcal{T} une Triangulation de Delaunay de \mathcal{P}

Définition

Soit $[s, t]$ côté de \mathcal{P} tel que $[s, t] \notin \text{conv}(\mathcal{P})$, $[s, t]$ est dit illégal lorsque les deux triangles (rst) et $(r'st)$ adjacents à $[s, t]$ sont tels que le cercle circonscrit à (rst) (resp. $(r'st)$) contient r' (resp. r) en son intérieur.

Les côtés de \mathcal{T} qui appartiennent à $\text{conv}(\mathcal{P})$ ne sont pas illégaux par définition.



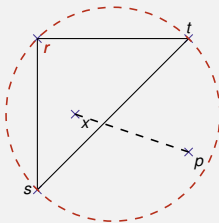
Théorème

La Triangulation de Delaunay de \mathcal{P} est l'unique triangulation de \mathcal{P} sans côté illégal.

Démonstration.

Par définition, la triangulation de Delaunay de \mathcal{P} ne contient aucun côté illégal.

Si \mathcal{T} n'est pas une triangulation de Delaunay, elle admet au moins un triangle (rst) dont le cercle circonscrit contient un point p de \mathcal{P}



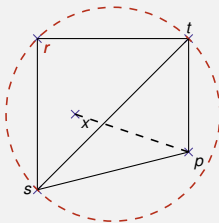
Théorème

La Triangulation de Delaunay de \mathcal{P} est l'unique triangulation de \mathcal{P} sans côté illégal.

Démonstration.

Par définition, la triangulation de Delaunay de \mathcal{P} ne contient aucun côté illégal.

Si \mathcal{T} n'est pas une triangulation de Delaunay, elle admet au moins un triangle (rst) dont le cercle circonscrit contient un point p de \mathcal{P}



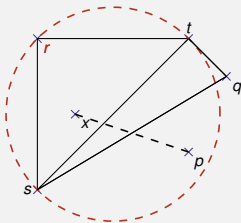
Théorème

La Triangulation de Delaunay de \mathcal{P} est l'unique triangulation de \mathcal{P} sans côté illégal.

Démonstration.

Par définition, la triangulation de Delaunay de \mathcal{P} ne contient aucun côté illégal.

Si \mathcal{T} n'est pas une triangulation de Delaunay, elle admet au moins un triangle (rst) dont le cercle circonscrit contient un point p de \mathcal{P}



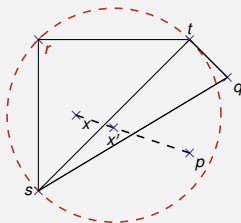
Théorème

La Triangulation de Delaunay de \mathcal{P} est l'unique triangulation de \mathcal{P} sans côté illégal.

Démonstration.

Par définition, la triangulation de Delaunay de \mathcal{P} ne contient aucun côté illégal.

Si \mathcal{T} n'est pas une triangulation de Delaunay, elle admet au moins un triangle (rst) dont le cercle circonscrit contient un point p de \mathcal{P}



propriété (*flip*)

Soit (rst) et $(rstu)$ deux triangles d'une triangulation \mathcal{T} de \mathcal{P} , ensemble de n points du plan. Si $[s, t]$ est une arête illégale, $[r, u]$ n'est pas illégale.

Démonstration.

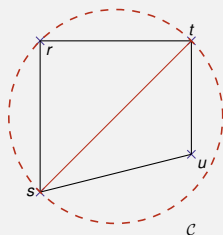
Si (r, s, t, u) n'est pas convexe alors $[s, t]$ ne peut pas être illégale : pour qu'elle soit illégale, r (resp. u) doit être dans le cercle inscrit de (s, t, u) (resp. (r, s, t)), or la somme des angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle est égale à 180° , et un quadrilatère non convexe possède un angle supérieur à 180° .

propriété (*flip*)

Soit (rst) et $(rstu)$ deux triangles d'une triangulation \mathcal{T} de \mathcal{P} , ensemble de n points du plan. Si $[s, t]$ est une arête illégale, $[r, u]$ n'est pas illégale.

Démonstration.

si (r, s, t, u) est convexe, si $[s, t]$ est illégale, alors par symétrie supposons que u appartient au cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle (r, s, t) . Supposons que $[r, u]$ est illégale également, alors $\widehat{rtu} + \widehat{rsu} > 180^\circ$, sinon s ou (resp. t) appartiendrait au cercle circonscrit à (r, t, u) (resp. (r, s, y)). Si $\widehat{rtu} + \widehat{rsu} > 180^\circ$ alors (r, s, t, u) n'est pas inscrit dans un cercle et u n'appartient pas au cercle circonscrit à \mathcal{C} , ce qui est contradictoire à l'hypothèse. $[r, u]$ n'est donc pas illégale si $[s, t]$ est illégale.

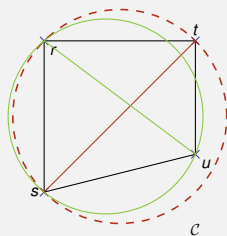


propriété (*flip*)

Soit (rst) et $(rstu)$ deux triangles d'une triangulation \mathcal{T} de \mathcal{P} , ensemble de n points du plan. Si $[s, t]$ est une arête illégale, $[r, u]$ n'est pas illégale.

Démonstration.

si (r, s, t, u) est convexe, si $[s, t]$ est illégale, alors par symétrie supposons que u appartient au cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle (r, s, t) . Supposons que $[r, u]$ est illégale également, alors $\widehat{rtu} + \widehat{rsu} > 180^\circ$, sinon s ou (resp. t) appartiendrait au cercle circonscrit à (r, t, u) (resp. (r, s, y)). Si $\widehat{rtu} + \widehat{rsu} > 180^\circ$ alors (r, s, t, u) n'est pas inscrit dans un cercle et u n'appartient pas au cercle circonscrit à \mathcal{C} , ce qui est contradictoire à l'hypothèse. $[r, u]$ n'est donc pas illégale si $[s, t]$ est illégale.

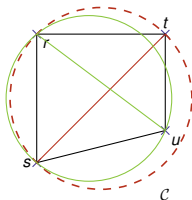


Définition

Pour toute triangulation \mathcal{T} , soit $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ la suite croissante des angles aux sommets de tous les triangles de \mathcal{T} . On note $\mathcal{A}(\mathcal{T}) > \mathcal{A}(\mathcal{T}')$ si $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ est supérieure à $\mathcal{A}(\mathcal{T}')$ dans l'ordre lexicographique. Une triangulation \mathcal{T} de \mathcal{P} est dite *équiangulaire* si, pour toute triangulation $\mathcal{A}(\mathcal{T}')$ de \mathcal{P} on a $\mathcal{A}(\mathcal{T}) > \mathcal{A}(\mathcal{T}')$

Théorème

La triangulation de Delaunay de \mathcal{P} est l'unique triangulation équiangulaire de \mathcal{P}



D'après la propriété du *flip*, et le théorème de la régularité, si dans une triangulation quelconque on remplace un côté illégal par un côté légal, on obtient une triangulation dont la suite d'angles est lexicographiquement strictement supérieure.

Si on remplace successivement les côtés illégaux d'une triangulation, on obtiendra donc une suite de triangulations deux à deux distinctes dont la suite d'angles est lexicographiquement strictement supérieure.

Comme le nombre total de triangulation possible est fini, on obtient après un nombre fini de *flip* une triangulation qui n'a plus de côté illégal : d'après les théorèmes précédent, c'est la Triangulation de Delaunay

Algorithme 1 : Algorithme du flip : calcul d'une triangulation de Delaunay

Calculer une triangulation initiale \mathcal{T} de \mathcal{P} ;

Insérer tous les côtés de la triangulation initiale \mathcal{T} dans une pile P
et les marquer comme appartenant à la pile;

while P non vide **do**

 Dépiler $[s, t]$ et le démarquer;

if $[s, t]$ est illégal **then**

 Soient (r, s, t) et (s, t, u) les deux triangles de part et
 d'autre de $[s, t]$;

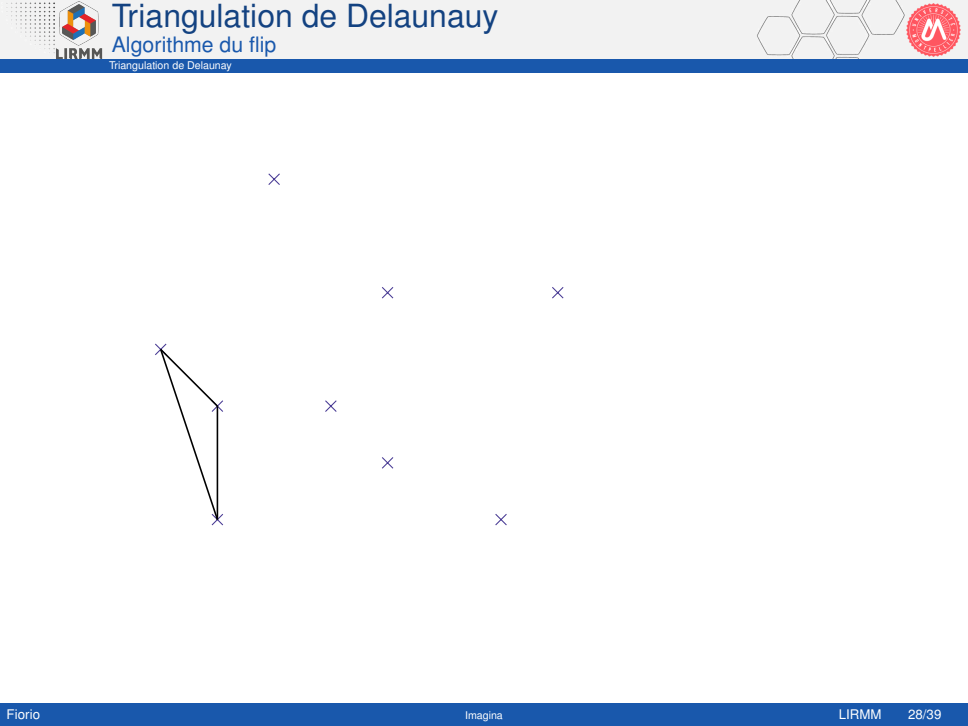
 Remplacer $[s, t]$ par $[r, p]$ dans \mathcal{T} ;

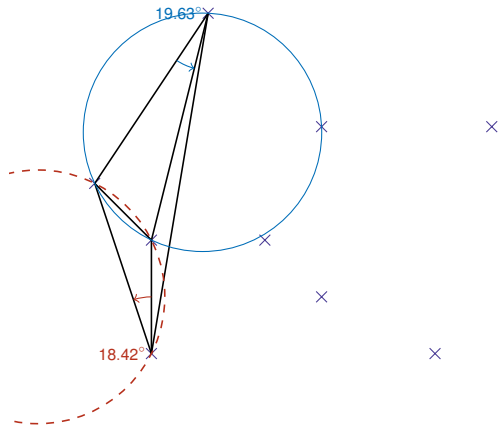
foreach $c \in \{[r, s], [r, t], [p, s], [p, t]\}$ **do**

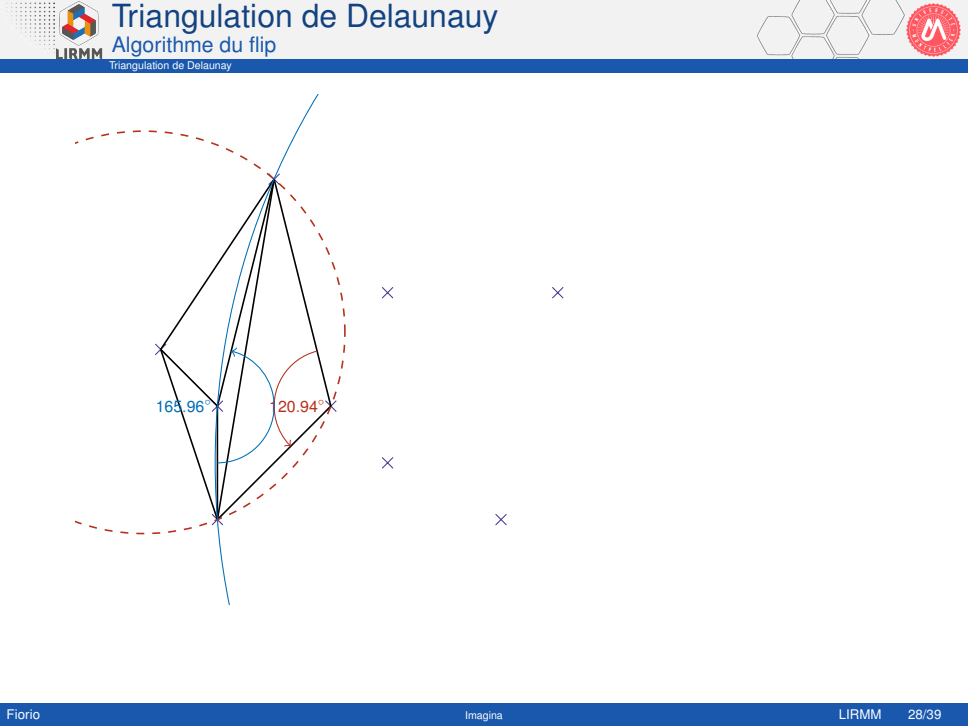
if c n'est pas marqué **then**

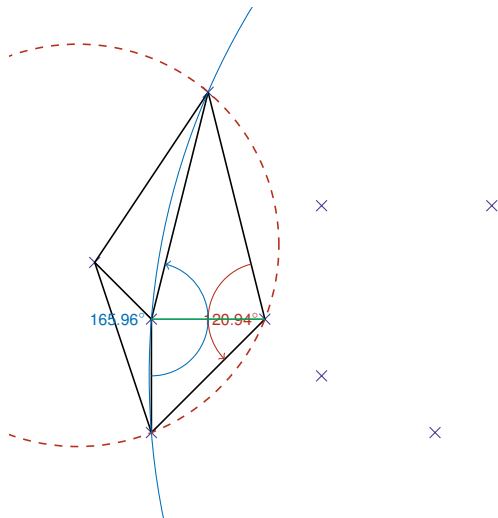
 marquer c ;

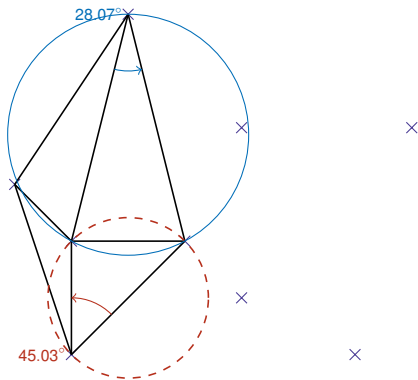
 empiler c dans P ;

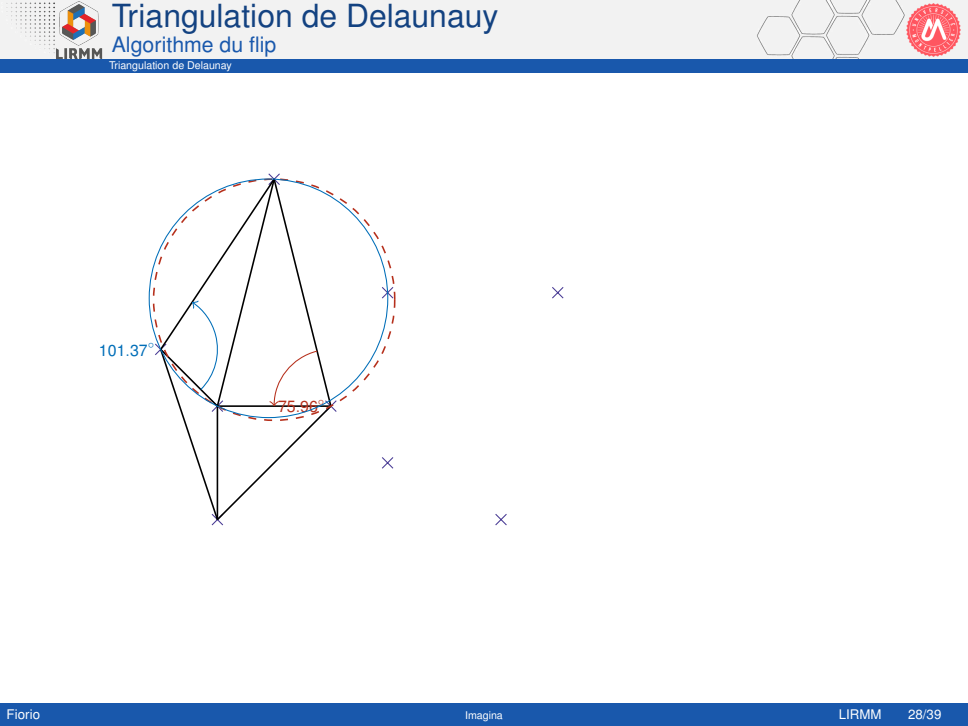


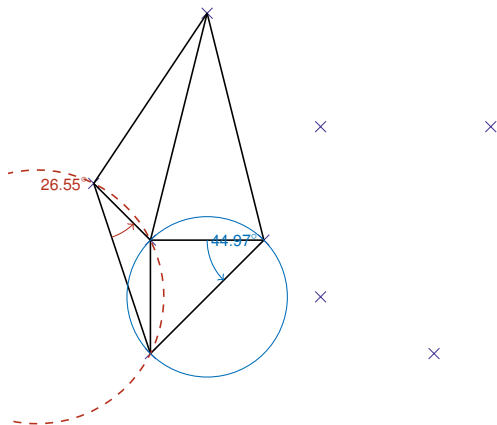















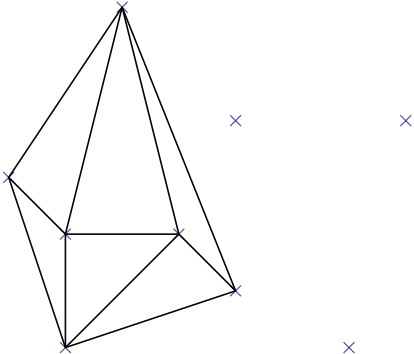


Triangulation de Delaunay

Algorithme du flip

Triangulation de Delaunay

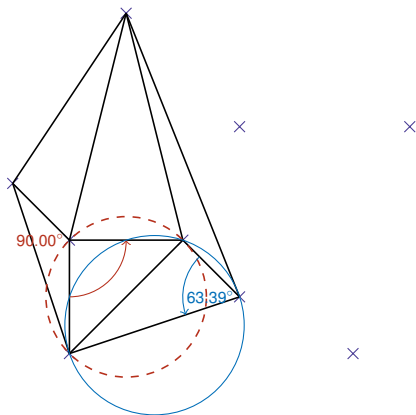


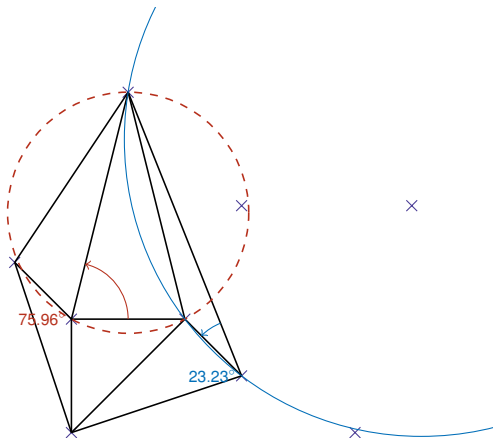



Fiorio

Imagina

LIRMM 28/39







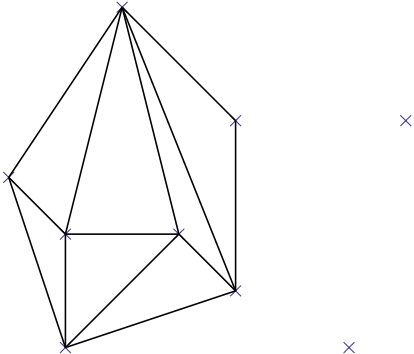


Triangulation de Delaunay

Algorithme du flip

Triangulation de Delaunay

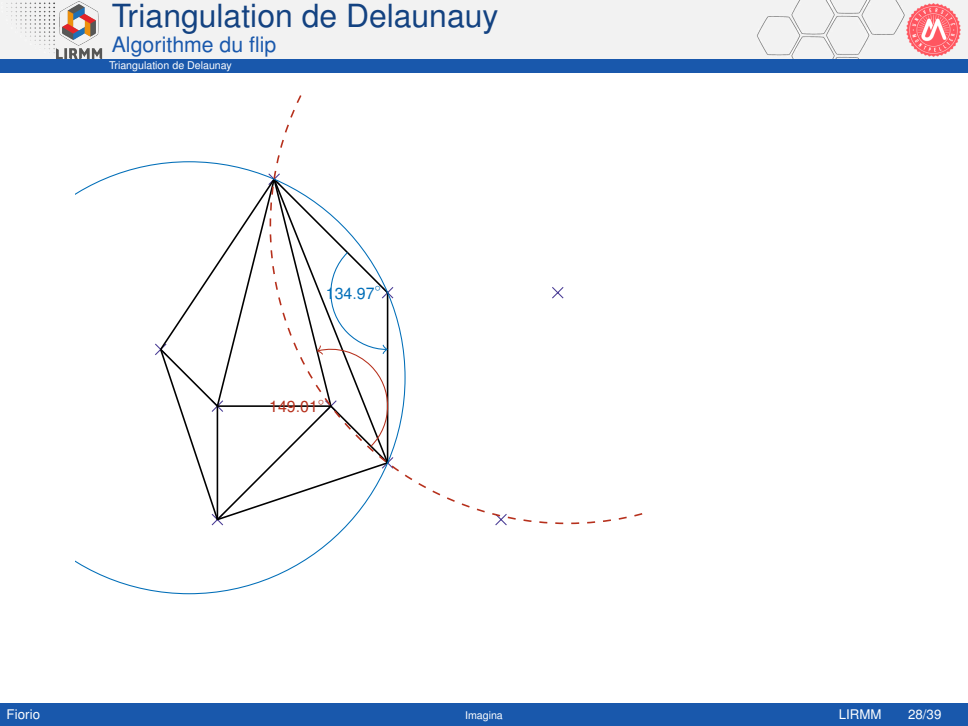


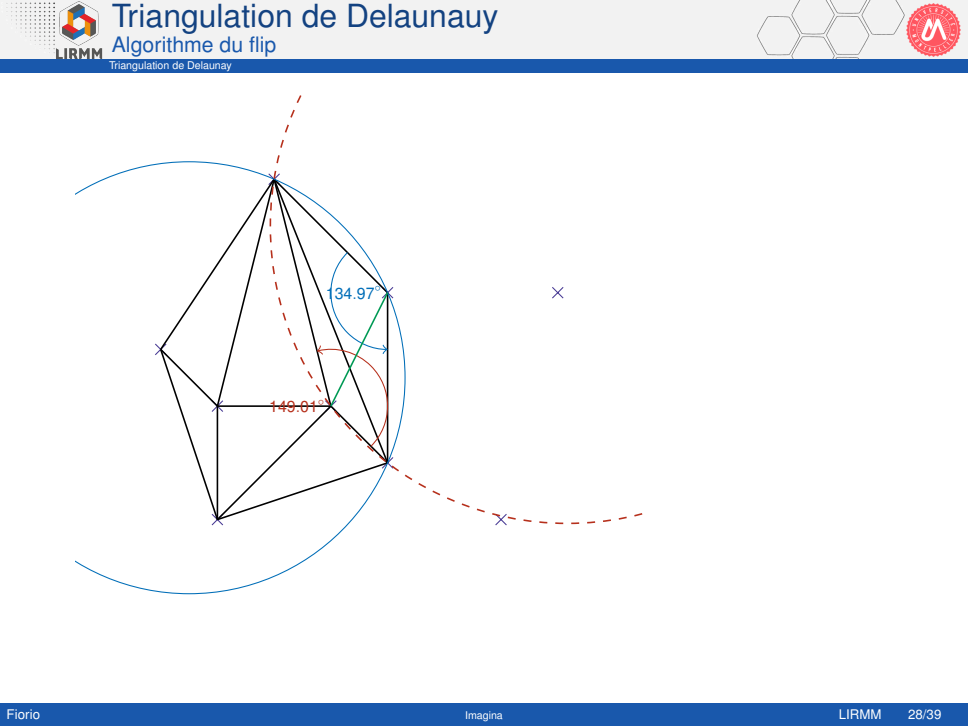


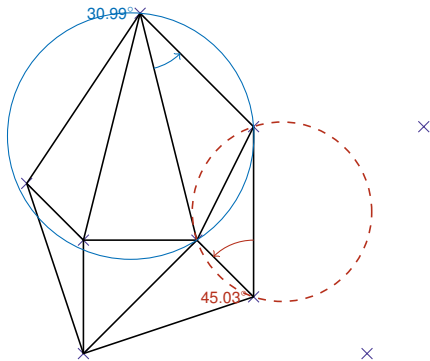
Fiorio

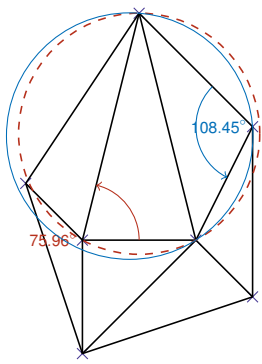
Imagina

LIRMM 28/39



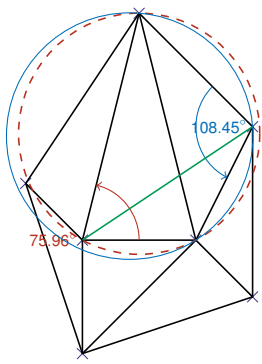






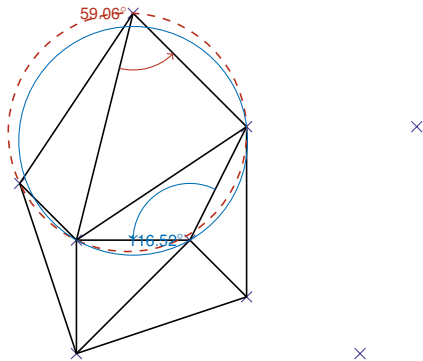
×

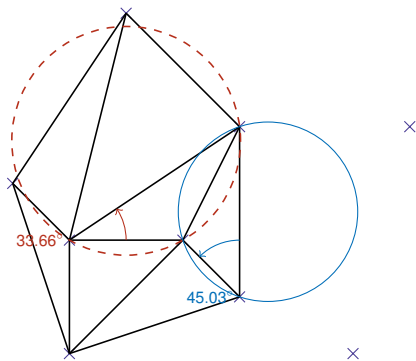
×

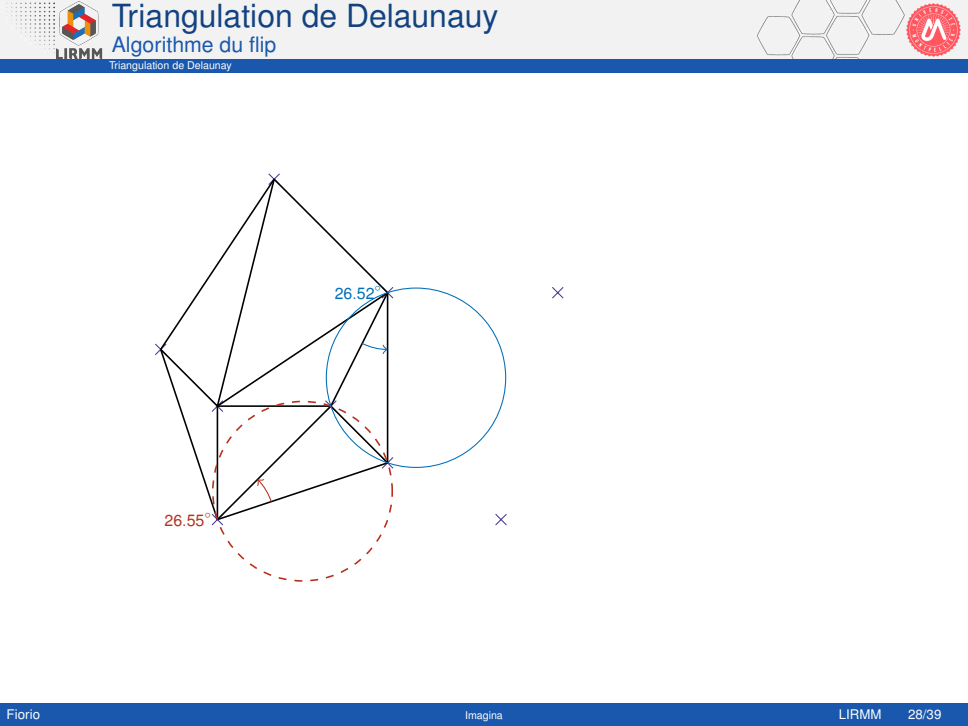



x

x









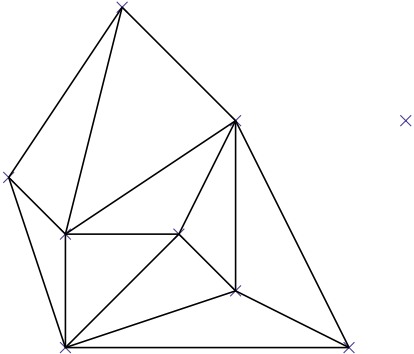


Triangulation de Delaunay

Algorithme du flip

Triangulation de Delaunay

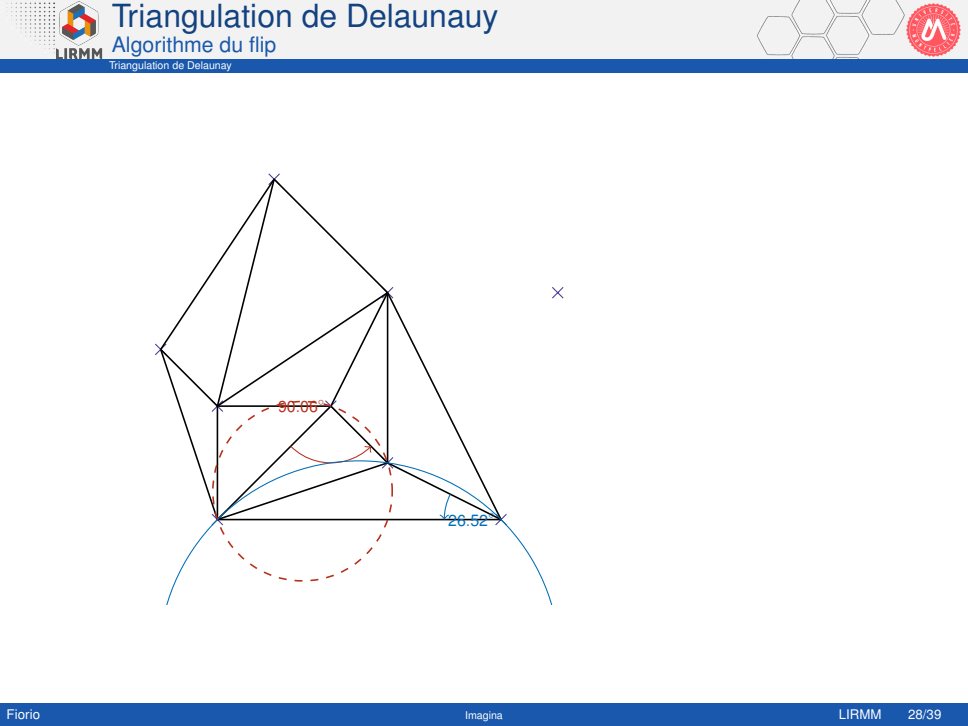


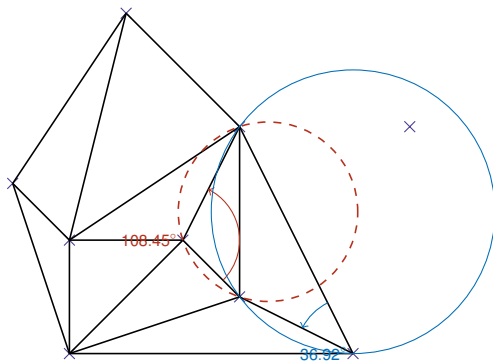


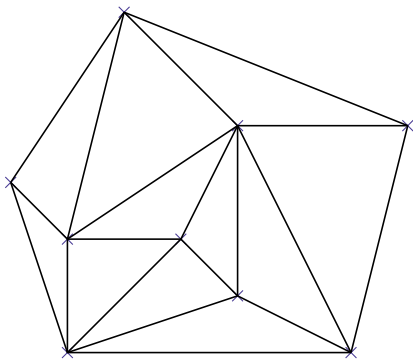
Fiorio

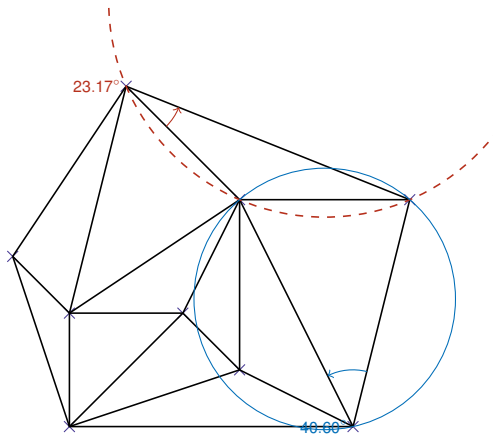
Imagina

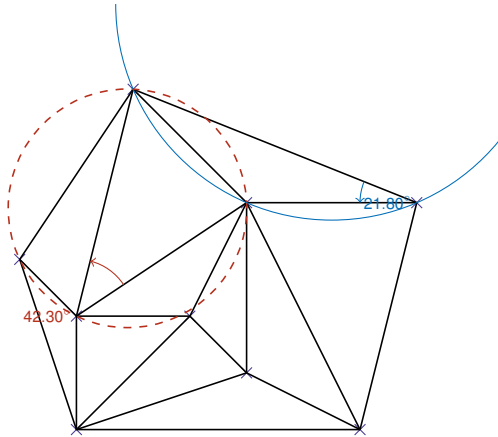
LIRMM 28/39

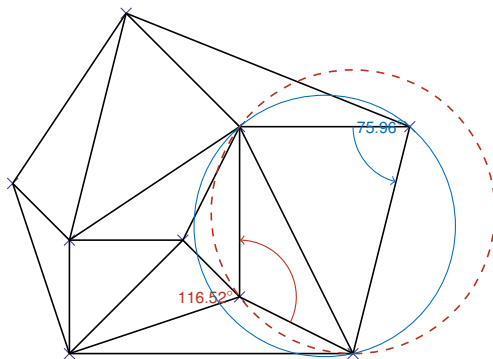


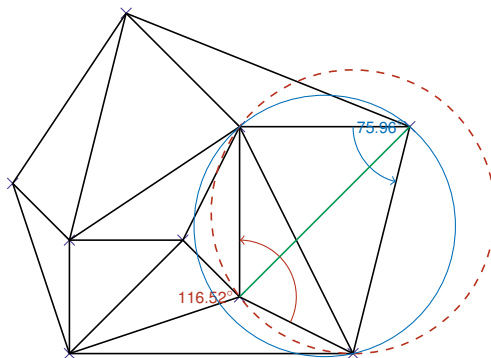


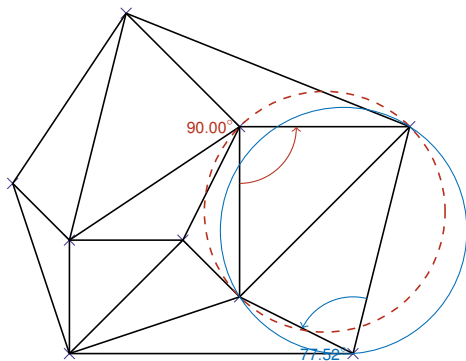


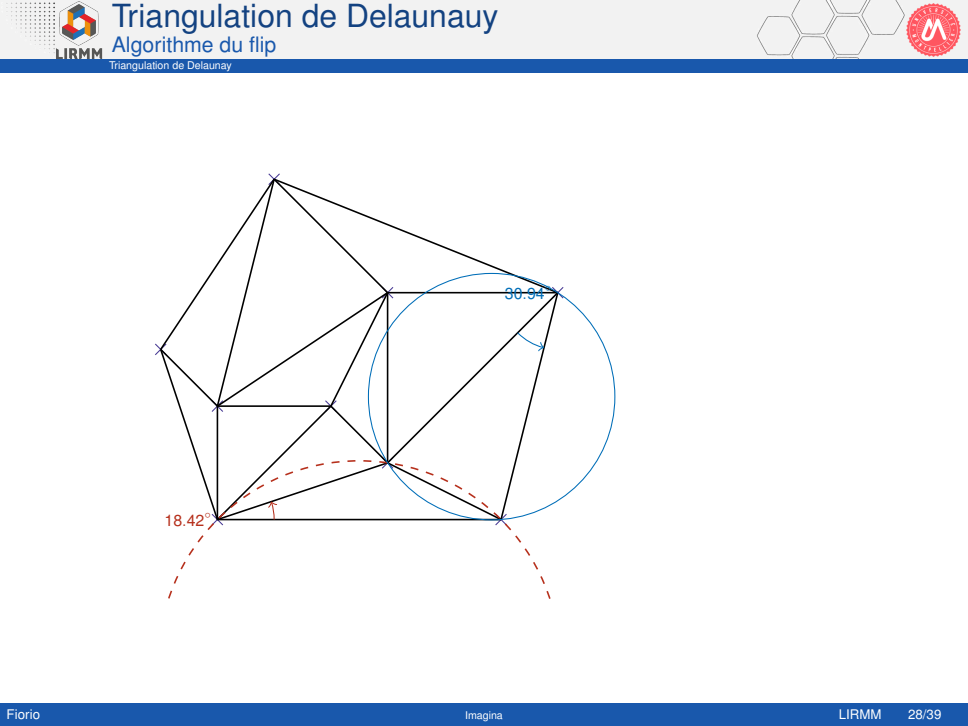


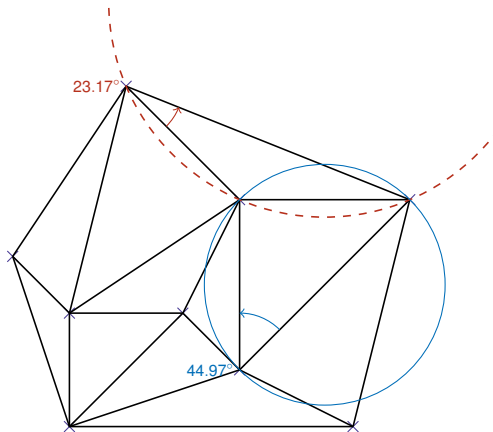


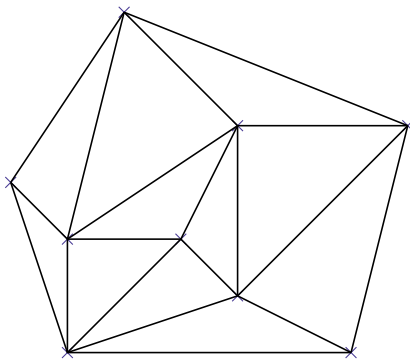




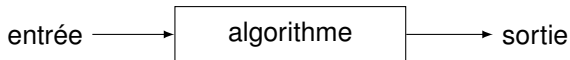


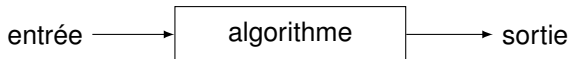




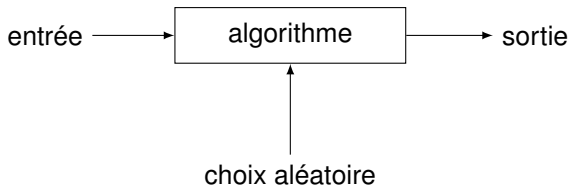


les angles sont plus ouverts et l'espace est partagé de manière plus régulière

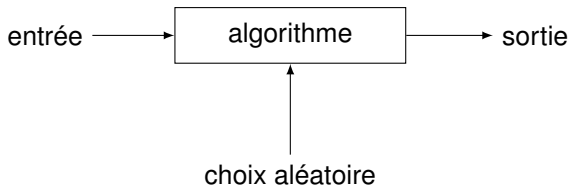




- Modélisation de la distribution des valeurs d'entrée et complexité combinatoire

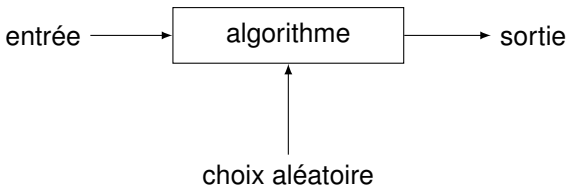


- Modélisation de la distribution des valeurs d'entrée et complexité combinatoire
- Choix aléatoire, et non déterministe, des données d'entrée

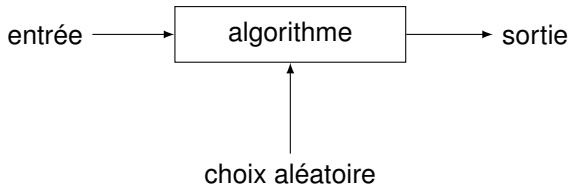


choix aléatoires :

- ordre d'insertion des données d'entrée
- échantillonnage aléatoire
- transformation aléatoire des données (perturbation, projection)

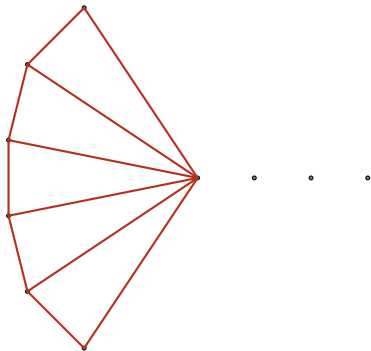


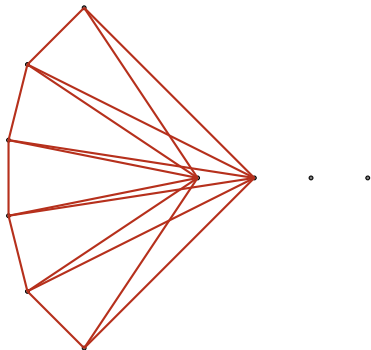
- l'analyse de la complexité peut être faite en moyenne sur les choix aléatoires
- la sortie peut être exacte (algorithme Las Vegas) ou exacte en probabilité (algorithme de Monte Carlo)



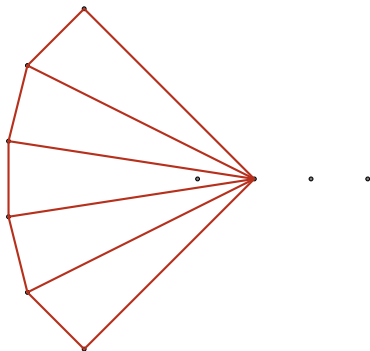
Intérêt :

- Efficacité (théorique et pratique)
- Simplicité
- Universalité

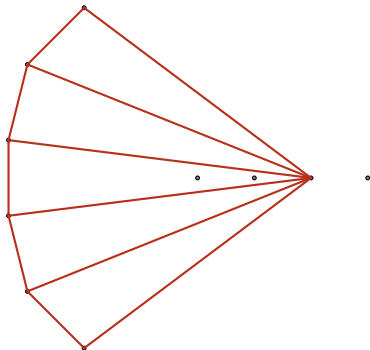




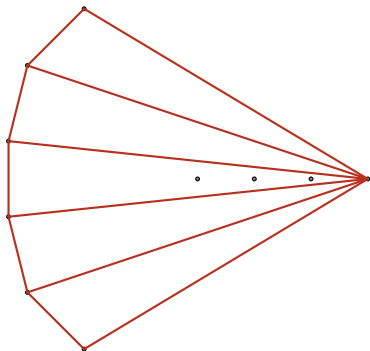
- on change $\frac{n}{2}$ arêtes à chaque fois
- $d = 3$: aucun algorithme incrémental déterministe ne peut faire mieux que $O(n^2)$ dans le pire des cas



- on change $\frac{n}{2}$ arêtes à chaque fois
- $d = 3$: aucun algorithme incrémental déterministe ne peut faire mieux que $O(n^2)$ dans le pire des cas



- on change $\frac{n}{2}$ arêtes à chaque fois
- $d = 3$: aucun algorithme incrémental déterministe ne peut faire mieux que $O(n^2)$ dans le pire des cas



- on change $\frac{n}{2}$ arêtes à chaque fois
- $d = 3$: aucun algorithme incrémental déterministe ne peut faire mieux que $O(n^2)$ dans le pire des cas
- linéaire si l'ordre bien choisi

Si l'ordre d'insertion est aléatoire, en moyenne l'algorithme se comportera comme la complexité combinatoire du problème :

- l'algorithme randomisé a une *complexité moyenne optimale*

$$O\left(n \log n + n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}\right)$$

- triangulation de Delaunay 3d pour 1 million de points : 8,5s

Hyp. : les points p_i de \mathcal{P} sont insérés dans un ordre *aléatoire* ;

$\mathcal{P}_i = \{p_1, \dots, p_i\}$ est un *échantillon aléatoire* de taille i ;

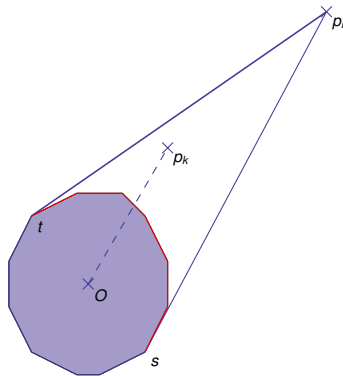
$N(i)$: espérance du nombre de facettes créées à l'étape i .

$$\begin{aligned} N(i) &= \sum_{f \subset \mathcal{P}, |f|=d} \text{proba}(f \in \text{conv}(\mathcal{P}_i)) \times \frac{d}{i} \\ &= \frac{d}{i} E(|\text{conv}(i, \mathcal{P})|) \text{ espérance sur ts les échantillons de } \mathcal{P} \text{ de taille } i \\ &= O\left(i^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1}\right) \text{ th. de la borne sup} \end{aligned}$$

Espérance du nombre total de facettes créées ou détruites

$$N = \sum_{i=1}^n N(i) = O\left(n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}\right) \text{ et } N = O(n) \text{ si } d = 2, 3$$

- *Localisation rapide* ;
- recherche des facettes rouges ;
- création des nouvelles facettes.



Conflit : $p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{i-1}, f \in \text{conv}(\mathcal{P}_{i-1}), p \nmid f \Leftrightarrow [Op] \cap \text{aff}(f) \neq \emptyset$

Graphe de conflit :

$$CG_{i-1} = \{(p, f), p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{i-1} \times f \in \text{conv}(\mathcal{P}_{i-1}) p \nmid f\}$$

$\mathcal{P}_i^+ = \mathcal{P} \cup \{p_j\}$: un sous-ensemble aléatoire de $i + 1$ points de \mathcal{P}

ensemble de tous les d -uplets de points tel qu'il existe un unique point dans cet ensemble en conflit avec cette face :

$$\text{conv}_1(\mathcal{P}_i^+) = \{f \in \mathcal{P}_i^+, |f| = d, \exists \text{ unique } q \in \mathcal{P}_i^+ : f \dagger q\}$$

$N(i, j)$ = espérance du nombre de faces de $\text{conv}(\mathcal{P}_i^+)$ créées à l'étape i et en conflit avec $p_j, j > i$.

$$\begin{aligned}
 N(i, j) &= \sum_{f \subset \mathcal{P}, |f|=d} \text{proba}(f \in \text{conv}(\mathcal{P}_i^+)) \times \frac{d}{i} \times \frac{1}{i+1} \\
 &= \frac{d}{i(i+1)} E(|\text{conv}_1(i+1, \mathcal{P})|)
 \end{aligned}$$

$$R' = R \setminus \{p\}$$

$$f \in conv(R') \quad \begin{array}{l} \text{si } f \in conv_1(R) \text{ et } p \nmid f \\ \text{ou } f \in conv(R) \text{ et } R' \ni \text{ les } d \text{ sommets de } f \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{proba} = \frac{1}{r}) \\ (\text{proba} = \frac{r-d}{r}) \end{array}$$

En notant C_0 pour $conv$ et en prenant l'espérance

$$\begin{aligned} E(|C_0(r-1, R)|) &= \frac{1}{r} |C_1(R)| + \frac{r-d}{r} |C_0(R)| \\ E(|C_0(r-1, R)|) &= \frac{1}{r} E(C_1(r, \mathcal{P})) + \frac{r-d}{r} E(|C_0(r, \mathcal{P})|) \\ E(|C_1(r, \mathcal{P})|) &= dE(|C_0(r, \mathcal{P})|) \\ &\quad - r(E(|C_0(r, \mathcal{P})|) - E(|C_0(r-1, \mathcal{P})|)) \\ &\leq dE(|C_0(r, \mathcal{P})|) \end{aligned}$$

Or $|C_0(r, \mathcal{P})|$ est la taille de l'enveloppe convexe

$N(i, j)$ = espérance du nombre de faces de $\text{conv}_1(\mathcal{P}_i^+)$ créées à l'étape i et en conflit avec $p_j, j > i$

$$\begin{aligned} N(i, j) &= \frac{d}{i(i+1)} E(|C_1(i+1, \mathcal{P})|) \\ &\leq \frac{d^2}{i(i+1)} E(|C_0(i+1, \mathcal{P})|) = O\left(i^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 2}\right) \end{aligned}$$

Espérance du coût total de mise à jour du graphe de conflit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n N(i, j) &= \sum_{i=1}^n i = 1(n-1)O\left(i^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 2}\right) \\ &= O\left(n \log n + n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}\right) \end{aligned}$$

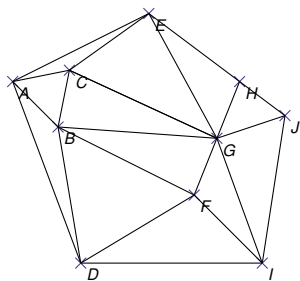
- L'enveloppe convexe de n points de \mathbb{R}^d peut être calculé en temps *optimal* $O\left(n \log n + n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}\right)$ en utilisant un espace mémoire $O\left(n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}\right)$
- les mêmes bornes s'appliquent au calcul de l'*intersection de n demi-espaces* de \mathbb{R}^d
- et au calcul des diagrammes de *Voronoi* et triangulation de *Delaunay* de n points de \mathbb{R}^d
- l'algorithme est *simple et efficace* en pratique
- il peut être *rendu déterministe* au prix de la simplicité [Chazelle 1992]

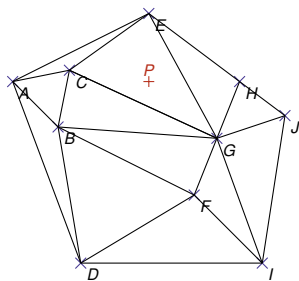
Prendre les points comme ils viennent sans forcément connaître l'ensemble des points à l'avance

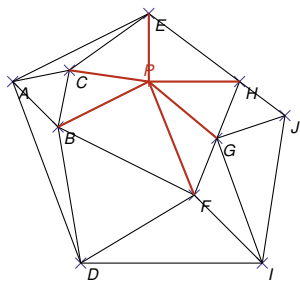
idée : remplacer le graphe de conflit par une structure représentant les constructions au cour du passé

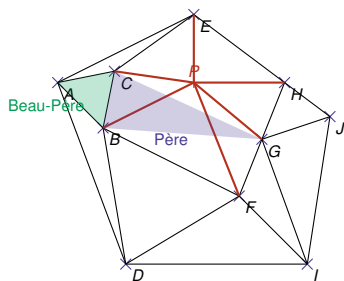
au lieu d'effacer les faces rouges on va les garder dans une structure mémorisant le passé.

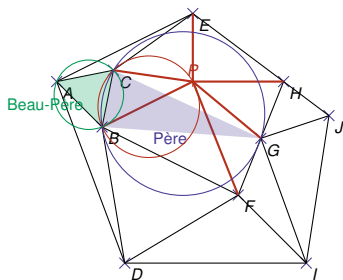
on se servira de cette structure pour retrouver les faces à supprimer (faces rouges)



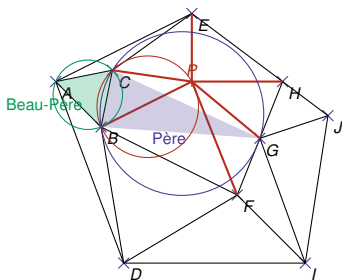








- propriété des faisceaux de sphères : $\mathcal{C}_{BCP} \subset \{\mathcal{C}_{ABC} \cup \mathcal{C}_{BCG}\}$



- propriété des faisceaux de sphères : $\mathcal{C}_{BCP} \subset \{\mathcal{C}_{ABC} \cup \mathcal{C}_{BCG}\}$
- si un point est en conflit avec le disque rouge, il est forcément en conflit avec l'un des deux parents
- en descendant la structure, on pourra repérer les conflits potentiels
- les simplexes à enlever sont des feuilles de l'arbre de Delaunay