

## TD4

### Problème SAT

#### Exercice 1. Coloration de la carte de l'Australie (de CSP à SAT)

---

On considère le problème de coloration de la carte de l'Australie, que l'on avait modélisé sous la forme d'un problème de satisfaction de contraintes (cours et TD 1). Pour rappel, le réseau de contraintes obtenu était le suivant :

- Variables :  $X = \{ WA, NT, SA, Q, NSW, V, T \}$
- Domaines : Pour tout  $x \in X$ ,  $D(x) = \{R, G, B\}$
- Contraintes :  $WA \neq NT, WA \neq SA, NT \neq SA, NT \neq Q, SA \neq Q, SA \neq NSW, SA \neq V, Q \neq NSW, NSW \neq V$

- 1) Modéliser ce problème de coloration sous la forme de SAT (c'est-à-dire construire une instance de SAT dont les modèles – logiques – correspondent aux colorations de la carte). Combien de clauses sont obtenues ?
- 2) On exécute l'algorithme DPLL sur l'instance de SAT construite, en commençant par colorier WA, puis SA, suivant l'ordre sur les couleurs R, G puis B. Faire une trace partielle pour illustrer le comportement de l'algorithme : quels choix d'affectation sont faits ? Lors de la propagation unitaire qui suit un choix, quelles clauses sont supprimées car satisfaites, quelles clauses deviennent unitaires ? Finalement, combien de choix sont effectués au total et quelle est la solution retournée ?

#### Exercice 2. Problème de configuration (de CSP à SAT)

---

Une firme automobile élabore un nouveau modèle de voiture fabriquée dans toute l'Europe :

- les portières et le capot sont fabriqués à Lille où le constructeur ne dispose que de peinture rouge, jaune et noire ;
- la carrosserie est faite à Hambourg où l'on a de la peinture blanche, jaune, rouge et noire ;
- les pare-chocs, réalisés à Palerme, sont toujours blancs ;
- la bâche du toit ouvrant, faite à Madrid, ne peut être que blanche, jaune ou rouge ;
- les enjoliveurs sont fabriqués à Athènes où l'on a de la peinture rouge et jaune.

Le constructeur de la voiture a les exigences suivantes :

- la carrosserie doit être de la même couleur que les portières, qui doivent être de la même couleur que le capot ;
  - les enjoliveurs, les pare-chocs et la bâche du toit ouvrant doivent être (strictement) plus clairs que la carrosserie (on considère que jaune est plus clair que rouge ; blanc et noir étant les deux extrêmes).
- 1) Représenter ce problème de configuration par un réseau de contraintes basé sur des contraintes binaires décrites en extension (c'est-à-dire par énumération des couples de valeurs compatibles). Pour diminuer le nombre de tuples dans les contraintes, on ne considérera dans l'extension d'une contrainte que les valeurs qui appartiennent aux domaines des variables concernées.
  - 2) Représenter ce problème par une instance de SAT en utilisant la transformation générique de CSP à SAT vue en cours.

### Exercice 3. Algorithme DPLL

---

- 1) Transformer la formule suivante en une instance de SAT.

$$(A \leftrightarrow (C \vee E)) \wedge ((B \wedge F) \rightarrow \neg C) \wedge (E \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow F) \wedge (C \rightarrow B)$$

- 2) Résoudre cette instance de SAT avec DPLL en sélectionnant d'abord la variable E, puis la variable C, et en commençant par affecter les variables à vrai. Si on considère la version de DPLL qui retourne une solution, que retourne-t-elle ? Combien y-a t-il de modèles de l'ensemble de clauses ?
- 3) Résoudre cette instance de SAT avec DPLL en utilisant l'heuristique MOMS (littéral qui apparaît le plus souvent dans des clauses de taille minimale).

### Exercice 4. Réduction de SAT à CSP

---

Illustrer la réduction de SAT à CSP vue en cours sur l'instance SAT ci-dessous :

$$(\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg B \vee E) \wedge (\neg C \vee \neg E) \wedge (A \vee E)$$

### Exercice 5. Réunion d'amis

---

Quelqu'un organise une réunion d'amis mais ne souhaite pas inviter trop de monde. Il est sûr d'inviter Benoît et Cloé (on dira que ce sont des faits). En outre, voici les règles qu'il pense devoir absolument respecter pour ne pas commettre d'impair.

**R1** : si Benoît et Djamel et Emma alors Félix

**R2** : si Gaëlle et Djamel alors Amandine

**R3** : si Cloé et Félix alors Amandine

**R4** : Si Benoît alors Xéna

**R5** : si Xéna et Amandine alors Habiba

**R6** : si Cloé alors Djamel

**R7** : si Xéna et Cloé alors Amandine

**R8** : si Xéna et Benoît alors Djamel

Prenons la question de savoir si Habiba doit être invité, c'est-à-dire en termes logiques : le symbole Habiba est-il conséquence de la base de connaissances composée des faits et des règles ?

- 1) Formuler cette question en termes de problème SAT ou UNSAT.
- 2) Exécuter DPLL sur l'instance de SAT correspondante. L'algorithme a-t-il dû faire des choix ?