Géométrie Discrète

II. Droites discrètes

Christophe Fiorio

LIRMM
UMR CNRS-UMII

Master Imagina

Définition : Droite de Bernoulli (72)

suite des points d’abscisse entière n et d’ordonnée $(\lfloor \alpha n + \rho \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$,
où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur à $x \in \mathbb{R}$

Définition : Droite de Bernoulli (72)

suite des points d'abscisse entière n et d'ordonnée $(\lfloor \alpha n + \rho \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$,
où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur à $x \in \mathbb{R}$

Conjecture

La suite $(\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$ est périodique si et seulement si α est rationnel

Définition : Droite de Bernoulli (72)

suite des points d'abscisse entière n et d'ordonnée $(\lfloor \alpha n + \rho \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$,
où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur à $x \in \mathbb{R}$

Conjecture

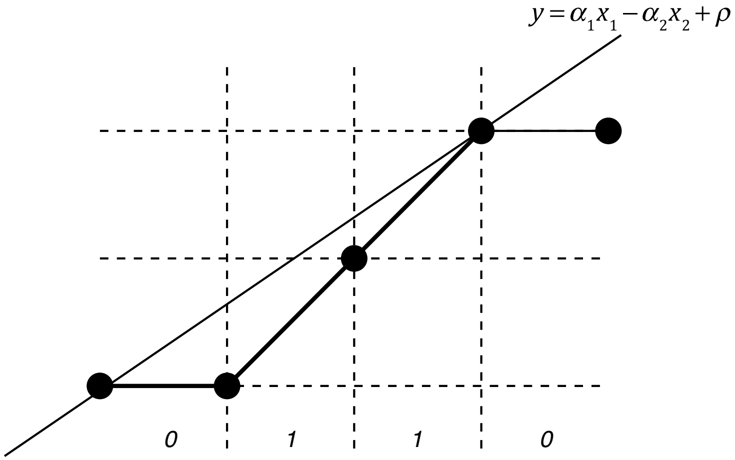
La suite $(\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$ est périodique si et seulement si α est rationnel

Théorème (A. Markoff en 1982)

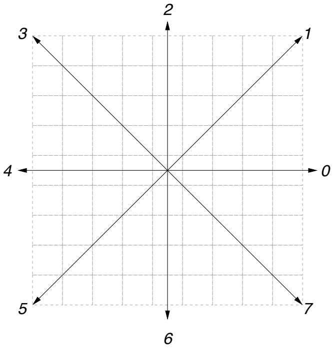
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La suite $(\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$ est périodique si et seulement si α est rationnel.

Approximation de la droite d'équation $y = \alpha x + \rho$

J. Bernoulli (72)



En 1970, H. Freeman introduit une méthode pour coder une courbe 8-connexe dans $\mathbb{Z}^2$:
À chacune des directions , il associe un entier compris entre 0 et 7 selon le schéma suivant :



Segment discret de Freeman

Soit $\alpha = (\alpha_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ un arc discret fini. Alors α est un segment discret, si :

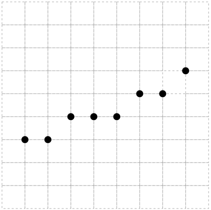
1. son codage ne contient que deux codes différents et ceux-ci ne diffèrent que de 1 modulo 8 ;
2. un de ces deux codes est toujours isolé dans le codage ;
3. ce code isolé apparaît dans le codage le plus uniformément possible.

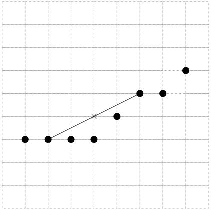
Propriété de la corde de A. Rosenfeld (1974)

Definition

Un ensemble de pixels $\mathcal{E}$ vérifie la propriété de la corde si :

$$\forall (P, Q) \in \mathcal{E}^2, \forall M \in [P, Q], \exists N \in \mathcal{E}, d_\infty(M, N) < 1.$$

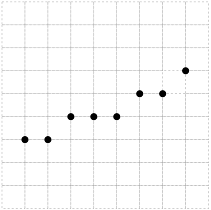


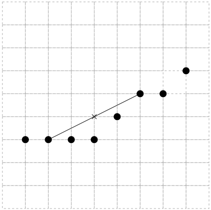


Definition

Un ensemble de pixels $\mathcal{E}$ vérifie la propriété de la corde si :

$$\forall (P, Q) \in \mathcal{E}^2, \forall M \in [P, Q], \exists N \in \mathcal{E}, d_\infty(M, N) < 1.$$





Theorem

Un ensemble fini de pixels 0*-connexe est un morceau de droite discrète si et seulement s'il vérifie la propriété de la corde.*

Uniformité ou Régularité de Hung (1985)

Definition

Un ensemble de pixels $\mathcal{E}$ dans le premier octant est dit *régulier* si :

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{E}^4, |x_A - x_B| = |x_C - x_D| \implies ||y_A - y_B| - |y_D - y_C|| \leq 1.$$

Uniformité ou Régularité de Hung (1985)

Definition

Un ensemble de pixels $\mathcal{E}$ dans le premier octant est dit *régulier* si :

$$\forall(A, B, C, D) \in \mathcal{E}^4, |x_A - x_B| = |x_C - x_D| \implies ||y_A - y_B| - |y_D - y_C|| \leq 1.$$

Theorem

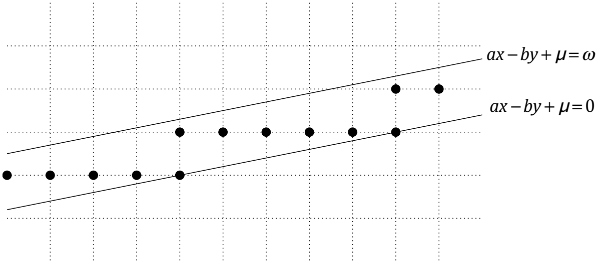
Un ensemble fini de pixels 0*-connexe est un morceau de droite discrète si et seulement s'il est régulier.*

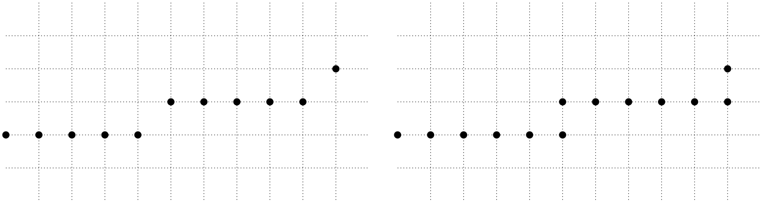
Definition

Une droite discrète de paramètres (a, b, μ) et d'épaisseur arithmétique ω (avec a, b, μ et ω dans $\mathbb{Z}$ et a et b premiers entre eux), notée $\mathfrak{D}(a, b, \mu, w)$, est définie comme l'ensemble des points entiers (x, y) vérifiant la double inégalité : $0 \leq ax - by + \mu < w$.

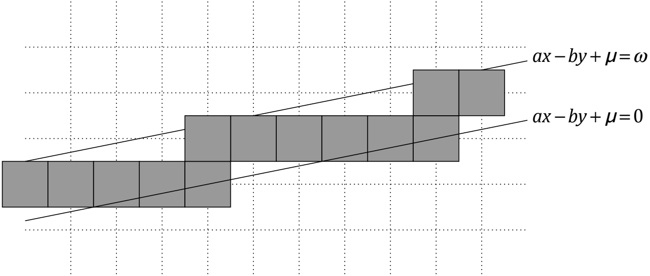
Definition

Une droite discrète de paramètres (a, b, μ) et d'épaisseur arithmétique ω (avec a, b, μ et ω dans $\mathbb{Z}$ et a et b premiers entre eux), notée $\mathfrak{D}(a, b, \mu, w)$, est définie comme l'ensemble des points entiers (x, y) vérifiant la double inégalité : $0 \leq ax - by + \mu < w$.





Il est usuel de représenter un point de $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$, appelé *pixel*, par un carré unité fermé et centré en $\mathbf{x}$



Theorem

Les droites naïves sont les droites les plus fines à être connexes. Autrement dit, pour tout $\mathbf{(a, b)} \in \mathbb{R}^2$*, pour tout* $\mu \in \mathbb{R}$ *et tout* $w \in \mathbb{R}_+$ *:*

$$\mathfrak{D}(\mathbf{v(a, b)}, \mu, w) \text{ est connexe } \iff w \geq \|\mathbf{(a, b)}\|_\infty.$$

ou

$$\mathfrak{D}(\mathbf{v(a, b)}, \mu, w) \text{ est connexe } \iff w \geq max(|a|, |b|).$$

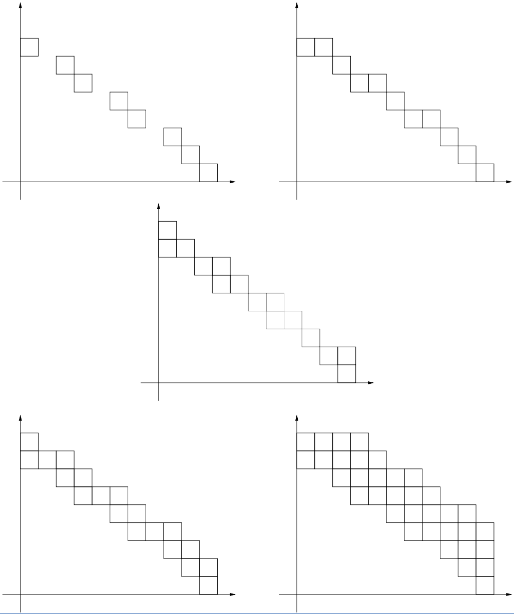
Théorème (Réveillès (1991))

Soit $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(a, b, \mu, \omega)$ une droite discrète.

1. Si $\omega = \|\mathbf{(a, b)}\|_\infty$, alors la droite discrète $\mathfrak{D}(a, b, \mu, \omega)$ est 0-connexe.
2. Si $\omega < \|\mathbf{(a, b)}\|_\infty$, alors la droite discrète $\mathfrak{D}(a, b, \mu, \omega)$ est déconnectée.
3. Si $\omega = \|\mathbf{(a, b)}\|_1$, alors la droite discrète $\mathfrak{D}(a, b, \mu, \omega)$ est 1-connexe.
4. Si $\|\mathbf{(a, b)v}\|_\infty < \omega < \|\mathbf{(a, b)}\|_1$, alors la droite discrète $\mathfrak{D}(a, b, \mu, \omega)$ est $\star$-connexe : elle possède des 1-connexités et des 0-connexités.

Exemples de droites arithmétiques à différentes épaisseurs

Les droites arithmétiques de vecteur normal $7\mathbf{e_1} + 10\mathbf{e_2}$



Fonctionnalité des droites naïves

Soit $\pi : \mathfrak{D}\left(a, b, \mu, \|\mathbf{v}\|_\infty\right) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{cccll} \pi & : & \mathfrak{D}\left(a, b, \mu, \|\mathbf{v(a,b)}\|_\infty\right) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) & \mapsto & x_1, \end{array}$$

π est une bijection.

Géométriquement, cette propriété signifie que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la droite arithmétique naïve $\mathfrak{D}\left(a, b, \mu, w\right)$, où $0 \leq a \leq b$, possède exactement un et un seul point d'abscisse k.

Fonctionnalité des droites naïves

Soit $\pi : \mathfrak{D}\left(a, b, \mu, \|\mathbf{v}\|_\infty\right) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rccl} \pi & : & \mathfrak{D}\left(a, b, \mu, \|\mathbf{v(a,b)}\|_\infty\right) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) & \mapsto & x_1, \end{array}$$

π est une bijection.

Géométriquement, cette propriété signifie que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la droite arithmétique naïve $\mathfrak{D}\left(a, b, \mu, w\right)$, où $0 \leq a \leq b$, possède exactement un et un seul point d'abscisse k.

Fonctionnalité Berthe, Fiorio, Jamet (2005)

Soit $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(a, b, \mu, \omega)$ une droite discrète. Pour tout $(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}) \in \mathbb{R}^2$, notons $\pi_{(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2})}$ la projection orthogonale suivant le vecteur $(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2})$ sur la droite d'équation $\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 = 0$ et $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} = \pi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{Z}^2)$. Soit $(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}) \in \mathbb{Z}^2$ avec $\mathrm{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$.
La fonction $\pi_{\boldsymbol{\alpha}} : \mathfrak{D} \longrightarrow \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ est une bijection si et seulement si $|(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}), (\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \omega$.