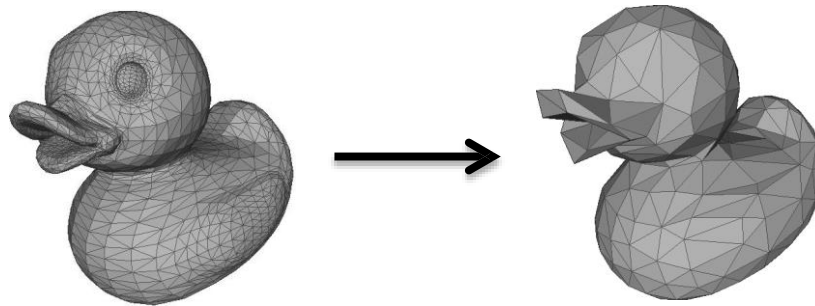
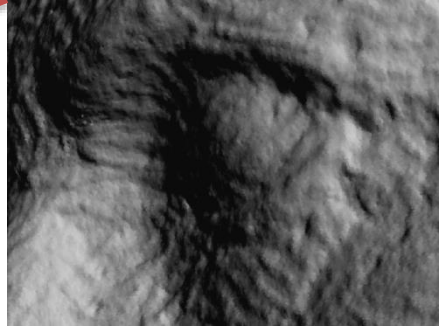


Informatique Graphique

Simplification de Surface

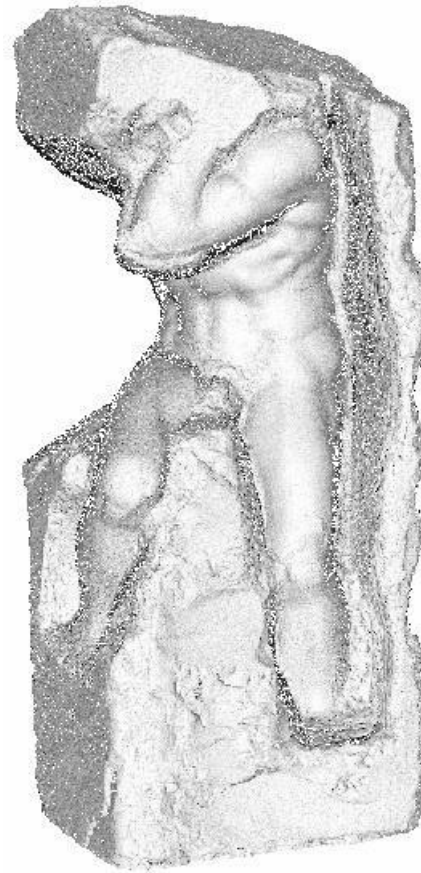


Contexte



Modèle St Mattieu

360 000 000 de triangles



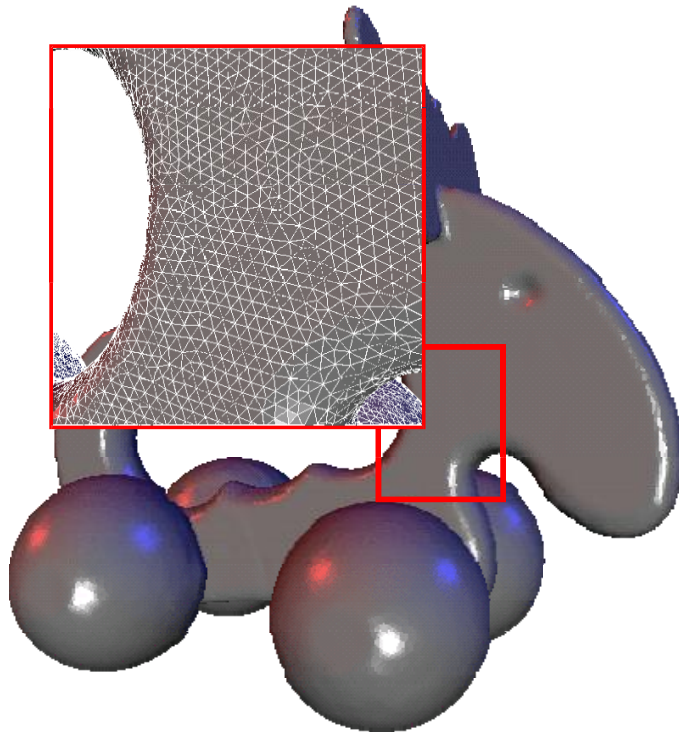
Modèle Atlas

500 000 000 de triangles

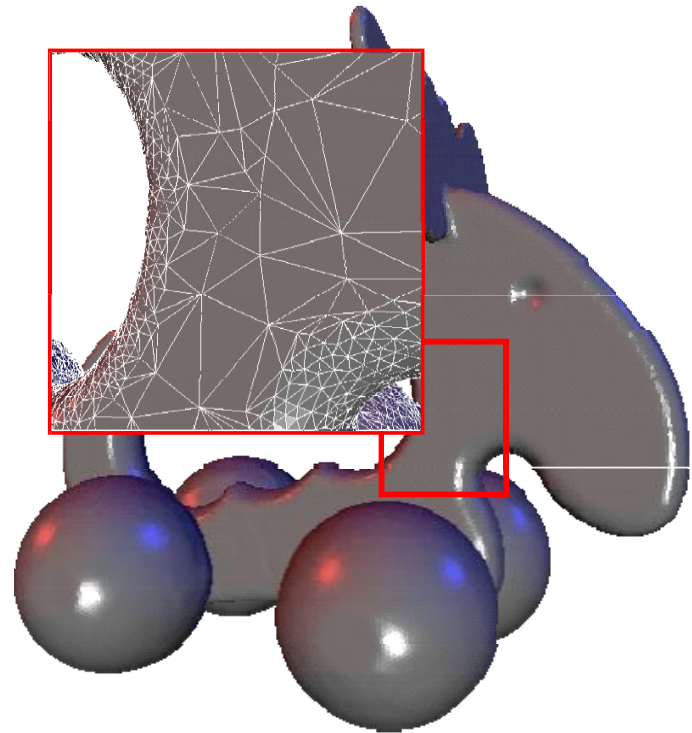
TROP pour
beaucoup
d'applications

Applications

- Scans sur-échantillonnés



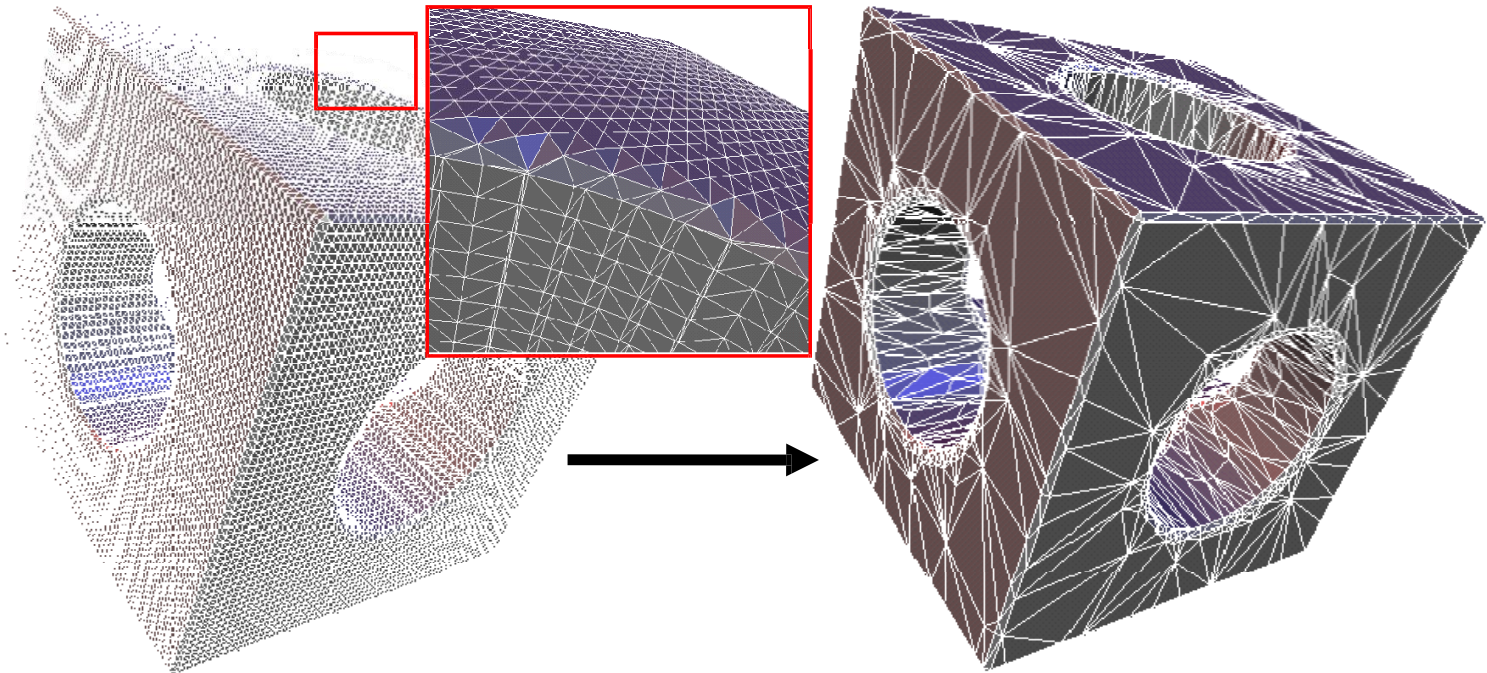
~150k triangles



~80k triangles

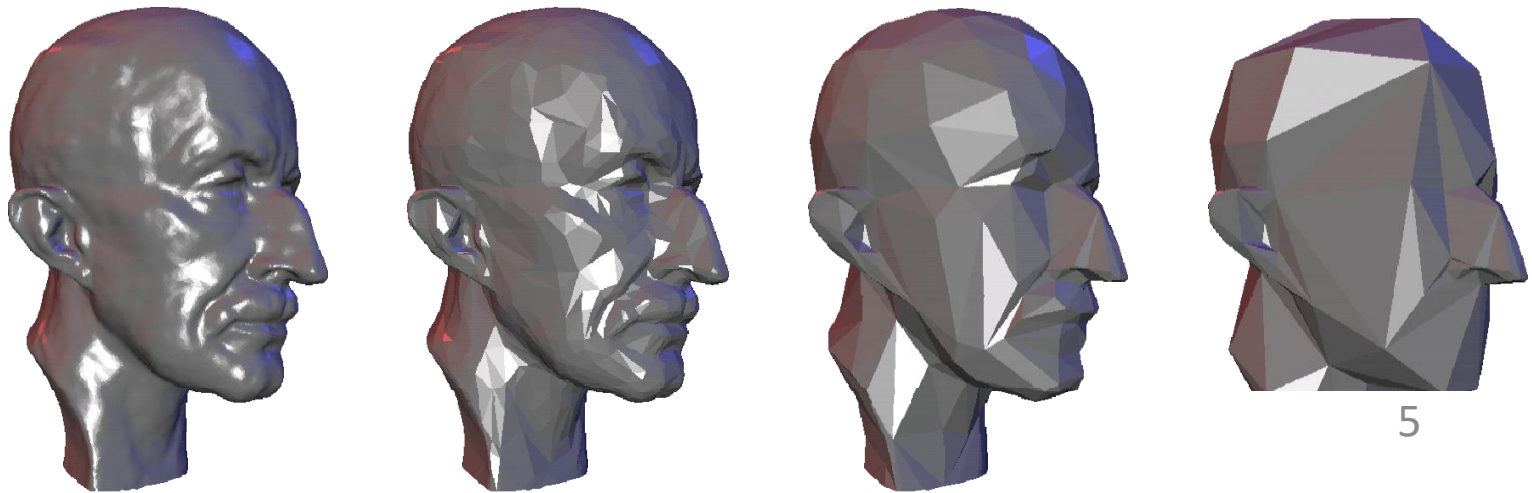
Applications

- Overtessellation: E.g. extraction d'iso-surface



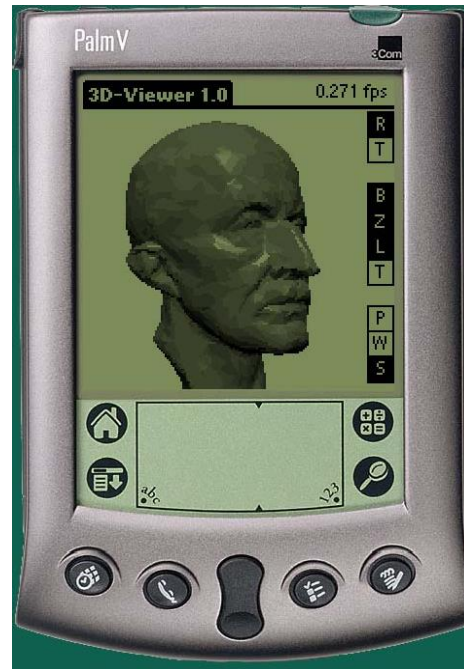
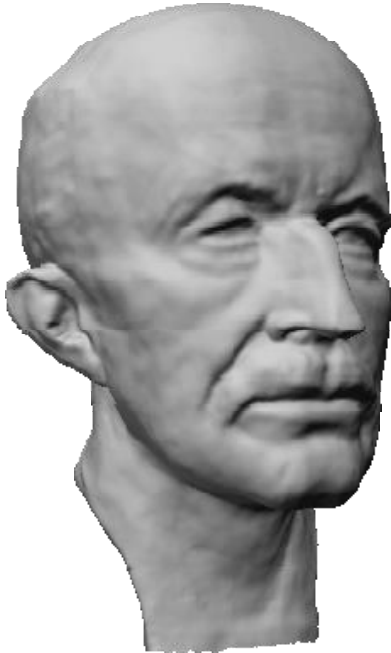
Applications

- Hiérarchies multi-résolution pour
 - Le traitement efficace de la géométrie
 - Rendu à différents niveaux de détails (level-of-detail LOD)

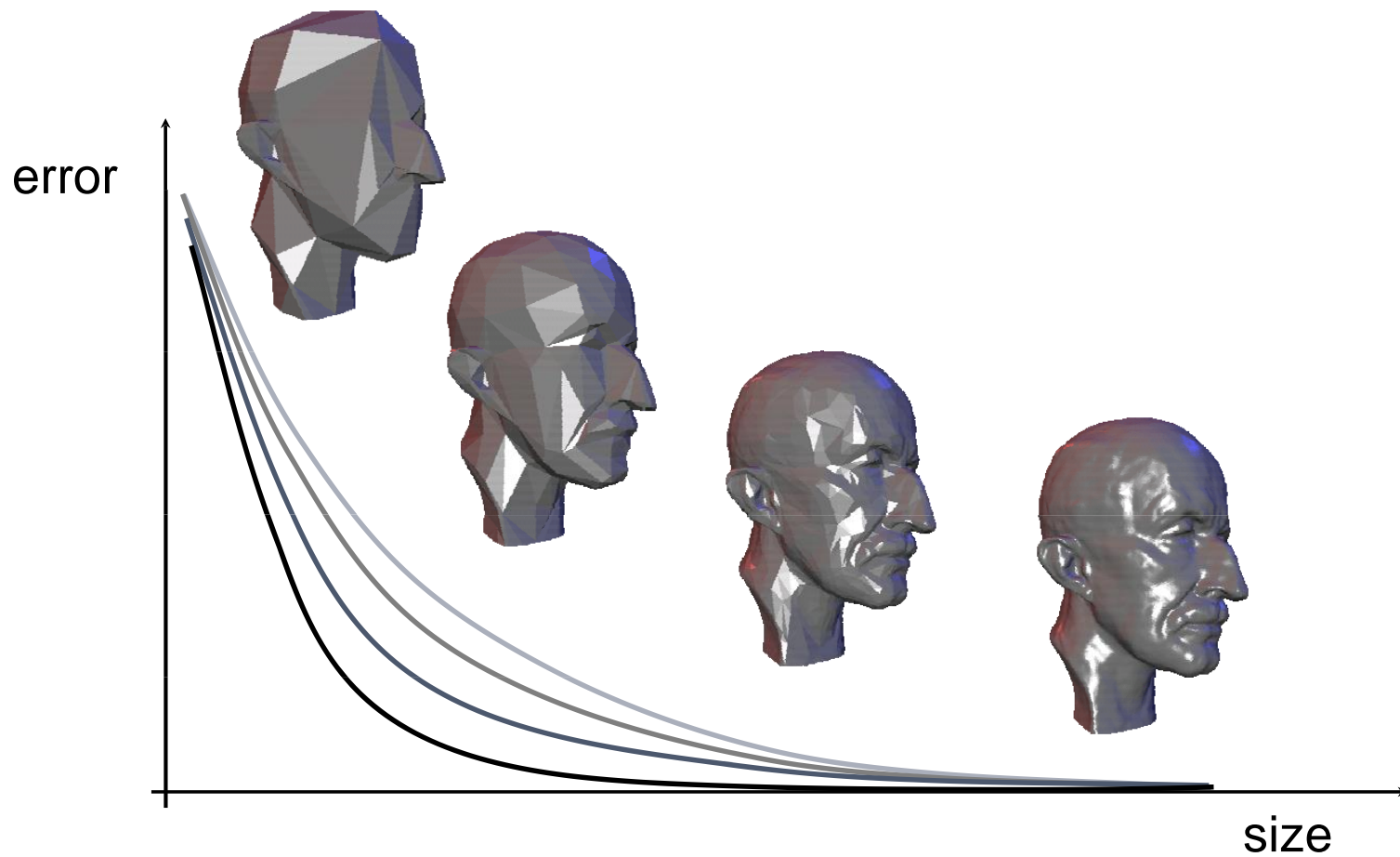


Applications

- Adaptation aux capacités matérielles



Compromis taille-qualité



Objectif

- Générer un maillage
 - contenant moins de polygones
 - préservant au mieux la forme d'origine.
- Entrée : un maillage
- Sortie : un maillage
- Techniques similaires pour les surfaces de points

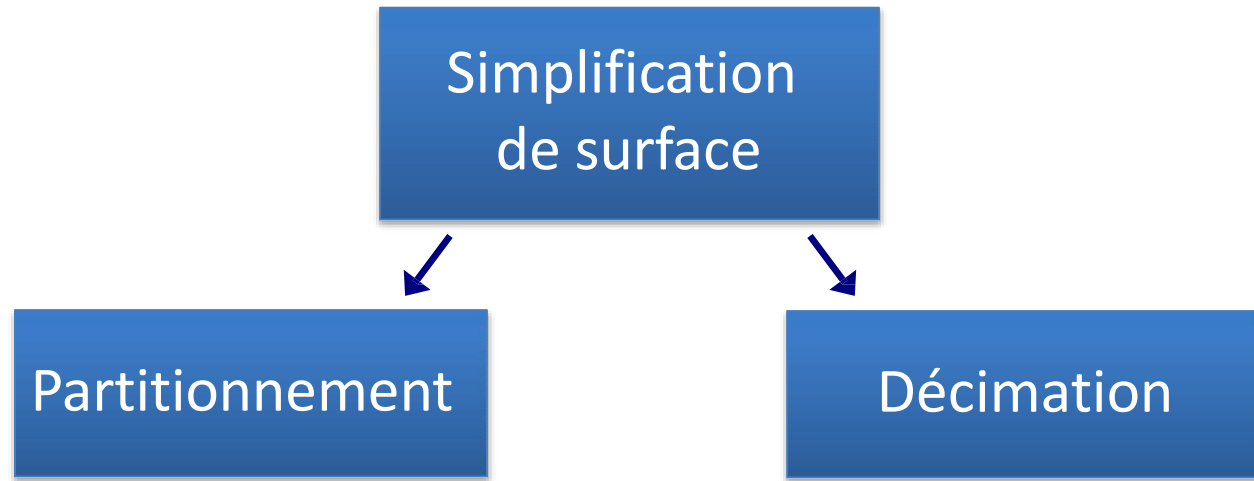
Définition du problème

- Etant donné : $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{F})$
- Trouver : $\mathcal{M}' = (\mathcal{V}', \mathcal{F}')$ Tel que
 1. $|\mathcal{V}'| = n < |\mathcal{V}|$ et $\|\mathcal{M} - \mathcal{M}'\|$ soit minimal, ou
 2. $\|\mathcal{M} - \mathcal{M}'\| < \epsilon$ et $|\mathcal{V}'|$ est minimal
- Respect de critères additionnels
 - déviation de normal, forme des triangles, attributs scalaires, etc.

Caractérisation

- Efficacité :
 - **Complexité en temps** : vitesse de simplification
 - Simplification à la volée
 - **Complexité en mémoire** : taille de l'entrée
 - Algorithmes hors-mémoire souhaitables
- Qualité :
 - Préservation de la topologie
 - Degré d'approximation de la géométrie

Classification



1. Partitionner la maillage
2. Définir un sommet représentant par partition
3. Trianguler l'ensemble des sommets représentant

1. Définir une importance par sommet
2. Supprimer le sommet de moindre importance
3. Recommencer en 1 jusqu'à obtenir le nombre souhaité d'éléments

Algorithmes de Simplification

Quelques algorithmes de simplification:

Décimation

- **MO** (Mesh Optimization) : Optimisation de maillage [Hoppe et al., 1993]
- **QEF** (Quadric Error Function) : Erreur L2 basée sur une quadrique locale [Garland 1997]

Partitionnement

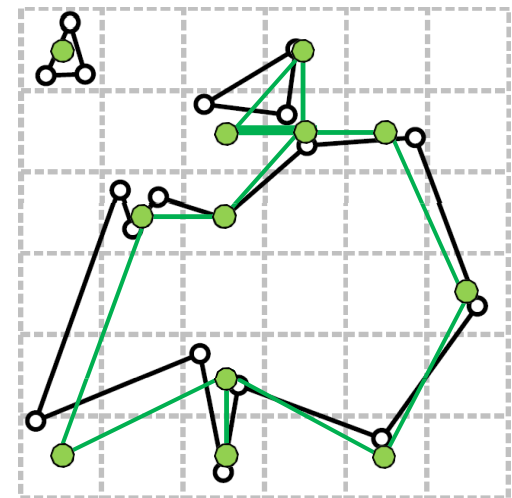
- **OCS** (Out-of-Core Simplification) : Partitionnement en grille de soupes de polygones [Lindstrom 2000]
- **VSA** (Variational Shape Approximation) : Relaxation de Lloyd pilotée par la normale [Cohen-Steiner et al. 2004]

Simplification par Partitionnement

1. Partitionner la surface en régions
2. Calculer un *représentant* pour chaque région
 - Le plus souvent un sommet
 - Position/normale/etc. définit par une optimisation
 - La plus simple : une moyenne
3. Trianguler les sommets représentants

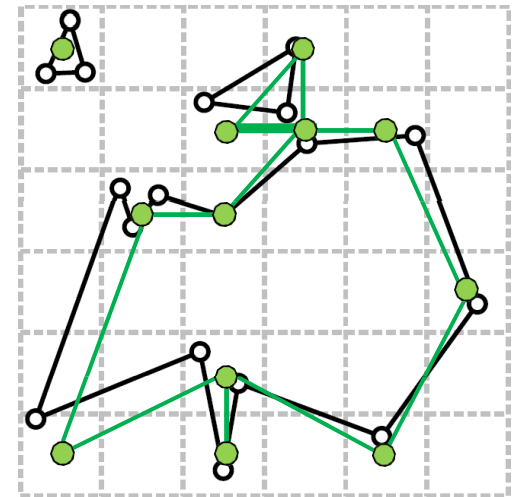
Simplification par Partitionnement

- Génération de régions
- Calcul d'un représentant
- Génération d'un maillage
- Changement de topologie



Simplification par Partitionnement

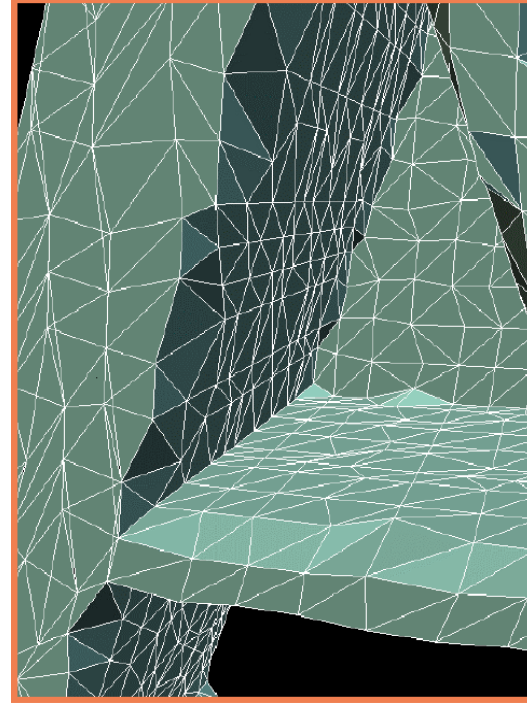
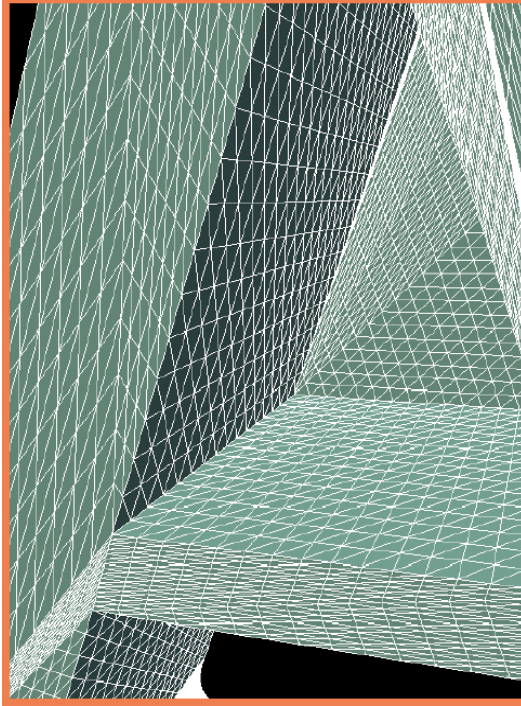
- Génération de régions
 - Grille uniforme 3D
 - Mapper les sommets pour les grouper
- Calcul d'un représentant
- Génération d'un maillage
- Changement de topologie



Simplification par Partitionnement

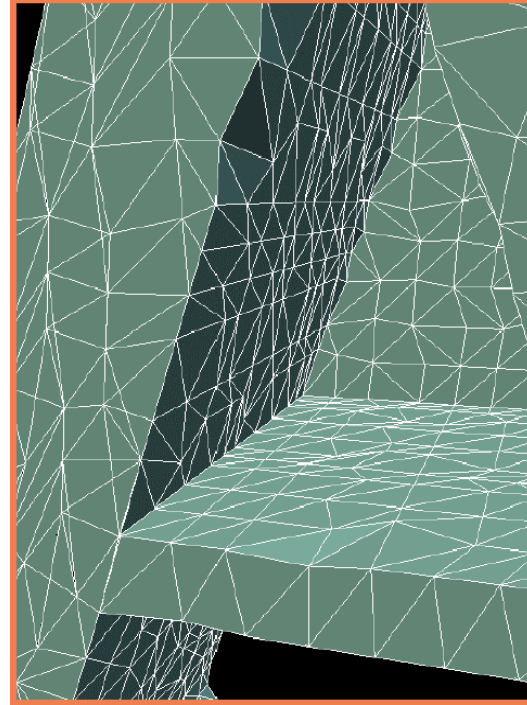
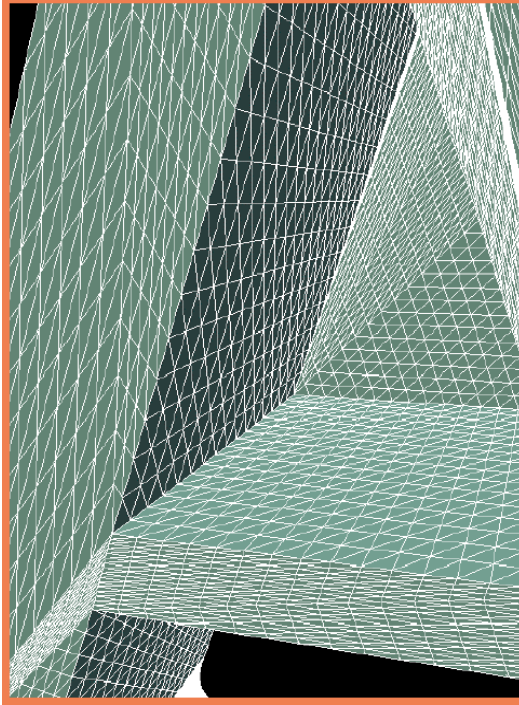
- Génération de régions
- Calcul d'un représentant
 - Position moyenne/medianne des sommets
 - Erreur quadrique
- Génération d'un maillage
- Changement de topologie

Calcul d'un représentant



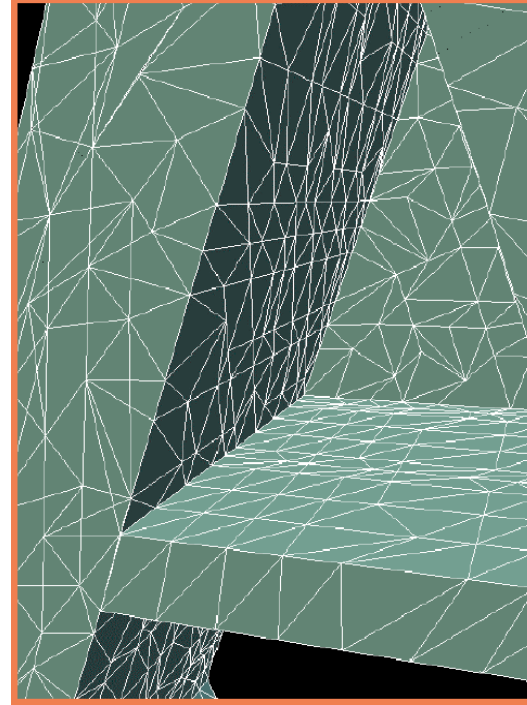
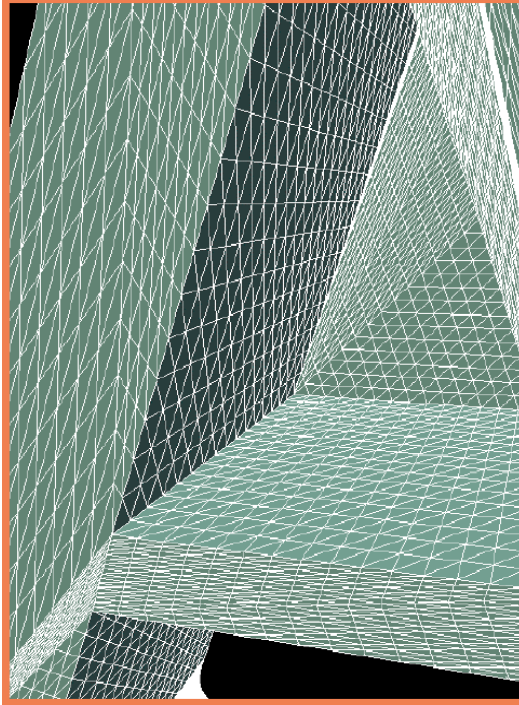
Position moyenne

Calcul d'un représentant



Medianne vertex position

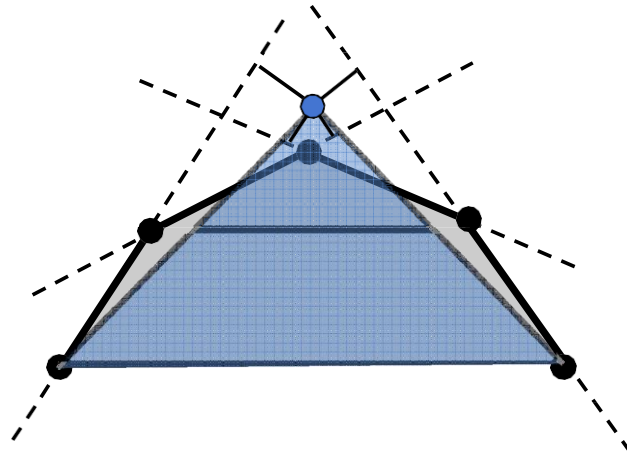
Calcul d'un représentant



Erreur quadrique

Quadrique d'Erreur (Quadric Error Metric - QEM)

- Les patch sont supposés plat par morceau
- Minimiser la distance aux plans des triangles voisins



Quadrique d'Erreur (Quadric Error Metric - QEM)

- Distance au carré d'un point p à un plan q :

$$p = (x, y, z, 1)^T, \quad q = (a, b, c, d)^T$$

$$\text{dist}(q, p)^2 = (q^T p)^2 = p^T (q q^T) p =: p^T Q_q p$$

$$Q_q = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{bmatrix}$$

Quadrique d'Erreur (Quadric Error Metric - QEM)

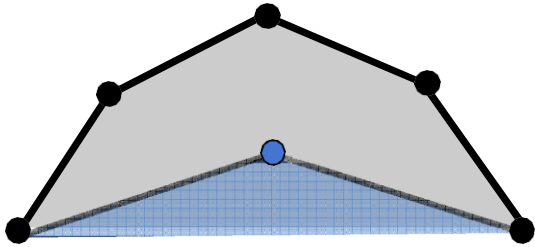
- Somme des distances aux plans q_i des triangles voisins au sommet :

$$\sum_i \text{dist}(q_i, p)^2 = \sum_i p^T Q_{q_i} p = p^T \left(\sum_i Q_{q_i} \right) p =: p^T Q_p p$$

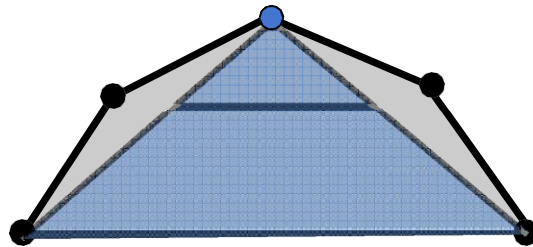
- Point p^* that minimizes the error satisfies:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

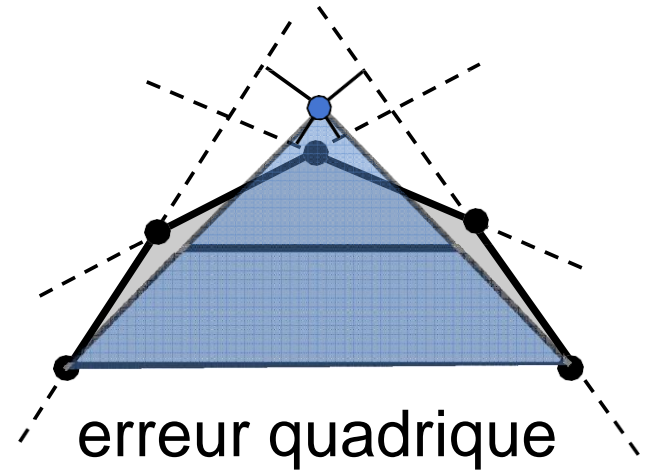
Comparaison



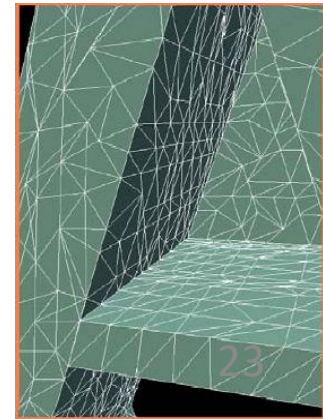
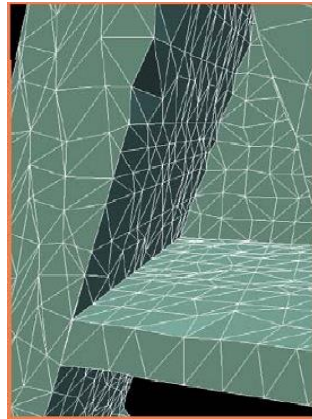
moyenne



médian



erreur quadrique



Simplification par Partitionnement

- Génération de régions
- Calcul d'un représentant
- Génération d'un maillage
 - Clusters $p \leftrightarrow \{p_0, \dots, p_n\}$, $q \leftrightarrow \{q_0, \dots, q_m\}$
- Changement de topologie

Simplification par Partitionnement

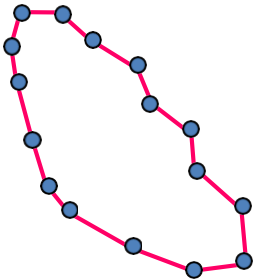
- Génération de régions
- Calcul d'un représentant
- Génération d'un maillage
 - Clusters $p \leftrightarrow \{p_0, \dots, p_n\}$, $q \leftrightarrow \{q_0, \dots, q_m\}$
 - Connecter (p, q) si il existait une arête (p_i, q_j)
- Changement de topologie

Simplification par Partitionnement

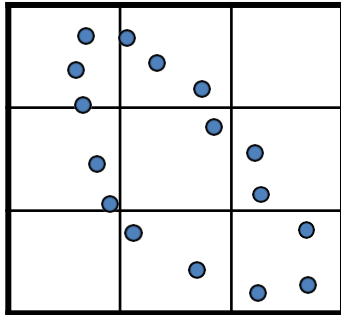
Exemple simple : **partitionnement en grille (OCS)**

- Structure de partition : une grille 3D **G**
 - Région = ensembles des sommets du maillages appartenant à la même cellule de **G**
- Sommet représentant : la moyenne des sommet d'une cellule
- Triangulation
 - Pour chaque triangle du maillage d'origine :
 - Si 2 ou 3 des sommets sont dans la même cellule de **G**, supprimer le triangle
 - Sinon, conserver le triangle, en réindexant ses sommets sur les sommets représentants de leurs cellules respectives

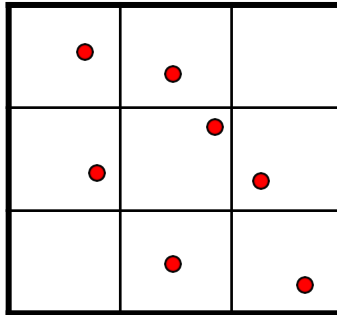
Principe OCS



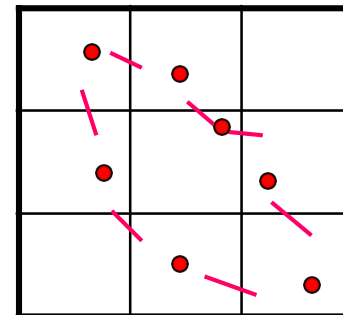
Maillage



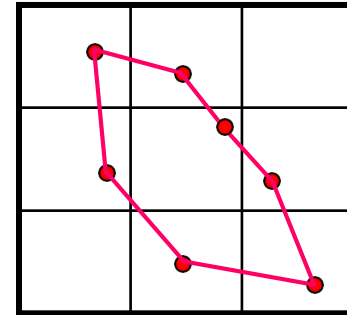
*Partitionnement
en grille*



*Calcul des
représentants*



*Sélection des
triangles à
conserver
(sommets dans
différentes
cellules)*



*« Étirement »
des triangles à
la positions des
représentants
(réindexation)*



Maillage simplifié

Avantage	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none">• Simplicité• Calcul en flux (un sommet du maillage dense en mémoire à la fois)• Très rapide	<ul style="list-style-type: none">• Contrôle de la résolution de la surface difficile• Erreurs topologiques

Adaptivité

- Grille régulière **G** remplacée par une des **structures de partitionnement spatial hiérarchiques adaptatives**
- Meilleure distribution des régions
 - petites régions dans les zones accidentées
 - grandes régions dans les zones planes
- Exemples :
 - Octree
 - kd tree
 - BSP tree

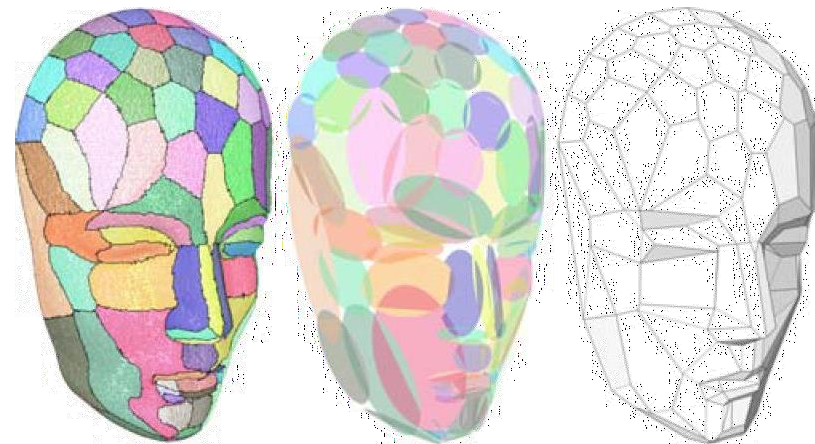
Simplification par Partitionnement

Exemple haute qualité : VSA (Approximation Variationnelle de Forme)

Algorithme itératif :

1. Initialisation d'un ensemble de *proxies* (couple représentant, point/normale) par selection aléatoire d'un ensemble de triangles
 - Graine/**représentants** des regions
2. Grossissement de regions basé normal
 - Triangle *t* en bord de regions affecté à la region dont la normale du proxy minimise l'angle avec la normale de *t*
3. Optimisation du proxy : point et normales moyennes des triangle de sa régions associée
4. Recommencer en 2 jusqu'à convergence

Maillage simplifié obtenu par suivi de contour des régions



Partitionnement *Représentants (« proxies »)* *Maillage simplifié*

Avantage

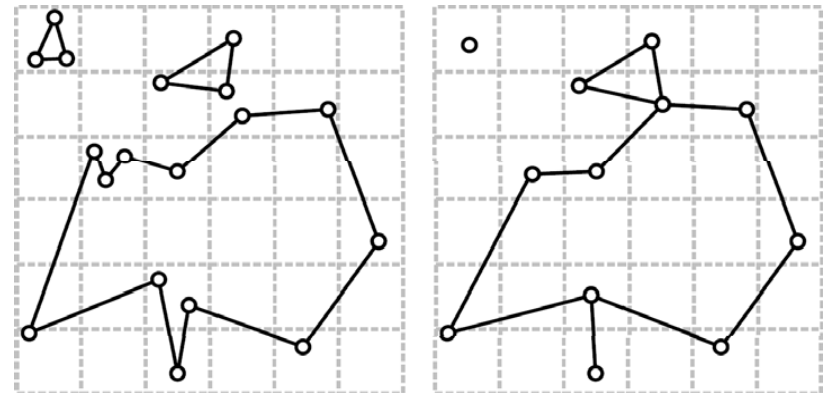
- Précision et optimalité
- Structure anisotrope

Inconvénients

- Lenteur
- Convergence non garantie

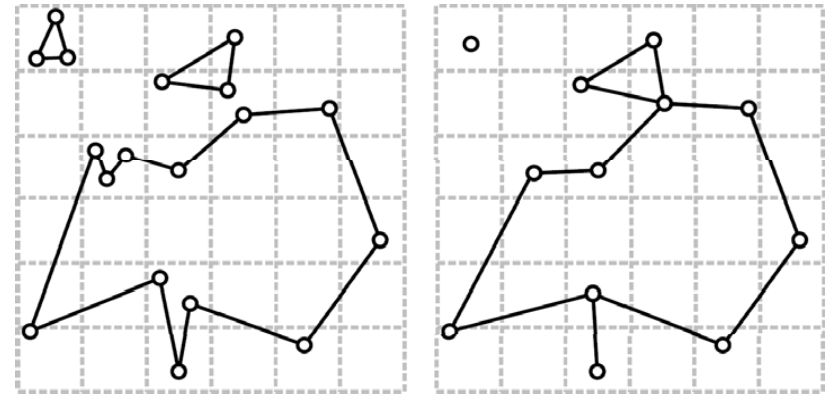
Simplification par Partitionnement

- Génération de régions
- Calcul d'un représentant
- Génération d'un maillage
- Changement de topologie
 - Si différents plans passent pas la même cellule
 - Peut être non-variété

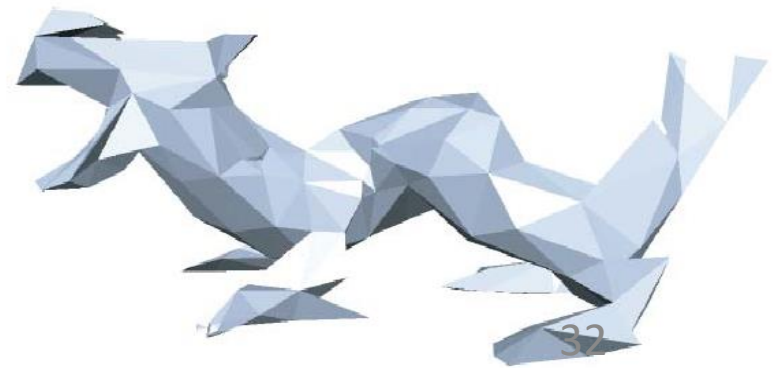


Vertex Clustering

- Cluster Generation
- Computing a representative
- Mesh generation
- Topology changes
 - If different sheets pass through one cell
 - Can be non-manifold



Décimation Incrémentale



Simplification par Décimation

1. Trier les sommets en fonction de leur **importance/erreur** (induite par leur suppression) dans une file à priorité **F**
 - **Métrique d'erreur** : basée sur la position, la normale, la couleur, le point de vue, ...
2. Supprimer le sommet de tête de **F** (erreur minimum)
 - **Contraction d'arête** ou **Retriangulation**
3. **Optimisation** : recalculer l'importance des sommets adjacents au sommet supprimé
4. Mettre à jour **F**
5. Recommencer en 1 jusqu'à condition d'arrêt
 - Nombre de sommets cible
 - Erreur maximum autorisée

Décimation Incrémentale

- Principe général
- Opérateur de décimation
- Métrique d'erreur quatrique
- Critère de qualité
- Changement de topologie

Principe général

- Repeat:
- pick mesh region
- apply decimation operator
- Until no further reduction possible

Greedy Optimization

- For each region
- evaluate quality after decimation
- enqueue(quality, region)
- Repeat:
- get best mesh region from queue
- apply decimation operator
- update queue
- Until no further reduction possible

Global Error Control

- For each region
- evaluate quality after decimation
- enqueue(quality, region)
- Repeat:
 - get best mesh region from queue
 - if error $< \epsilon$
 - apply decimation operator
 - update queue
- Until no further reduction possible³⁷

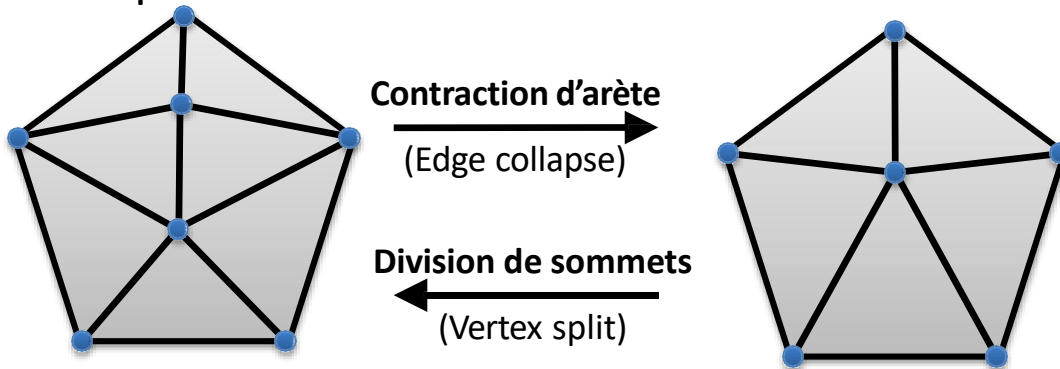
Décimation Incrémentale

- Principe général
- Opérateur de décimation
- Métrique d'erreur quadrique
- Critère de qualité
- Changement de topologie

Stratégie de Suppression

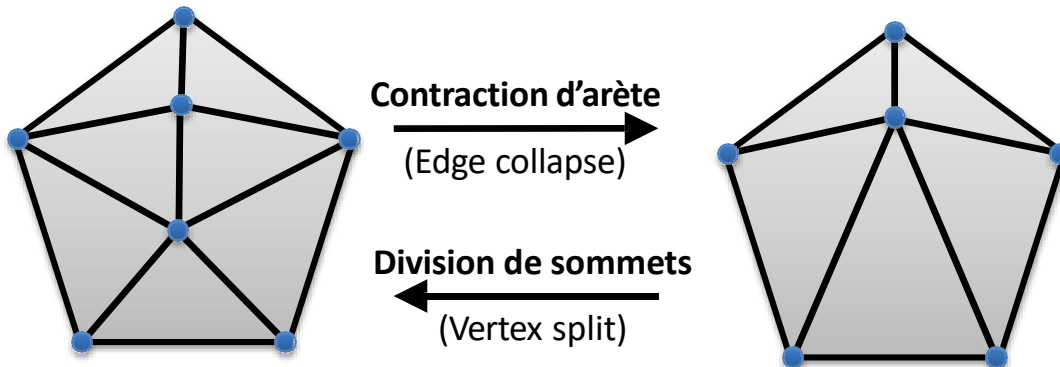
Contraction d'une arête adjacente au sommet de moindre importance

- Supprime 1 sommet et 2 triangles
- Opération dual : **division** de sommet



*Note : cet opérateur de simplification permet de construire des **maillages progressifs**, une structure de **multirésolution**, avec **continuum géométrique**.*

Retriangulation

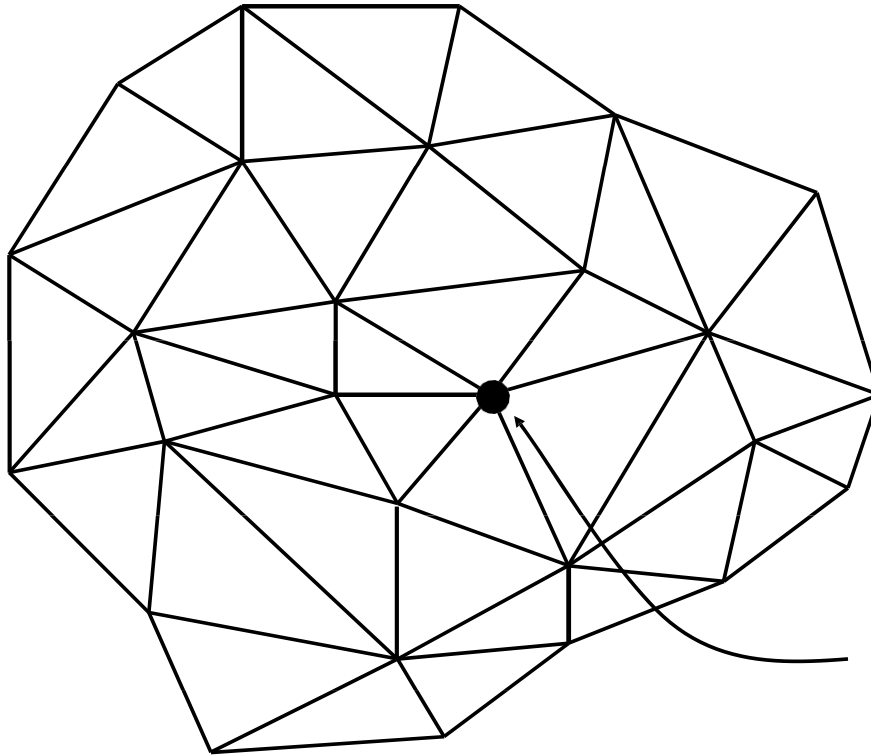


Note : équivalent à la contraction d'arête, mais en général sans calcul d'optimum local.

Opérateur de décimation

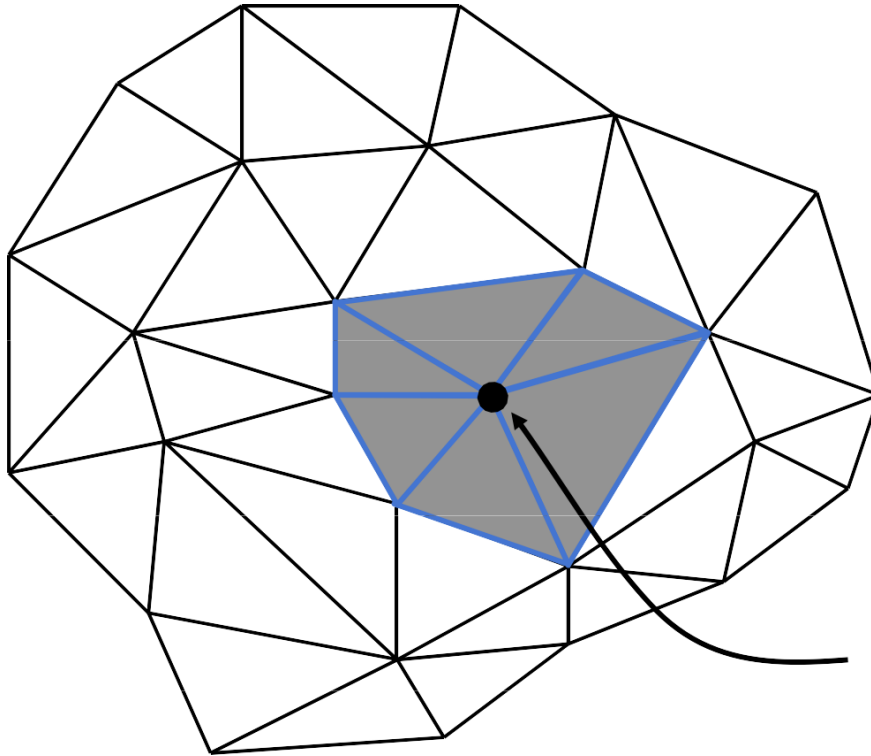
- Qu'est ce qu'une région ?
- Quels sont les degrés de liberté pour la re-triangulation ?
- Classification
 - Changement de topologie vs. préservation
 - Sous-échantillonnage vs. lissage
 - Opération inverse → maillages progressifs

Suppression de sommets



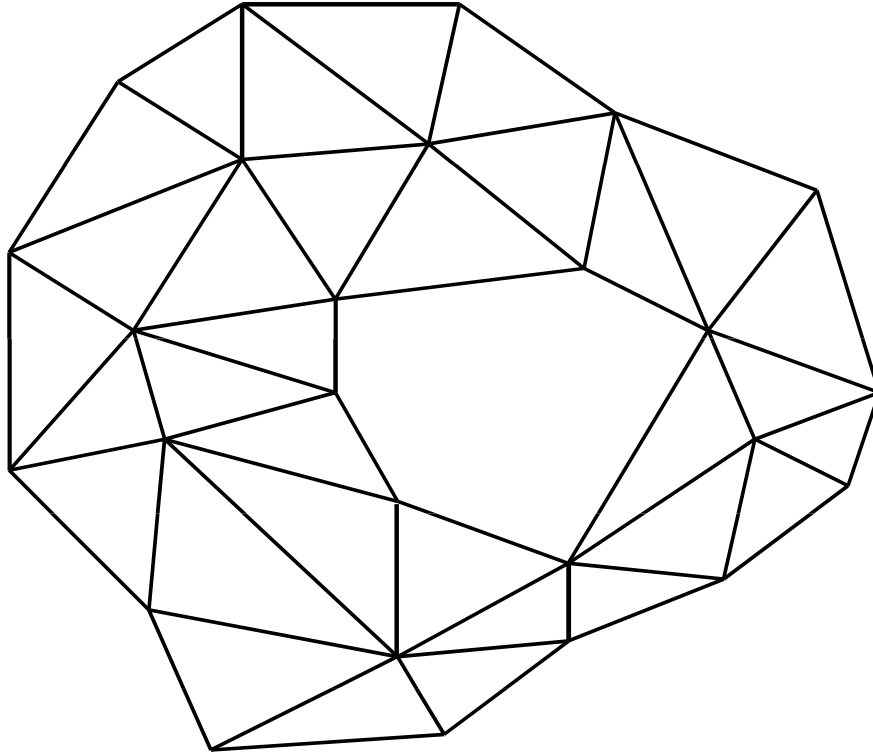
Select a vertex to
be eliminated

Vertex Removal



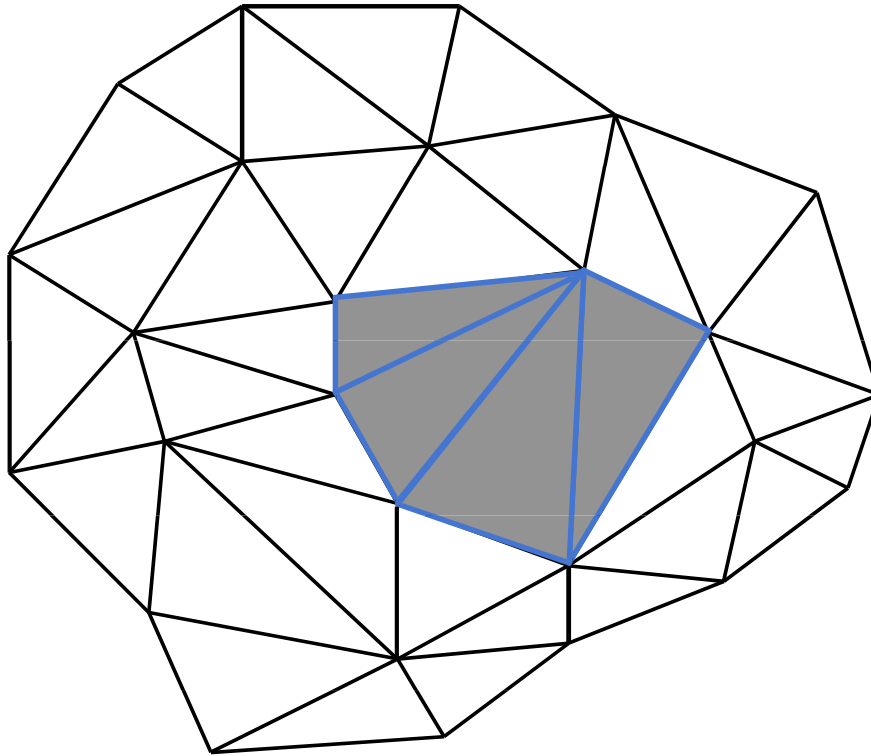
Select all triangles
sharing this vertex

Vertex Removal



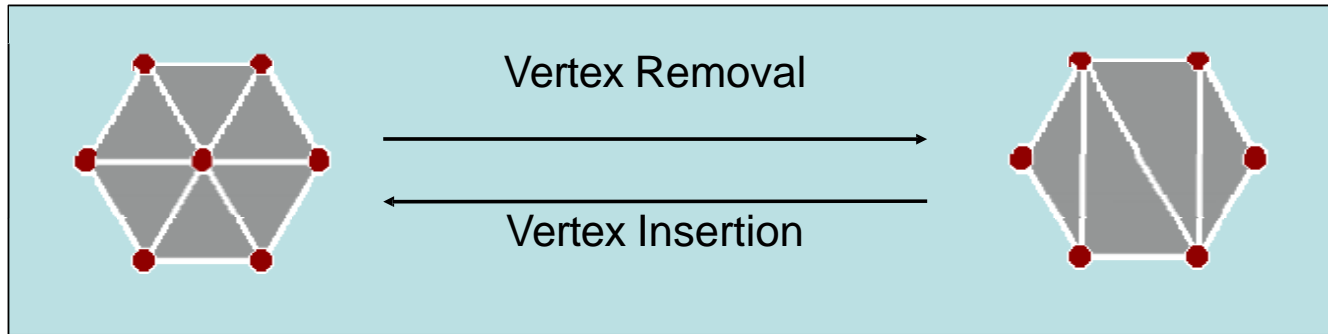
Remove the
selected triangles,
creating the hole

Vertex Removal



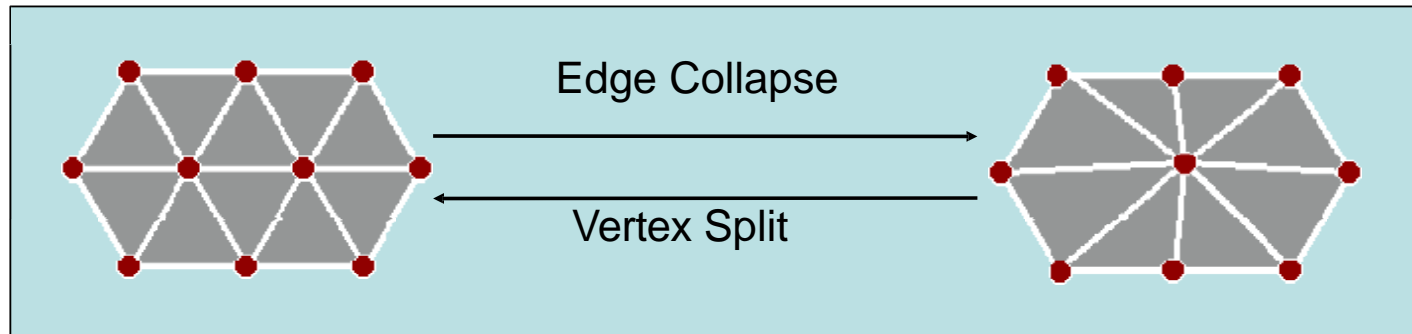
Fill the hole with
new triangles

Opérateurs de décimation



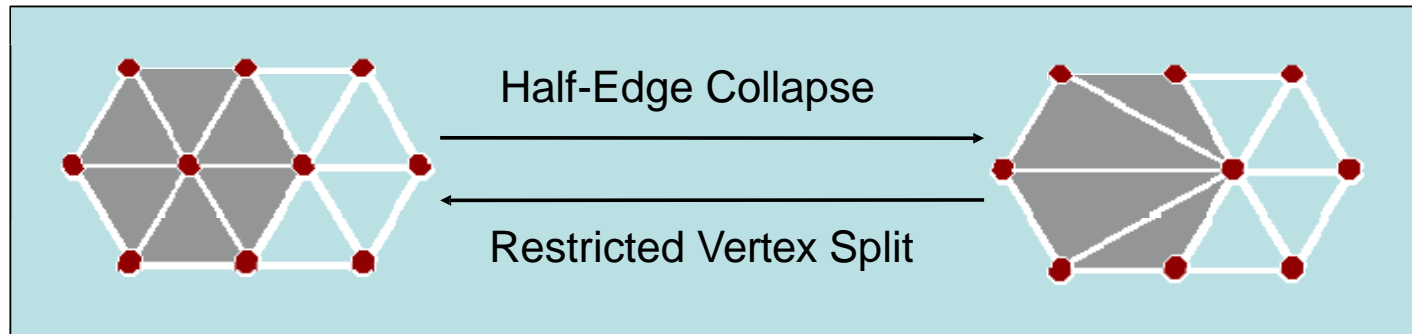
- Supprimer le sommet
- Re-trianguler le trou
 - Degrés de liberté combinatoire

Opérateurs de décimation



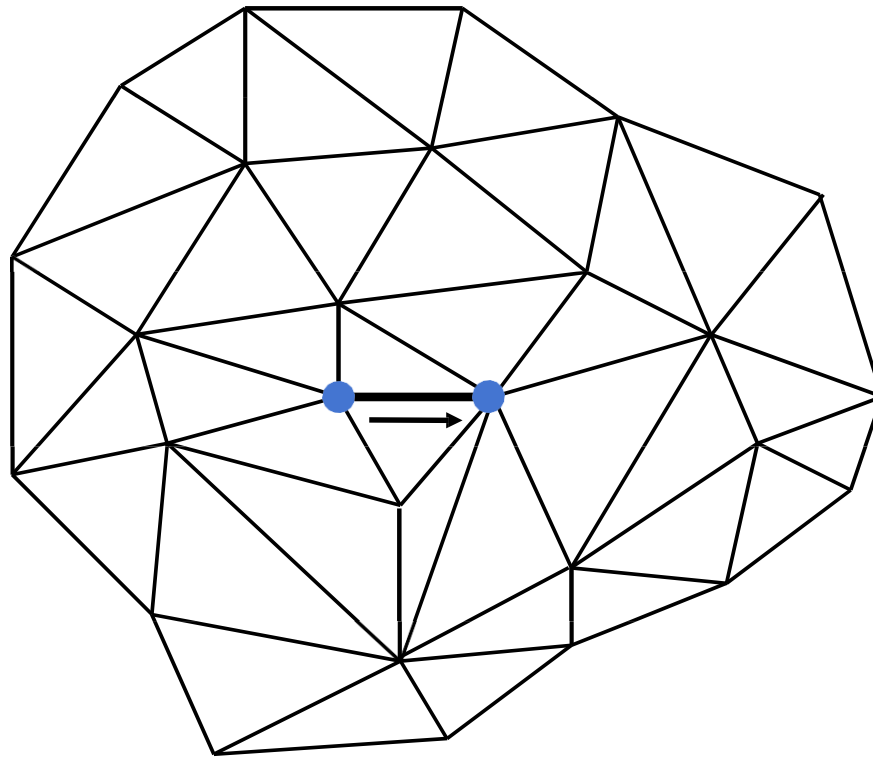
- Fusionner deux sommets adjacents
- Définir une nouvelle position
 - Degrés de liberté continus
 - Filtrage sur la route

Opérateurs de décimation

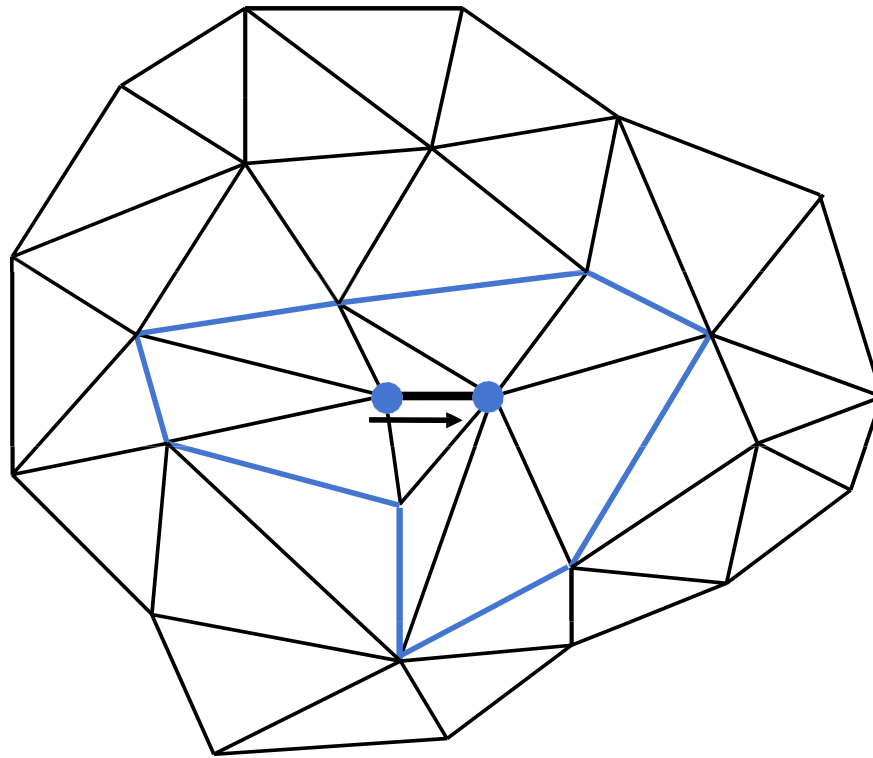


- Contracter l'arête en un de ses sommets
 - Cas particulier de la suppression de sommet
 - Cas particulier de la contraction d'arête
- Pas de degrés de liberté
- Sépare l'optimisation globale de l'optimisation locale

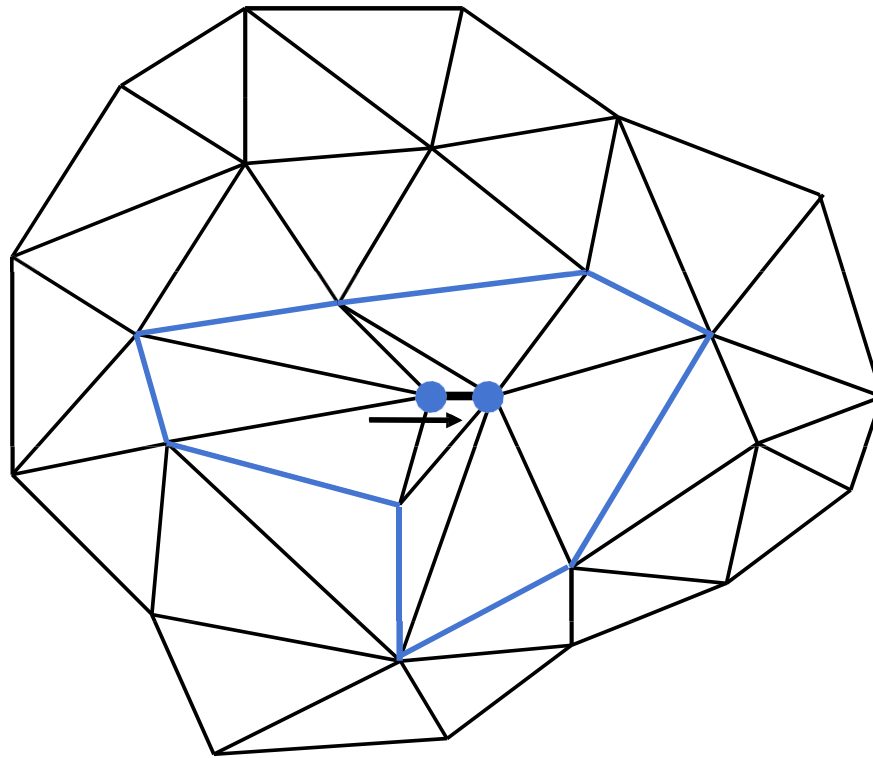
Half-Edge Collapse



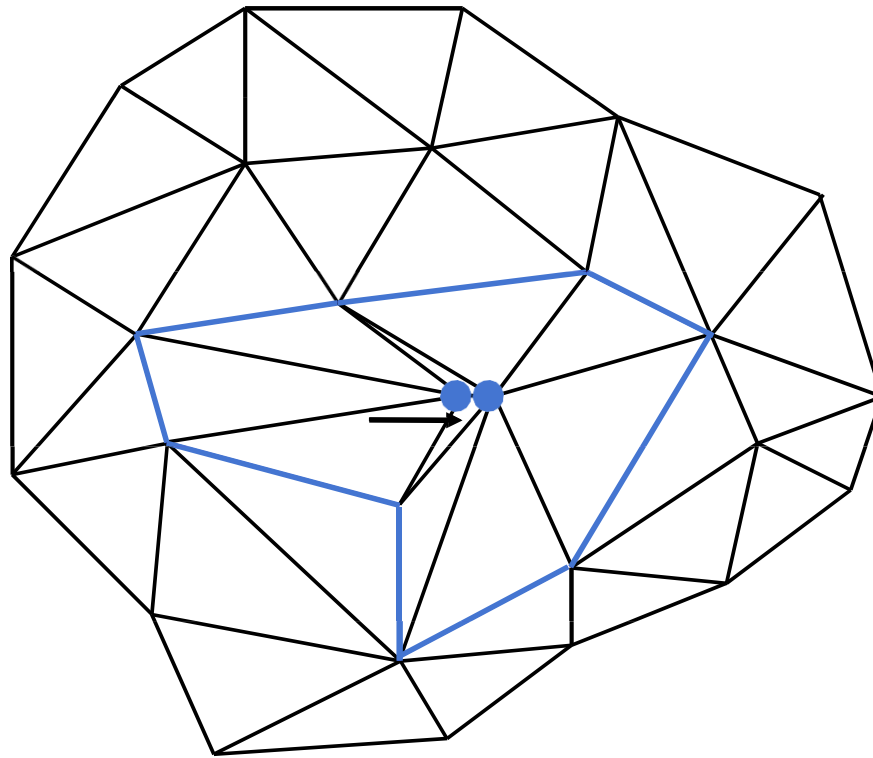
Half-Edge Collapse



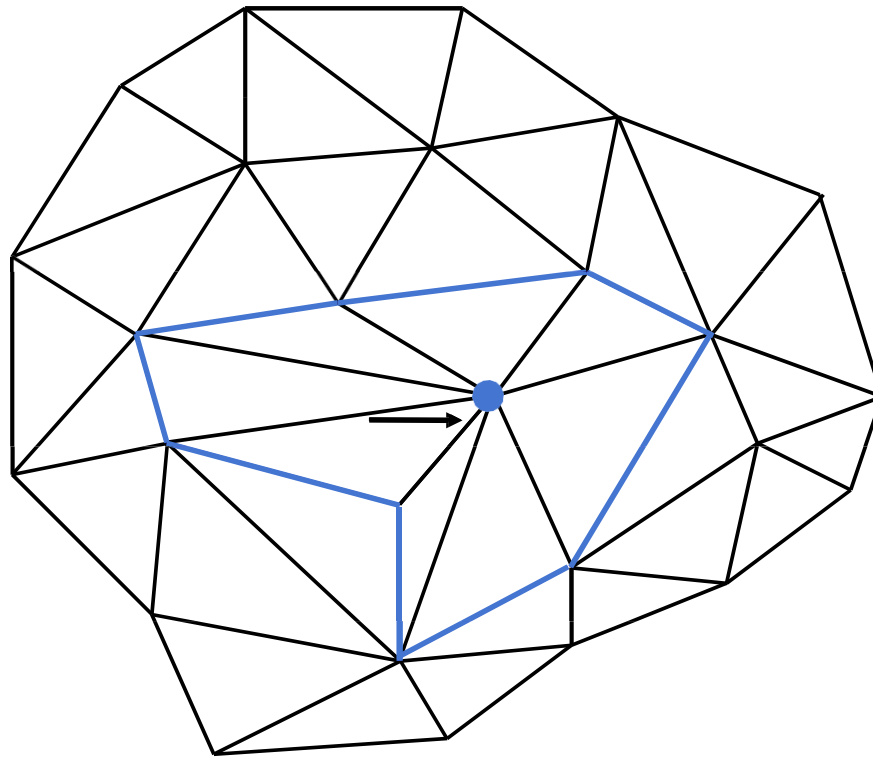
Half-Edge Collapse



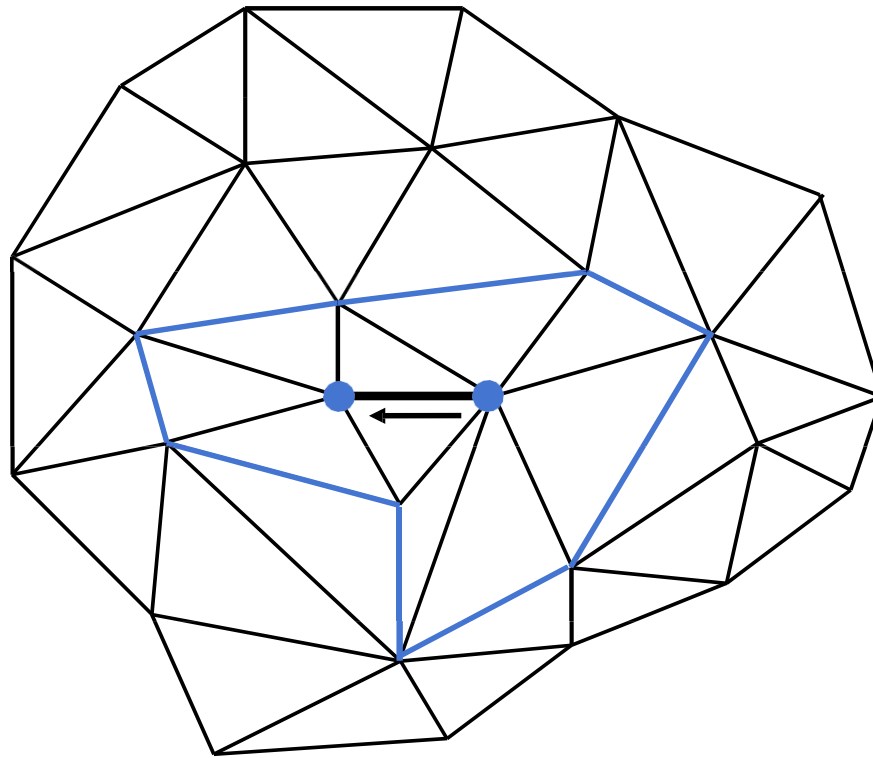
Half-Edge Collapse



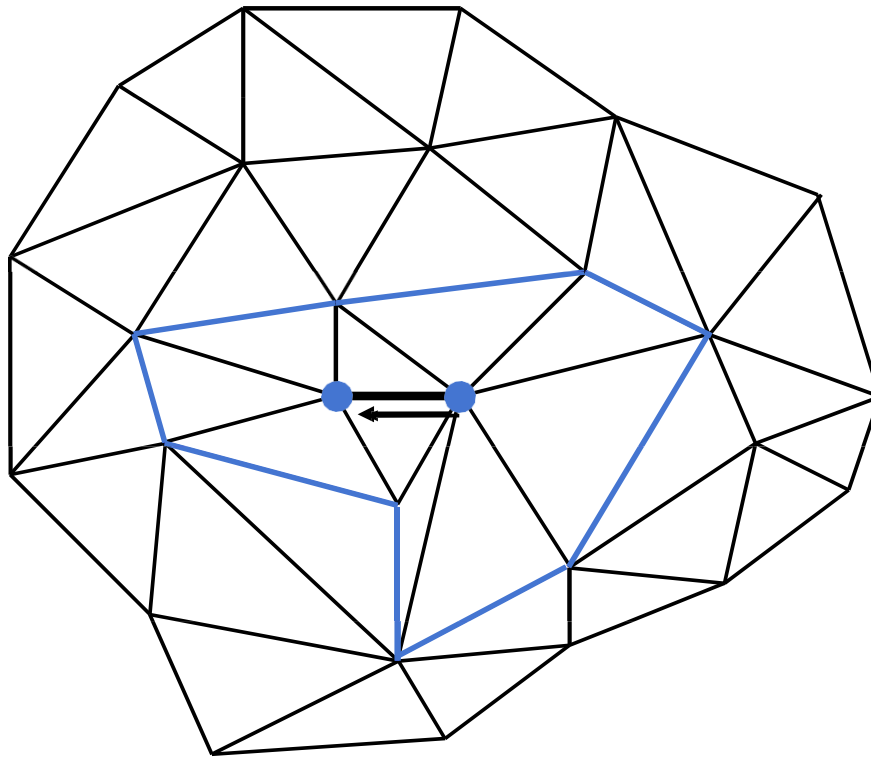
Half-Edge Collapse



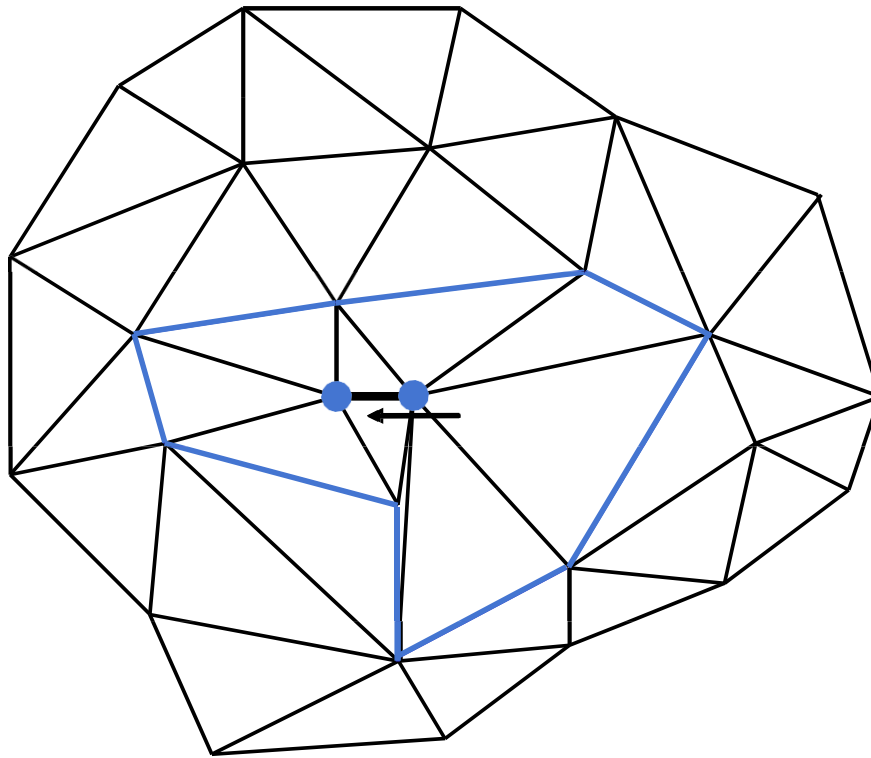
Half-Edge Collapse



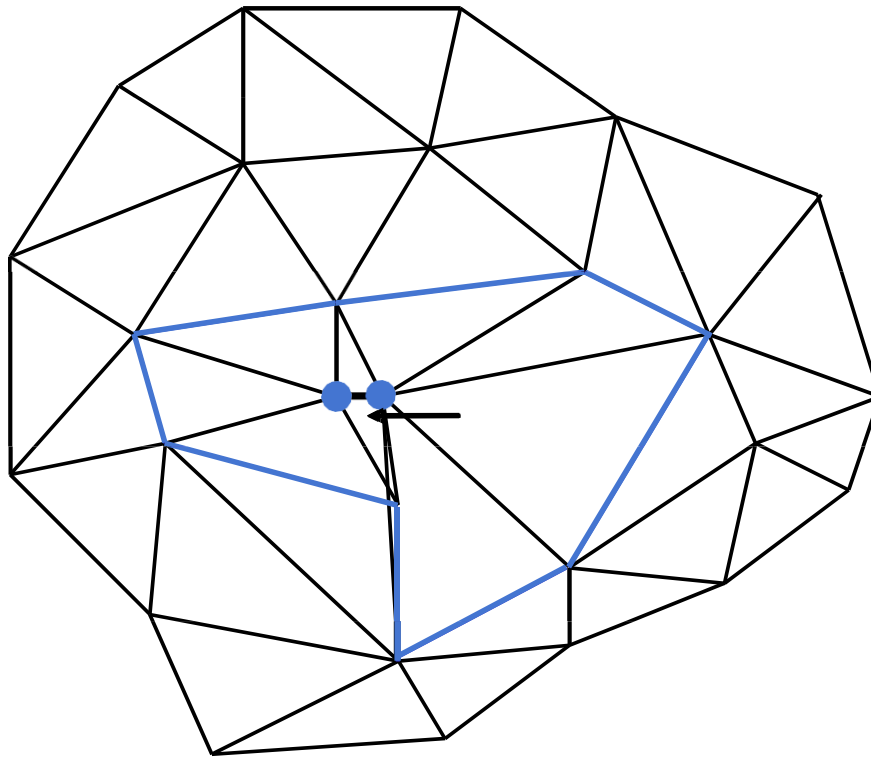
Half-Edge Collapse



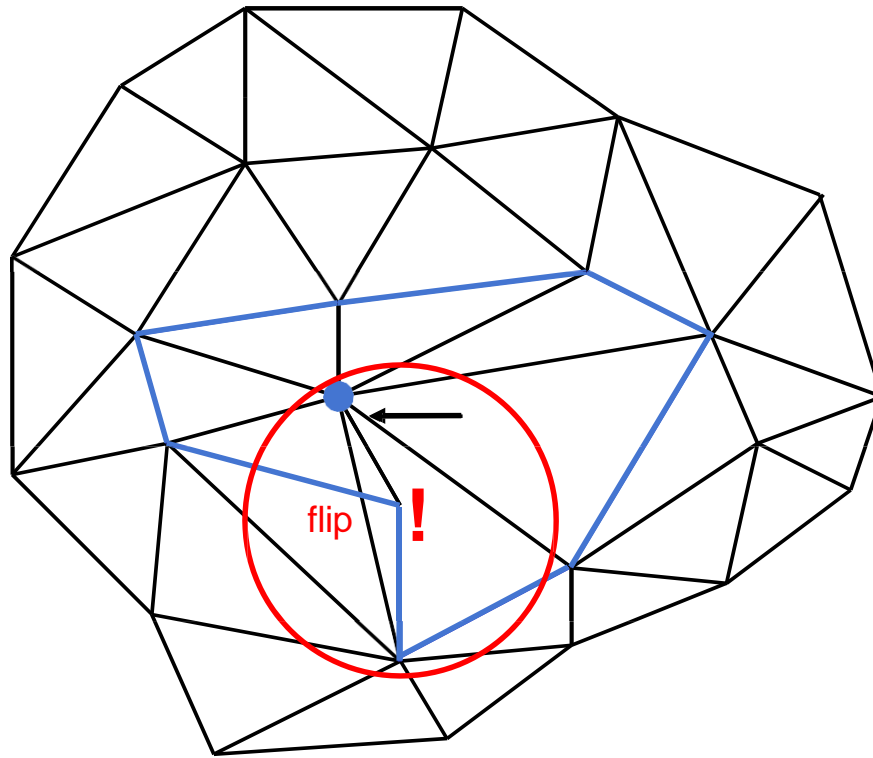
Half-Edge Collapse



Half-Edge Collapse



Half-Edge Collapse

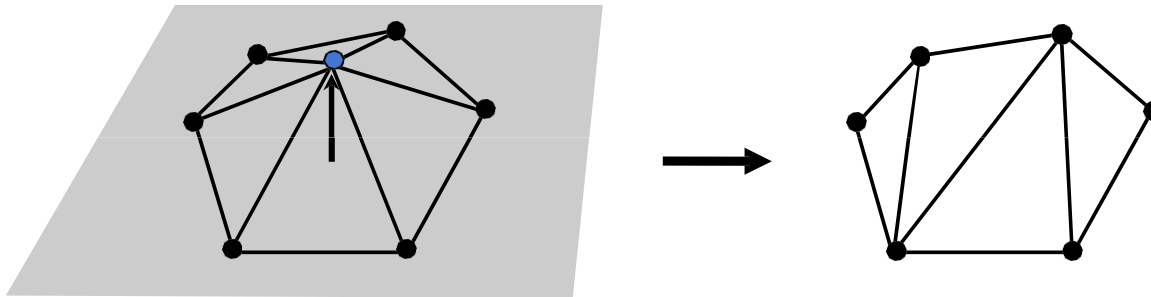


Décimation Incrémentale

- Principe général
- Opérateurs de décimation
- **Métriques d'erreur**
- Critères de qualité
- Changements de topologie

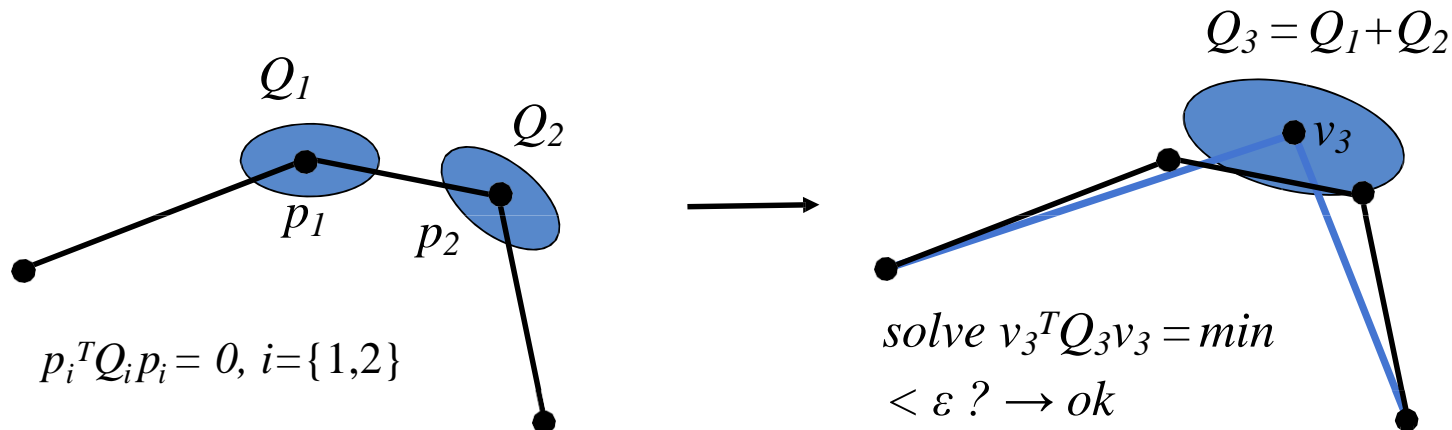
Métrique d'erreur locale

- Local distance to mesh
 - Calculer le plan moyen
 - Pas de comparaison à la géométrie *originale*



Métriques d'erreur globale

- Quadriques d'erreur
 - Distance au carré des plans pour un sommet

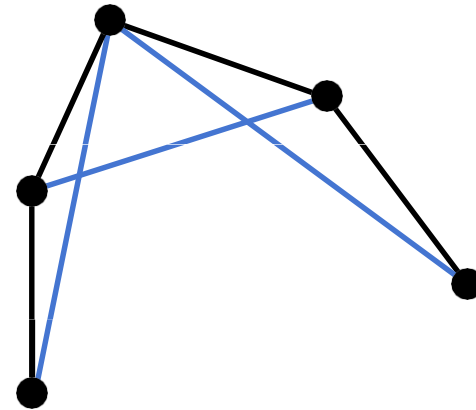


Décimation Incrémentale

- Principe général
- Opérateurs de décimation
- Métriques d'erreur
- Critères de qualité
- Changements de topologie

Critères de qualité

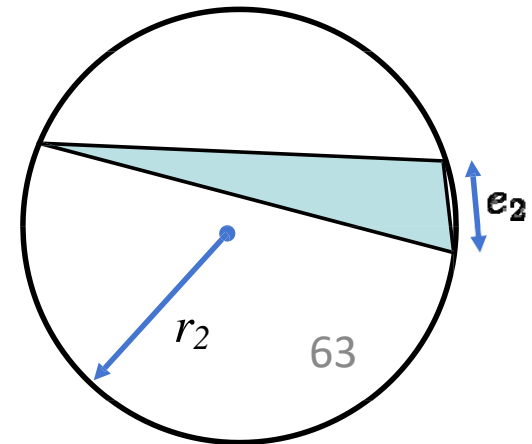
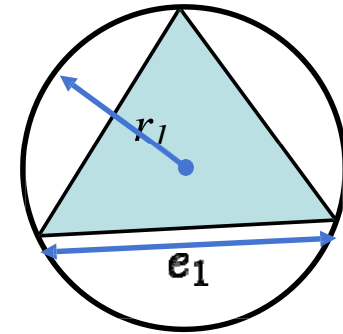
- Donne la qualité après décimation
 - Erreur d'approximation
 - Formes des triangles
 - Angles dihedraux
 - Equilibre de la valence
 - Différences de couleurs
 - ...



Critères de qualité

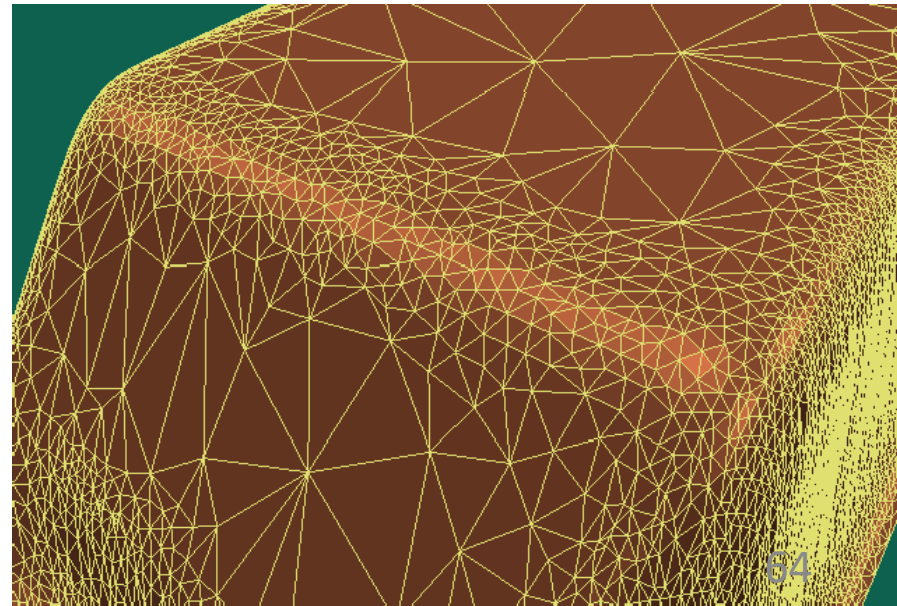
- Donne la qualité après décimation
 - Erreur d'approximation
 - Formes des triangles
 - Angles dihedraux
 - Equilibre de la valence
 - Différences de couleurs
 - ...

$$\frac{r_1}{e_1} < \frac{r_2}{e_2}$$



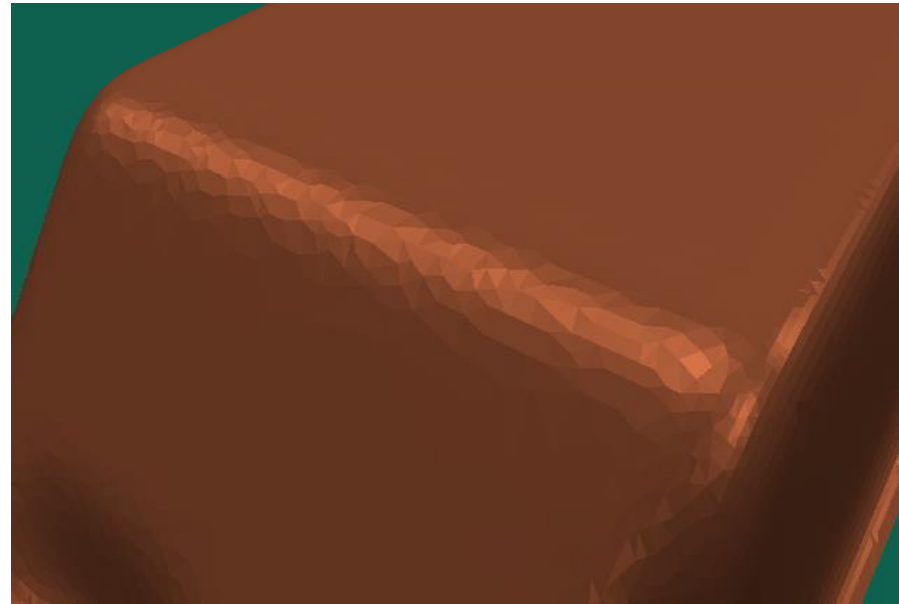
Critères de qualité

- Donne la qualité après décimation
 - Erreur d'approximation
 - Formes des triangles
 - Angles dihedraux
 - Equilibre de la valence
 - Différences de couleurs
 - ...



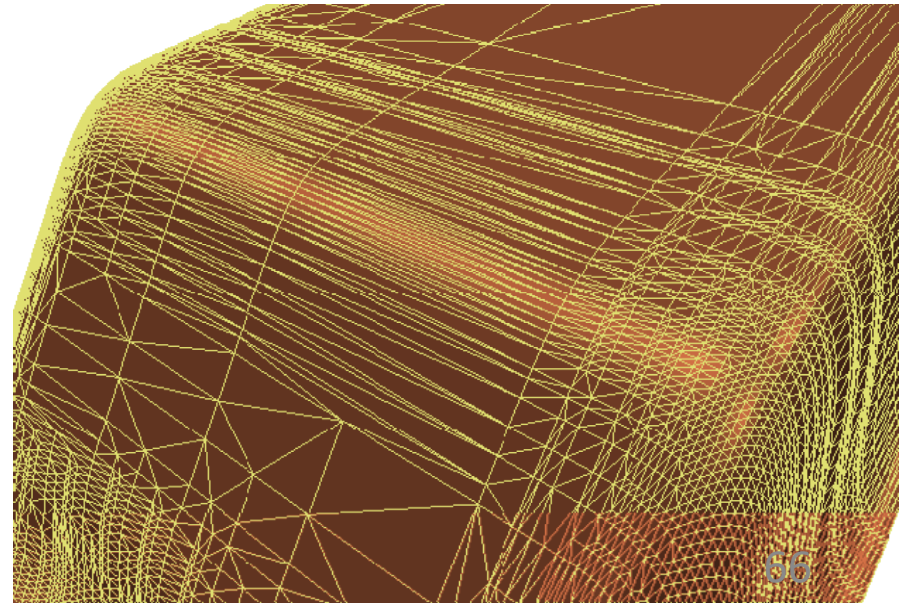
Critères de qualité

- Donne la qualité après décimation
 - Erreur d'approximation
 - Forme des triangles
 - Angles dihedraux
 - Equilibre de la valence
 - Differences de couleurs
 - ...



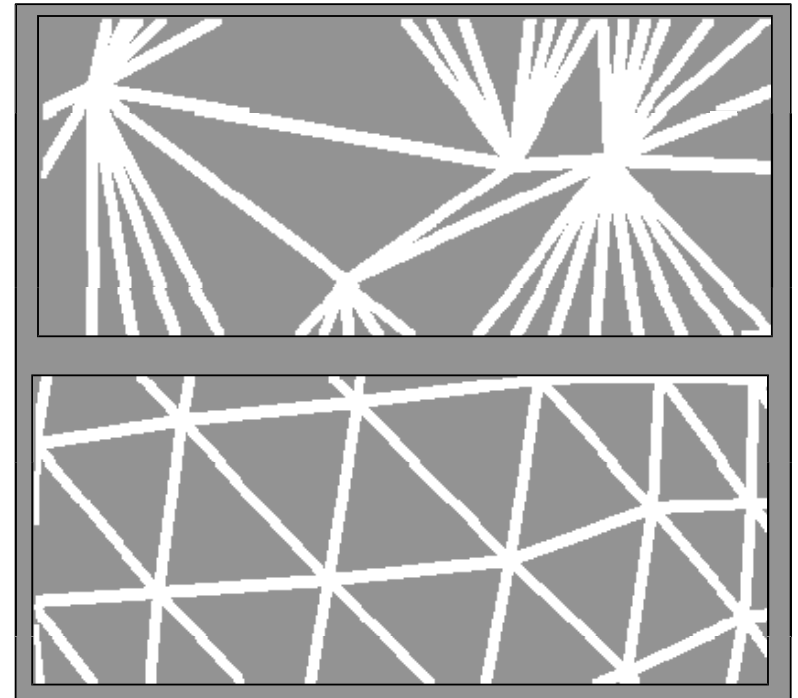
Critères de qualité

- Donne la qualité après décimation
 - Erreur d'approximation
 - Forme des triangles
 - Angles dihedraux
 - Equilibre de la valence
 - Differences de couleurs
 - ...



Critères de qualité

- Donne la qualité après décimation
 - Erreur d'approximation
 - Forme des triangles
 - Angles dihedraux
 - **Equilibre de la valence**
 - Differences de couleurs
 - ...

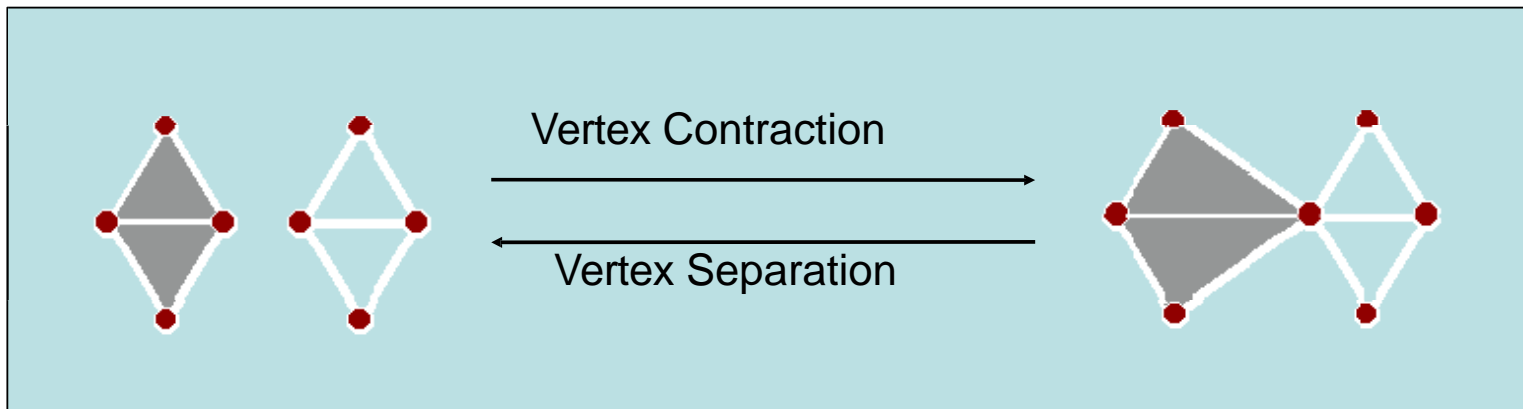


Décimation Incrémentale

- Principe général
- Opérateur de décimation
- Métrique d'erreur
- Critères de qualité
- Changement de topologie

Changements de topologie ?

- Fusionner des sommets sont connectés
 - Induit des changement de topologie
 - Nécessite des informations de *voisinage spatial*
 - Génère des maillages *non-variété*

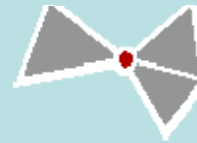
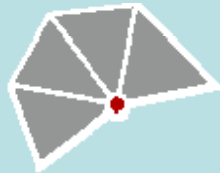


Changements de topologie ?

- Fusionner des sommets sont connectés
 - Induit des changement de topologie
 - Nécessite des informations de *voisinage spatial*
 - Génère des maillages *non-variété*



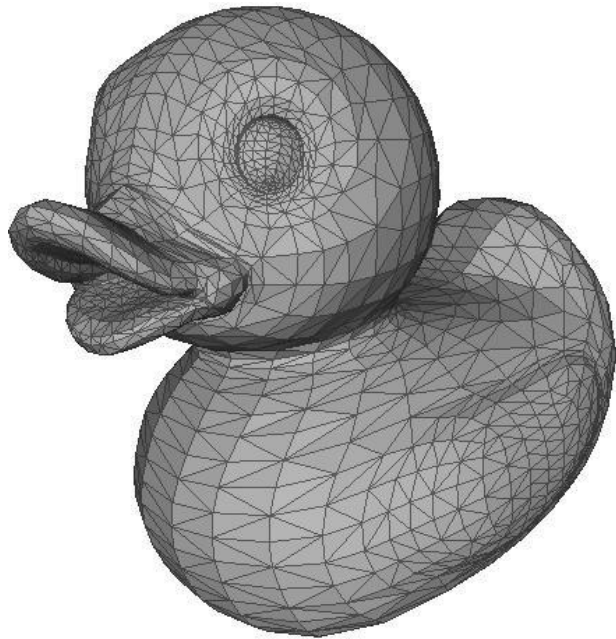
manifold



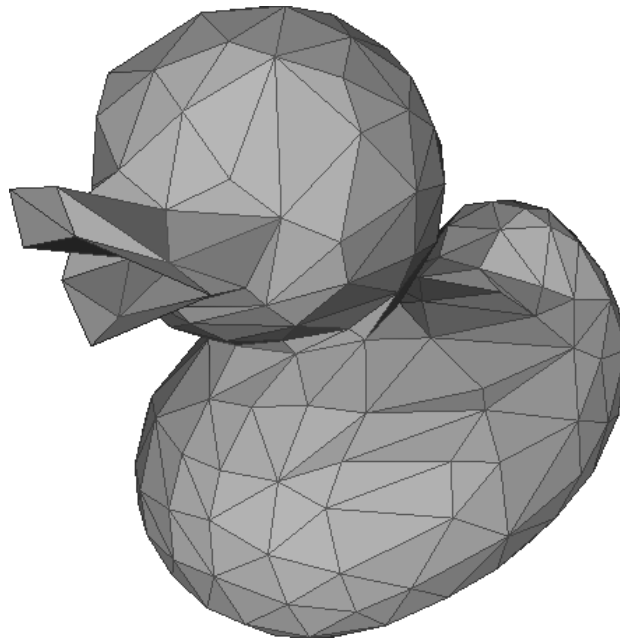
non-manifold



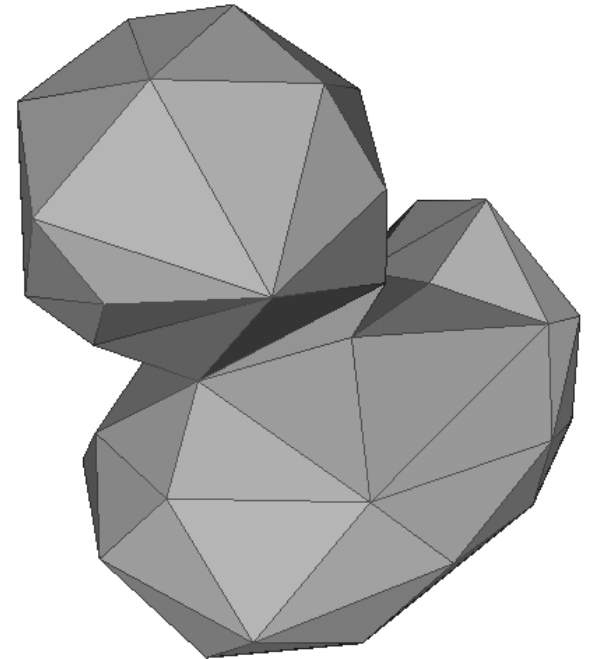
Exemple par Décimation



2100 triangles



500 triangles



100 triangles

Simplification par Décimation

Avantage	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none">• Précision et optimalité• Continuum et granularité de la simplification• Transformation géomorphe de niveaux de details	<ul style="list-style-type: none">• Lent• Difficile à mettre sur de grands modèles (algorithmique hors mémoire)

Métriques d'Erreur

- Caractérise le **coût géométrique** (perte d'information) introduit par la simplification d'une région
 - Région = 1-voisinage d'un sommet supprimé par décimation
 - Région = cellule pour les méthodes par partitionnement
- Peut s'appuyer sur la position des sommets, leurs normales, celles de triangles, etc...
- Idéalement, la métrique d'erreur permet de :
 - Ordonnancer les sommets en vue de supprimer les moins importants
 - Définir un représentant optimum pour la métrique en question

Distances géométrique et métriques d'erreurs

- Distances L^p ($p=2$ pour la distance euclidienne)
- Carrée de la distance euclidienne : un quadrique (**QEM**) [Garland 1997]
- Métrique $L^{2,1}$: basée sur le normale des surfaces [Cohen-Steiner 04]
- Distance de Hausdorff

Distances L^p

Distance entre une surface S et sa version simplifiée R

– Basé sur les positions des élément (L2)

$$\mathcal{L}^p(S, R) = \left(\frac{1}{|S|} \iint_{x \in S} \|d(x, R)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

aire \nearrow $|S|$ \nwarrow Distance euclidienne

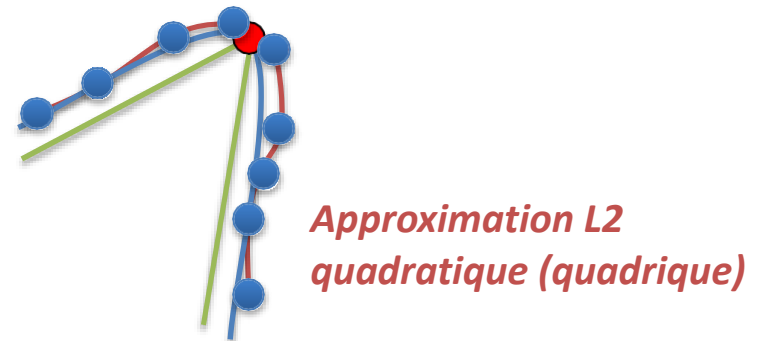
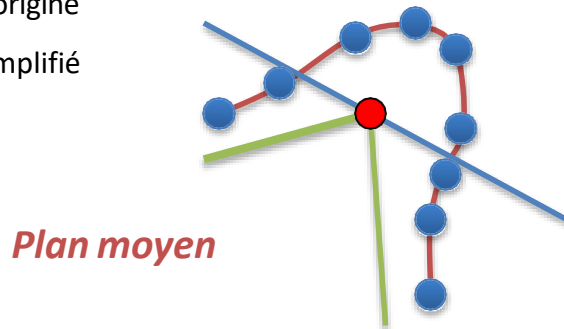
avec $d(x, R) = \inf_{y \in R} \|x - y\|$

Quadrique d'Erreur (Quadric Error Metric - QEM)

Permet de mieux placer

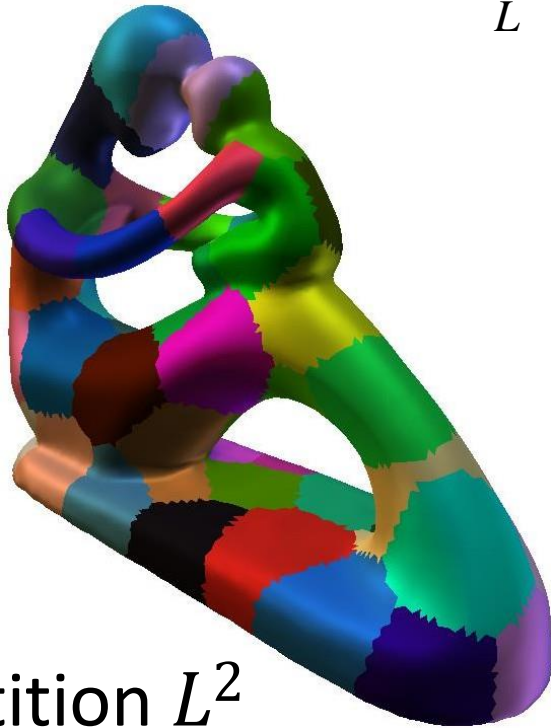
- un sommet représentant pour les méthodes par partitionnement
- un sommet contracté pour les méthodes par décimation

— Maillage d'origine
— Maillage simplifié

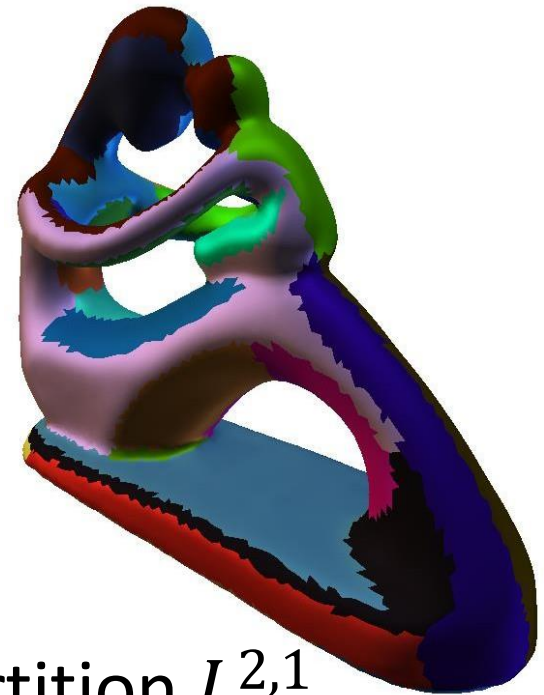


Métrie $L^{2,1}$

$$E_{L^{2,1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n n_i \cdot n_p \quad \text{normale moyenne de la région}$$



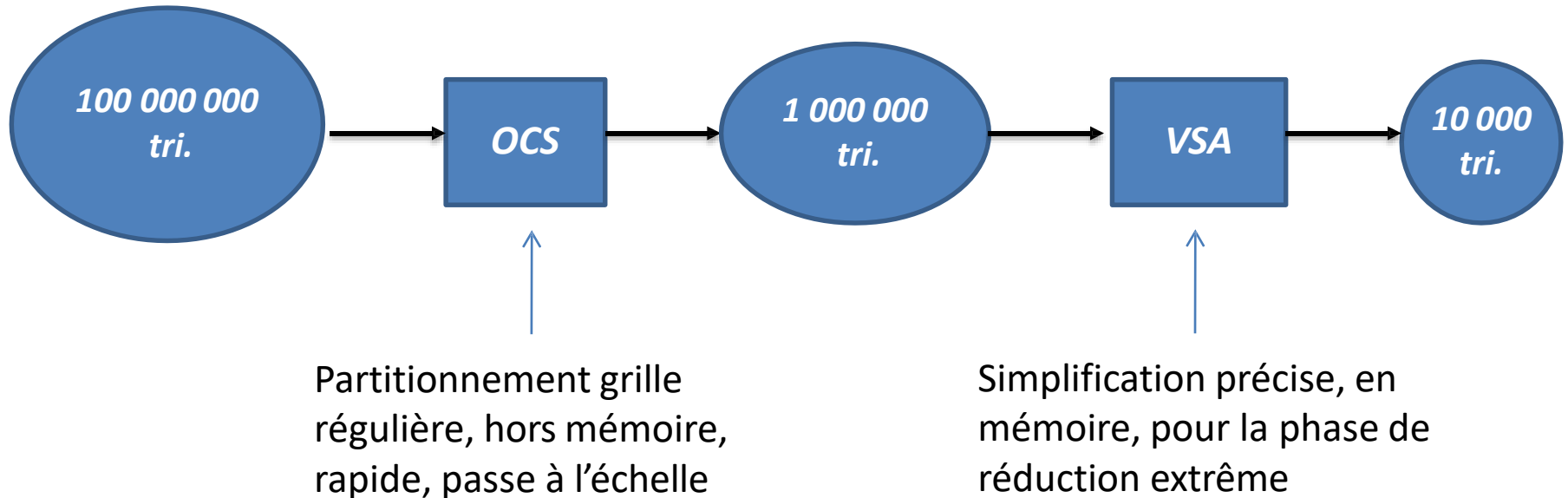
Partition L^2
(distance aux centre
des régions minimisée)



Partition $L^{2,1}$

Conclusion

Tous ces algorithmes peuvent être combinés à différentes échelles. Exemple:



L'opération de simplification de maillage est un cas particulier :

- d'optimisation géométrique
- de ré-échantillonnage géométrique → **remaillage**

Mémo Simplification

- 1993 : [Optimisation de maillage](#)
- 1993 : [Simplification par partitionnement](#) (OCS)
- 1996 : [Maillages progressifs](#) (PM)
- 1997 : [Quadrique d'Erreur](#) (QEF/QEM)
- 2000 : [Simplification hors-mémoire](#) (OCS)
- 2004 : [Partitionnement variationnel](#) (VSA)
- 2009 : [Simplification de Maillages Quad](#)
- 2013 : [Sphere-Meshes](#)