Prof. Dr. Nelson José Freitas da Silveira - DCC

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

24 de agosto de 2020

Transcrito com muito zelo por José Carlos Tobias da Silva.
*Ciência da Computação - 2016.1.08.007 - **UNIFAL-MG**.*

Conteúdo

NOTAS DE AULA 1

Conjuntos

1.1 Conceitos

1.1.1 Conjuntos

Sinônimo de agrupamento, coleção, classe, etc. representado com letras maiúsculas.

Exemplo 1:

$$A, B, F$$

1.1.2 Elementos

Objetos que constituem determinado conjunto, são chamados de elementos do conjunto e representados por letras minúsculas.

Exemplo 2:

$$a, b, f$$

1.1.3 Pertinência

Um elemento pode pertencer ou não a um conjunto. Para indicar pertinência, utilizamos o símbolo $\in$, e quando não pertence utilizamos o $\notin$.

- $X \in A$ (Lê-se: X pertence a A)
- $X \notin B$ (Lê-se: X não pertence a B)

*Tais símbolos são usados para representar a relação de elemento com conjunto.

1.2 Representação de um conjunto

Um conjunto pode ser representado por 2 formas:

1.2.1 Por enumeração

Podemos representar um conjunto enumerando seus elementos.

Exemplo 1: Conjunto dos números positivos pares, menores que 10:

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

1.2.2 Por propriedade

Podemos representar por meio de uma prioridade que caracteriza seus elementos.

Exemplo 2:

- $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 8\}$
- $B = \{x \mid x \text{ é vogal}\}$

A propriedade permite estabelecer se um dado elemento, pertence ou não a um conjunto.

1.2.3 Exemplos

Exemplo 1: Sendo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, dar por enumeração, os seguintes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$

• **Solução**: É determinado pela expressão $x = 3k$, com $k \in \mathbb{N}$, logo:

$$\begin{aligned} k = 0 &\implies x = 3 \cdot 0 = 0 \\ k = 1 &\implies x = 3 \cdot 1 = 3 \\ k = 2 &\implies x = 3 \cdot 2 = 6 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Logo: $A = \{0, 3, 6, ...\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$

• **Solução**: Os elementos são determinados pela expressão $x = 2^k$, com $k \in \mathbb{N}$, logo:

$$\begin{aligned} k = 0 &\implies x = 2^0 = 1 \\ k = 1 &\implies x = 2^1 = 2 \\ k = 2 &\implies x = 2^2 = 4 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Logo: $B = \{1, 2, 4, ...\}$

Exemplo 2: Representar o conjunto $A = \{0, 4, 8, 12, ...\}$ por meio de uma propriedade.

- **Solução**: Os elementos de A variam de 4 em 4, logo:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 4k, k \in \mathbb{N}\}$$

Exercício: Escrever por enumeração o conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

- **Solução**: Os elementos de A são raízes da equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$$
$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$
$$x = 2 \text{ ou } x = 3$$

Logo, $A = \{2, 3\}$.

1.3 Diagrama de Venn

Toda figura utilizada para representar um conjunto é chamada diagrama de Venn.

Exemplo 1: O conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ pode ser representado por:

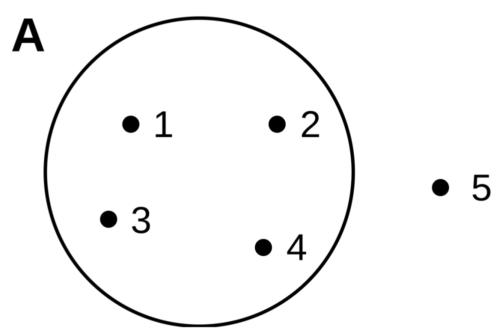


Figura 1.1: Demonstração de membros de um conjunto.

Observe que:

$$2 \in A \text{ (ponto interno a A)}$$
$$5 \notin A \text{ (ponto externo a A)}$$

1.4 Igualdade entre conjuntos

Sejam:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e}$$
$$B = \{4, 3, 2, 1\}$$

Nota-se que A e B possuem os mesmo elementos. Para:

$$A = \{x | x \text{ é par e menor que } 10\} \text{ e}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

Novamente A e B possuem os mesmo elementos.

Logo, $A = B$, pois possuem os mesmos elementos. A negação da igualdade é indicada por $A \neq B$.

Exemplo 1:

$$\left.\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5\} \\ B &= \{0, 1, 4, 8\} \end{aligned}\right\} A \neq B \tag{1.1}$$

1.5 Conjunto unitário

Definição: chama-se conjunto unitário aquele que possui um único elemento.

Exemplo 1:

1. Conjunto das soluções da equação: $3x + 1 = 10$
   - **Solução**: $\{3\}$
2. Conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Uruguai:
   - **Solução**: {Rio Grande do Sul}

1.6 Conjunto vazio

Definição: Conjunto que não possui elemento algum. O símbolo usual para o conjunto vazio é $\emptyset$. Um conjunto vazio é obtido quando descrevemos um conjunto através de uma propriedade P logicamente falsa.

Exemplo 1:

1. $\{x|x \neq x\} = \emptyset$
2. $\{x|x$ é ímpar e múltiplo de 2 $\} = \emptyset$
3. $\{x|x < 0$ e $x > 0\} = \emptyset$

1.7 Principais símbolos lógicos

- $|$: tal que
- $\exists$: existe ao menos um
- $\exists!$: existe um único
- $\forall$: qualquer que seja ou para todo
- $\Longrightarrow$: implicação ou então
- $\Longleftrightarrow$: equivalente ou se e somente se

1.8 Subconjuntos

Definição: Dados 2 conjuntos A e B, dizemos que A é subconjunto de B, se e somente se, cada elemento do conjunto A, é também um elemento do conjunto B.

Indicamos por:

$$A \subset B \text{ (Lê-se A está contido em B)}$$

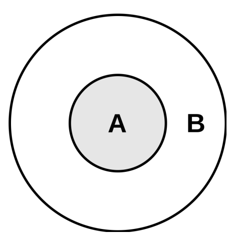


Figura 1.2: Demonstração de um conjunto A contido em um conjunto B.

Em símbolos:

$$A \subset B \Longleftrightarrow (\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

Exemplo 1:

- $\{a,b\} \subset \{a,b,c,d\}$
- $\{a\} \subset \{a,b\}$
- $\{a,b\} \subset \{a,b\}$
- $\{x|x$ é inteiro e par$\} \subset \{x|x$ é inteiro$\}$

Também podemos escrever $B \supset A$ (Lê-se B contém A).

Com a notação $A \not\subset B$, indicamos que A não está contido em B, logo, existe ao menos 1 elemento de A que não pertence a B.

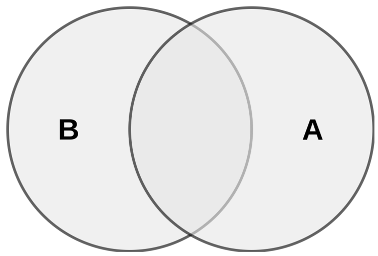


Figura 1.3: $A \not\subset B$

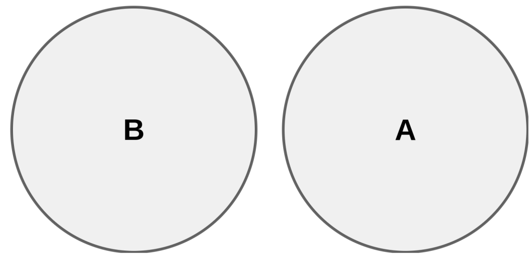


Figura 1.4: $A \not\subset B$

Com a igualdade de conjuntos podemos representar como:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$$

Todo elemento de A é elemento de B e vice-versa, ou seja, $A \subset B$ e$B \subset A$, logo:

$$A = B \iff (A \subset B \text{ e } B \subset A)$$

1.9 Exercícios Propostos

1. Dados $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,4\}$, pede-se:

   a) Reescrever com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:

      1^o) 3 é elemento de A
      - **Solução**: $3 \in A$

      2^o) 1 não está em B
      - **Solução**: $1 \notin B$

      3^o) B é parte de A
      - **Solução**: $B \subset A$ ou $A \supset B$

      4^o) B é igual a A
      - **Solução**: $\emptyset$

      5^o) 4 pertence a B
      - **Solução**: $4 \in B$

   b) Classificar as sentenças anteriores em V ou F

1^o) (V)
2^o) (V)
3^o) (V)
4^o) (F)
5^o) (V)

2. Sendo $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{1,3,4\}$ e $D = \{1,2,3,4\}$, classificar em V ou F cada sentença abaixo e justificar

   a) $A \subset D$:
   b) $A \subset B$:
   c) $B \subset C$:
   d) $D \supset B$:
   e) $C = D$:
   f) $A \not\subset C$:

1.9.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. (V), pois $1 \in A$, $1 \in D$, $2 \in A$ e $2 \in D$.
2. (F), pois $1 \in A$ e $1 \notin B$.
3. (F), pois $2 \in B$ e $2 \notin C$.
4. (V), pois $2 \in B$ e $2 \in D$, $3 \in B$ e $3 \in D$.
5. (F), pois $2 \in D$ e $2 \notin C$.
6. (V), pois $2 \in A$ e $2 \notin C$.

NOTAS DE AULA 2

Conjuntos

2.1 Conjunto Universo

Definição: O conjunto que contém todos os outros conjuntos chama-se conjunto universo (U).

2.2 Conjunto das partes

Definição: O conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto A é denominado conjunto das partes de A, sendo indicado por P(A), onde:

$$\mathrm{P(A)} = \{x \mid x \in \mathrm{A}\}$$

Exemplo 1: Se $\mathrm{A} = \{a\}$ os elementos de P(A) são $\emptyset$ e $\{a\}$, isto é:

$$\mathrm{P(A)} = \{\emptyset, \{a\}\}$$

Se $\mathrm{A} = \{a, b\}$ os elementos de P(A) são $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ e $\{a, b\}$ isto é:

$$\mathrm{P(A)} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Se $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$, os elementos de P(A) são:

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} = \mathrm{P(A)}$$

Logo, $|\mathrm{P(A)}| = 2^n$ onde n é o número de elementos do conjunto.

2.3 Reunião de conjuntos

Definição: Dados dois conjuntos A e B, chama-se reunião de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

O conjunto $A \cup B$ (lê-se A união B) é formado pelos elementos que pertencem a pelos menos um dos conjuntos A ou B.

Exemplos 1:

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cup \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b, c\} \cup \emptyset = \{a, b, c\}$

Em diagrama:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$B = \{1, 3, 5, 7\}$
$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

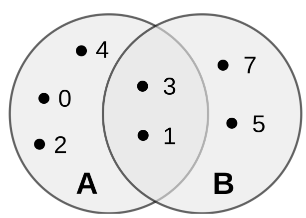


Figura 2.1: Diagrama de Venn para $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

b) $A = \{0, 1, 2\}$
$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\} = B$

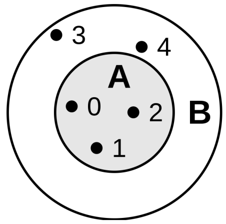


Figura 2.2: Diagrama de Venn para $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\} = B$

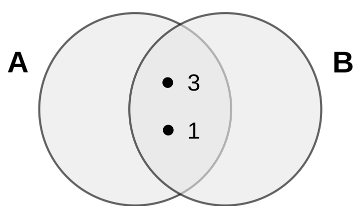
2.3.1 Intersecção de conjuntos

Definição: Dados dois conjuntos A e B, chama-se intersecção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertençam a A e B.

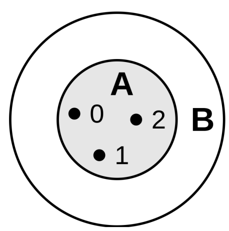
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Exemplos:

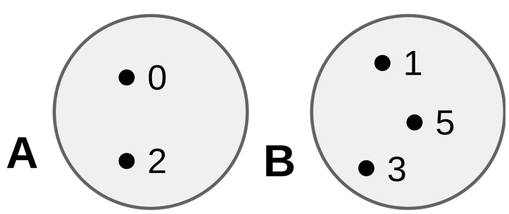
Exemplo 1: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$B = \{1, 3, 5, 7\}$
$A \cap B = \{1, 3\}$



Exemplo 2: $A = \{0, 1, 2\}$
$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$A \cap B = \{0, 1, 2\} = A$



Exemplo 3: $A = \{0, 2\}$
$B = \{1, 3, 5\}$
$A \cap B = \emptyset$



2.3.2 Diferença de conjuntos

Definição: Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A} \text{ e } x \notin \mathrm{B}\}$$

Exemplo 1:

a) $\{a, b, c\} - \{b, c, d, e\} = \{a\}$

b) $\{a, b, c\} - \{b, c\} = \{a\}$

c) $\{a, b\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$

d) $\{a, b\} - \{a, b, c, d, e\} = \emptyset$

2.3.3 Complementar de B em A

Definição: Dados dois conjuntos A e B, tais que $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, chama-se complementar de B em relação a A, o conjunto $\mathrm{A} - \mathrm{B}$, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

Símbolo:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \text{ ou } \overline{\mathrm{A}}$$

Esta simbologia indica **"o complemento de B em relação a A"**. Notemos que $\mathrm{C}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$ só é definido para $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ e aí temos:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = \mathrm{A} - \mathrm{B}$$

Exemplo 1::

a) Se $\mathrm{A} = \{a, b, c, d, e\}$ e $\mathrm{B} = \{c, d, e\}$, então:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = \mathrm{A} - \mathrm{B} = \{a, b\}$$

b) Se $\mathrm{A} = \{a, b, c, d\} = \mathrm{B}$ então:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = \emptyset$$

Observação: O complementar de B em relação a A é o que falta para B ficar igual a A.

2.4 Propriedades

2.4.1 Inclusão ($\subset$)

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \subset A$
2. $A \subset A$ (reflexiva)
3. $A \subset B$ e $B \subset A \implies A = B$ (anti-simétrica)
4. $A \subset B$ e $B \subset C \implies A \subset C$ (transitiva)

2.4.2 União ($\cup$)

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1. $A \cup A = A$ (idempotente)
2. $A \cup \emptyset = A$ (elemento neutro)
3. $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

2.4.3 Intersecção ($\cap$)

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1. $A \cap A = A$ (idempotente)
2. $A \cap U = A$ (elemento neutro)
3. $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

2.5 Exercícios Propostos

1. Construir o conjunto das partes do conjunto $A = \{a, b, c, d\}$

2. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$ determinar o conjunto X tal que:

    a) $X \cup B = A \cup C$:

    b) $X \cap B = \emptyset$:

2.5.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. $n\text{P}(A) = 2^4 = 16$, logo:

$$\begin{aligned}\text{P}(A) = &\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\},\\ &\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\},\\ &\{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\},\\ &\{b, c, d\}, \{c, d, a\}, \{A\}\}\end{aligned}$$

2. a) $X \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, então, os possíveis elementos de X são:

$$1, 2, 3 \text{ e } 4$$

    b) $X \cap B = \emptyset \implies 3 \notin X$ e $4 \notin X$
    Conclusão:

$$X = \{1, 2\}$$

NOTAS DE AULA 3

Conjuntos Numéricos

3.1 Conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Um subconjunto importante de $\mathbb{N}$ é o conjunto $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} \implies \text{zero foi excluído}$$

Ordenando sobre uma reta, temos:

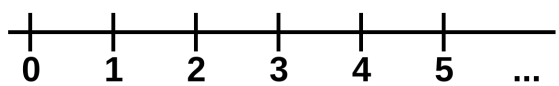


Figura 3.1: Demonstração de $\mathbb{N}$ sobre a reta real

3.2 Conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3. -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Além do $\mathbb{N}$ convém destacar os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$
- $\mathbb{Z}_+$ = Conjunto dos inteiros positivos
- $\mathbb{Z}_-$ = Conjunto dos inteiros negativos

Observe que $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.
Ordenando $\mathbb{Z}$ sobre uma reta, temos:

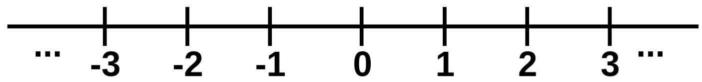


Figura 3.2: Demonstração de $\mathbb{Z}$ sobre a reta real

3.3 Conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$

Acrescentando as frações positivas e negativas aos números inteiros, teremos os números racionais $\mathbb{Q}$.

Então: $-2, -\frac{5}{4}, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{3}{5}, 1, \frac{3}{2}$ por exemplo são números racionais.

Todo número racional pode ser colocado na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

Exemplo 1:

- $-2 = -\frac{2}{1} = -\frac{4}{2} = -\frac{6}{3}$
- $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$
- $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$

Assim podemos escrever:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

Consideremos a representação decimal de um número racional $\frac{a}{b}$, que se obtém dividindo-se a por b

1. $\frac{1}{2} = 0,5 \quad -\frac{5}{4} = -1,25 \quad \frac{75}{20} = 3,75$
   Estes exemplos referem-se aos decimais exatos ou finitos.

2. $\frac{1}{3} = 0,333... \quad \frac{7}{6} = 1,1666... \quad \frac{6}{7} = 0,857142857142...$
   Estes exemplos referem-se aos decimais periódicos ou infinitos.

Então todo decimal exato ou periódico pode ser representado na forma de um número racional $\frac{a}{b}$. Os números racionais podem ser expressos sobre a reta, como segue:

Observando o gráfico notamos que:

1. Entre dois inteiros nem sempre existe outro inteiro

2. Entre dois racionais sempre existe outro racional

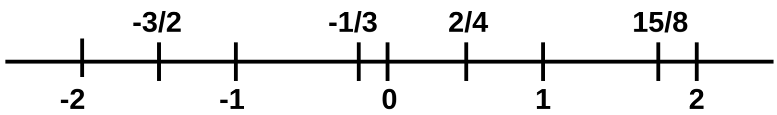


Figura 3.3: Reta real com números racionais $\mathbb{Q}$.

3.4 Números Irracionais $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

Consideremos, por exemplo, os número $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, e vamos determinar sua representação decimal:

$$\sqrt{2} = 1,14142135...$$
$$\sqrt{3} = 1,73205080...$$

Observamos que existem decimais infinitos, não periódicos, as quais damos o nome de <u>números irracionais</u> que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$.

Um número irracional bastante conhecido é o número $\pi = 3,1415926535....$

3.5 Exercícios Resolvidos

1. Assinale V ou F a cada uma das seguintes afirmações:

   a) $-7 \in \mathbb{N}$:
      - **Solução**: (F)

   b) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$:
      - **Solução**: (F)

   c) $4 \in \mathbb{Z}$:
      - **Solução**:(V)

   d) $-6 \in \mathbb{Q}$:
      - **Solução**: (V)

   e) $\sqrt{10} \in \{\text{irracionais}\}$:
      - **Solução**: (V)

   f) $3\pi \in \mathbb{Q}$:
      - **Solução**: (F)

   g) $-\pi \in \{\text{irracionais}\}$:
      - **Solução**: (V)

   h) $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$:
      - **Solução**: (F)

   i) $\sqrt{-5} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$:
      - **Solução**: (F)

   j) $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$:
      - **Solução**: (V)

   k) $\sqrt[3]{8} \in \mathbb{N}$:
      - **Solução**: (V)

   l) $0,16666... \in \mathbb{Q}$:
      - **Solução**: (V)

m) $0,202002000... \in \mathbb{Q}$:
- **Solução**: (V)

n) $\sqrt{\frac{9}{4}} \in \mathbb{Q}$:
- **Solução**: (V)

o) $0,010010001... \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$:
- **Solução**: (F)

p) $-2 \in \mathbb{Z}$:
- **Solução**: (V)

q) $\pi \in \{\text{irracionais}\}$:
- **Solução**: (V)

r) $\pi^3 \in \mathbb{Q}$:
- **Solução**: (F)

3.6 Números Reais $\mathbb{R}$

Dados $\mathbb{Q}$ e {irracionais}, define-se o conjunto dos números reais como:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irracionais}\} = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$$

Assim, são números reais:

- Os $\mathbb{N}$
- Os $\mathbb{Z}$
- Os $\mathbb{Q}$
- Os {irracionais} *indicados pela letra I no diagrama

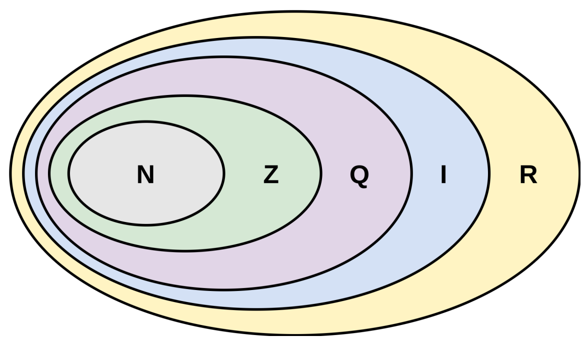


Figura 3.4: Representação dos conjuntos numéricos

Como subconjuntos importantes de $\mathbb{R}$ temos:

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$
- $\mathbb{R}_+ = =$ Conjunto dos reais positivos
- $\mathbb{R}_- = =$ Conjunto dos reais negativos

Logo chegamos a representação da reta real:

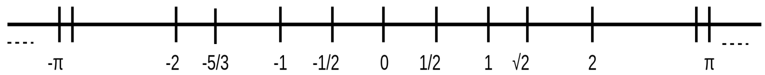


Figura 3.5: Representação da reta nos números reais

3.7 Relação de ordem no conjunto $\mathbb{R}$

Sejam dois números reais quaisquer a e b:

- Entre a e b, poderá ocorrer uma e somente uma das relações:

$$a = b \text{ ou } a > b \text{ ou } a < b$$

- $a \leq b$ (lê-se a menor ou igual a b)
- $a \geq b$ (lê-se a maior ou igual a b)
- Um número real c está entre a e b se e somente se $a < c$ e $c < b$. Podemos representar como: $a < c < b$.

3.8 Exercícios Propostos

1. Usando a notação de desigualdade, escreva as seguintes relações:

   a) x está situado à direita de 10 na reta real:

   b) y está situado entre -1 e 6 na reta real:

   c) x está situado à esquerda de -2 na reta real:

   d) z é um número positivo, ou seja, está situado à direita de 0 na reta real:

   e) x está situado entre 2 e 7 na reta real:

   f) x é um número negativo, ou seja, está situado à esquerda de 0 na reta real:

3.8.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. a) $x > 10$

   b) $-1 < y < 6$

   c) $x < -2$

   d) $z > 0$

   e) $2 < x < 7$

   f) $x < 0$

NOTAS DE AULA 4

Intervalos

Dados dois números reais a e b, com $a < b$, definimos:

a) Intervalo aberto de extremos a, b é o conjunto:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Figura 4.1: Representação gráfica para $]a, b[$

b) Intervalo fechado de extremos a, b é o conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Figura 4.2: Representação gráfica para $[a, b]$

c) Intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita) de extremos a, b é o conjunto:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

d) Intervalo fechado à direita (ou aberto à esquerda) de extremos a, b é o conjunto:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

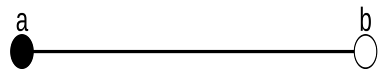


Figura 4.3: Representação gráfica para $[a, b[$

Figura 4.4: Representação gráfica para $]a, b]$

4.1 Exemplos

Exemplo 1: $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$, intervalo aberto

Exemplo 2: $[-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$, intervalo fechado

Exemplo 3: $[\frac{2}{5}, 7[= \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leq x < 7\}$, intervalo fechado à esquerda

Exemplo 4: $]-\frac{1}{3}, \sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x \leq \sqrt{2}$, intervalo fechado à direita

Definimos como intervalos infinitos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$, com sua representação na reta real:

1^o. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} =]a, +\infty[$

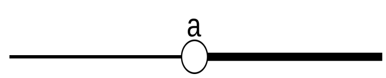


Figura 4.5: Representação gráfica para $x > a$

2^o. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, +\infty[$

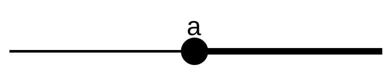


Figura 4.6: Representação gráfica para $x \geq a$

3^o. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =]-\infty, a[$

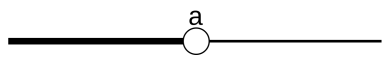


Figura 4.7: Representação gráfica para $x < a$

4^o. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} =]-\infty, a]$

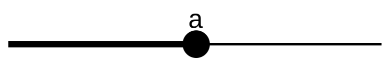


Figura 4.8: Representação gráfica para $x \leq a$

5^o. Logo, o intervalo $]-\infty, +\infty = \mathbb{R}$.

4.2 Sistema Cartesiano

Definição: É um sistema constituído por dois eixos, x e y, perpendiculares entre si.

O eixo x é denominado <u>eixo das abscissas</u>.

O eixo y é denominado <u>eixo das ordenadas</u>.

Estes eixos dividem o plano em <u>quadrantes</u>.

Exemplo 1: Localização no plano do ponto P com coordenadas $(x, y) = (a, b)$:

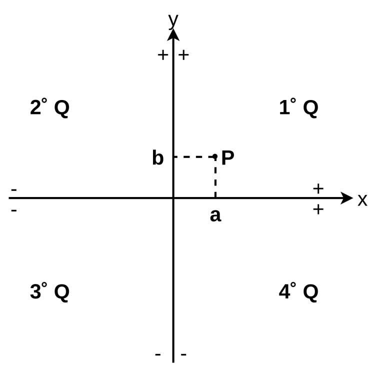


Figura 4.9: Demonstração do plano cartesiano com ponto P de coordenadas $(x, y) = (a, b)$

4.2.1 Par Ordenado

Definição: Para cada elemento a e cada elemento b, admitiremos a existência de um terceiro elemento (a,b) que denominamos par ordenado de modo que se tenha:

$$(a,b) = (c,d) \iff a = c \text{ e } b = d$$

Exemplos:

Exemplo 1: Localize os pontos no plano cartesiano:
$\mathrm{A}(0,2), \mathrm{B}(0,-3), \mathrm{C}(2,5), \mathrm{D}(-3,4)$

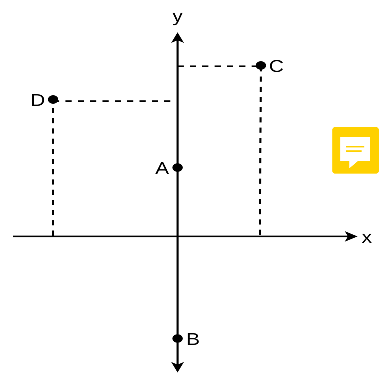


Figura 4.10: Localização dos pontos A, B, C e D no plano cartesiano

Exemplo 2: Calcular x e y de modo que os pares ordenados $(x+y, x-y)$ e $(3,5)$ sejam iguais:

$$\begin{cases} x + y = 3 \text{ (I)} \\ x - y = 5 \text{ (II)} \\ \quad 2x = 8 \text{ (I + II)} \end{cases} \tag{4.1}$$

Então:

$$x = 4 \tag{4.2}$$

Pela equação (I) $(x + y = 3)$:

$$\begin{aligned} 4 + y &= 3 \\ y &= 3 - 4 \\ y &= -1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Então $(x+y, x-y) = (4-1, 4+1) = (3,5)$.

4.3 Exercícios Propostos

1. Descrever, conforme a notação da teoria dos conjuntos, os seguintes intervalos:

   a) $[-1,3]$

   b) $[0,2[$

   c) $]-3,4[$

   d) $]-\infty,5[$

   e) $[1,+\infty[$

2. Utilizando a representação gráfica dos intervalos sobre a reta real, determinar $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo $A = [0,3]$ e $B = [1,4]$

3. Descrever os seguintes conjuntos:

   a) $[0,2] \cap [1,3]$

   b) $[0,2] \cap]1,3[$

   c) $]-1,\frac{2}{3}[\cap]0,\frac{4}{3}[$

   d) $]-\infty,2] \cap [0,+\infty[$

4. Determinar os seguintes conjuntos:

   a) $[-1,3] \cup [0,4]$

   b) $]-2,1] \cup]0,5[$

   c) $[-1,3] \cup [3,5]$

   d) $[-\frac{1}{2},0[\cup]-\frac{3}{2},-\frac{1}{4}]$

5. Sendo $A = [0,5[$ e $B =]1,3[$, determinar C_A^B

4.3.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. a) $[-1,3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$

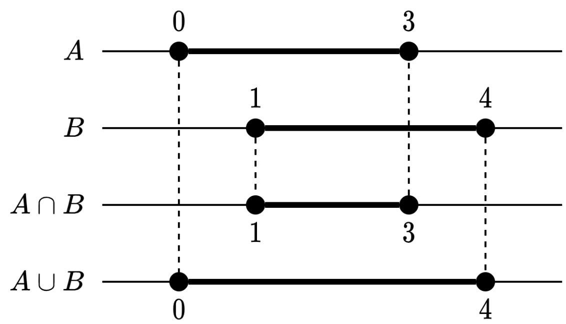
   b) $[0,2[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}x$

   c) $]-3,4[= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$

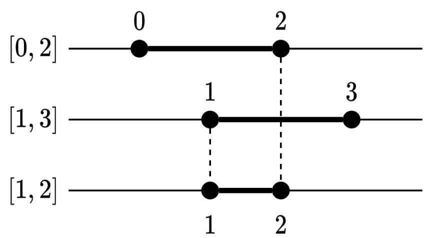
   d) $]-\infty,5[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

   e) $[1,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

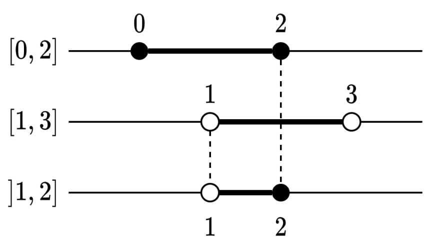
2.



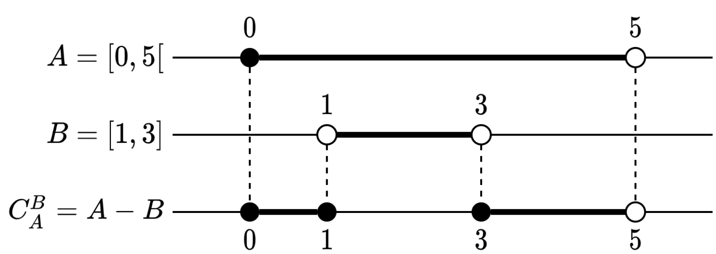
3. a)



b)



5.



Logo, $C_A^B = [0,1] \cup [3,5[$

Notas de Aula 5

Produto Cartesiano

Definição: Sejam dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se produto cartesiano de A por B o conjunto formado pelos pares ordenados nos quais o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Observações:

1. Se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ por definição: $A \times B = \emptyset$, isto é, $A \times \emptyset = \emptyset$ ou $\emptyset \times B = \emptyset$
2. Se $A = B$, podemos escrever o produto cartesiano $A \times A$ como A^2, isto é, $A \times A = A^2$
3. Sendo A e B não vazios, temos $A \times B \neq B \times A$. Ou seja, não há comutatividade
4. Se A e B são conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente, então $A \times B$ é um conjunto finito com $m \times n$ elementos
5. Se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio, então $A \times B$ é um conjunto infinito

5.0.1 Exemplos

Exemplo 1: Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$ temos:
$A \times B = \{1, 1, (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

As representações no plano cartesiano são as seguintes:

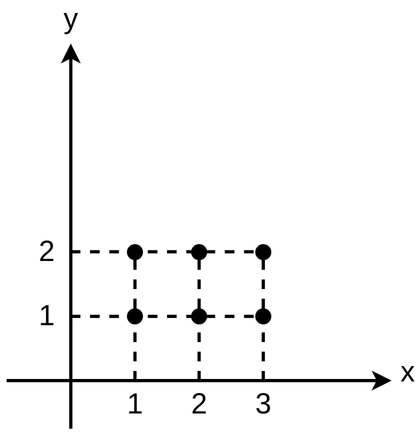


Figura 5.1: Representação de $A \times B$

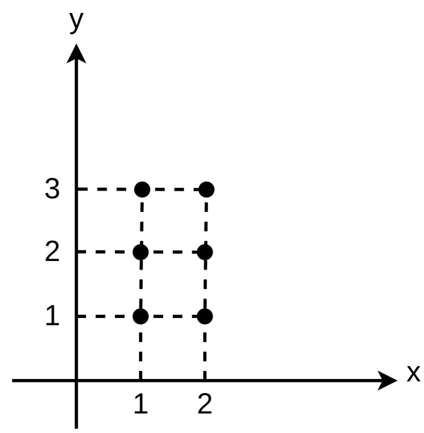


Figura 5.2: Representação de $B \times A$

Exemplo 2: Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3$ e $B = \{2\}$, logo $A \times B = \{(x,2) | x \in A$ e $2 \in B$.

A representação gráfica de $A \times B$ dá como resultado o conjunto de pontos paralelo ao eixo x da figura abaixo:

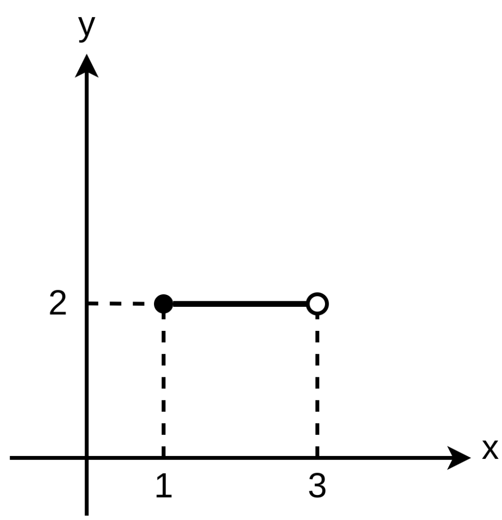


Figura 5.3: Representação no plano cartesiano de $A \times B = \{(x,2) \mid x \in A$ e $2 \in B\}$

Exemplo 3: Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ temos $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3$ e $1 \leq y \leq 5\}$.
Graficamente é representado por um retângulo, distinto do anterior:

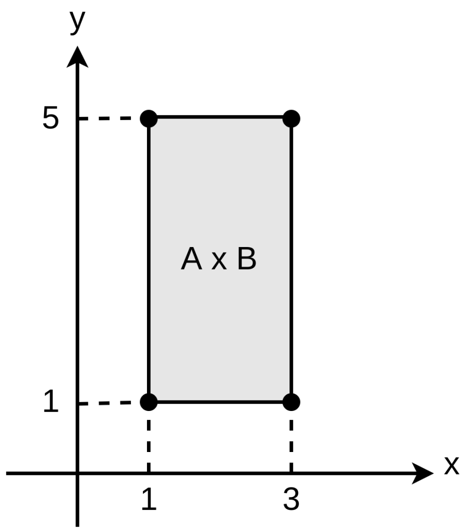


Figura 5.4: Representação no plano cartesiano de $A \times B$

Observação: Como A e B são intervalos e produto cartesiano, neste caso será o conjunto dos pontos do plano hachurado na figura.

5.0.2 Exercícios Resolvidos

1. Dados $A = \{1,3,4\}$, $B = \{-2,1\}$ e $C = \{1,2\}$, determine e represente-os pelo gráfico cartesiano

   a) $A \times B$
      - **Solução**: $A \times B = \{(1,-2),(1,1),(3,-2),(3,1),(4,-2),(4,1)\}$

   b) $B \times C$
      - **Solução**: $B \times C = \{(-2,1),(-2,2),(1,1),(1,2)\}$

   c) B^2
      - **Solução**: $B^2 = \{(-2,-2),(-2,1),(1,-2),(1,1)\}$

5.0.3 Exercícios Propostos

1. Dados os conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6\}$ e $C = \{1,2\}$ determine:

   a) $A \times (B - C)$

   b) $B \times C_A^C$

   c) $(A - B) \times (A - C)$

2. Dados os conjuntos:

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 3\} \\
B &= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 2\} \\
C &= \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le 1\}
\end{aligned}
$$

Representar graficamente os produtos:

a) $A \times B$

b) $A \times C$

c) $B \times C$

d) $C \times B$

Solução dos Exercícios Propostos

1. a) $\{(1,4),(1,6),(2,4),(2,6),(3,4),(3,6)\}$

   b) $\{(2,3),(4,3),(6,3)\}$

   c) $\{(1,3),(3,3)\}$

5.1 Número de Elementos do Produto Cartesiano

Observe:

- $A = \{0,1,2\} \implies n(A) = 3$
- $B = \{2,4\} \implies n(B) = 2$
- $A \times B = \{(0,2),(0,4),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4)\}$

  □ $A \times B \implies n(A \times B) = 3.2 = 6$

Logo:

$$n(A \times B) = n(A).n(B)$$

Exemplo 1: Sabendo que $\{(1,2),(4,2)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 9$, represente pelos elementos o conjunto A^2.

- **Solução**: A^2 representa o quadrado do número de elementos de A, logo:

$$n(A^2) = [n(A)]^2 \implies [n(A)]^2 = 9 \implies n(A) = 3$$

Se A é um conjunto de 3 elementos, $(1,2) \in A^2$ e $(4,2) \in A^2$, logo concluímos que $A = \{1,2,4\}$, sendo assim:

$$\begin{aligned} A^2 = A \times A = \{&(1,1),(1,2),(1,4),\\ &(2,1),(2,2),(2,4),\\ &(4,1),(4,2),(4,4)\} \end{aligned}$$

Exercício: Se $\{(1,-2),(3,0)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 16$, represente A^2 pelos seus elementos.

5.2 Relação Binária

Definição: Dados dois conjuntos A e B, chama-se relação binária de A em B todo subconjunto R de $A \times B$:

$$\mathsf{R} \text{ é uma relação binária de A em B} \iff \mathsf{R} \subset A \times B$$

Se eventualmente os conjuntos A e B forem iguais, todo subconjunto de $A \times A$ é chamado de relação binária em A.

$$\mathsf{R} \text{ é relação binária em A} \iff \mathsf{R} \in A \times A$$

Nomenclatura:

- A, conjunto de partida da relação R
- B, conjunto de chegada ou contradomínio da relação R
- Quando o par $(x,y) \in \mathsf{R}$, escrevemos $x\mathsf{R}y$
- Quando o par $(x,y) \notin \mathsf{R}$ escrevemos $x \not\mathsf{R} y$.

5.2.1 Exemplos

Exemplo 1: Se $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$ quais são os elementos da relação $\mathsf{R} = \{(x,y) \mid x < y\}$ de A em B?

- **Solução**: Temos:

$$\begin{aligned} \mathsf{R} = \{&(1,2),(1,3),(1,4),\\ &(2,3),(2,4),(3,4)\} \end{aligned}$$

Exemplo 2: Se $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ quais os elementos da relação binária R de A em B, assim definida: $x\mathsf{R}y \iff y = x+2$

• **Solução**: Fazem parte da relação todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in A$ e $y \in B$ tal que $y = x+2$. Utilizando as representações gráficas, temos:

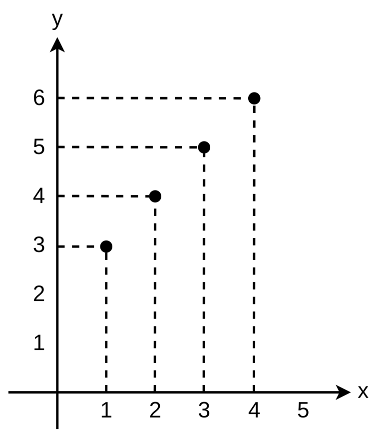


Figura 5.5: Representação de ARB

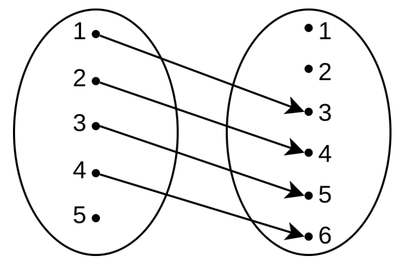


Figura 5.6: Domínio e imagem de R

NOTAS DE AULA 6

Domínio e Imagem

Definição: Se R é uma relação de A em B

- Chama-se <u>domínio</u> de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

$$x \in D \iff \exists y, y \in B \mid (x, y) \in R$$

- Chama-se <u>imagem</u> de R o conjunto Im de todos os segundo elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

$$y \in Im \iff \exists x, x \in A \mid (x, y) \in R$$

Da definição, temos:

$$D \subset A \text{ e } Im \subset B$$

6.0.1 Exemplos

Exemplo 1: Se $A = \{0, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qual é o domínio e imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y \text{ é múltiplo de } x\}$
• **Solução**: Pelo esquema das flechas, notamos que D é o conjunto dos elementos de A, dos quais partem flechas e quem Im é o conjunto dos elementos de B aos quais chegam as flechas, logo:
$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$
$D = \{2, 3, 4\}$ e $Im = \{2, 3, 4, 6\}$

Exemplo 2: Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 4\}$ qual o domínio e a imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$?
• **Solução**: Pela representação cartesiana temos:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\} \text{ e}$$
$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$$

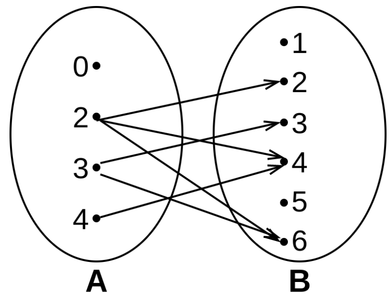


Figura 6.1: Representação de conjuntos para $A \times B$

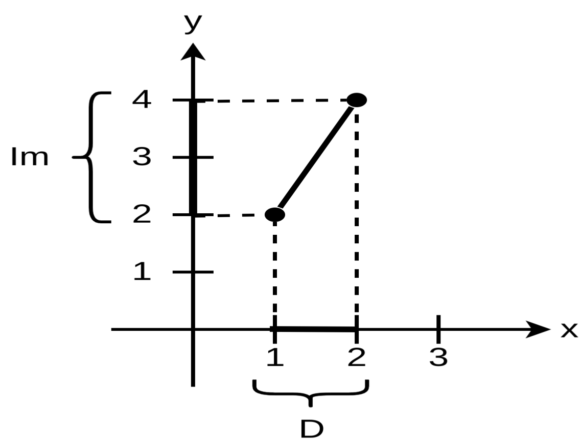


Figura 6.2: Representação cartesiana da relação R

6.0.2 Exercícios Resolvidos

1. Estabelecer o domínio(D) e a imagem(Im) das seguintes relações:

   a) $\{(1,1),(1,3),(2,4)\}$

$$D = \{1,2\}$$
$$Im = \{1,3,4\}$$

   b) $\left\{(2,1),(1,-3),(5,\sqrt{2})\right\}$

$$D = \{1,2,5\}$$
$$Im = \left\{-3,1,\sqrt{2}\right\}$$

c) $\left\{(1+\sqrt{2},2),(1-\sqrt{3},1)\right\}$

$$D = \left\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{3}\right\}$$
$$\mathrm{I}m = \left\{1, \sqrt{2}\right\}$$

2. Sejam os conjuntos $A = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ e $B = \{-2,-1,0,1,2\}$ e R a relação binária de A e B, definida por:

$$x\mathsf{R}y \iff x = y^2$$

Pede-se:

a) Enumerar os pares ordenados de R

$$\mathsf{R} = \{(0,0),(1,-1),(1,1),(4,-2),(4,2)\}$$

b) Enumerar os elementos do domínio e imagem de R

$$D = \{0,1,4\}$$
$$\mathrm{I}m = \{-2,-1,0,1,2\}$$

c) Fazer o gráfico cartesiano de R

y^2	x	(x,y)
$(-2)^2$	4	$(4,-2)$
$(-1)^2$	1	$(1,-1)$
$(0)^2$	0	$(0,0)$
$(1)^2$	1	$(1,1)$
$(2)^2$	4	$(4,2)$

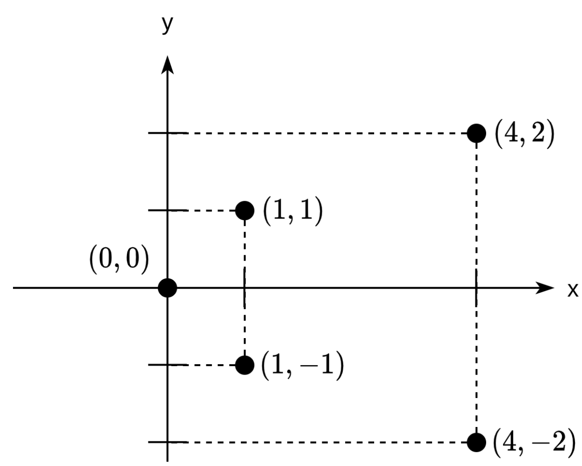


Figura 6.3: Representação gráfica da relação R entre os conjuntos A e B.

6.1 Relação Inversa

Definição: Seja uma relação binária R de A em B, consideramos o conjunto $\mathsf{R}^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in \mathsf{R}\}$

Como R^{-1} é um subconjunto de $B \times A$, então R^{-1} é uma relação binária de B em A a qual chamamos de <u>relação inversa de R</u>.

$$(y,x) \in \mathsf{R}^{-1} \iff (x,y) \in \mathsf{R}$$

Ou seja, da definição que R^{-1} é o conjunto dos pares ordenados obtidos à partir dos pares ordenados de R, invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

6.1.1 Exemplos

Exemplo 1: Se $A = \{2,3,4,5\}$ e $B = \{1,3,5,7\}$, quais são os elementos de R, sendo $\mathsf{R} = \{(x,y) \in A \times B \mid x < y\}$ e de R^{-1}?

- **Solução**:

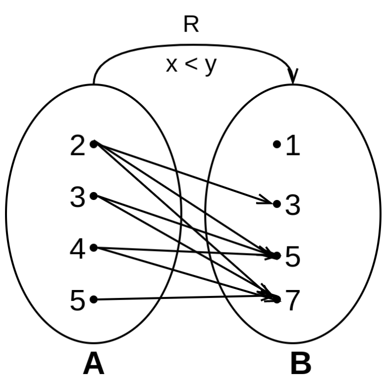


Figura 6.4: Esquema de flechas para $(x < y)$

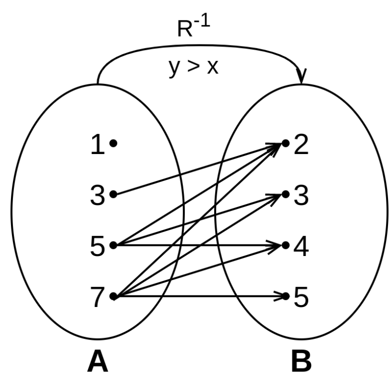


Figura 6.5: Esquema de flechas para $(y > x)$

$$\mathsf{R} = \{(2,3),(2,5),(2,7),(3,5),(3,7),(4,5),(5,7)\}$$
$$\mathsf{R}^{-1} = \{(3,2),(5,2),(7,2),(5,3),(7,3),(5,4),(7,5)\}$$

6.1.2 Propriedades

1. $D(\mathsf{R}^{-1} = Im(\mathsf{R})$

2. $\mathrm{I}m(\mathsf{R}^{-1}) = \mathrm{D}(\mathsf{R})$
3. $(\mathsf{R}^{-1})^{-1} = \mathsf{R}$

6.2 Funções

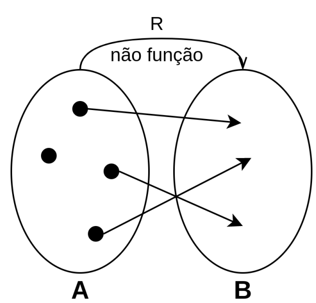
Definição: Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B, se e somente se, para todo $x \in \mathrm{A}$ existe um só $y \in \mathrm{B}$, tal que $(x, y) \in f$.

$$f \text{ é aplicação de A em B} \iff (\forall x \in \mathrm{A}, \exists y \in \mathrm{B} \mid (x, y) \in f)$$

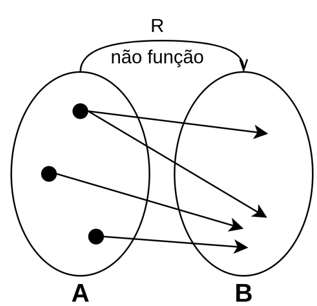
Com o auxílio do esquema de flechas, que condições deve satisfazer uma relação f de A em B para ser aplicação:

1. Todo $x \in \mathrm{A}$ participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A deve servir como ponto de partida de flecha
2. É necessário que cada elemento $x \in \mathrm{A}$ participe de apenas um único par $(x, y) \in f$, isto é, cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha

1. Se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma



2. Se existir um elemento de A do qual partam 2 ou mais flechas



Observação: Uma relação f não é aplicação (ou função) se não satisfazer uma das condições acima.

NOTAS DE AULA 7

Polinômios

Definição: Um polinômio em x é qualquer expressão na forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$
$$f_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1^x + a_0$$

Onde n é um número inteiro não negativo e $a_n \neq 0$. Os número $a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são números reais chamados coeficientes. O grau do polinômio é n. O coeficiente principal é a_n e a_0 é o termo independente.

7.1 Nomenclatura

Os polinômios com um, dois ou três termos são chamados monômios, binômios ou trinômios, respectivamente.

A forma padrão de um polinômio é com potências de x na ordem crescente.

Exemplo 1:

$$\mathrm{P}(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

Onde: $a_0 = 2$ (termo independente) , $a_1 = 1, a_2 = 5$,
$a_3 = 3$ e $a_4 = 1$ tendo-se o grau do polinômio igual a 4.

Exemplo 2: Identifique os polinômios pelos termos que os compõe:

a) $3x$ = monômio

b) $5abc$ = monômio

c) $3x + y$ = binômio

d) $5ab + 3cd^2$ = binômio

e) $x^2 + 3x + 7$ = trinômio

f) $3ab + 4xy - 10y$ = trinômio

Observações: Os trinômios são compostos por três monômios (3 termos), separados por operação de soma ou subtração.

Chama-se valor numérico de f em x a imagem de x pela função f, assim como por exemplo, dado o polinômio:

$$f(x) = 2 + x + x^2 + 3x^3$$

Onde o valor de $x = 2$, então:

$$f(2) = 2 + (2) + (2)^2 + 3(2)^3$$
$$f(2) = 2 + 2 + 4 + 24$$
$$f(2) = 32$$

Logo, a imagem de f no ponto $x = 2$ é 32.

Em particular, se x é um número real e f é um polinômio, tal que $f(x) = 0$ dizemos que x é "uma raiz"ou "um zero"de f. Por exemplo, os número -2 e -1 são raízes de:

$$f(x) = 2x + 3x^2 + x^3$$

pois:

$$f(-2) = 2(-2) + 3(-2)^2 + (-2)^3 = 0$$
$$f(-1) = 2(-1) + 3(-1)^2 + (-1)^3 = 0$$

7.2 Igualdade

Definição: Dizemos que dois polinômios f e g são igual (ou idênticos) quando assumem valores numéricos iguais para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja:

$$f = g \implies f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

7.3 Exercícios Resolvidos

1. Quais das expressões abaixo representam um polinômio na variável x?

   a) $x^5 + x^3 + 2$, Sim

   b) $0x^4 + 0x^2$, Sim

   c) 3, Sim

d) $x^{\frac{5}{2}} + 3x^2$, Não

e) $(\sqrt{x})^4 + x + 2$, Sim

f) $x\sqrt{x} + x^2$, Não

g) x^{15}, Sim

h) $x + 2$, Sim

i) $x^2 + 2x + 3$, Sim

2. Dada a função polinomial

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

pede-se para calcular: $f(-3)$, $f(2x)$ e $f(f(-1))$

- **Solução**:

Temos que:

$$\begin{aligned}
f(-3) &= (-3)^3 + (-3)^2 + (-3) + 1 = -20 \\
f(2x) &= (2x)^3 + (2x)^2 + (2x) + 1 = 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \\
f(f(-1)) &\Longrightarrow \\
f(-1) &= (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0 \Longrightarrow \\
f(f(-1)) &= f(0) = 1
\end{aligned}$$

7.4 Operações

7.4.1 Adição

Dados dois polinômios f e g, onde:

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

Chama-se soma de f com g o polinômio:

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$

isto é:

$$(f+g)(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$$

Exemplo 1: Somar $f(x)=4+3x+x^2$ e $g(x)=5+3x^2+x^4$:

$$\begin{array}{r}
f(x)=0x^4+0x^3+1x^2+3x+4\\
g(x)=1x^4+0x^3+3x^2+0x+5\\
\hline
(f+g)(x)=1x^4+0x^3+4x^2+3x+9
\end{array}$$

7.4.2 Substração

Dados dois polinômios f e g, segue pela definição anterior de adição, que:

$$(f-g)(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+...+(a_n-b_n)x^n$$

isto é:

$$(f-g)(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i-b_i)x^i$$

7.4.3 Multiplicação

Dados dois polinômios f e g, onde:

$$f=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$
$$g=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$$

Chama-se produto $f.g$ o polinômio:

$$(f.g)(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_1)x+(a_2b_0+a_1b_0+a_0b_2)x^2+...+a_mb_nx^{m+n}$$

Exemplo 1:

1. Multiplicar $f(x) = 3x^3 + 2x + x$ e $g(x) = 6x^2 + 5x + 4$, temos:

$$
\begin{aligned}
(f.g)(x) &= (3x^3 + 2x + x)(6x^2 + 5x + 4) \\
(f.g)(x) &= 3x^3(6x\text{š} + 5x + 4) + 2x(6x^2 + 5x + 4) + x(6x^2 + 5x + 4) \\
&= 18x^5 + 15x^4 + 12x^3 + 12x^3 + 10x^2 + 8x + 6x^3 + 5x^2 + 4x \\
&= 18x^5 + 15x^4 + 30x^3 + 15x^2 + 12x
\end{aligned}
$$

NOTAS DE AULA 8

Polinômios - Continuação

Aviso: Estudar os dispositivos práticos 1 e 2 página 55F do livro Fundamentos de matemática elementar: Polinômios.

8.1 Propriedades

as operações seguem as propriedades:

1. Associativa: $f(gh) = (fg)h, \forall f, g, h \in \mathsf{P}$

2. Comutativa:$fg = gf, \forall f, g \in \mathsf{P}$

3. Elemento Neutro: $\exists en \in \mathsf{P} \mid f.en = f, \forall f \in \mathsf{P}$

4. Distributiva: $f(g+h) = fg + fh, \forall f, g, h \in \mathsf{P}$

8.2 Divisão

Definição: Dados dois polinômios f (dividendo) e $g \neq 0$ (divisor), dividir f por g é determinar dois outros polinômios q (quociente) e r (resto), de modo que se atenda as seguintes condições:

i) $q.g + r = f$

ii) $\delta r < \delta g$ (ou $r = 0$ para divisão exata)

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \cline{2-2} \text{Resto} & \text{Quociente} \end{array}$$

Tabela 8.1: Método da chave para divisão de números reais e para polinômios

8.2.1 Método da Chave

O método da chave descreve o procedimento usado para divisões de números reais, ou seja:

Logo, para divisão de polinômios usando tal método, temos:

$$\begin{aligned} f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1 \text{ dividendo} \\ g(x) = x - 4 \text{ divisor} \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3} - 7x^2 + 4x - 1 & x - 4 \\ \cline{2-2} \cancel{-2x^3} + 8x^2 & 2x^2 + x + 8 \\ \hline \cancel{x^2} + 4x - 1 & \\ \cancel{-x^2} + 4x & \\ \hline \cancel{8x} - 1 & \\ \cancel{-8x} + 32 & \\ \hline 31 & \end{array}$$

Tabela 8.2: Divisão de polinômios f por g utilizando método da chave

Logo, a divisão de f por g nos dá $2x^2 + x + 8$ como coeficiente e resto $r = 31$. Neste tipo de divisão, r é um polinômio constante, pois:

$$\delta g = 1 \implies \delta r = 0 \text{ ou } r = 0$$

Notemos, finalmente que:

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 2(4)^3 - 7(4)^2 + 4(4) - 1 \\
&= 128 - 112 + 16 - 1 \\
&= 31 = r
\end{aligned}
$$

8.2.2 Exercícios Resolvidos

1. Dividir $f(x) = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ por $g(x) = x^2 - 2x + 3$.
   • **Solução**:
   Temos a operação dada por:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{3x^5} - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2}
\cancel{-3x^5} + 6x^4 - 9x^3 & 3x^3 + 4x - 1 \\ \cline{1-1}
\cancel{4x^3} - 9x^2 + 11x - 1 & \\
\cancel{-4x^3} + 8x^2 - 12x & \\ \cline{1-1}
\cancel{-x^2} - x - 1 & \\
\cancel{x^2} - 2x + 3 & \\ \cline{1-1}
-3x + 2 &
\end{array}
$$

   Com resultado:

$$
\frac{f(x)}{g(x)} = 3x^3 + 4x - 1 + \frac{-3x + 2}{x^2 - 2x + 3}
$$

2. Determinar a de modo que a divisão de $f(x) = x^4 - 2ax^3 + (a+2)x^2 + 3a + 1$ por $g(x) = x - 2$ apresente resto igual a 7.
   • **Solução**:
   Quando temos a divisão de um polinômio f com $\delta f \geq 1$, por um outro polinômio g com $\delta g = 1$, notamos que f aplicada à raiz de g, nos dá o resto da divisão de f po g. Assim:

$$\begin{aligned} g(x) &= x-2 \\ 0 &= x-2 \\ x &= 2 \implies f(2) = 7 \end{aligned}$$

E assim:

$$\begin{aligned} (2)^4 - 2a(2)^3 + (a+2)(2)^2 + 3a + 1 &= 7 \\ 16 - 16a + 4a + 8 + 3a + 1 &= 7 \\ -9a + 25 &= 7 \\ -9a &= -18 \\ a &= \frac{18}{9} \\ a &= 2 \end{aligned}$$

8.2.3 Exercícios Propostos

1. Dividir $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x + 7$ por $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Solução dos Exercícios Propostos

1.

8.3 Produtos Notáveis

Os produtos notáveis obedecem a leis especiais de formação, e por isso sua utilização permite agilizar determinados tipos de cálculos que, pelas regras normais da multiplicação de expressões, ficariam mais longos. Os produtos notáveis apresentam-se em grande número e dão origem a um conjunto de identidades de grande aplicação.

8.3.1 Quadrado da soma de dois termos

Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tais que:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

8.3.2 Quadrado da diferença de dois termos

Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tais que:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

8.3.3 Cubo da soma de dois termos

Seja $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

notemos que o número de termos é 4, pois obedecemos $n+1$, com $n = 3$ neste caso. O sinal de positivo se mantém e decrescemos a potência a partir do primeiro elemento a e a partir do primeiro elemento$b$.

8.3.4 Cubo da diferença de dois termos

Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tais que:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

8.3.5 Produto da soma pela diferença de dois termos

O produto da soma pela diferença dos mesmos dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo, ou seja:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

8.3.6 Exemplos

Exemplo 1: $(x+7)^2 = x^2 + 2x7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$

Exemplo 2: $(x-4)^2 = x^2 + 2x4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

Exemplo 3: $(x+7)^3 = x^3 + 3x^27 + 3x7^2 + 7^3 = x^3 + 21x^2 + 147x + 343$

Exemplo 4: $(x-4)^3 = x^3 - 3x^24 + 3x4^2 + 4^2 = x^3 - 12x^2 + 48x + 16$

Exemplo 5: $(x+7)(x-7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$

8.4 Triângulo de Pascal

Para se obter a soma ou diferença de dois termos elevados à potências superiores, utilizamos um método prático chamado de triângulo de Pascal. Logo, segue:

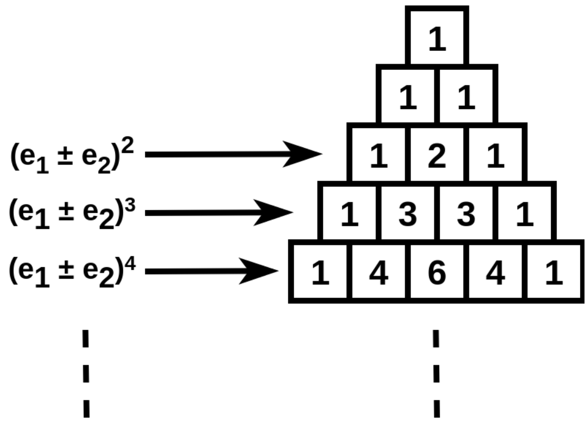


Figura 8.1: Triângulo de Pascal

8.4.1 Exemplos de uso

Exemplo 1: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Exemplo 2: $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Os produtos notáveis têm aplicação direta na fatoração para cálculo usando funções polinomiais.

NOTAS DE AULA 9

Funções e Não Funções

1. A relação de f de A em $\mathbb{R}$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$ é função pois toda reta vertical conduzida pelos pontos $x \in A$ encontra o gráfica de f num só ponto.

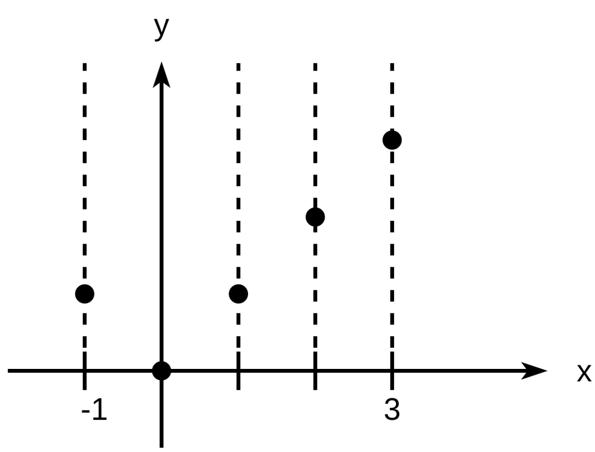
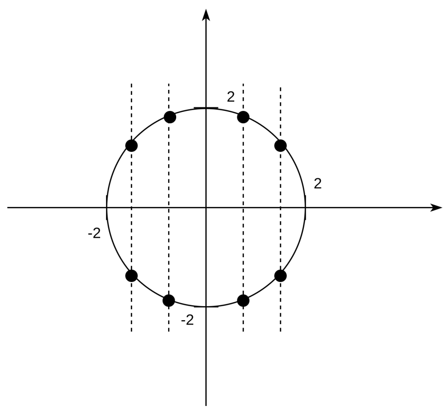


Figura 9.1: Demonstração de função f

2. A relação f de A em R, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ não é função, pois há retas verticais que encontra o gráfico de f em 2 pontos.



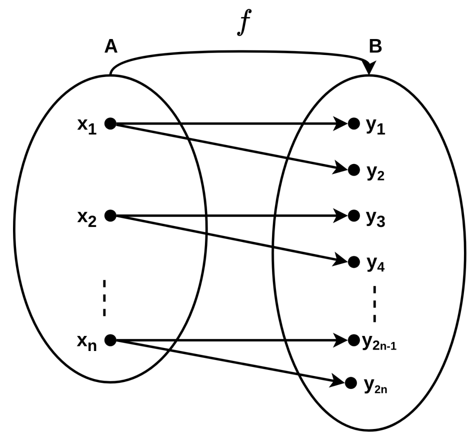


Figura 9.2: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

3. A função f de A em $\mathbb{R}$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$ não é função de A em $\mathbb{R}$, pois a reta vertical conduzida pelo ponto $(1,0)$ não encontra o gráfico de f. Se f fosse função de B em $\mathbb{R}$, onde $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$ poderíamos observar uma função f.

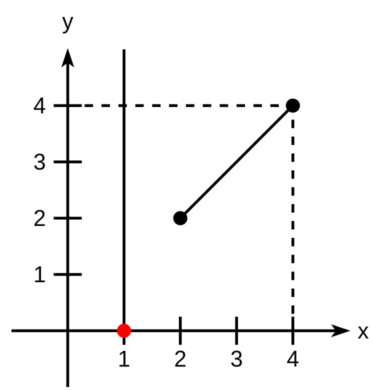
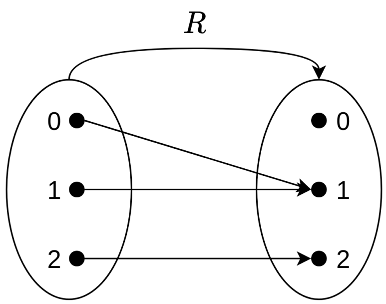
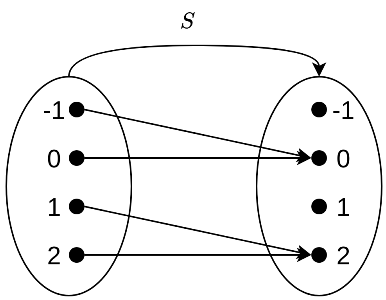


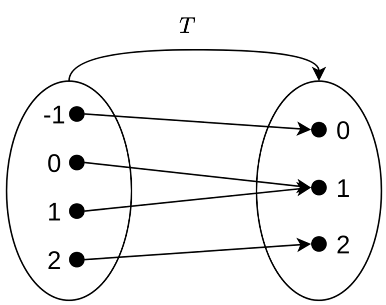
Figura 9.3: Função f de A em $\mathbb{R}$

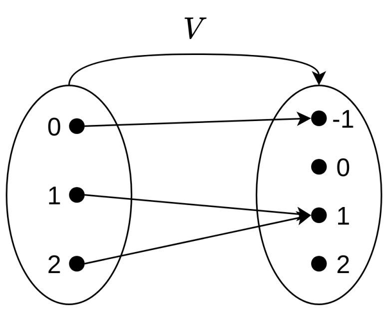
9.1 Exercícios Resolvidos

1. Quais dos esquemas abaixo definem uma função de $A = \{0, 1, 2\}$ em $B = \{-1, 0, 1, 2\}$?

a) 

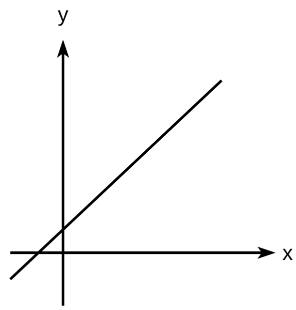
b) 

c) 

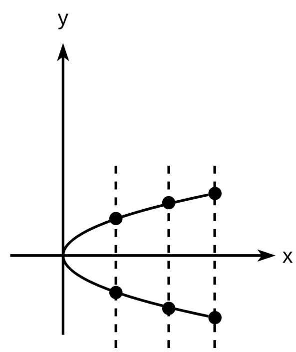
d) 

• **Solução**: Esta é a alternativa correta, pois o conjunto de partida é $A = \{0, 1, 2\}$ e o conjunto de chegada é $B = \{-1, 0, 1, 2\}$.

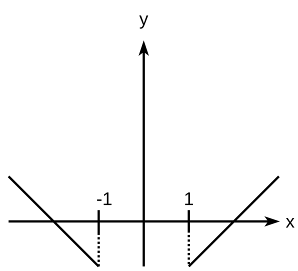
2. Quais das relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justifique.

a) 

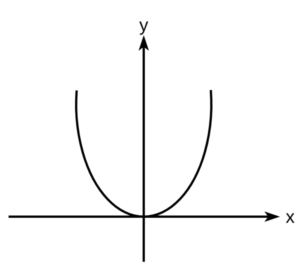
- **Solução**: É função.

b) 

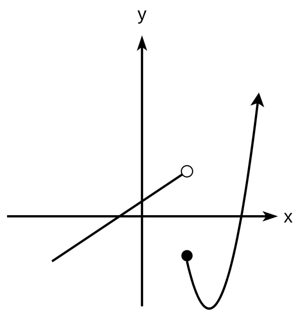
- **Solução**: Não é função.

c) 

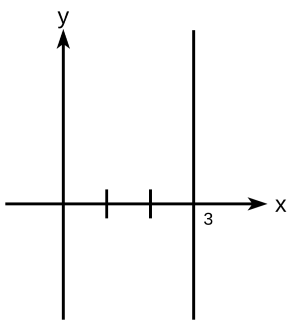
- **Solução**: Não é função.

d) 

- **Solução**: É função.

e) 

• **Solução**: É função.

f) 

• **Solução**: Não é função.

9.2 Notação de Funções

Existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual dado $x \in \mathrm{A}$ determina-se $y \in \mathrm{B}$ tal que $(x, y) \in f$, então $f = \{(x, y) \mid x \in \mathrm{A}, y \in \mathrm{B}$ e $f(x) = y$ e significa que dados ons conjuntos A e B a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

Indicando tal correspondência $y = f(x)$, temos:

$$\begin{aligned} f : \mathrm{A} &\longmapsto \mathrm{B} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} f : \mathrm{A} &\stackrel{f}{\longmapsto} \mathrm{B} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

9.2.1 Exemplos

Exemplo 1: Associa $x \in \mathrm{A}$ e $y \in \mathrm{B}$ tal que $y = 2x$:

• **Solução**:

$$\begin{aligned} f : \mathrm{A} &\longmapsto \mathrm{B} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

Exemplo 2: A cada $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, associa $y = x^2$:

- **Solução**:

$$
\begin{aligned}
f:\mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^2
\end{aligned}
$$

Exemplo 3: A cada $x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}$ associa $y = \sqrt{x}$:
- **Solução**:

$$
\begin{aligned}
f:\mathbb{R}_+ &\mapsto \mathbb{R}\\
x &\mapsto \sqrt{x}
\end{aligned}
$$

9.2.2 Exercícios Resolvidos

1. Seja a função:

$$
\begin{aligned}
f:\mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}\\
x &\mapsto 2x+1
\end{aligned}
$$

então calcule a imagem de 0 pela aplicação f.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 2(0)+1\\
f(0) &= 1
\end{aligned}
$$

2. Qual a notação das seguintes funções de R em R:

   a) f associa a cada número real ao seu oposto:
   - **Solução**:

$$
\begin{aligned}
f:\mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}\\
x &\mapsto -x
\end{aligned}
$$

   b) g associa cada úmero real ao seu cubo:
   - **Solução**:

$$
\begin{aligned}
g:\mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^3
\end{aligned}
$$

9.2.3 Exercícios Propostos

1. Seja a função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x+1 \end{aligned}$$

   então calcule a imagem de -2 pela aplicação de f.

2. Qual a notação das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

   a) h associa a cada número real ao seu quadrado menos -1:

   b) k associa a cada número real ao número 2:

Solução dos Exercícios Propostos

1.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)+1 \\ &= -4+1 \\ f(-2) &= -3 \end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2-1 \end{aligned}$$

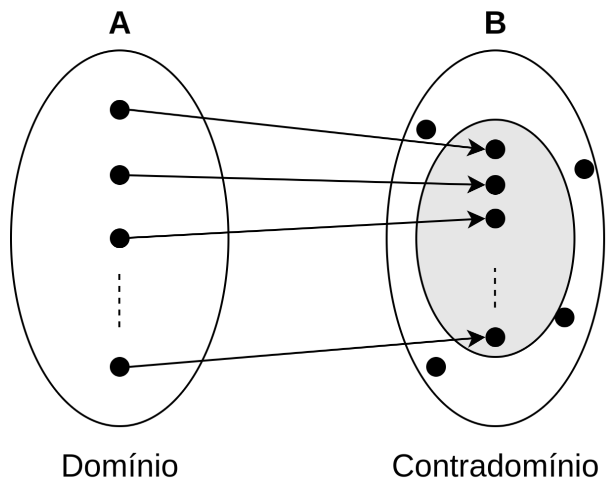
   b)

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2 \end{aligned}$$

9.3 Domínio e Imagem de Funções

Definição: Domínio é o conjunto D dos elementos $x \in \mathrm{A}$, para os quais $\exists y \in \mathrm{B} \mid (x, y) \in f$. Domínio é o conjunto de partida, $\mathrm{D} = \mathrm{A}$.

Imagem é o conjunto $\mathrm{I}m$ dos elementos $y \in \mathrm{B}$, para os quais $\exists x \in \mathrm{A} \mid (x, y) \in f$. Imagem é o subconjunto do contradomínio, logo notado por $\mathrm{I}m \subset \mathrm{B}$.



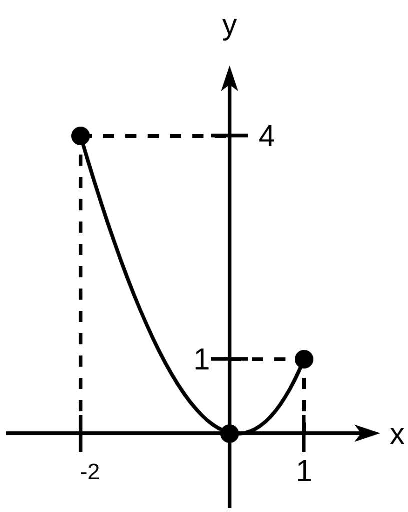
Pela representação cartesiana, temos:

- D é o conjunto dos pontos da abscissa, tais que as retas verticais conduzidas por estes pontos interceptam o gráfico de f.

- Im é o conjunto dos pontos da ordenada, tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f.

9.3.1 Exemplos

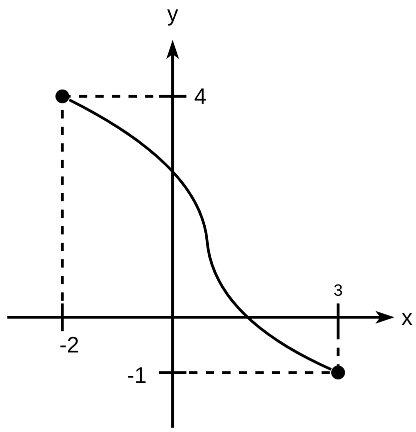
Exemplo 1:



$\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$

$\mathrm{I}m = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$

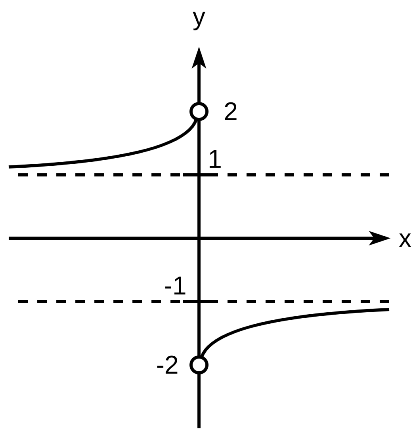
Exemplo 2:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 4\}$

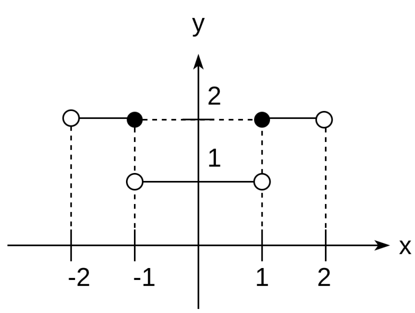
Exemplo 3:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 0 \text{ ou } 1 < y < 2\}$

Exemplo 4:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

$Im = \{1, 2\}$

9.3.2 Exercícios Propostos

1. Dar o domínio da seguintes funções reais:

a) $f(x) = 3x + 2$:

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$:

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$:

d) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$:

e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x-3}$:

f) $f(x) = \frac{1}{x+2}$:

Solução dos Exercícios Propostos

1. a) $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$

   b) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

   c) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

   d) $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$

   e) $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

   f) $\mathrm{D}(f) = \mathrm{R} - \{-2\}$

NOTAS DE AULA 10

Função do Primeiro Grau

10.1 Função Constante

Definição: Uma aplicação de f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função constante, quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o elemento $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto k \end{aligned}$$

O gráfico da função constante é uma reta passando pelo ponto $(0, k)$

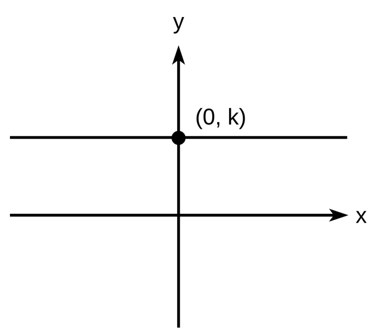


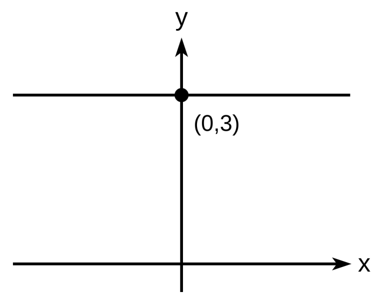
Figura 10.1: $\mathrm{I}m = \{k\}$

10.1.1 Exemplos

Construir os gráficos das aplicações de R em R definida por:

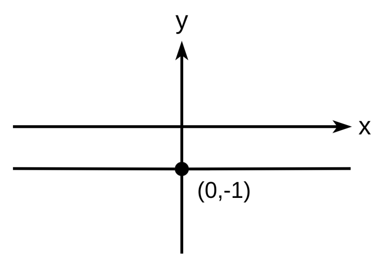
Exemplo 1: $y = 3$

- **Solução**:



Exemplo 2: $y = -1$

- **Solução**:



10.2 Função Identidade

Definição: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ recebe o nome de função identidade quando cada elemento $x \in \mathbb{R}$, associa o próprio x, isto é:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

O gráfico é uma reta que contém as bissetrizes de 1^o e 3^o quadrantes:

10.3 Função Linear

Definição: $f : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{R}$ recebe o nome de função linear quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento de $ax \in \mathbb{R}$ dado:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax, a \neq 0 \end{aligned}$$

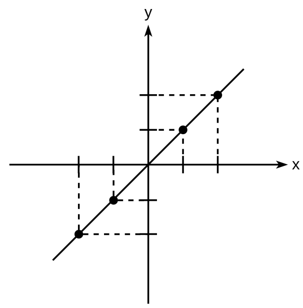


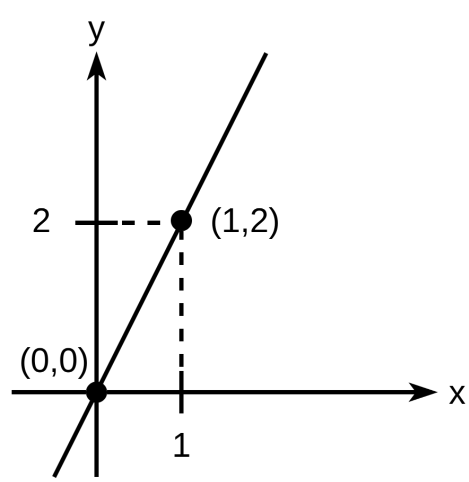
Figura 10.2: I$m = \mathbb{R}$

10.3.1 Exemplos

Exemplo 1: Construir o gráfico da função $y = 2x$ considerando que dois pontos destintos determinam uma reta e, no caso da função linear, um dos pontos é a origem, logo basta atribuir a x um valor não nulo e calcular o correspondente $y = 2x$.

- **Solução**:

x	$2x$
0	0
1	2

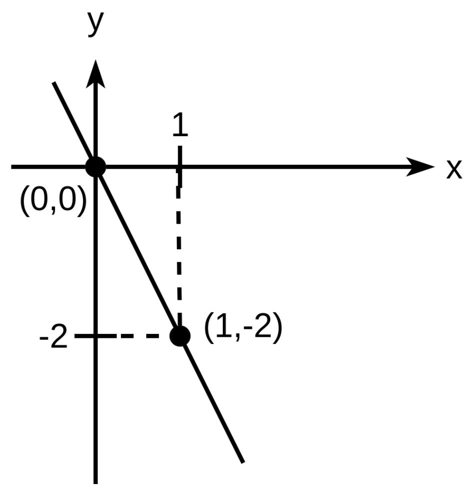


Pelos pontos P$(0,0$ e Q$(1,2)$, traçamos a reta $\overline{PQ}$ que é o gráfico da função.

Exemplo 2: Construir o gráfico da função $y = -2x$. Logo, temos:

- **Solução**:

x	$2x$
0	0
1	-2

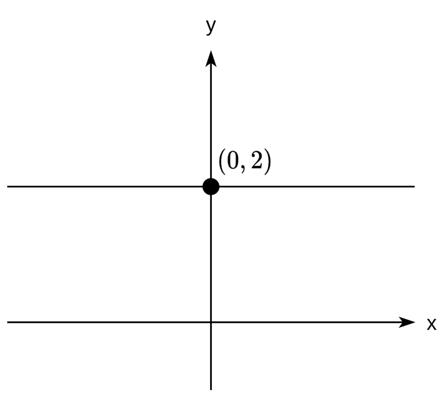


10.3.2 Exercícios Resolvidos

1. Construir o gráfico das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

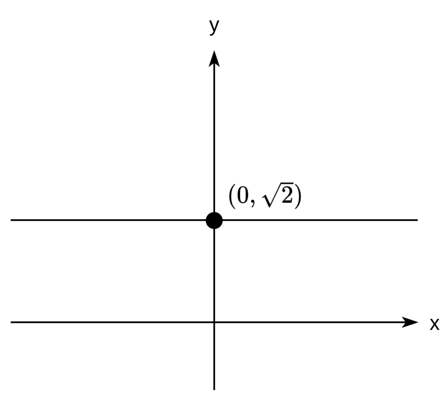
   a) $y = 2$

   - **Solução**:

   b) $y = \sqrt{2}$

   - **Solução**:

10.3.3 Exercícios Propostos

1. Construir, num mesmo sistema cartesiano, so gráficos das funções

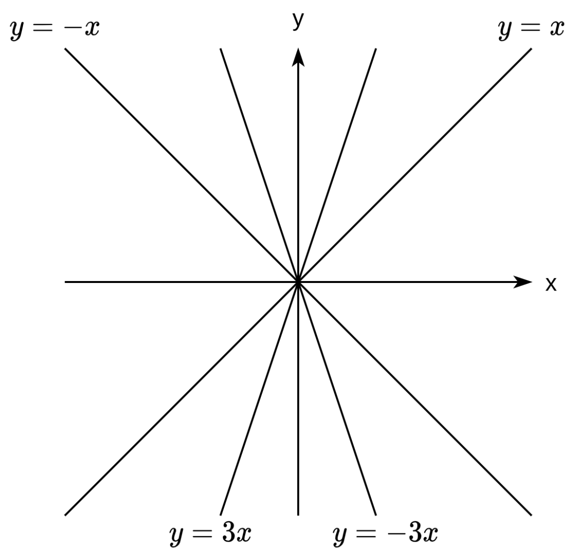
(a) $y = x$

(b) $b = 3x$

(c) $y = -x$

(d) $y = -3x$

Solução dos Exercícios Propostos

1. 

10.4 Função Afim

Definição: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ recebe o nbome de função afim quando cada $x \in \mathbb{R}$ estiver a ssociado a um elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, ou seja:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b, a \neq 0 \end{aligned}$$

10.4.1 Exemplos

Exemplo 1: $y = 3x + 2$

- **Solução**: $a = 3$ e $b = 2$

Exemplo 2: $-2x + 1$

- **Solução**: $a = -2$ e $b = 1$

Exemplo 3: $y = x - 3$

- **Solução**: $a = 1$ e $b = -3$

Exemplo 4: $y = 4x$

- **Solução**: $a = 4$ e $b = 0$

10.4.2 Exercícios Propostos

1. Construir o gráfico cartesiano das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

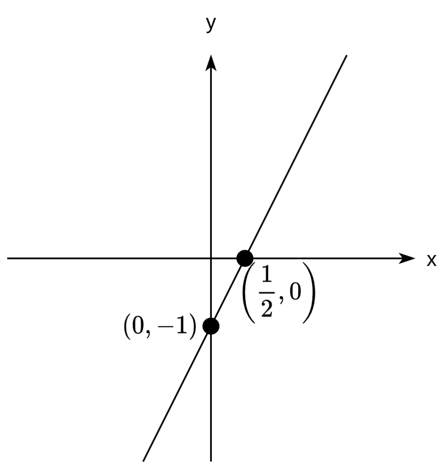
   a) $y = 2x - 1$
   b) $y = x + 2$
   c) $y = 3x + 2$
   d) $y = \frac{2x-3}{2}$

2. Resolver analiticamente e graficamente o sistema de equações:

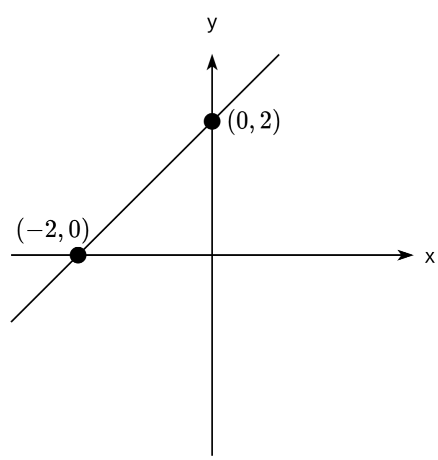
$$\begin{cases} x - y = -3 \text{ (I)} \\ 2x + 3y = 4 \text{ (II)} \end{cases}$$

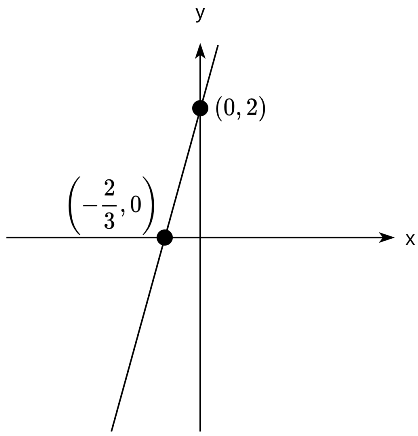
Solução dos Exercícios Propostos

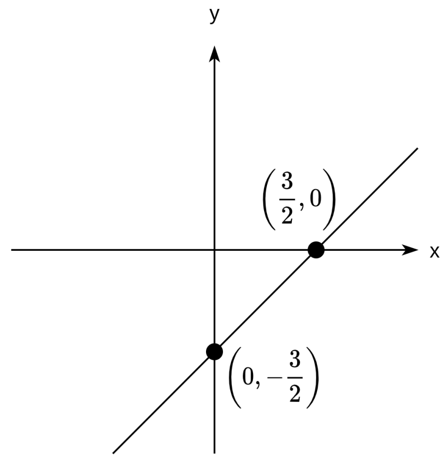
1. a)



b)



c) 

d) 

2. Temos duas maneiras distintas para resolução: a) por substituição e b) por adição.

a) $x - y = -3 \implies x = y - 3$. Substituindo em (II), temos:

$$\begin{aligned} 2(y-3) + 3y &= 4 \\ 2y - 6 + 3y &= 4 \\ 5y &= 10 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Logo, substituindo $y = 2$ em (I), temos:

$$\begin{aligned} x - 2 &= -3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Assim $(x, y) = (-1, 2)$

b) Multiplicando-se (I) por 3 e somando-se as duas expressões termo a termo, obtemos:

$$\begin{cases} 3x - \cancel{3y} = -9 \text{ (I)} \\ 2x + \cancel{3y} = 4 \text{ (II)} \end{cases} \implies 5x = -5$$

Então, substituindo-se $x = -1$ em (I) e/ou (II) temos:

$$\text{(I) } -1 - y = -3 \implies -y = -2 \implies y = 2$$
$$\text{(II) } 2(-1) + 3y = 4 \implies -2 + 3y = 4 \implies 3y = 6 \implies y = 2$$

Assim $(x, y) = (-1, 2)$

NOTAS DE AULA 11

Função do Primeiro Grau

11.1 Coeficientes da Função Afim

O coeficiente a da função $f(x) = ax+b$, é denominado coeficiente angular ou declividade da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente b da função $f(x) = ax + b$ é denominado coeficiente linear.

11.1.1 Exercícios Resolvidos

1. Obter a equação da reta que passa pelo ponto $(1,3)$ e tem coeficiente angular igual a 2.

   - **Solução**
   A equação de interesse é $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$. Se o coeficiente angular é 2, temos $a = 2$.
   Substituindo-se $x = 1$, $y = 3$ e $a = 2$ em $y = ax + b$, temos:
   $$\begin{aligned} 3 &= (2)(1) + b \\ b &= 1 \end{aligned}$$
   Logo, a equação procurada é:
   $$y = 2x + 1$$

2. Obter a equação da reta que passa pelo ponto $(-2,4)$ e tem coeficiente angular ingual a -3.

   - **Solução**
   Se $x = -2$, $y = 4$ e $a = -3$, logo $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$ é gual a:
   $$\begin{aligned} 4 &= (-3)(-2) + b \\ b &= -2 \end{aligned}$$

Logo, a equação procurada é:

$$y = -3x - 2$$

3. Obter a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 1)$ e tem coeficiente linear igual a 4.

   • **Solução**
   Tendo-se $y = ax + b$, logo $x = -2$, $y = 1$ e $b = 4$ nos dando:

$$1 = a(-2) - 4$$
$$a = \frac{3}{2}$$

   E assim:

$$y = \frac{3}{2}x + 4$$

11.2 Zero da Função Afim

O zero de uma função é todo ponto x, onde a função é nula, ou seja, a imagem no ponto x é igual a zero.

$$x \text{ é zero de } y = f(x) \iff f(x) = 0$$

Logo, para determinarmos o zero da função afim, basta resolver a equação do primeiro grau:

$$ax + b = 0$$

Que apresenta uma única solução dada por:

$$x = -\frac{b}{a}$$

De fato, resolvendo a equação, temos:

$$ax + b = 0 \overset{a \neq 0}{\longleftrightarrow} ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

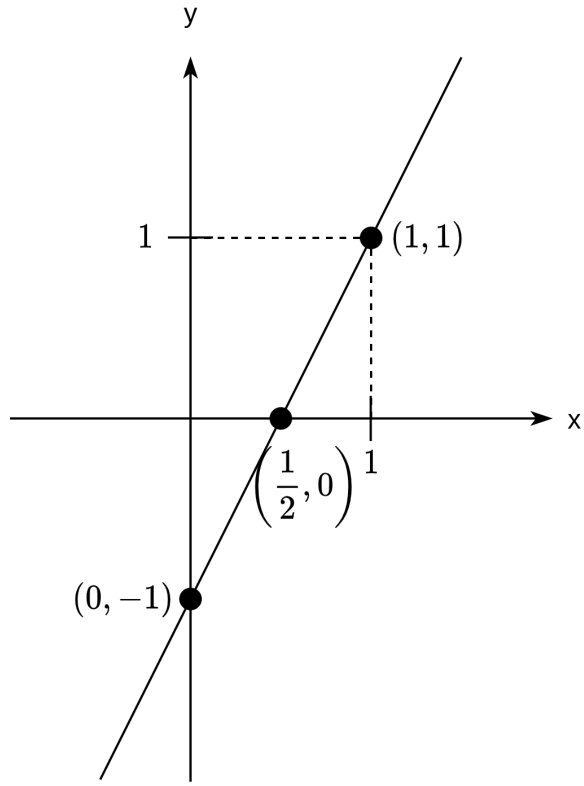
Exemplo 1

O zero da função $f(x) = 2x - 1$é $x = \frac{1}{2}$, pois fazendo $2x - 1 = 0$, temos $x = \frac{1}{2}$

Graficamente, podemos interpretar o zero da função afim como sendo a abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo x.

Seja $y = 2x - 1$, podemos notar que a reta intercepta o eixo x em $x = \frac{1}{2}$, isto é, no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

x	$2x - 1 = y$
0	-1
1/2	0
1	1



11.3 Funções Crescentes ou Decrescentes

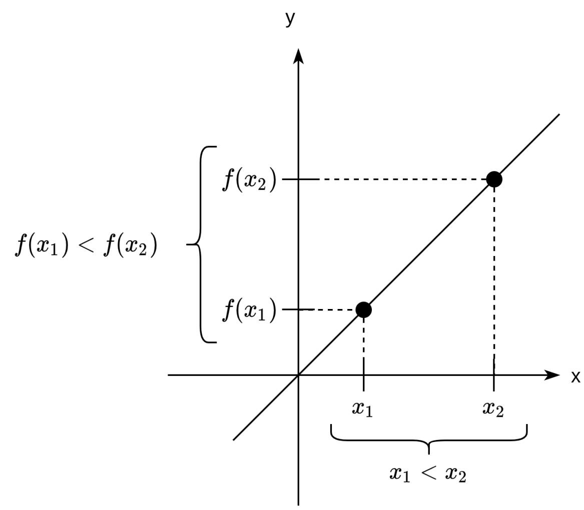
Definição I: Seja $f :\mapsto \mathrm{B}$, $y = f(x)$ é <u>crescente</u> no conjunto $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}$ dado, se para dois valores quaisquer x_1 e x_2, pertences a A_1 com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$, ou seja:

$$(\forall x_1, x_2)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$$

ou

$$(\forall x_1, x_2)\left(x_1 \neq x_2 \implies \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0\right)$$

Graficamente:



Em linguagem não matemática, dizemos que a função é crescente no conjunto A_1 se, ao aumentarmos o valor atribuído a x, o valor de y também aumenta.

Exemplo 1: A função $f(x) = 2x$ é crescente em $\mathbb{R}$, pois $x_1 < x_2 \implies 2x_1 < 2x_2$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Definição II> Seja $f : A \mapsto B$ definida por $y = f(x)$, é decrescente no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$, ou seja:

$$(\forall x_1, x_2)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2))$$

ou

$$(\forall x_1, x_2)\left(x_1 \neq x_2 \implies \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0\right)$$

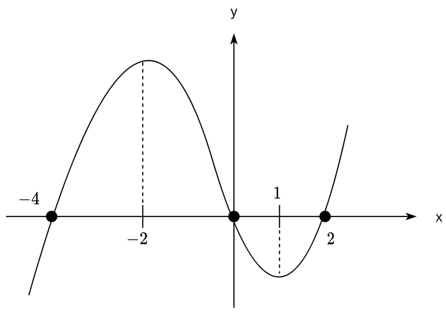
Na linguagem não matemática, dizemos que a função é decrescente no conjunto A_1 se, ao aumentarmos o valor atribuído a x, o valor de y diminui;

Exemplo 2: Seja $f(x) = -2x$, logo é decrescente em $\mathbb{R}$ pos $x_1 < x_2 \implies -2x_1 > -2x_2$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

11.3.1 Exercícios Resolvidos

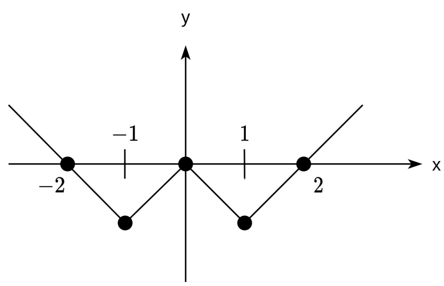
1. Com base nos gráficos abaixo de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, especificar os intervalos onde a função é decrescente ou crescente.

a)



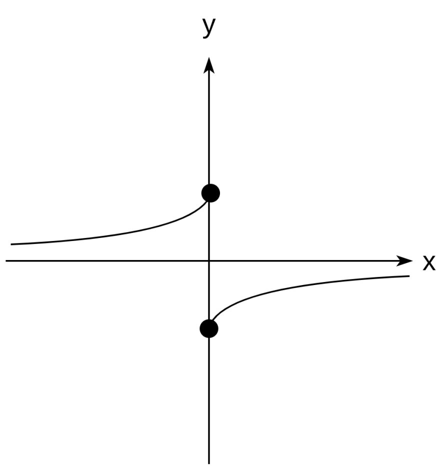
• **Solução**:
crescente: $x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ ou $x \geq 1$
decrescente: $x \in mathbb\mathrm{R} \mid -2 \leq x \leq 1$

b)



• **Solução**:
crescente: $x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0$ ou $x > 1$
descrescente: $x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1$ ou $0 < x \leq 1$

c)



• **Solução**:
crescente: $x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0$ ou $x > 0$

11.3.2 Exercícios Propostos

1. Especificar para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrescente em $\mathbb{R}$.

   (a) $y = 3x - 2$

   (b) $y = -4x + 3$

   (c) $y = 1 + 5x$

   (d) $y = -3 - 2x$

Solução dos Exercícios Propostos

1. a) crescente
   b) decrescente
   c) crescente
   d) decrescente

NOTAS DE AULA 12

Função do Primeiro Grau

12.1 Teorema

"A função afim é crescente (decrescente) se, e somente se, o coeficiente angular for positivo (negativo)";

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = ax + b \text{ é crescente } \iff \\
& \iff \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \ (x_1 \neq x_2) \iff \\
& \iff \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0, \ (x_1 \neq x_2) \iff \\
& \iff \frac{ax_1 + \cancel{b} - ax_2 - \cancel{b}}{x_1 - x_2} > 0, \ (x_1 \neq x_2) \iff \\
& \iff \frac{ax_1 - ax_2}{x_1 - x_2} > 0, \ (x_1 \neq x_2) \iff \\
& \iff \frac{a\cancel{(x_1 - x_2)}}{\cancel{x_1 - x_2}} > 0, \ (x_1 \neq x_2) \iff \\
& \iff a > 0, \ (x_1 \neq x_2)
\end{aligned}
$$

12.2 Sinal da Função Afim

Considerando que o zero da função afim $x = -\frac{b}{a}$, cruza o eixo das abscissas em um único ponto, sendo $f(x) = 0$, examinaremos então para que valores ocorre $f(x) < 0$ e $f(x) > 0$. Consideremos dois casos:

Caso 1: Para $a > 0$

Dada a função $2x - 4$, determinar os valores reais de x para os quais:

a) $f(x) > 0$

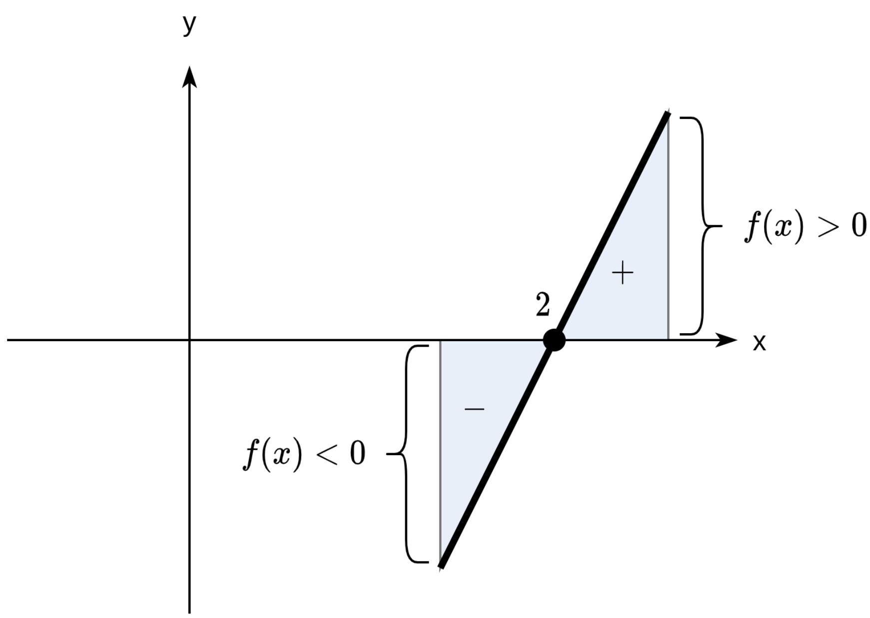
b) $f(x) = 0$

c) $f(x) < 0$

Logo podemos notar que a função é crescente pois $a = 2 > 0$ e o zero da função é:

$$2x - 4 = 0 \implies 2x = 4 \implies x = 2$$

Logo, a reta intercepta o eixo das abscissas no ponto $x = 2$. Fazendo o gráfico temos:



Pelo esquema as respostas são:

$$f(x) > 0 \text{ para } \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$
$$f(x) = 0 \text{ para } x = 2$$
$$f(x) < 0 \text{ para } \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

Caso 2: Para $a < 0$
Dada a função $f(x) = -2x - 4$, determinar os valores reais de x para os quais:

a) $f(x) > 0$

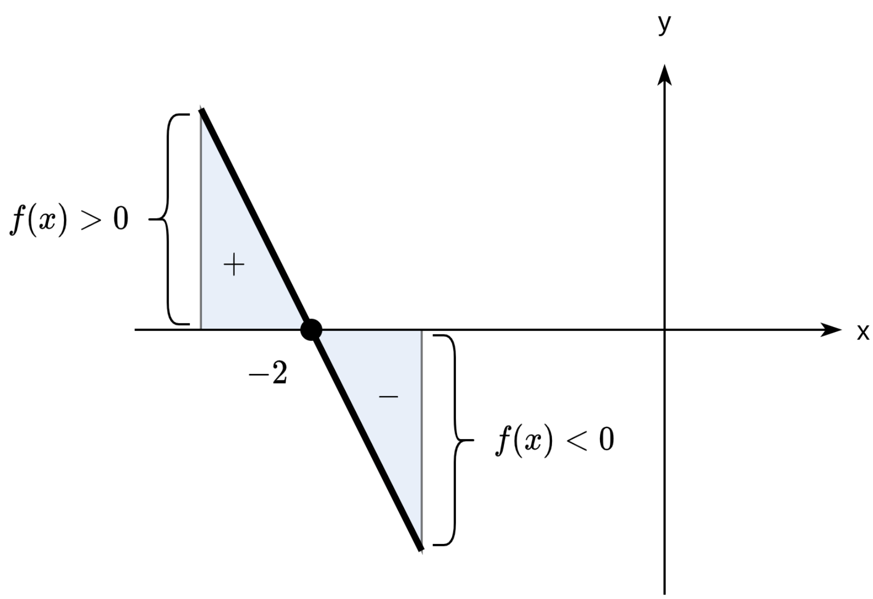
b) $f(x) = 0$

c) $f(x) < 0$

Logo podemos notar que a função é decrescente pois $a = 2 < 0$ e o zero da função é:

$$-2x - 4 = 0 \implies -2x = 4 \implies x = -2$$

Logo, a reta intercepta o eixo das abscissas no ponto $x = -2$. Fazendo o gráfico temos:

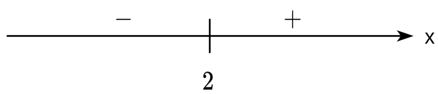


Pelo esquema as respostas são:

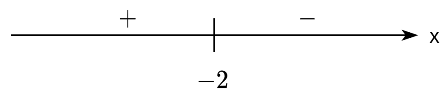
$$f(x) > 0 \text{ para } \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$
$$f(x) = 0 \text{ para } x = 2$$
$$f(x) < 0 \text{ para } \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

Resumo dos casos:

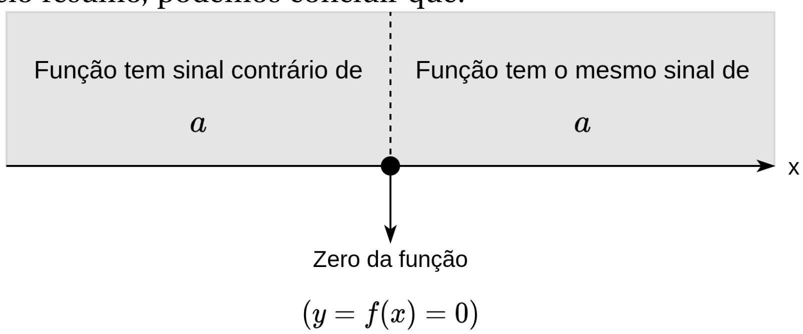
$$f(x) = 2x - 4$$
$$a = 2 > 0$$
$$f(2) = 0$$



$$f(x) = -2x - 4$$
$$a = -2 < 0$$
$$f(-2) = 0$$



Pelo resumo, podemos concluir que:



12.3 Exercícios Resolvidos

1. Sejam A e B os pontos do gráfico de $f(x) = 2x - 5$ e que possuem abscissas respectivamente iguais a 1 e 4. Sem construir o gráfico, diga se os pontos A e B estão situados acima ou abaixo dos eixos das abscissas.
   - **Solução**: A está abaixo, B está acima.

2. Estude a variação de sinal da função:

$$y = (x+3)^2 - (x-2)^2$$

   - **Solução**:

$$y = 0 \text{ para } x = -\frac{1}{2}$$
$$y > 0 \text{ para } x > -\frac{1}{2}$$
$$y < 0 \text{ para } x < -\frac{1}{2}$$

12.4 Exercícios Propostos

1. Estude a variação do sinal das seguintes funções do 1^o grau:

   a) $f(x) = x + 5$

   b) $y = -3x + 9$

   c) $f(x) = 2 - 3x$

   d) $f(x) = 2x + 5$

   e) $y = -3x + 6$

   f) $g(x) = 1 - 5x$

   g) $y = \frac{x}{3} - 1$

   h) $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$

NOTAS DE AULA 13

Função Quadrática

Definição: Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática ou do 2^o grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$, isto é:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c, \ a \neq 0 \end{aligned}$$

Exemplo 1:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, onde: $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$

b) $f(x) = x^2 - 4$, onde: $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$

c) $f(x) = -2x^2 + 5x$, onde: $a = -2$, $b = 5$ e $c = 0$

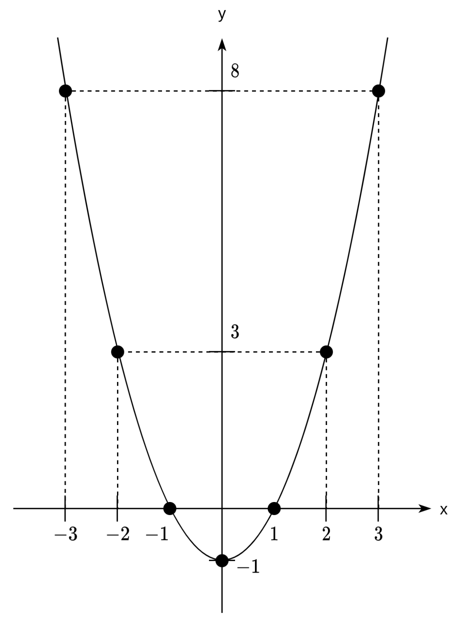
13.0.1 Gráfico

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Exemplo 1 Construir o gráfico de $y = x^2 - 1$

- **Solução**:

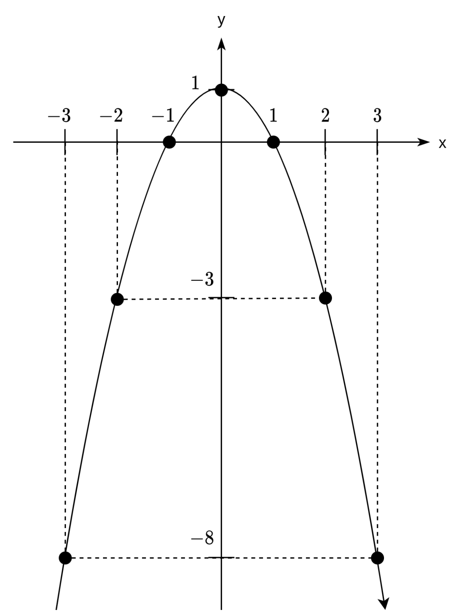
x	$y = x^2 - 1$	(x, y)
-3	8	$(-3, 8)$
-2	3	$(-2, 3)$
-1	0	$(-1, 0)$
0	-1	$(0, -1)$
1	0	$(1, 0)$
2	3	$(2, 3)$
3	8	$(3, 8)$



Exemplo 2 Construir o gráfico de $y = -x^2 + 1$

• **Solução**:

x	$y = -x^2 + 1$	(x, y)
-3	8	$(-3, -8)$
-2	3	$(-2, -3)$
-1	0	$(-1, 0)$
0	-1	$(0, -1)$
1	0	$(1, 0)$
2	3	$(2, -3)$
3	8	$(3, -8)$



13.0.2 Exercícios Propostos

1. Construir os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$:

   a) $y = x^2$

   b) $y = -x^2$

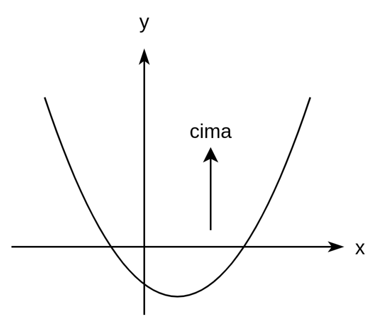
   c) $y = -2x^2$

   d) $y = x^2 - 2x + 4$

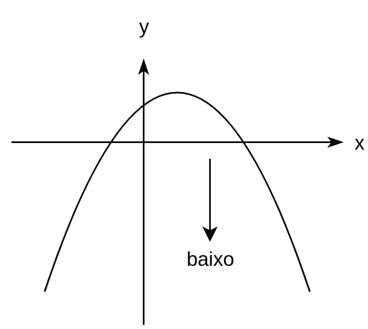
13.1 Concavidade

As parábolas das funções quadráticas $y = ax^2+bx+c$, podem ser voltadas para "cima"ou para "baixo".

(I) Se $a > 0$, a concavidade está voltada para cima



(II) Se $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo



13.2 Zero da Função Quadrática

Os zeros ou raízes das funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ são valores que $f(x) = 0$, e portanto as soluções da equação do 2^o grau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Logo, sendo a forma canônica para representação da função quadrática como:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\
f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Fazendo-se $b^2 - 4ac = \Delta$, temos a forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Logo, utilizando a forma canônica, temos:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \\
&\iff \\
&a = 0 \text{ ou } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0
\end{aligned}$$

13.2.1 Discussão quanto aos zeros da função quadrática

A existência de raízes reais para a equação do 2^o grau $ax^2 + bx + c$, ficam definidas em 3 casos a considerar:

1^o caso: $\Delta > 0$: A equação representará 2 raízes distintas, representadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2^o caso: $\Delta = 0$: A equação apresentará 2 raízes iguais, representadas por:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3^o caso: $\Delta < 0$: Considerando que neste caso $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$, dizemos que a equação não apresenta raízes reais.

Resumo:

$$ax^2 + bx + c \iff \begin{cases} \Delta > 0 \implies x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \implies x = -\frac{b}{2a} \\ \Delta < 0 \implies \nexists \text{ raízes reais} \end{cases}$$

13.2.2 Exercícios Resolvidos

1. Determinar os zeros reais das funções:

   a) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
   - **Solução**: Substituindo-se $z = x^2$, temos $f(x) = z^2 - 3z - 4$, logo:

$$\begin{aligned} z_1 = 4 \text{ e } z_2 &= -1 \\ z = x^2 &\iff \\ 4 = x^2 &\implies x = \sqrt{4} \implies x = \pm 2 \\ -1 = x^2 &\implies x = \sqrt{-1} \implies x \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

   E assim então, as raízes reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ são $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$.

2. Determinar os valores de $\underline{m}$ para que a função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$ tenha 2 zeros reais e distintos.
   - **Solução**: $a = m \neq 0$, $b = 2m - 1$ e $c = m - 2$, temos que $\Delta = b^2 - 4ac$, e assim:

$$\begin{aligned} \Delta &= (2m-1)^2 - 4(m)(m-2) \\ \Delta &= \cancel{4m^2} - 4m + 1 - \cancel{4m^2} + 8m \\ \Delta &= 4m + 1 \text{ , onde devemos satisfazer } \Delta > 0 \end{aligned}$$

$$m + 1 > 0$$

$$m = -\frac{1}{4}$$

13.2.3 Exercícios Propostos

1. Determinar os zeros reais das funções:

   a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
   b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$
   c) $f(x) = -5x^2$
   d) $2x^2 - 4x$
   e) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

2. Determinar os valores de $\underline{m}$ para que a equação $x^2 + (3m+2)x + (m^2 + m + 2) = 0$ tenha 2 raízes reais iguais.

Notas de Aula 14

Função quadrática

14.1 Vértice da Parábola

Definição: O ponto V$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é chamado vértice da parábola representativa da função quadrática.

14.1.1 As coordenadas do vértice

A parábola que representa o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, passa por um ponto V chamado vértice, cujas coordenadas são $x_v = -\frac{b}{2a}$ (abscissa) e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ (ordenada). Os esboços dos gráficos são os seguintes:

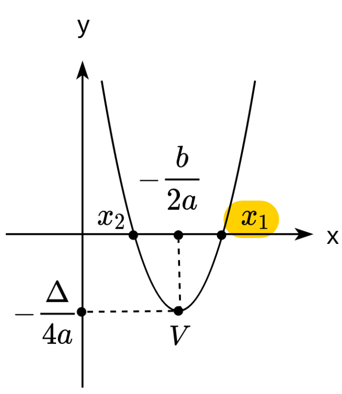


Figura 14.1: $\Delta > 0$ e $a > 0$

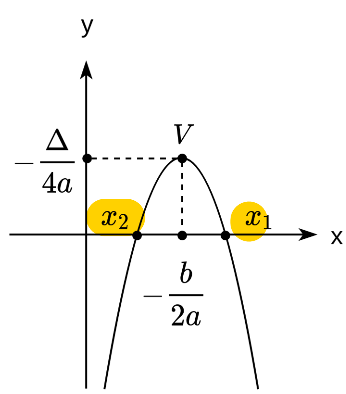


Figura 14.2: $\Delta > 0$ e $a < 0$

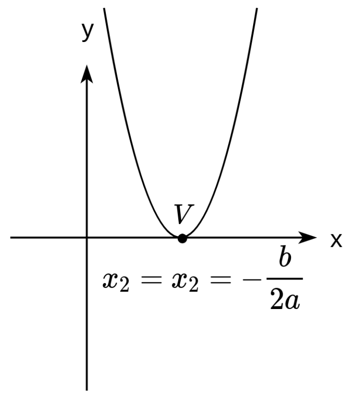


Figura 14.3: $\Delta = 0$ e $a > 0$

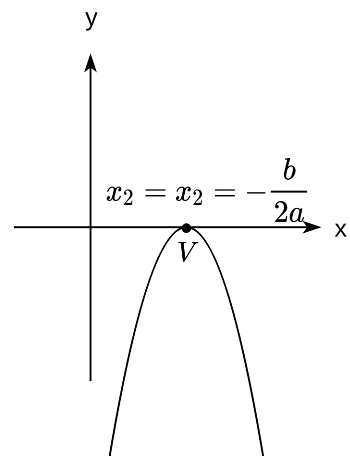


Figura 14.4: $\Delta = 0$ e $a < 0$

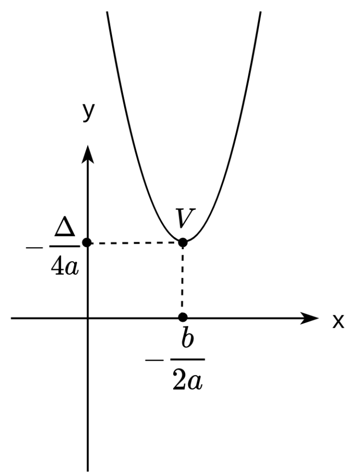


Figura 14.5: $\Delta = 0$ e $a > 0$

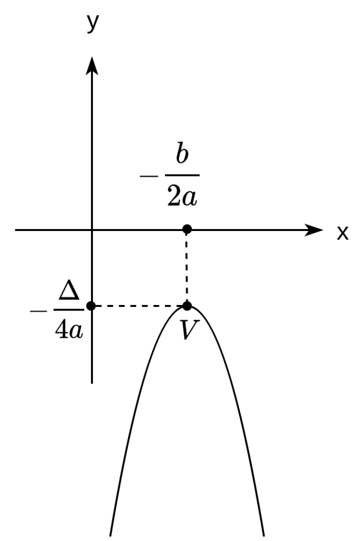


Figura 14.6: $\Delta < 0$ e $a < 0$

Assim sendo, o vértice da parábola é o ponto:

$$\mathrm{V} = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

A reta perpendicular ao eixo x, que passa pelo vértice da parábola é denominado eixo de simetria da parábola.

14.1.2 Demonstração

Seja o gráfico $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$:

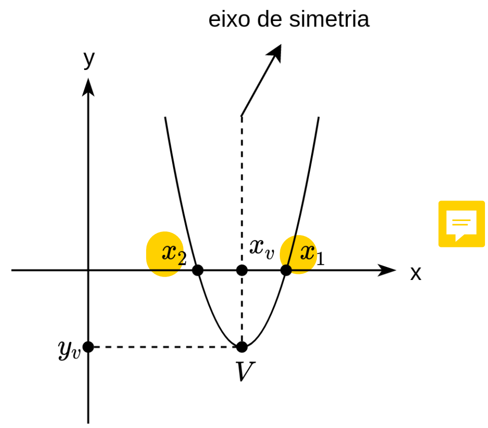


Figura 14.7: Gráfico de uma função quadrática qualquer no modelo $y = ax^2 + bx + c$

Notamos que o vértice da parábola é um ponto localizado sobre o eixo de simetria, logo:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{a}\frac{1}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Para o cálculo de y_v, devemos substituir x_v na função $y = ax^2 + bx + c$, logo:

Como sabemos, $\Delta = b^2 - 4ac$, logo:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

14.1.3 Exemplos

Exemplo 1: Determinar as coordenadas do vértice V da parábola que representa a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- **Solução**:

$$
\begin{aligned}
x_v &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1\\
\Delta &= b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16\\
y_v &= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4(1)} = -4\\
\mathrm{V} &= (1, -4)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2: Determinar a e b de modo que o gráfico da função definida por $y = ax^2 + bx - 9$ tenha o vértice no ponto $(4, -25)$.

- **Solução**: $x_v = 4$ e $y_v = -25$

$$
\begin{aligned}
x_v &= -\frac{b}{2a}\\
4 &= -\frac{b}{2a}\\
8a &= -b\\
b &= -8a
\end{aligned}
$$

Substituindo na função dada, temos:

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx - 9\\
-25 &= a(4)^2 + (-8a)(4) - 9\\
16a - 32a - 9 &= -25\\
-16a &= -16\\
a &= \frac{-16}{-16}\\
a &= 1
\end{aligned}
$$

Como $b = -8a$, temos:

$$
\begin{aligned}
b &= -8a\\
b &= -8(1)\\
b &= -8
\end{aligned}
$$

Assim sendo, $a = 1$ e $b = -8$.

Exemplo 3: Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$ temos: $a = 4$, $b = -4$ e $c = -8$, logo $\Delta = 144$. Como $a = 4 > 0$, a função admite um valor mínimo.

$$y_m = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{144}{4(4)} = -\frac{144}{16} = -9 \qquad x_m = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2(4)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Logo o ponto mínimo da parábola de função $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$ é $\mathrm{V}_m = (\frac{1}{2}, -9)$, assim:

$$\begin{cases} \text{Se } a > 0, y_v = -\frac{\Delta}{4a} \text{ é o valor mínimo da função} \\ \text{Se } a < 0, y_v = -\frac{\Delta}{4a} \text{ é o valor máximo da função} \end{cases}$$

Exemplo 4: Na função real $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$, temos: $a = -1$, $b = 1$, $c = \frac{3}{4}$ e $\Delta = 4$. Como $a < 0$ a função admite um valor mínimo.

$$y_{\mathrm{M}} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-4}{-4} = 1$$
$$x_{\mathrm{M}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$$

Logo o ponto mínimo da parábola $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{2}$ é $\mathrm{V}_{\mathrm{M}} = (\frac{1}{2}, 1)$

14.2 Conjunto Imagem da Função Quadrática

Definição: Já sabemos que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é definida para todo x real, ou seja, $\mathrm{D} = \mathbb{R}$. Aplicando as coordenadas do vértice, vamos obter o conjunto imagem de uma função quadrática, tais como:

14.2.1 Exemplos

Exemplo 1: Determina o conjunto imagem da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

- **Solução**:

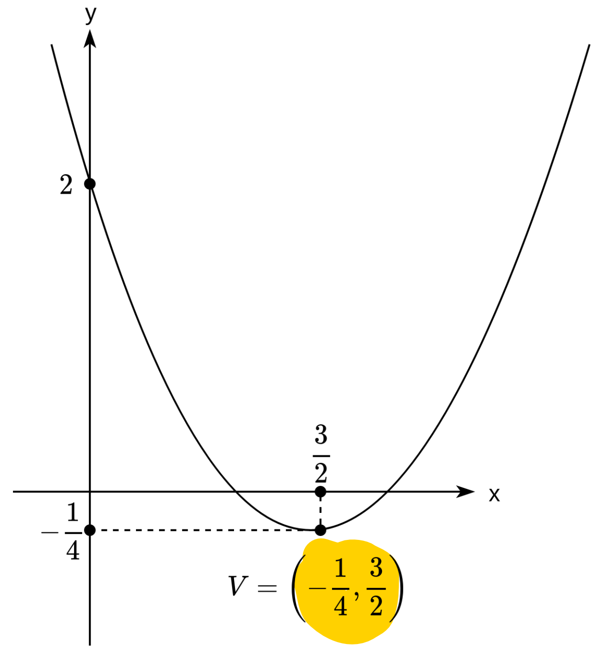
$\Delta = 1 > 0$, 2 zeros reais

$x_v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2}$

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1}{4}$

Sendo $a > 0$ (concavidade voltada para cima) logo:

$$\mathrm{I}m = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{1}{4}\}$$



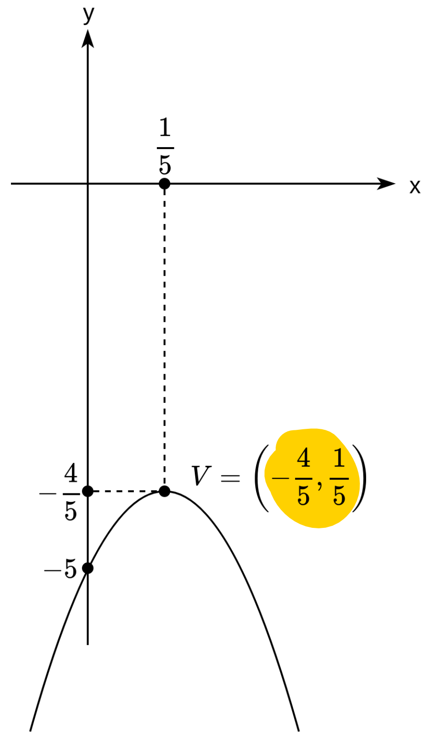
Exemplo 2: Determinar o conjunto imagem da função $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$.

- **Solução**:

$$\Delta = -16 < 0, \text{ não tem raízes reais}$$
$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$$
$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-16}{20} = -\frac{4}{5}$$

Sendo $a < 0$ (concavidade voltada para baixo) logo:

$$\begin{cases} \text{Se } a > 0, \text{ então } \mathrm{I}m = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\} \\ \text{Se } a < 0, \text{ então } \mathrm{I}m = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\} \end{cases}$$



NOTAS DE AULA 15

Funções quadráticas crescentes e decrescentes

Determinemos os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ é crescente e ou decrescente, considerando os exemplos a seguir:

15.0.1 Exemplos

Exemplo 1: Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ é:

a) Crescente?

b) Decrescente?

- **Solução**:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^2 - 2x - 3 \\
&\quad a = 1 > 0 \text{ (admite um valor mínimo)} \\
&\quad \Delta = 4 + 12 = 16 > 0 \text{ (2 zeros reais distintos)} \\
&\quad x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \\
&\quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4} = -4
\end{aligned}
$$

Esboço do gráfico:

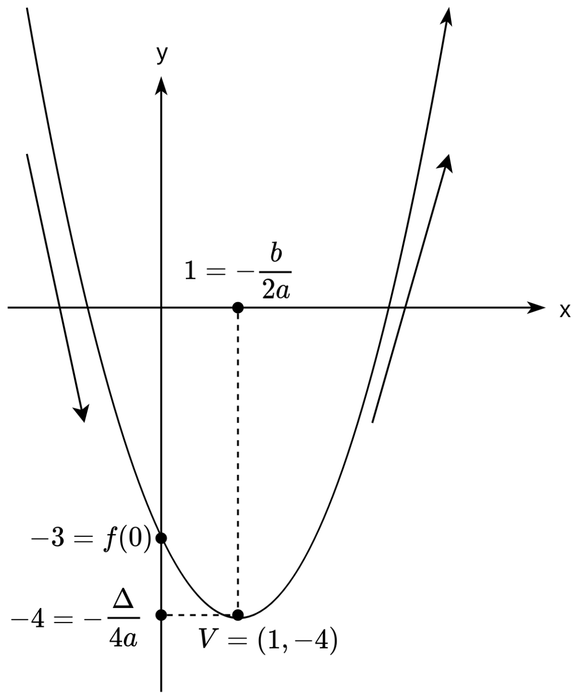


Figura 15.1: Esboço do gráfico para $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Logo:

$$\begin{cases} f(x) \text{ é crescente para } \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \\ f(x) \text{ é decrescente para } \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\} \end{cases}$$

Exemplo 2: Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ é:

a) Crescente?

b) Decrescente?

- **Solução**:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 + 2x - 1 \\
a &= -1 < 0 \text{ (admite um valor máximo)} \\
\Delta &= 4 - 4 = 0 \text{ (1 zero real duplo)} \\
x_v &= -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \\
y_v &= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{0}{4} = 0
\end{aligned}
$$

Esboço do gráfico:

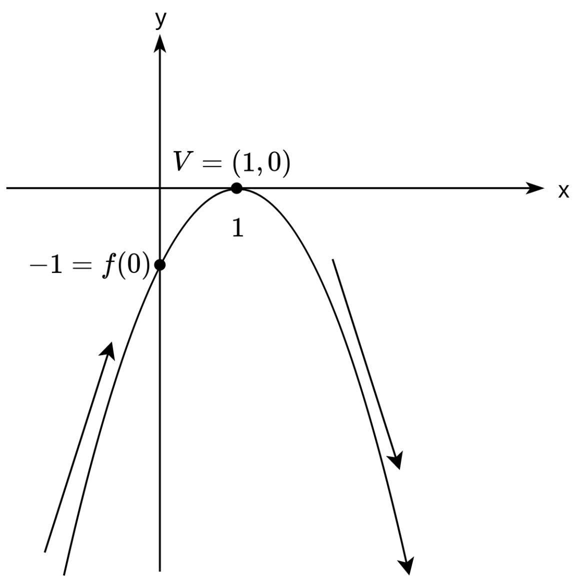


Figura 15.2: Esboço do gráfico para $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

Logo:

$$
\begin{cases}
f(x) \text{ é crescente para } \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\} \\
f(x) \text{ é decrescente para } \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}
\end{cases}
$$

Pelos exemplos, observamos que:

- Quando $a > 0$ então:

  - $f(x)$ é crescente para $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{b}{2a}\}$
  - $f(x)$ é decrescente para $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{b}{2a}\}$

- Quando $a < 0$ então:
  - $f(x)$ é crescente para $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{b}{2a}\}$
  - $f(x)$ é decrescente para $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{b}{2a}\}$

15.0.2 Exercícios Propostos

1. Para que valores de x a função é crescente?
   a) $f(x) = 2x^2 - 5x - 1$
   b) $f(x) = x^2 - 4$
2. Para que valores de x a função é decrescente?
   a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$
   b) $f(x) = -2x^2 + 5x$

NOTAS DE AULA 16

Função Modular

16.1 Módulo de um número real

Dado um número real x, o módulo (ou valor absoluto) de x se indica por $|x|$ e é definido por:

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ se } x < 0 \\ x, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

Então, se x é positivo ou zero, $|x| = 0$.

Exemplo 1:

$$|3| = 3$$
$$\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$
$$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

Da definição dos exemplos, vemos que: O módulo de um número real nunca é negativo.

16.1.1 Exercícios Resolvidos

1. De acordo com a definição, calcule:

   a) $|3-5|$
   - **Solução**:

$$|3-5| = -(-2) = 2$$

b) $|-3+5|$
- **Solução**:

$$|-3+5| = 2$$

c) $|-3-5|$
- **Solução**:

$$|-3-5| = -(-8) = 8$$

d) $|-1|+|-6|$
- **Solução**:

$$\begin{aligned} |-1|+|-6| &= -(-1)+[-(-6)] \\ &= 1+6 \\ &= 7 \end{aligned}$$

e) $|3-5|+|5|$
- **Solução**:

$$\begin{aligned} |3-5|+|5| &= -(-2)+5 \\ &= 2+5 \\ &= 7 \end{aligned}$$

2. Observando o exemplos dado, determine os valores de x nas seguintes igualdades:

a) $|x| = 10 \implies x = 10$ ou $x = -10$

b) $|x| = 2 \implies x = 2$ ou $x = -2$

c) $|x| = 4 \implies x = 4$ ou $x = -4$

d) $|x| = 0 \implies x = 0$

16.2 Equações que envolvem módulo

Toda equação que envolver módulo em um dos membros será chamada de equação modular.

16.2.1 Exemplos

Exemplo 1: $|x| = 4$

Exemplo 2: $|x^2 - 5x| = 1$

Exemplo 3: $|x+8| = |x^2 - 3|$

Exemplo 4: Resolver a equação $|x^2 - 5x| = 6$

- **Solução**: Temos que:

$$x^2 - 5x = 6 \text{ ou } x^2 - 5x = -6$$

Logo:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - 6 &= 0 \\ \Delta &= 49 \\ x_1 = 6, x_2 &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ \Delta &= 1 \\ x_1 = 3, x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Logo:

$$\text{S} = \{-1, 2, 3, 6\}$$

Exemplo 5: Resolver a equação $|x-2| = |3-2x|$

- **Solução**:

$$\begin{aligned} |x-2| = |3-2x| &\iff \\ x - 2 = 3 - 2x &\text{ (I)} \\ &\text{ou} \\ x - 2 = -(3-2x) &\text{ (II)} \end{aligned}$$

Então:

(I) $x - 2 = 3 - 2x$

$$\begin{aligned} x + 2x &= 3 + 2 \\ 3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

(II) $x-2=-(3-2x)$

$$\begin{aligned} x-2 &= -3+2x \\ x-2x &= -3+2 \\ -x &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Logo:

$$S=\left\{1,\frac{5}{3}\right\}$$

Exemplo 6: Dado $|x|^2+2|x|-15=0$, resolver a equação:

• **Solução**: Para resolver esta equação, utilizaremos um artifício de cálculo: uma variável auxiliar, como por exemplo, y. Assim fazemos $|x|=y$, com $y\geq 0$ e teremos:

$$\begin{aligned} y^2+2y-15 &= 0 \\ \Delta &= 64 \\ y_1 &= 3, \cancel{y_2=-5} \end{aligned}$$

Daí temos:

$$\begin{aligned} |x| &= y \\ |x| &= 3 \\ x=3 &\text{ ou } x=-3 \end{aligned}$$

Logo

$$S=\{-3,3\}$$

16.2.2 Exercícios Resolvidos

1. Resolva as seguintes equações modulares

a) $|x-3| = 5$
  - **Solução**:

$$|x-3| = 5 \iff x-3 = 5 \text{ (I) ou } x-3 = -5 \text{ (II)}$$
$$\text{(I) } x-3 = 5 \implies x = 5+3 \implies x = 8$$
$$\text{(II) } x-3 = -5 \implies x = -5+3 \implies x = -2$$
$$\text{S} = \{-2, 8\}$$

b) $|2x-1| = 7$
  - **Solução**:

$$|2x-1| = 7 \iff 2x-1 = 7 \text{ (I) ou } 2x-1 = -7 \text{ (II)}$$
$$\text{(I) } 2x-1 = 7 \implies 2x = 7+1 \implies x = \frac{8}{2} \implies x = 4$$
$$\text{(II) } 2x-1 = -7 \implies 2x = -7+1 \implies x = \frac{-6}{2} \implies x = -3$$
$$\text{S} = \{-3, 4\}$$

16.2.3 Exercícios Propostos

1. Resolva as seguinte equações modulares

   a) $|x^2 + 6x - 1| = 6$
   b) $|x^2| = 5x$
   c) $|2x-1| = |4x+3|$
   d) $|x|^2 - x - 20 = 0$
   e) $|x-1| + |x+2| = 3$

Solução dos Exercícios Propostos

1. a)

$$|x^2+6x-1| = 6 \iff x^2+6x-1 = 6 \text{ (I) ou } x^2+6x-1 = -6 \text{ (II)}$$
$$\text{(I) } x^2+6x-1 = 6 \implies x^2+6x-7 = 0 \implies x = \{-7, 1\}$$
$$\text{(II) } x^2+6x-1 = -6 \implies x^2+6x+5 = 0 \implies x = \{-5, -1\}$$
$$\text{S} = \{-7, -5, -1, 1\}$$

b)

$$
\begin{gathered}
|x^2| = 5x \iff x^2 = 5x \text{ (I) ou } x^2 = -5x \text{ (II)} \\
\text{(I) } x^2 = 5x \implies x^2 - 5x = 0 \implies x(x-5) = 0 \implies x = \{0, 5\} \\
\text{(II) } x^2 = -5x \implies x^2 + 5x = 0 \implies x(x+5) = 0 \implies x = \{0, -5\} \\
S = \{0, 5\} \implies x = -5, |(-5)^2| \neq 5(-5) \implies |25| \neq -25
\end{gathered}
$$

c)

$$
\begin{gathered}
|2x-1| = |4x+3| \implies 2x-1 = 4x+3 \text{ (I) ou } 2x-1 = -4x-3 \text{ (II)} \\
\text{(I) } 2x-1 = 4x+3 \implies 2x-4x = 3+1 \implies -2x = 4 \implies x = -2 \\
\text{(II) } 2x-1 = -4x-3 \implies 2x+4x = -3+1 \implies 6x = -2 \implies x = -\frac{1}{3} \\
S = \left\{-2, -\frac{1}{3}\right\}
\end{gathered}
$$

d)

$$
\begin{gathered}
|x| = y \implies y^2 - y - 20 = 0 \\
S = \{-5, 5\}
\end{gathered}
$$

e)

$$
\begin{cases}
x - 1 = 0 \implies x = 1 \\
x + 2 = 0 \implies x = -2
\end{cases}
$$

$$
S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}
$$

16.3 Função Modular

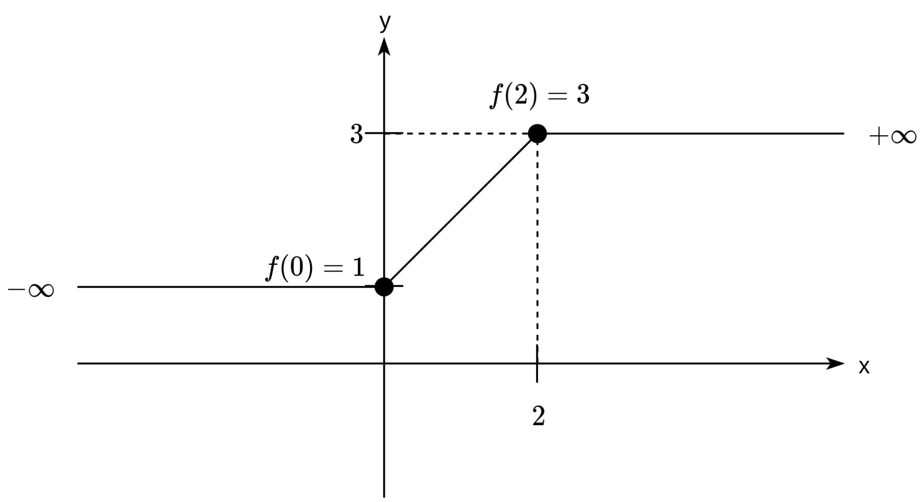
É uma função definida por várias sentenças arbitrárias. Uma função f pode ser definida por várias sentenças abertas, onde cada uma das quais está ligada a um determinado domínio D_i, contido no domínio de f.

16.3.1 Exemplos

Exemplo 1: Seja a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{, se } x<0\\ x+1 & \text{, se } 0\le x<2\\ 3 & \text{, se } x\ge 0\end{cases}$$

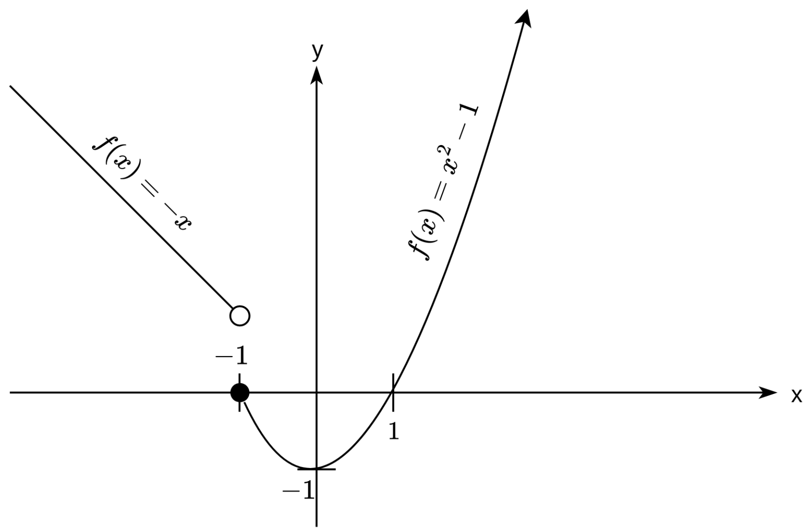
O seu gráfico ficará:



Exemplo 2: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}-x, \text{ se } x<-1\\ x^2-1, \text{ se} x\ge -1\end{cases}$$

O gráfico ficará:



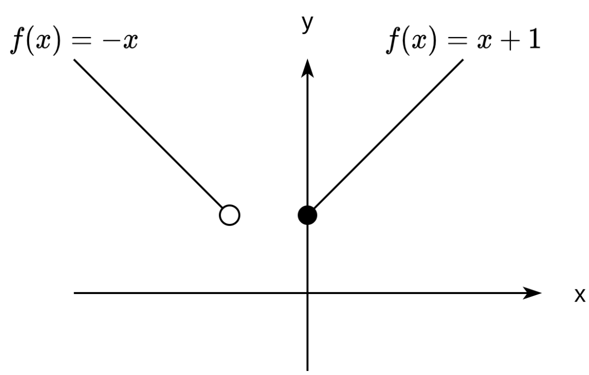
16.3.2 Exemplo

1. Construir os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$:

   a)

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

- **Solução**:



   b)

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & , \text{ se } x \geq 1 \\ 1 & , \text{ se } -1 < x < 1 \\ 2+x & , \text{ se } x \leq -1 \end{cases}$$

NOTAS DE AULA 17

Função Modular

Pela definição de módulo:

$$|x| = \begin{cases} -x & , \text{se } x < 0 \\ x & , \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Decorrem as seguintes propriedades:

(I) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(II) $|x| = 0 \iff x = 0$

(III) $|x|.|y| = |x.y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

(IV) $|x^2| = |x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

(V) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

(VI) $|x - y| \geq |x| - |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

(VII) $|x| \leq a$ e $a > 0 \iff -a \leq x \leq a$

(VIII) $|x| \geq a$ e $a > 0 \iff x \leq -a$ ou $x \geq a$

17.0.1 Exercícios Resolvidos

1. Resolver as seguintes equações modulares

   a) $|x|^2 + 3|x| - 18 = 0$
   - **Solução**: Pela propriedade: $|x^2| = |x|^2 = x^2$, temos:

$$
\begin{aligned}
|x| = y &\implies \\
y^2 &= 3y - 18 = 0 \\
\Delta &= 81 \\
y_1 &= \frac{-3+9}{2} = 3 \\
y_2 &= \frac{-3-9}{2} = -6 \\
|x| = y &\implies x \neq -6 \\
|x| = 3 \implies x = 3 &\text{ ou } x = -3
\end{aligned}
$$

$S = \{-3, 3\}$

b) $\left|\frac{x-1}{x-3}\right| = 2,$, para $x \neq 3$

• **Solução**: Temos que:

(I).

$$
\begin{aligned}
x - 1 &= 2x - 6 \\
x - 2x &= -6 + 1 \\
-x &= -5 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

(II).

$$
\begin{aligned}
x - 1 &= -2x + 6 \\
x + 2x &= 6 + 1 \\
3x &= 7 \\
x &= \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

$S = \left\{\frac{7}{3}, 5\right\}$

17.0.2 Exercícios Propostos

1. Resolver as seguintes equações modulares

a) $|2x-1| = -4$

b) $|x^2| - 7x - 8 = 0$

Observação: Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $\sqrt{x^2} = |x|$ pela definição de módulo, a função modular pode ser definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{, se } x < 0 \\ x & \text{, se } x \geq 0 \end{cases}$$

O gráfico da função modular é a reunião de duas semi-retas de origem O_x, que são bissetrizes do 1^o e 2^o quadrantes.

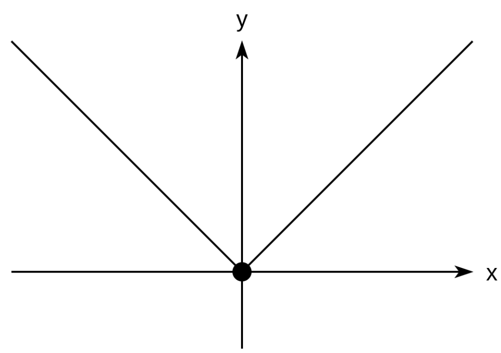


Figura 17.1: Gráfico de uma função modular linear com imagem $\mathbb{R}_+$

A imagem desta função é $\mathbb{R}_+$, ou seja, a função modular somente assume valores reais não negativos.

17.0.3 Exemplo

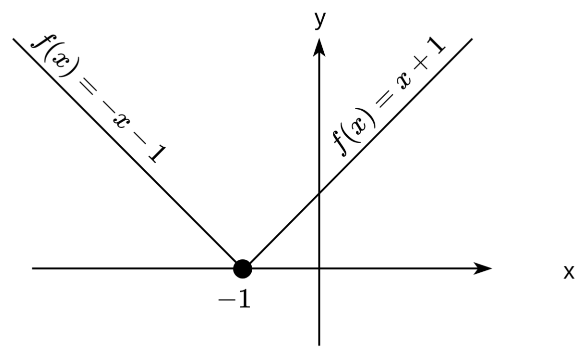
Exercício 1: Construir o gráfico da função real definida por $f(x) = |x+1|$.

- **Solução**:

Notamos que:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{, se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{, se } x < -1 \end{cases}$$

Logo:



17.0.4 Exercícios Resolvidos

1. Construir os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$:

   a) $f(x) = |2x|$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

   b) $f(x) = |3x|$

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se } x \geq 0 \\ -3x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

   c) $f(x) = |x - 1|$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

   d) $f(x) = |2x - 1|$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1, & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

   e) $f(x) = |x^2 + 4|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & \text{se } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

17.0.5 Exercícios Propostos

1. Construir o gráfico das funções definidas em $\mathbb{R}$:

    (a) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

    (b) $f(x) = |x - 1| + 2$

NOTAS DE AULA 18

Função Exponencial

18.1 Potência de Expoente Natural

Definição: Seja a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 & = 1 \\ a^n & = (a^{n-1}).a, \forall n \mid n \geq 1 \end{cases}$$

Da definição, decorre que:

$$a^1 = a^0.a = 1.a = a$$
$$a^2 = a^1.a = a.a$$
$$a^3 = a^2.a = (a.a).a = a.a.a$$

E de um modo geral, para um número p natural, e $p \geq 2$, temos que a^p é um produto de q fatores igual a a.

18.1.1 Exercícios Resolvidos

1. Calcular:

   a) $(-3)^2$
      - **Solução**: $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$

   b) 3^2
      - **Solução**: $(3)^2 = (3)(3) = 9$

18.1.2 Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, valem as seguintes propriedades:

(I) $a^m.a^n = a^{m+n}$

(II) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(III) $(a.b)^n = a^n.b^n$

(IV) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

(V) $(a^m)^n = a^{m.n}$

(VI) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, a \geq 0$

(VII) Para $a \neq 0; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(VIII) Para $a \geq 0; (\sqrt[n]{a})^n = a$

18.2 Função Exponencial

Definição: Dado um número real a tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, chamamos de função exponencial de base a a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa a cada x real, o número $a\mathrm{R}x$, ou seja:

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} \to \mathrm{R} \\ & x \to a^x \end{aligned}$$

18.2.1 Exemplos

Exemplo 1: $f(x) = 2^x$

Exemplo 2: $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

18.3 Equação Exponencial

Definição: Equações exponencias são equações exponenciais com incógnitas no expoente.

18.3.1 Exemplos

Exemplo 1: $2^x = 64$

Exemplo 2: $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

Exemplo 3: $4^x - 2^x = 2$

18.4 Método de Resolução de Equações Exponenciais

18.4.1 Método de Redução a Uma Base Comum

Este método será aplicado quando ambos os membros da equação com as transformações convenientes, baseadas mas propriedades de potência, forem redutíveis à potências de mesma base a $(0 < a \neq 1)$. Logo, a função $f(x) = a^x$, por ser injetora, podemos concluir que potências iguais e de mesma base tem os expoentes iguais, isto é:

$$a^x = a^0 \iff x = 0 (0 < a \neq 1)$$

18.4.2 Exercícios Resolvidos

1. Resolver as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$
- **Solução**:

$$\begin{aligned} 2^x = 64 &\implies 64 = 2^6 \\ 2^x &= 2^6 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

b) $8^x = \frac{1}{32}$

- **Solução**:

$$
\begin{aligned}
8^x &= \frac{1}{32} \\
(2^3)^x &= (32)^-1 \\
2^{3x} &= (2^5)^{-1} \\
2^{3x} &= 2^{-5} \\
3x &= -5 \\
x &= -\frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

c) $\left(\sqrt{3}\right)^x = \sqrt[3]{81}$

- **Solução**:

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{3}\right)^x &= \sqrt[3]{81} \\
\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x &= \left(3^4\right)^{\frac{1}{3}} \\
3^{\frac{x}{2}} &= 3^{\frac{4}{3}} \\
\frac{x}{2} &= \frac{4}{3} \\
3x &= 8 \\
x &= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

18.4.3 Exercícios Propostos

1. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 16$

b) $25^x = 125$

c) $9^x = \frac{1}{3}$

d) $49^x = \sqrt{7}$

e) $25^{x+2} = 1$

f) $5^{x^2+2x} = 1$

g) $(2^x)^{x-1} = 4$

h) $3^{2x-1}.9^{3x+4} = 27^{x+1}$

18.5 Gráficos de Funções Exponenciais

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = a^x$, temos que:

1. A curva representativa está toda acima do eixo das abscissas, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

3. Se $a > 1$, é o gráfico de uma função crescente, e se $0 < a < 1$ é o gráfico de uma função decrescente

Logo, temos seus aspectos abaixo:

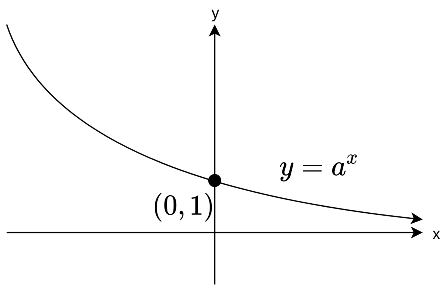


Figura 18.1: $y = a^x$ com $0 < a < 1$

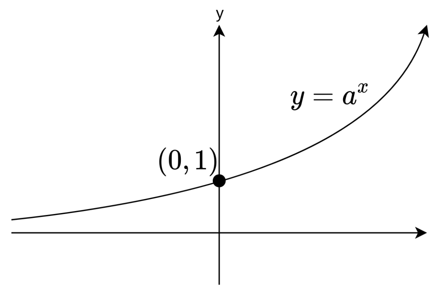
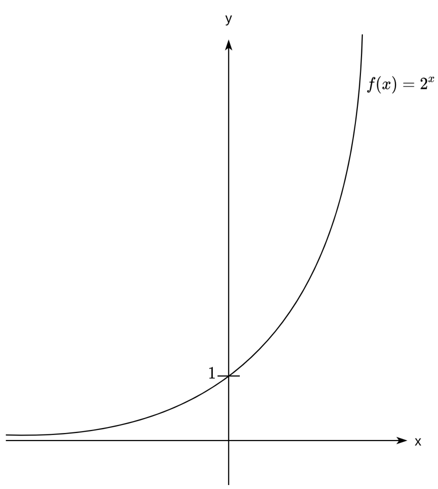


Figura 18.2: $y = a^x$ com $a > 1$

18.5.1 Exercícios Propostos

1. Construir o gráfico das funções abaixo:

   a) $f(x) = 2^x$



   b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

NOTAS DE AULA 19

Logaritmos

Estudamos até o momento em equações exponenciais a redução das potências à mesma base, porém se queremos resolver a equação $2^x = 3$, sabemos que x assume um valor entre 1 e 2, mas com os conhecimento adquiridos até aqui não sabemos qual é este valor e nem o processo para determiná-lo. Para resolver tais problemas vamos iniciar o estudo de logaritmos.

Definição: Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a, o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Logo, se $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

19.1 Símbolos

Em $\log_a b = x$, dizemos:

- a: base do logaritmo
- b: logaritmando
- x: é o logaritmo

19.1.1 Exemplos

Exemplo 1: $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$

Exemplo 2: $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$

Exemplo 3: $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$

Exemplo 4: $\log_7 1 = 0$, pois $6^0 = 1$

Exemplo 5: $\log_{0,2} 25 = -2$ pois $0,2^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = (5^{-1})^{-2} = 5^2 = 25$

19.2 Consequências da Definição

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $0 < a \neq 1$ e $b > 0$.

I) O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a zero

$$\log_a 1 = 0$$

II) O logaritmo da base, em qualquer base, é igual a 1

$$\log_a a = 1$$

III) A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b

$$a^{\log_a b} = b$$

IV) Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais

$$\log_a b = \log_a c \iff b = c$$

19.2.1 Exemplo

Sabendo que $\log_{30} 3 = a$ e $\log_{30} 5 = b$, calcular $\log_{10} 2$:

- **Solução**: Notando que $2 = \frac{20}{3 \cdot 5}$ e $10 = \frac{30}{2}$, temos que:

$$\log_{10} 2 = \frac{\log_{30} 2}{\log_{30} 10} = \frac{\log_{30}\left(\frac{30}{3\cdot 5}\right)}{\log_{30}\left(\frac{30}{3}\right)} = \frac{\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5}{\log_{30} 30 - \log 303} = \frac{1 - a - b}{1 - a}$$

19.2.2 Exercícios Propostos

1. Calcular:

   a) $8^{\log_2 5}$

19.3 sistemas de Logaritmos

Chamamos de sistema de logaritmo de base a, ao conjunto de todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base $a(0 < a \neq 1)$. Existem dois sistemas de logaritmos particularmente importantes que são:

I) Sistema de logaritmos decimais, sendo o sistema de base 10, também chamado de logaritmos vulgares ou de Briggs.

Símbolos

$$\log_{10} x \text{ ou } \log x$$

II) Sistema de logaritmos neperianos é o sistema de base $e(e = 2.71828)$ sendo um número irracional, também chamado de sistema de logaritmos naturais.

Notação

$$\log_e x \text{ ou } \ln x$$

19.4 Propriedades dos Logaritmos

I) Logaritmo do produto:

Para $0 < a \neq 1$, temos que se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

II) Logaritmo do quociente:

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

III) Logaritmo da Potência:

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha \cdot \log_a b$$

19.4.1 Exercícios Propostos

1. Resolver, aplicando as propriedades dos logaritmos (dado que a, b e c são pertencentes a $\mathbb{R}_+$:

   a) $\log_2 \frac{2ab}{c}$

   b) $\log_3 \frac{a^3 b^2}{c^4}$

   c) $\log \frac{a^3}{b^2\sqrt{c}}$

19.5 Mudança de Base

Há ocasiões em que logaritmos de bases diferentes necessitam serem transformados para uma única base conveniente. Por exemplo, na aplicação de propriedades operatórias os logaritmos devem estar todos numa mesma base.

19.5.1 Propriedades

Se a, b e c são números reais positivos e a e c são diferentes de 1, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

19.5.2 Exemplos

Exemplo 1: Transformando $\log_3 5$ para base 2:

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$$

Exemplo 2: Transformando $\log_2 7$ para base 10:

$$\log_2 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2}$$

Exemplo 3: Transformando $\log_{100} 3$ para base 10:

$$\log_{100} 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 100} = \frac{\log_{10} 3}{2} = \frac{1}{2}\log_{10} 3$$

19.6 Observações

A propriedade pode ser apresentada como: se a, b e c são números reais positivos, e a e c são diferentes de 1 , então:

$$\log_a b = \log_c b . \log_a c$$

Ou seja, invertendo-se os fatores de base e logaritmando do divisor e passando a operação para a multiplicação.

As consequências para tais mudanças são:

I) Se a e b são pertencentes a $\mathbb{R}_+$ e diferentes de 1, então:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

II) Se a e b são pertencentes a $\mathbb{R}_+$ com a diferente de 1 e β é um número real não nulo, então:

$$\log_a \beta^b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b$$

19.7 Função Logarítmica

Definição: Dado um número real a tal que $0 < a \neq 1$ chamamos de função logaritmica na base a a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada x o número $\log_a x$.

Símbolos:

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to \log_a x \end{aligned}$$

19.7.1 Exemplos

Exemplo 1: $f(x) = \log_2 x$

Exemplo 2: $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Exemplo 3: $h(x) = \log x$

Exemplo 4: $p(x) = \ln x$

19.7.2 Exercícios Propostos

1. Determinar x em cada uma das igualdades seguintes

a) $\log_2 x = 3$

b) $\log_3 x - 1 = -2$

c) $\log_x 4 = 2$

d) $\log_3 x^{-1} = 0$

e) $\log_{x-1} 4 = 2$

NOTAS DE AULA 20

Inequações Simultâneas

A dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, ou seja

$$f(x) < g(x) < h(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) (\text{I}) \\ \text{e} \\ g(x) < h(x) (\text{II}) \end{cases}$$

O conjunto solução $S = S_1 \cap S_2$

Exemplo 1:

$$3x + 2 < -x + 3 \leq x + 4$$

Resolvendo as duas inequações, temos:

(I) $3x + 2 < -x + 3$

- **Solução**:

$$\begin{aligned} 4x &< 1 \\ x &< \frac{1}{4} \end{aligned}$$

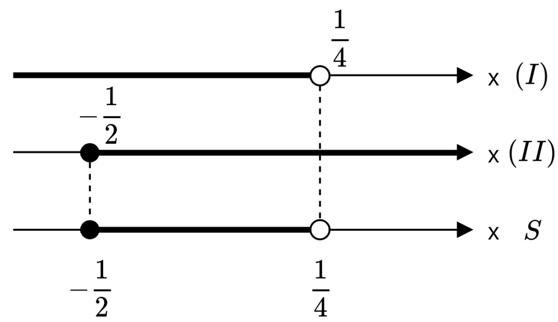
(II) $-x + 3 \leq x + 4$

- **Solução**:

$$\begin{aligned} -2x &\leq 1 \\ 2x &\geq -1 \\ x &\geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

A intersecção dos conjuntos é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{4} \right\}$$



20.0.1 Exercícios Resolvidos

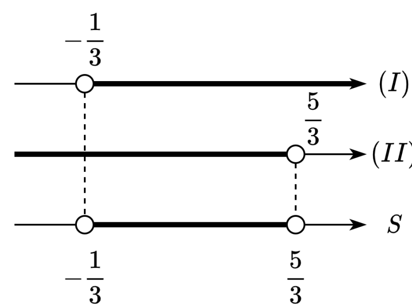
1. Resolver as inequações em $\mathbb{R}$:

   a) $-2 < 3x - 1 < 4$
   - **Solução**:

(I) $-2 < 3x - 1 \implies -3x < 1 \implies x > -\frac{1}{3}$

(II) $3x - 1 < 4 \implies 3x < 5 \implies x < \frac{5}{3}$

$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{4} \right\}$



2. Resolver o sistema de equações em $\mathbb{R}$:

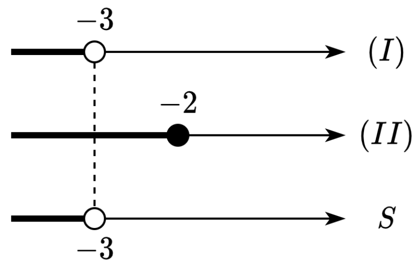
$$\begin{cases} 3x - 2 & > 4x + 1 \\ 5x + 1 & \le 2x - 5 \end{cases}$$

- **Solução**:

(I) $3x - 2 > 4x + 1 \implies 3x - 4x > 1 + 2 \implies x < -3$

(II) $5x + 1 \le 2x - 5 \implies 5x - 2x \le -5 - 1 \implies 3x \le -6 \implies x \le -2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$



20.0.2 Exercícios Propostos

1. Resolver as inequações em $\mathbb{R}$

   (a) $-4 < 4 - 2x \leq 3$

   (b) $-3 < 3x - 2 < x$

20.1 Inequação Produto

Sejam as inequações $f(x).g(x) > 0$, $f(x).g(x) < 0$, $f(x).g(x) \geq 0$, $f(x).g(x) \leq 0$, são denominadas inequações produto. O conjunto solução S da inequação $f(x).g(x) > 0$, de acordo com a regra de sinais do produto de números reais, temos que x_0 é solução da inequação $f(x).g(x) > 0$ se, e somente se, $f(x_0)$ e $g(x_0)$, não nulos, têm o mesmo sinal.

Logo;

1. Se $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

   Se S_1 e S_2 são respectivamente os conjuntos soluções dessas inequações, então $S_1 \cap S_2$ é conjunto solução do sistema.

2. Se $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$

   Se S_3 e S_4 são respectivamente os conjuntos soluções dessas inequações, então $S_3 \cap S_4$ é conjunto solução do sistema.

Concluímos que o conjunto solução da inequação do produto $f(x).g(x) > 0$ é:

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4)$$

20.1.1 Exemplos

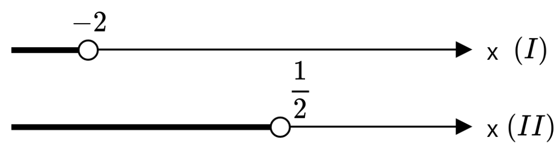
Exemplo 1: Caso: Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação:

$$(x+2)(2x-1) > 0$$

- **Solução**:
Cada um dos fatores é positivo, isto é:

$$x+2>0 \implies x>-2$$

$$2x-1>0 \implies x>\frac{1}{2}$$



Assim então

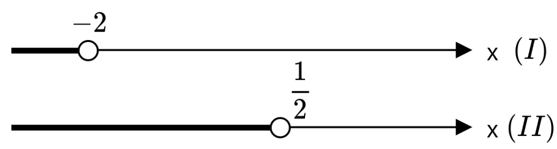
$$S_1 \cap S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \right\}$$

Exemplo 2: Caso: Cada um dos fatores é negativo, isto é:

- **Solução**:

$$x+2<0 \implies x<-2$$

$$2x-1<0 \implies x<\frac{1}{2}$$



Assim então

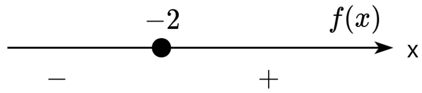
$$S_3 \cap S_4 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \}$$

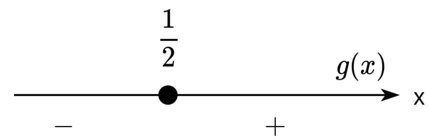
E por fim o conjunto solução da inequação $(x+2)(2x-1) > 0$ é dado por:

$$\begin{aligned} S &= (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4) \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \right\} \cup \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \} \\ S &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

20.2 Método Prático

Estudar os sinais das funções $f(x) = x+2$ e $g(x) = 2x-1$





com o objetivo de evitarmos os cálculos algébricos, usamos o quadro-produto, o qual figuram os sinais dos fatores e o sinal do produto:

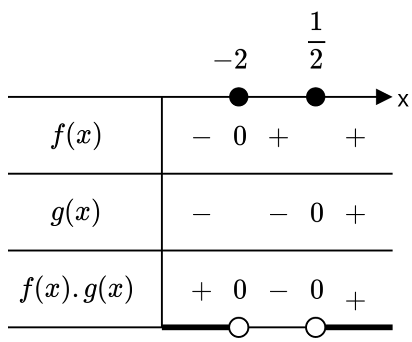


Figura 20.1: Quadro de resolução de $f(x)g(x)$

E assim:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \right\}$$

Seja a inequação $f(x).g(x) \geq 0$, tem por conjunto solução S a reunião S_1 da inequação $f(x).g(x) > 0$ com S_2 da equação $f(x).g(x) = 0$, isto é:

$$f(x).g(x) \geq 0 \iff \begin{cases} f(x).g(x) > 0 \\ \text{ou} \\ f(x).g(x) = 0 \end{cases}$$

Exemplo 1: Desenvolver a inequação $(3x+1)(2x-5) \geq 0$ em $\mathbb{R}$. É equivalente a:

$$\begin{cases} (3x+1)(2x-5) > 0 (\text{I}) \\ (3x+1)(2x-5) = 0 (\text{II}) \end{cases} \tag{20.1}$$

E resolvendo=se:

$$S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > \frac{5}{2} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{5}{2} \right\}$$

O conjunto solução é dado por:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3} \text{ou } x > \frac{5}{2} \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{5}{2} \right\}$$

*Utilizar o quadro-produto no exercício acima.

*Realizar um trabalho em grupo estudando as Inequações Quocientes, apresentando exemplos distintos, utilizando para cálculo do conjunto solução métodos algébricos e quadro-produto.

NOTAS DE AULA 21

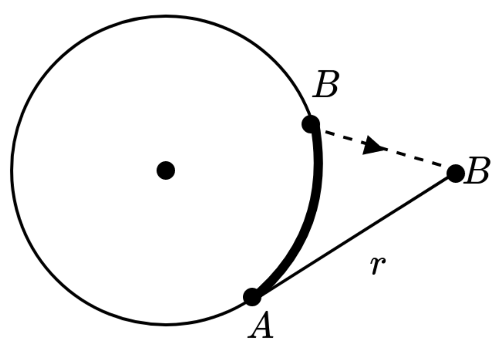
Funções Trigonométricas

21.1 Unidades

Para evitar confusões com relação a escolha de uma unidade u para medir o mesmo arco $\widehat{AB}$, limitou-se as unidades de arcos em apenas dois: grau e radianos, nos quais:

- **Grau** (símbolo ^{o}) é um arco unitária igual a $\frac{1}{360^o}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.
- **Radiano** (símbolo rad) é o arco unitário, cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.

Assim, ao afirmar que um arco $\widehat{AB}$ mede 1rad estamos dizendo que "esticando o arco $\widehat{AB}$", obtemos um regimento de reta $\overline{AB}$, cuja medida é exatamente o raio da circunferência.



Observação: Como uma circunferência mede 360^o o valor batizado para a circunferência em radianos é 2π

Tendo em vista estas considerações, podemos estabelecer as seguintes correspondências para conversão de unidades:

$$360^o \text{ ———— } 2\pi rad$$
$$180^o \text{ ———— } \pi rad$$

21.1.1 Exemplo

Exemplo 1: Exprimir 225^o em radianos.

- **Solução**:

Regra de 3 simples:

$$180^o \text{ ———— } \pi rad$$
$$225^o \text{ ———— } x$$

$$x = \frac{225\pi}{180}$$
$$x = \frac{5}{4}\pi$$

21.1.2 Exercícios

1. Exprimir em radianos
   a) 210^o
   b) 270^o
   c) 240^o
   d) 300^o
2. Exprimir em graus
   a) $\frac{11}{6}\pi rad$

$$\pi \text{ ———— } 180^o$$
$$\frac{11\pi}{6} \text{ ———— } x$$
$$x = \frac{\frac{11\pi}{6}180}{\pi}$$
$$x = \frac{330\pi}{\pi}$$
$$x = 330^o$$

3. Exprimir em graus
   a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{4}$

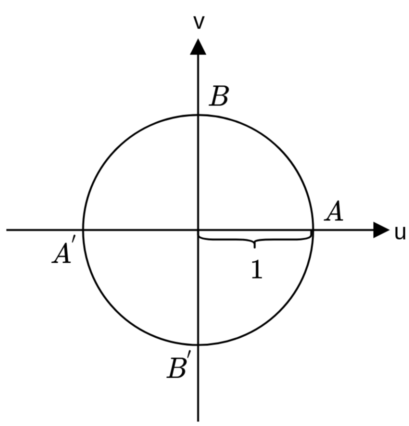
d) $\frac{2\pi}{3}$

21.2 Círculo Trigonométrico

Definição: Sendo o sistema cartesiano a circunferência de centro 0 e raio 1. Notemos que o comprimento desta circunferência é de 2π, pois o raio é 1. Definindo uma aplicação $\mathbb{R}$ sobre λ, temos que:

1. Se $x = 0$, então P coincide com A

2. Se $x > 0$, realizamos a partir de A um percurso de comprimento x no sentido anti-horário, e marcamos P como final do percurso



3. Se $x > 0$, realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|x|$ no sentido horário, e marcamos P como final do percurso

Logo, a circunferência λ acima definida, com origem em A, é chamada de ciclo ou circunferência trigonométrica.

Graficamente, temos:

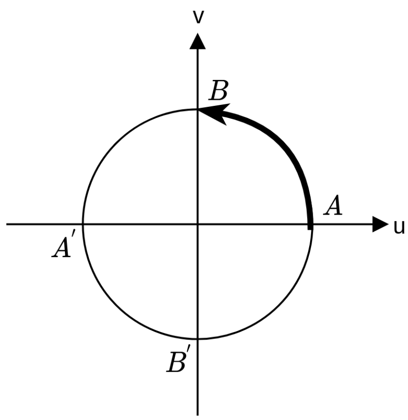


Figura 21.1: A imagem de $\frac{\pi}{2}$ é B

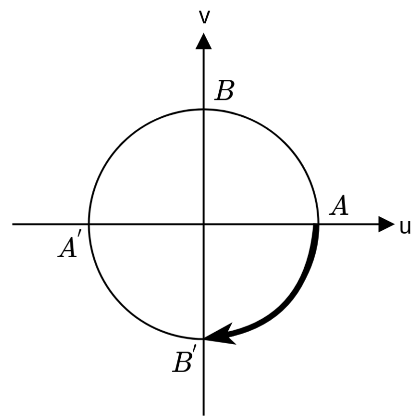


Figura 21.2: A imagem de $-\frac{\pi}{2}$ é B′

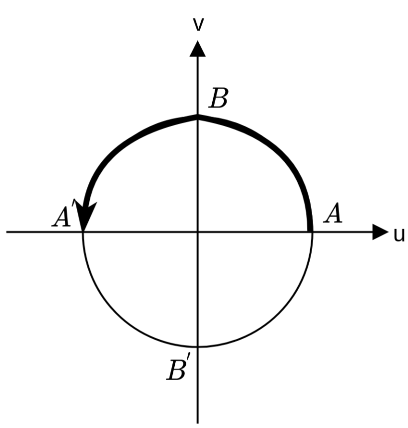


Figura 21.3: A imagem de π é A′

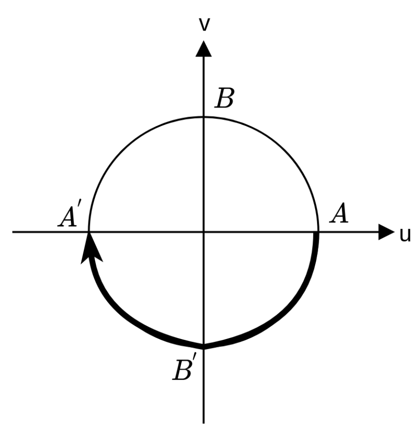


Figura 21.4: A imagem de −π é A′

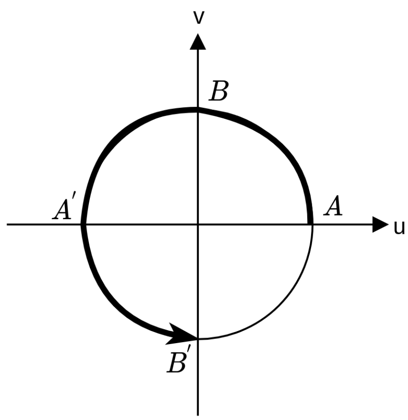


Figura 21.5: A imagem de $\frac{3}{2}\pi$ é B$'$

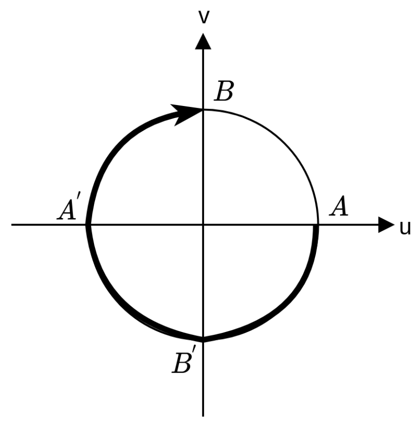


Figura 21.6: A imagem de $-\frac{3}{2}\pi$ é B

Notemos que se P é a imagem do número x_0, então P também é imagem dos números

$$x_0, x_0 + 2\pi, x_0 + 4\pi, \ldots$$

E também de

$$x_0, x_0 - 2\pi, x_0 - +4\pi, \ldots$$

Em resumo, P é imagem dos elementos do conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

NOTAS DE AULA 22

Funções Circulares

22.1 Noções Gerais

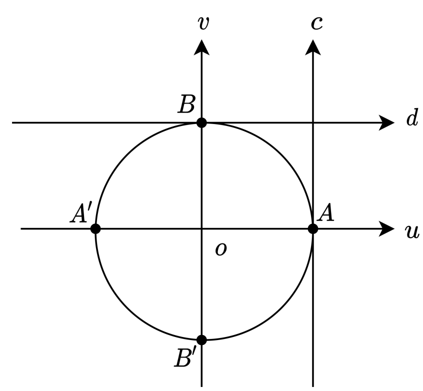
Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A. Para o estudo das funções circulares vamos associar ao ciclo quatro eixos:

1^o) Eixo dos cossenos (u)

- direção OA
- sentido positivo: O $\rightarrow$ A

2^o) Eixo dos senos (v)

- direção: $\perp a$, por O
- sentido positivo: O $\rightarrow$ B, sendo B tal que $\widehat{\mathrm{OA}} = \frac{\pi}{2}$



3^o) Eixo das tangentes (c)

- direção: paralelo a v por A
- sentido positivo: o mesmo de b

4^o) Eixo das cotangentes (d)

- direção: paralelo a u por B
- sentido positivo: o mesmo de a

Os eixos u e v dividem a circunferência em quatro arcos: $\widehat{\mathrm{AB}}$, $\widehat{\mathrm{BA'}}$, $\widehat{\mathrm{A'B'}}$, $\widehat{\mathrm{B'A}}$. Dado um número real x, usamos a seguinte linguagem para efeito de localizar a imagem P de um x no ciclo:

- x está no 1^o quadrante $\iff$ $\mathrm{P} \in \widehat{\mathrm{AB}}$ $\iff$ $0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

- x está no 2^o quadrante $\iff P \in \widehat{BA'} \iff \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$

- x está no 3^o quadrante $\iff P \in \widehat{A'B'} \iff \pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

- x está no 4^o quadrante $\iff P \in \widehat{B'A} \iff \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$

22.1.1 Exemplo Preliminar

Exemplo 1 Dado o número real x, sempre existem dois números inteiros consecutivos n e $n+1$ tais que $n \leq x < n+1$. Consideremos a função f que associe a cada número real x o real $x - n$ onde n é o maior número inteiro que não supera x. Temos, por exemplo:

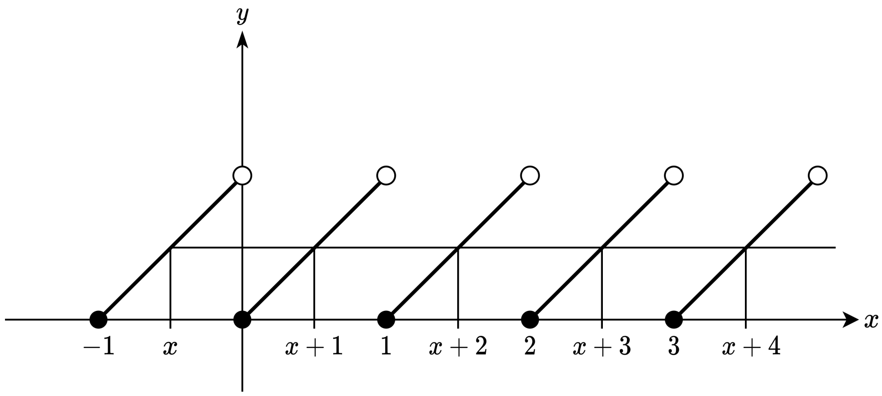
$$\begin{array}{ccc} & f(1,1) = 1,1 - 1 = 0,1 & f(2,1) = 2,1 - 2 = 0,1 \\ f(0,1) = 0,1 & f(-5) = (-5) - (-5) = 0 & f(7) = 7 - 7 = 0 \\ f(3) = 3 - 3 = 0 & & \end{array}$$

De modo geral, temos:

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 &\implies f(x) = x - 0 = x \\ 1 \leq x < 2 &\implies f(x) = x - 1 \\ 2 \leq x < 3 &\implies f(x) = x - 2 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq x < 0 &\implies f(x) = x - (-1) = x + 1 \\ -2 \leq x < -1 &\implies f(x) = x - (-2) = x + 2 \\ -3 \leq x < -2 &\implies f(x) = x - (-3) = x + 3 \\ &\dots \end{aligned}$$

E seu gráfico é:



Temos:

$$f(x) = f(x+1) = f(x+2) = f(x+3) = f(x+4) = \ldots \forall x \in \mathbb{R}$$

Portanto existem infinitos número p inteiros tais que $f(x) = f(x+p), \forall x \in \mathbb{R}$.

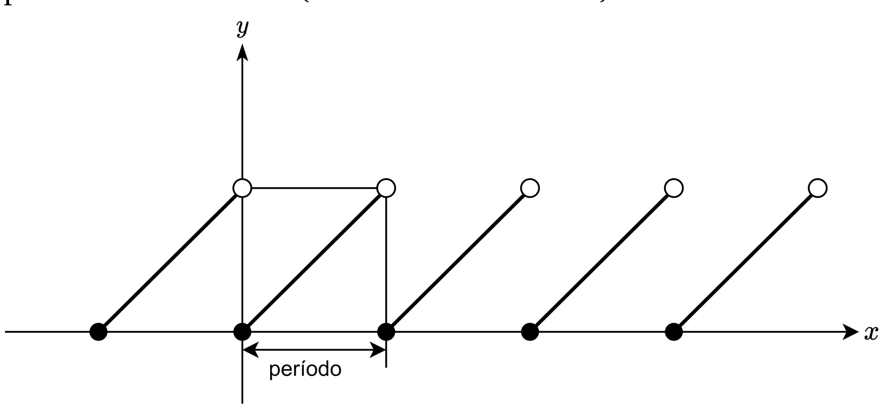
O menor número $p > 0$ que satisfaz a igualdade $f(x) = f(x+o), \forall x \in \mathbb{R}$ é o número $p = 1$, denominado *período da função* f. A função f é chamada função periódica porquê foi possível encontrar um número $p > 0$ tal que dando acréscimos iguais a p em x, o valor calculado para f não se altera, isto é, o valor de f se repete periodicamente para cada acréscimo de p à variável.

Definição

Uma função $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ é *periódica* se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição:

$$f(x+p) = f(x), \forall x \in \mathrm{A}$$

O gráfico da função periódica se caracteriza por apresentar um elemento de curva que se repete, isto é, se quisermos desenhar toda a curva bastará construirmos um carimbo de onde está desenhado o tal elemento da curva e ir carimbando. *Período* é o comprimento do carimbo (medido no eixo dos x).

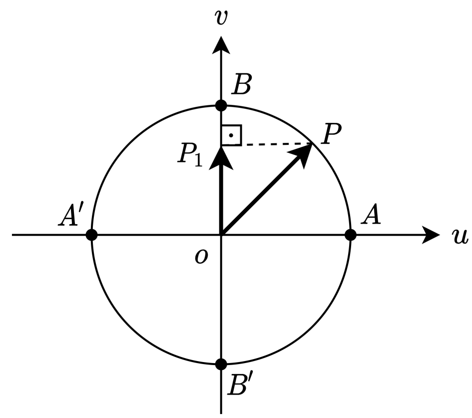


22.2 Função Seno

22.2.1 Definição

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo, denominamos seno de x (e indicamos sen x) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos *função seno* a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_1} = \text{sen } x$, isto é:

$$f(x) = \text{sen } x$$



22.2.2 Propriedades

1^a) A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $1 \le \text{sen } x \le 1$ para todo x real.

É imediata a justificação pois, se PÇ está no ciclo, sua ordenada pode variar apenas de -1 a $+1$.

2^a) Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então sen x é positivo.

De fato, neste caso, o ponto P está acima do eixo u e sua ordenada é positiva.

3^a) Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então sen x é positivo.

De fato, neste caso, o ponto P está abaixo do eixo u e sua ordenada é negativa.

4^a) Se x percorre o primeiro ou o quatro quadrante, então sen x é crescente.

É imediato que, se x percorre o primeiro quadrante, então P percorre o arco $\widehat{AB}$ e sua ordenada cresce. Fato análogo acontece no quarto quadrante.

5^a) Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então sen x é decrescente.

É imediato que, se x percorre o segundo quadrante, então P percorre o arco $\widehat{BA'}$ e sua ordenada decresce. Fato análogo acontece no terceiro quadrante.

6^a) A função seno é periódica e seu período é 2π

É imediato que, se sen $x = \overline{OP_1}$ e $k \in \mathbb{Z}$, sentão $\text{sen}(x+2k\pi) = \overline{OP_1}$ pois x e $x+2k\pi$ têm a mesma imagem P no cicle. Temos então, para todo x real:

$$\text{sen } x = \text{sen}(x+2k\pi)$$

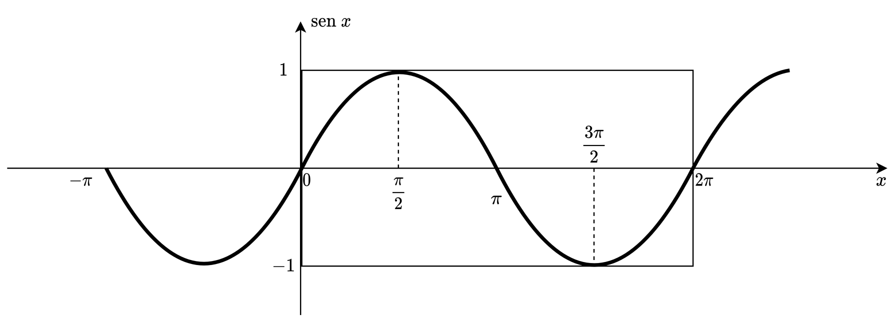
E portanto a função seno é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $2k\pi$, isto é 2π.

22.2.3 Gráfico

Façamos agora x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ e vejamos o que acontece com sen x. Se a imagem de x (ponto P)) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, a ordenada de P varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sen x	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0

Fazendo um diagrama com x em abscissas e sen x em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado *senóide*, que nos indica como varia a função $f(x) = \text{sen } x$.



Observamos que, como o domínio da função seno é $\mathbb{R}$, a senóide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0. No retângulo em destaque está representado apenas um o período da função. Notemos que as dimensões desse retângulo são $2\pi \times 2$, isto é aproximadamente $6,28 \times 2$.

22.2.4 Exercícios Resolvidos

1. Determinar o período e a imagem e fazer o gráfico de um período completo das funções dadas:

   (a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\text{sen}\ x$.

   • **Solução**: Vamos construir uma tabela em três etapas

   1^o) atribuímos valores a x

   2^o) associamos a cada x o valor de sen x

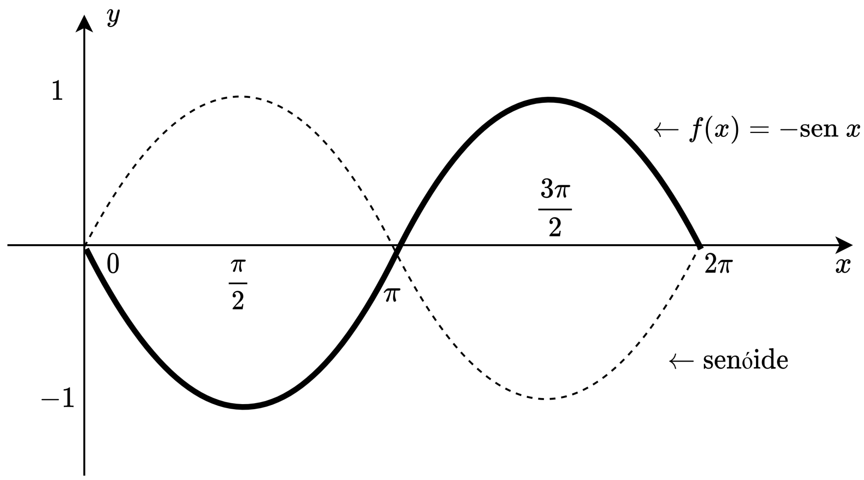
   3^o) multiplicamos sen x por -1 para obter o valor de $y = -\text{sen}\ x$

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

x	sen x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	-1
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	1
2π	0	0

Com esta tabela, podemos obter 5 pontos do gráfico, que é simétrico, da senóide em relação ao eixo dos x. É imediato que $Im(f) = [-1, 1]$ e que $p(f) = 2\pi$



(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \text{ sen } x$

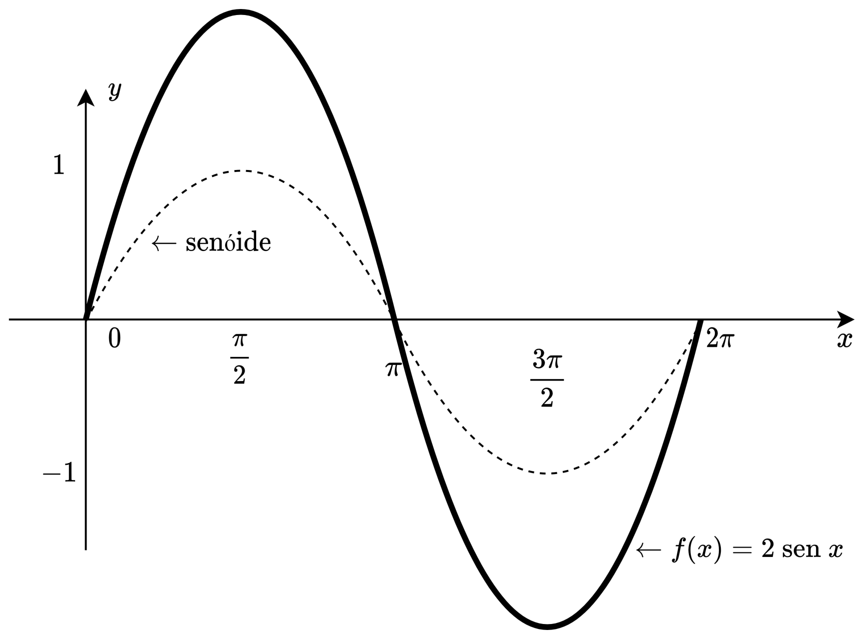
• **Solução**: Vamos, novamente, construir uma tabela em três etapas:

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

x	sen x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	-2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	2
2π	0	0

Com esta tabela podemos obter 5 pontos no gráfico, que deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o dobro da ordenada correspondente do senóide. É imediato que $\mathrm{I}m(f) = [-2, 2]$ e que $p(f) = 2\pi$



(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |\text{sen } x|$

• **Solução**: Recordemos inicialmente que para dado um núm,ero real a, temos:

- $a \geq 0 \implies |a| = a$
- $a < 0 \implies |a| = -a$

Aplicando esta definição, temos:

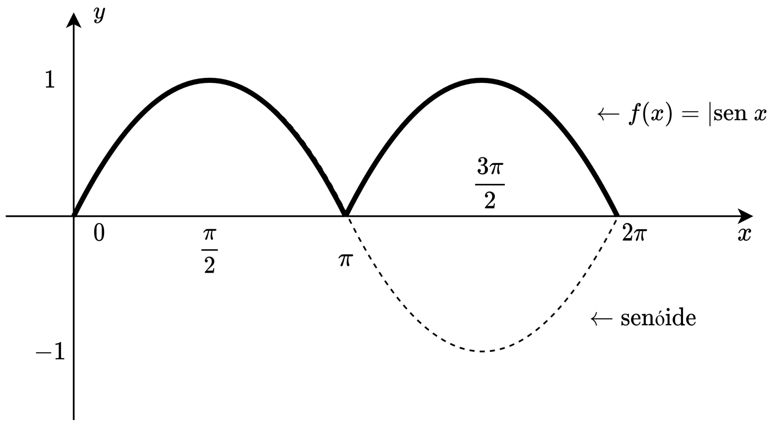
$$\text{sen } x \geq 0 \implies |\text{sen } x| = \text{sen } x$$

Quando sen $x \geq 0$, os gráficos de $y = |\text{sen } x|$ e $y = \text{sen } x$ se coincidem.

$$\text{sen } x < 0 \implies |\text{sen } x| = -\text{sen } x$$

Quando sen $x < 0$, os gráficos de $y = |\text{sen } x|$ e $y = \text{sen } x$ são simétricos em relação ao eixo dos x.

É imediato que $Im(f) = [0, 1]$ e que $p(f) = \pi$



22.2.5 Exercícios Propostos

1. Determinar o período e a imagem e fazer o gráfico de um período completo das funções dadas.

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen } 2x$

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$

   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}(x - \frac{\pi}{4})$

22.2.6 Solução dos Exercícios Propostos

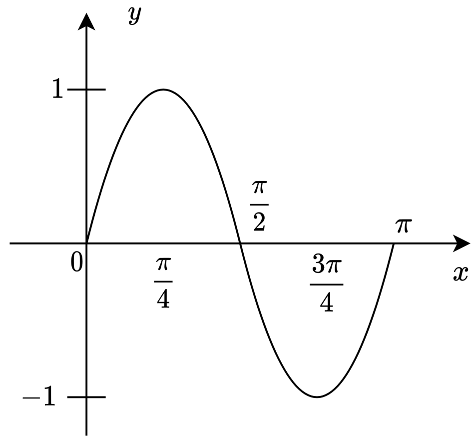
1. a)

x	$t = 2x$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

x	$t = 2x$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	$t = 2x$	y
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0

Com esta tabela, podemos obter 5 pontos da curva. Notemos que o gráfico deve apresentar cada para cada x uma ordenada y que é o seno do dobro de x. Notemos ainda que para sen t completar um período é necessário que $t = 2x$ percorra o intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, percorra o intervalo $[0, \pi]$. Assim, o período de f é $p(f) = \pi - 0 = \pi$ e é imediato que $\mathrm{I}m(f) = [-1, 1]$.



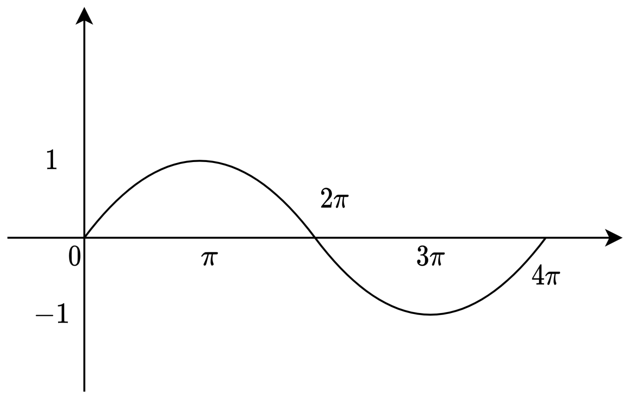
b)

x	$t = \frac{x}{2}$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

x	$t = \frac{x}{2}$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	$t = \frac{x}{2}$	y
0	0	0
π	$\frac{\pi}{2}$	1
2π	π	0
3π	$\frac{3\pi}{2}$	-1
4π	2π	0

É imediato que $\mathrm{I}m(f) = [-1, 1]$ e $p(f) = 4\pi$.



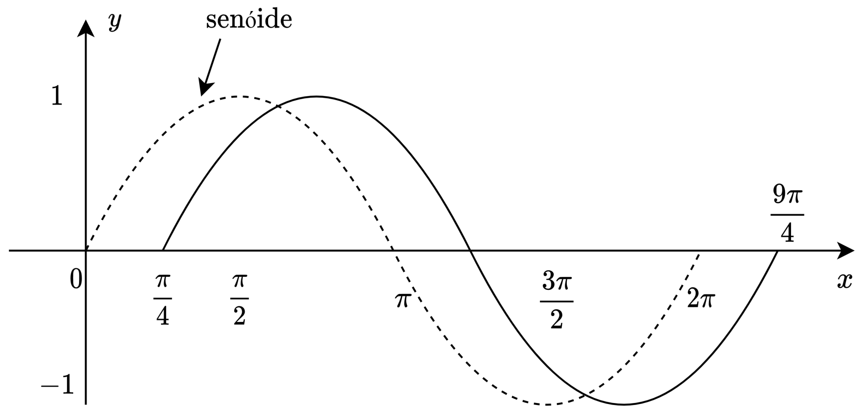
c)

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
$\frac{\pi}{4}$	0	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{5\pi}{4}$	π	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{9\pi}{4}$	2π	0

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o seno de $x - \frac{\pi}{4}$. Notemos que para sen t completar um período é necessário que $t = x - \frac{\pi}{4}$ percorra o intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, x percorra o intervalo $\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$. Assim, o período de f é $p(f) = \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$ e é imediato que $Im(f) = [-1, 1]$.

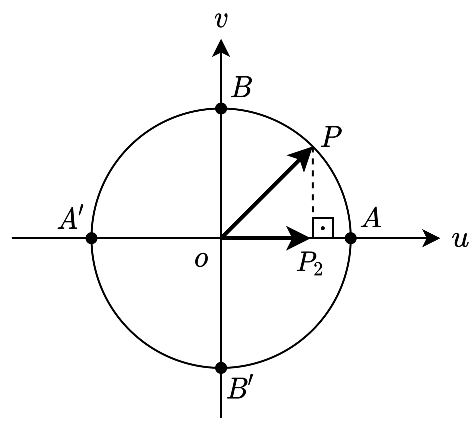


22.3 Função Cosseno

22.3.1 Definição

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos $\cos x$) a abscissa $\overline{\mathrm{OP}_2}$ do ponto P em relação ao sistema $u\mathrm{O}v$. Denominamos *função cosseno* a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{\mathrm{OP}_2} = \cos x$, isto é:

$$f(x) = \cos x$$



22.3.2 Propriedades

1^a) A imagem de uma função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo x real

2^a) Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então $\cos x$ é positivo.

3^a) Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então $\cos x$ é negativo.

4^a) Se x percorre o terceiro ou quatro quadrante, então $\cos x$ é crescente.

5^a) Se x percorre o primeiro ou segundo quadrante, então cos x é decrescente.

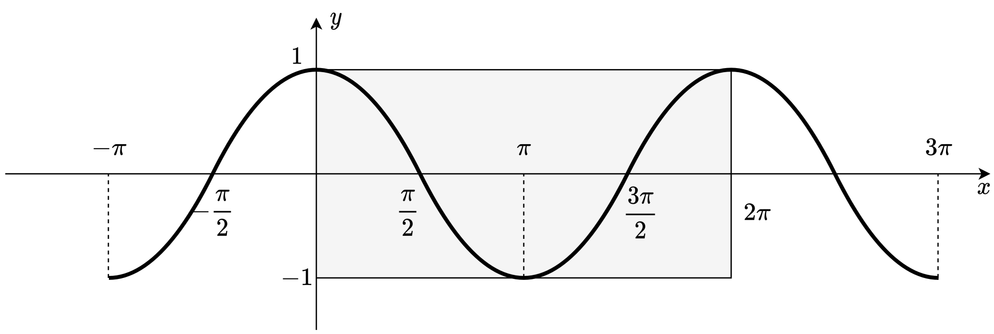
6^a) A função cosseno é períodica e seu período é 2π.

22.3.3 Gráfico

Façamos x percorrer o intervalo $[0, 2\pi$ e vejamos o que acontecem com x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, a abscissa de P varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos x	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

Fazendo um diagrama com x em abscissas e cos x em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado *cossenóide*, que nos indica como varia a função $f(x) = \cos x$.



Observemos que, como o domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$, a cossenóide continua para a direita de $w\pi$ e para a esquerda de 0. No retângulo em destaque está representado apenas um período da função. Notemos ainda que as dimensões desse retângulo são $2\pi \times 2$, isto é, aproximadamente $6,28 \times 2$.

22.3.4 Exercícios Resolvidos

1. Determinar o sinal da expressão $y = \text{sen } 107^o + \cos 107^o$.

• **Solução**: Examinando o cicle, notamos que:

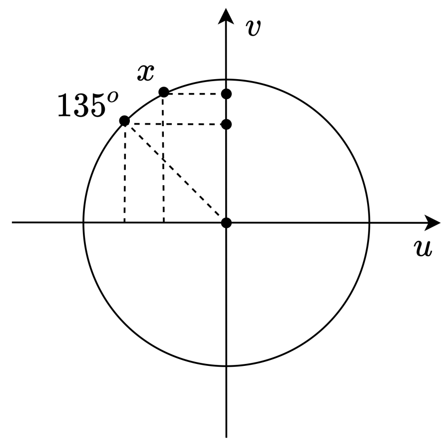
$$\left|\text{sen } 135^o\right| = \left|\cos 135^o\right|$$

e

$$90^o < x < 135^o \implies |\text{sen } x| > |\cos x|$$

Como sen $107^o > 0$, cos $107^o < 0$ e $|\text{sen } 107^o| > |\cos 107^o|$, decorre:

$$\text{sen } 107^o + \cos 107^o > 0$$



22.3.5 Exercícios Propostos

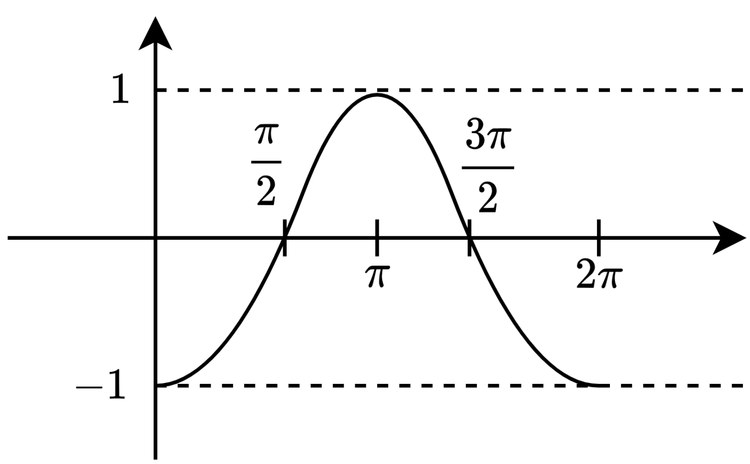
1. Determinar o período e a imagem e fazer o gráfico de um período completo das funções dadas.

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\cos x$ (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2\cos x$

22.3.6 Solução dos Exercícios Propostos

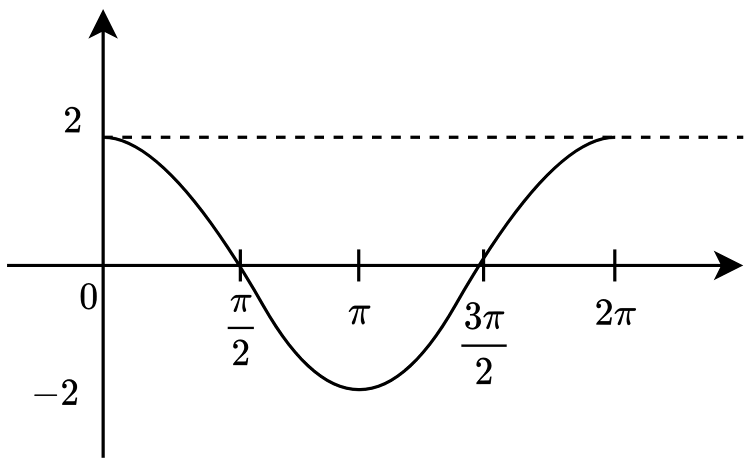
1. a)

$$\text{I}m(f) = [-1, 1]$$
$$p(f) = 2\pi$$



b)

$$\mathrm{I}m(f) = [-2, 2]$$
$$p(f) = 2\pi$$



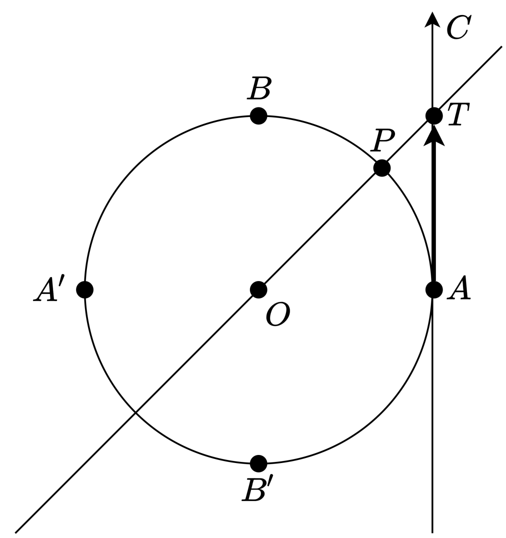
22.4 Função Tangente

22.4.1 Definição

Dado um número real x,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos *tangente de x* (e indicamos tg x) a medida algébrica do seguimento $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$.



Denominamos *função tangente* a função $\mathrm{F} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overline{\mathrm{AT}} = \mathrm{tg}\ x$, isto é, $f(x) = \mathrm{tg}\ x$.

Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B′ e, então, a reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OP}}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe ponto T, a tg x não é definida.

22.4.2 Propriedades

1ª) O domínio da função tangente é $\mathrm{D} = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

2ª) A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que tg $x = y$.

De fato, $y \in \mathbb{R}$, considerando sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $\overline{\mathrm{AT}} = y$. Construíndo a reta $\overleftrightarrow{\mathrm{OT}}$, observamos que ela intercepta o ciclo em dois pontos P e P′, imagens dos reais x cuja tangente é y.

3ª) Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então tg x é positiva.

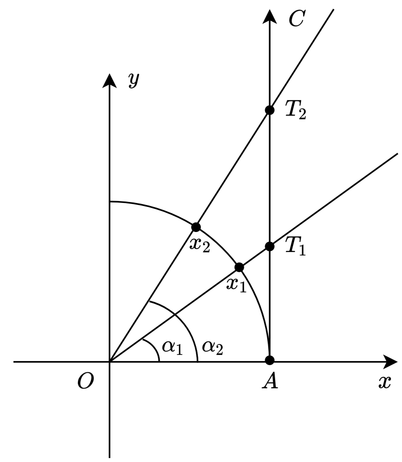
De fato, neste caso o ponto T está acima de A e $\overline{\mathrm{AT}}$ é positiva.

4ª) Se x é do segundo ou quarto quadrante, então tg x é negativa.

De fato, neste caso o ponto T está abaixo de A e $\overline{AT}$ é negativa.

5^a) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então tg x é crescente.

Provemos, por exemplo, quando x percorre o 1^o quadrante. Dados x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, temos $\alpha_1 < \alpha_2$ e, por propriedade de Geometria Plana, vem $\overline{AT_1} < \overline{AT_2}$, isto é: tg $x_1 <$ tg x_2.



6^a) A função tangente é periódica e seu período é π.

De fato, se tg $x = \overline{AT}$ e $k \in \mathbb{Z}$ então $\text{tg}(x + k\pi) = \overline{AT}$ pois x e $x + k\pi$ têm imagens P e P$'$ coincidentes ou diametralmente opostas no ciclo e, assim $\overleftrightarrow{OP} = \overleftrightarrow{OP'}$, portanto $\overleftrightarrow{OP} \cap c = \overleftrightarrow{OP'} \cap c$.

Temos então, para todo x real e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\text{tg } x = \text{tg}(x + k\pi)$$

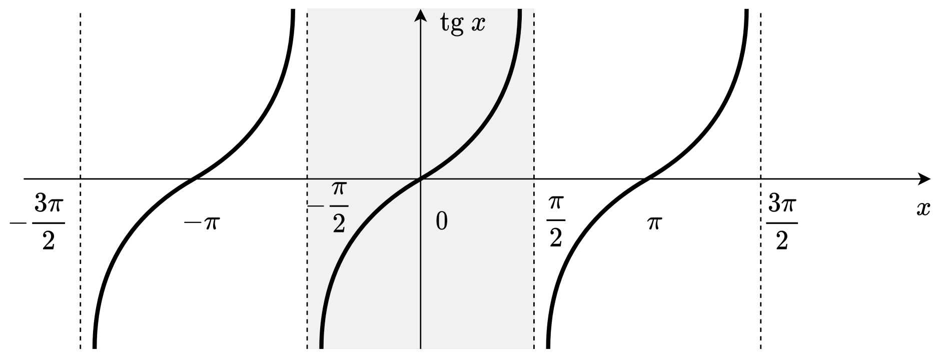
e a função tangente é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k\pi$, isto é, π.

22.4.3 Gráfico

Façamos x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ e vejamos o que acontece com tg x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo no sentido anti-horário, a medida algébrica $\overline{AT}$ varia segundo a tabela:

Fazendo um diagrama com x em abscissa e tg x em ordenadas, podemos construir o gráfico seguinte, denominado *tangentóide*, que nos indica a variação da função $f(x) = \text{tg } x$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
tg x	0	cresce	$\nexists$	cresce	0	cresce	$\nexists$	cresce	0



22.4.4 Exercícios Resolvidos

1. Qual é o domínio da função real f tal que $f(x) = \text{tg } 2x$?

   • **Solução**: Façamos $2x = t$. Sabemos que existe tg t se, e somente se, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, então:

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \implies x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

   e

$$\text{D}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. Esboçar o gráfico, dar o domínio e o período da função real $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

   • **Solução**: Façamos $x - \frac{\pi}{4} = t$. Temos:

$$\exists \text{tg } t \implies t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \implies x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

   então

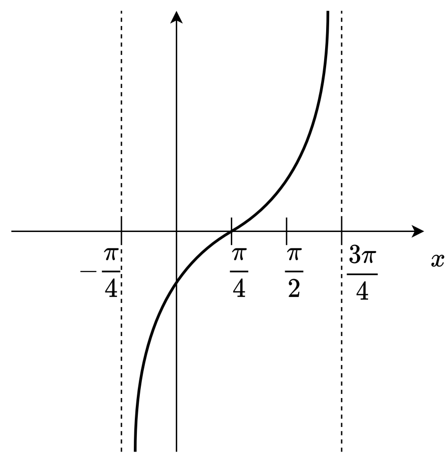
$$\text{D}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

   Para tg t descrever um período completo devemos ter:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

Então $p(f) = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$

Como a função associa cada x a $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, teremos (por analogia com as funções já vistras) um gráfico que é a tangentóide deslocada de $\frac{\pi}{4}$ para a direita.



22.4.5 Exercícios Propostos

1. Qual é o domínio das seguintes funções reais?

   (a) $f(x) = \text{tg}\, 3x$ (b) $g(x) = \text{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

2. Qual é o sinal de cada uma das seguintes expressões?

   (a) $y_1 = \text{tg}\, 260^o + \text{sen}\, 178^o$ (b) $y_2 = \text{tg}\, \frac{12\pi}{7} \left(\text{sen}\, \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{23\pi}{12}\right)$

22.4.6 Solução dos Exercícios Propostos

1. a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

   b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. a) $y_1 > 0$

   b) $y_2 < 0$

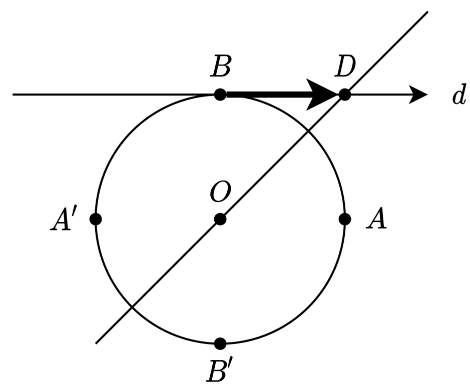
22.5 Função Cotangente

22.5.1 Definição

Dado um número real x,

$$x \neq k\pi$$

seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua intersecção com o eixo das contangentes. Denominamos cotangente de x (e indicamos cotg x) a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{BD}$. Denominamos *função cotagente* a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real $\overline{BD} = \text{cotg } x$, isto é, $f(x) = \text{cotg } x$.
Notemos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A′ e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe um ponto D, a cotg x não é definida.



22.5.2 Propriedades

1^a) O domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi\}$.

2^a) A imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que ctg $x = y$.

3^a) Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então cotg x é positiva.

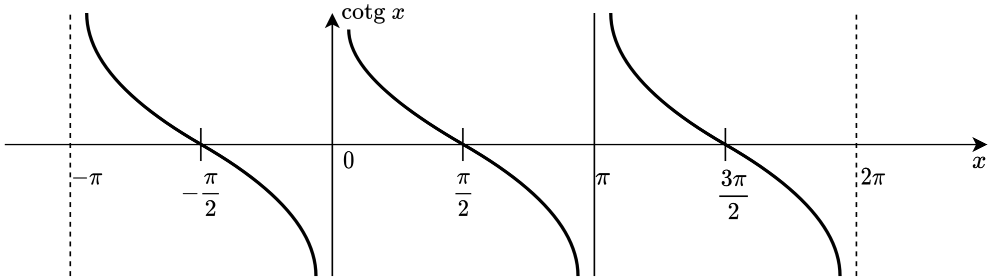
4^a) Se x é do segundo ou quarto quadrante, então cotg x é negativa.

5^a) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrante, então cotg x é decrescente.

6^a) a Função cotangente é periódica e seu período é π.

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

22.5.3 Gráfico



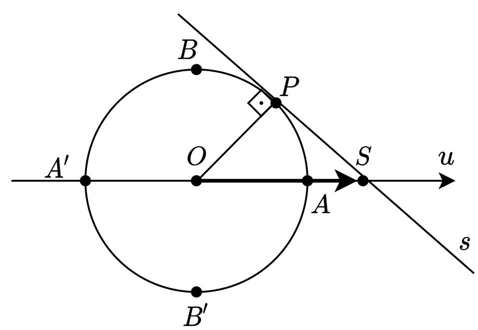
22.6 Função Secante

22.6.1 Definição

Dado um número real x,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

seja P sua imagem no ciclo. Consideramos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de x (e indicamos sec x) a abscissa $\overline{\mathrm{OS}}$ do ponto S. Denominamos *função secante* a função $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overline{\mathrm{OS}} = \sec x$, isto é, $f(x) = \sec x$.
Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B′ e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso nãp existe o ponto S, a sec x não é definida.



22.6.2 Propriedades

1^a) O domínio da função secante é $\mathrm{D} = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

2ª) A imagem da função secante é $\mathbb{R}-]-1,1[$, isto é, para todo real y, com $y \le -1$ ou $yu \ge 1$, existe um x tal que $\sec x = y$.

3ª) Se x é só primeiro ou quarto quadrante, então $\sec x$ é positiva.

4ª) Se x é só segundo ou terceiro quadrante, então $\sec x$ é negativa.

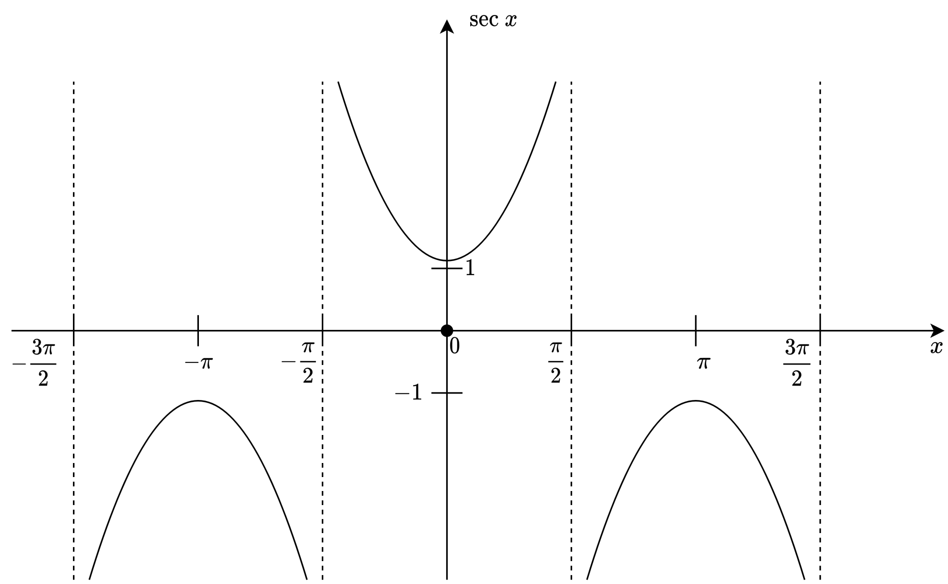
5ª) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $\sec x$ é crescente.

6ª) Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $\sec x$ é decrescente.

7ª) A função secante é periódica e seu período é 2π.

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

22.6.3 Gráfico



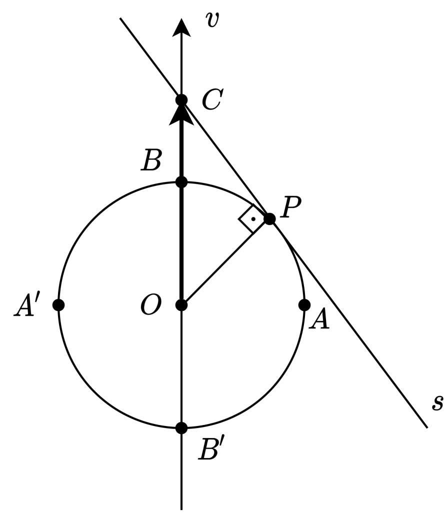
22.7 Função Cossecante

22.7.1 Definição

Dado um número real x,

$$x \neq k\pi$$

seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos cossecante de x (e indicamos por cossec x) a ordenada $\overline{\text{OC}}$ do ponto C. Denominamos *função cossecante* a fução $f : \text{D} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real $\overline{\text{OC}} = \text{cossec } x$, isto é, $f(x) = \text{cossec } x$. Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em A ou A′ e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C, a cossec x não é definida.



22.7.2 Propriedades

1ª) O domínio da função cossecante é $\text{D} = \{x \in \text{R} | x \neq k\pi\}$.

2ª) A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} -]-1, 1[$, isto é, para todo real y, com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, existe um x real tal que cossec $x = y$.

3ª) Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então cossec x é positiva.

4ª) Se x é do terceiro ou quatro quadrante, então cossec x é negativa.

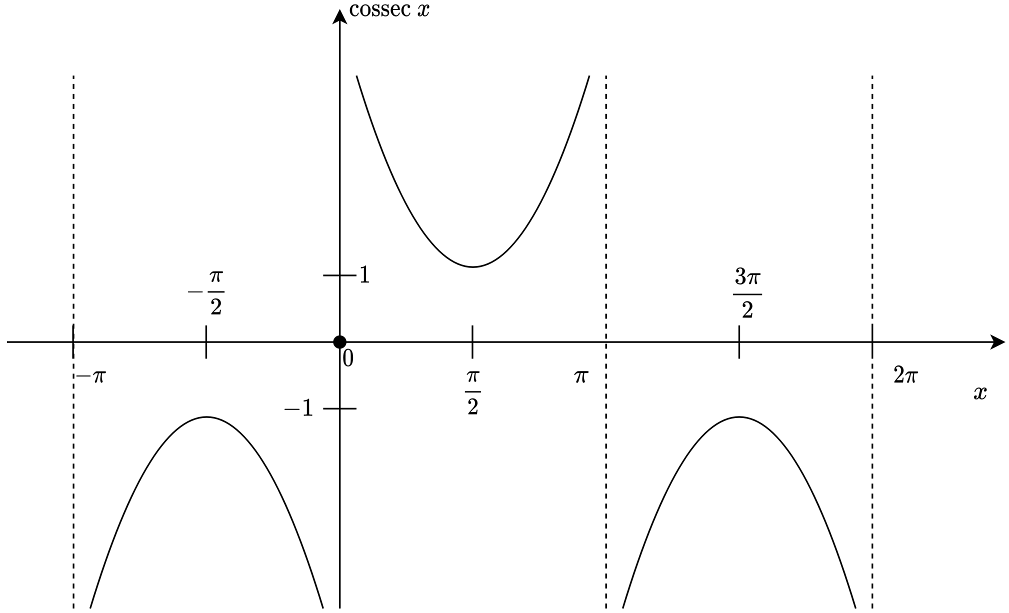
5ª) Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, então cossec x é crescente.

6ª) Se x percorre o primeiro ou quarto quadrante, então cossec x é decrescente.

7ª) A função cossecante é periódica e seu período é 2π.

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

22.7.3 Gráfico



22.8 Exercícios Propostos

1. Determinar o domínio e período das seguintes funções reais:

   (a) $f(x) = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ (b) $g(x) = \sec 2x$ (c) $h(x) = \text{cossec}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

2. Em cada caso, determinar o conjunto ao qual m deve pertencer de modo que exista x satisfazendo a igualdade:

   (a) $\text{cotg}\, x = \sqrt{2-m}$ (b) $\sec x = 3m - 2$ (c) $\text{cossec}\, x = \frac{2m-1}{1-3m}$

3. Determinar o sinal das seguintes expressões:

   (a) $y_1 = \cos 91^o + \text{cossec}\, 91^o$
   (b) $y_2 = \text{sen}\, 107^o + \sec 107^o$
   (c) $y_3 = \sec \frac{9\pi}{8}\left(\text{tg}\, \frac{7\pi}{6} + \text{cotg}\, \frac{\pi}{7}\right)$

22.8.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. (a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\},\ p(f) = \pi$

   (b) $D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\},\ p(g) = -\pi$

   (c) $D(h) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\},\ p(h) = 2\pi$

2. a) $m \leq 2$

   b) $m \leq \frac{1}{3}$ ou $m \geq 1$

   c) $0 \leq m < \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3} < m \leq \frac{2}{5}$

3. a) $y_1 > 0$

   b) $y_2 < 0$

   c) $y_3 < 0$

NOTAS DE AULA 23

Relações Fundamentais

23.1 Introdução

Para cada $x \neq \frac{k\pi}{2}$ definimos sen x, cos x, tg x, cotg x, sec x e cossec x. Vamos mostrar agora que esses seis números guardam entre si certas relações denominadas *relações fundamentais.* Mais ainda, mostraremos que a partir de um deles sempre é possivel calcular os outros cinco.

23.2 Relações Fundamentais

23.2.1 Teorema

Para todo x real vale a relação:

$$\text{sen } x^2 + \cos x^2 = 1$$

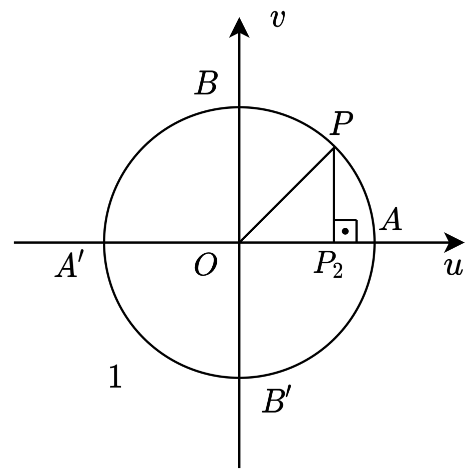
Demonstração:

a) Se $x \neq \frac{k\pi}{2}$, a imagem de x é distinta de A, B, A′ e B′. Então, existe um triângulo retângulo $\mathrm{OP_2P}$, portanto:

$$\left|\overline{\mathrm{OP}}\right|^2 + \left|\overline{\mathrm{P_2P}}\right|^2 = \left|\overline{\mathrm{OP}}\right|^2$$

e

$$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$$



b) Se $x = \frac{k\pi}{2}$, podemos verificar diretamente a tese:

x	sen x	cos x	$\text{sen}^2 x + \cos^2 x$
0	0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	1
π	0	-1	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	1

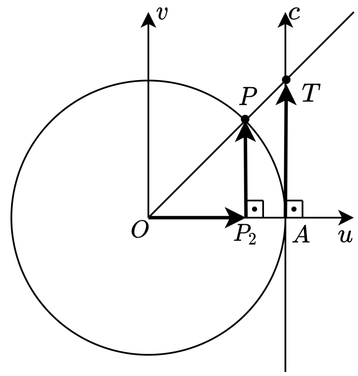
23.2.2 Relações

Por favor, consulte o livro "*Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3 - Trigonometria*"a partir da página 40-C para a prova dos teoremas, relações e corolários expostos a seguir.

23.2.3 Teoremas

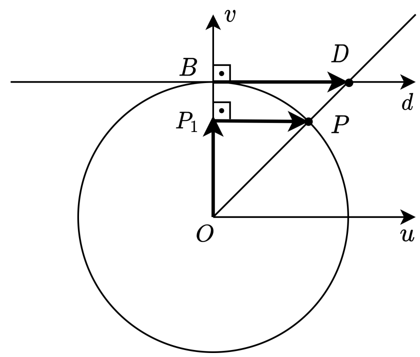
a) Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$$



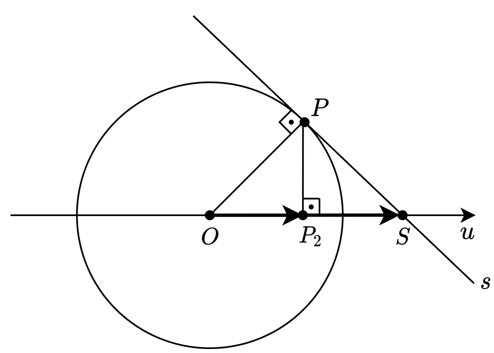
b) Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$



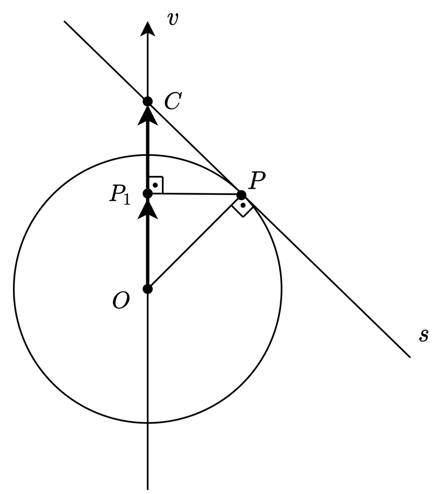
c) Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$



d) Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}}$$



23.2.4 Relações

1. Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}}$$

2. Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}}$$

3. Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

4. Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}}$$

23.2.5 Corolários

1. $\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$
2. $\text{tg}^2 \ x + 1 = \sec^2 \ x$
3. $1 + \text{cotg}^2 \ x = \text{cossec}^2 \ x$
4. $\cos^2 \ x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 \ x}$
5. $\text{sen}^2 \ x = \frac{\text{tg}^2 \ x}{1+\text{tg}^2 \ x}$

23.3 Exercícios Resolvidos

1. Sabendo que $\text{sen } x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular as demais funções circulares de x.
   - **Solução**: Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \implies \cos x < 0$, temos:
     - $\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 \ x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{6}$
     - $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$
     - $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$
     - $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$
     - $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$

2. Calcular m de modo que se tenha $\text{sen } x = 2m + 1$ e $\cos x = 4m + 1$.
   - **Solução**: Como $\text{sen}^2 \ x + \cos^2 \ x = 1$, resulta:

$$\begin{aligned}
(2m+1)^2 + (4m+1)^2 = 1 &\implies (4m^2 + 4m + 1) + (16m^2 + 8m + 1) = 1 \\
&\implies 20m^2 + 12m + 1 = 0 \\
&\implies m = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{40} \\
&\implies m = \frac{-12 \pm 8}{40} \\
&\implies m = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{10} \right\}
\end{aligned}$$

3. Determinar uma relação entre x e y, independente de t, sabendo que:

$$x = 3 \cdot \text{sen } t \text{ e } y = 4 \cdot \cos t$$

- **Solução**: Como $\text{sen}^2\ t + \cos^2\ t = 1$, resulta:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \implies \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$
$$\implies 16x^2 + 9y^2 = 144$$

4. Sabendo que $\text{cotg}\ x = \frac{24}{7}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular o valor da expressão:

$$y = \frac{\text{tg}\ x \cdot \cos\ x}{(1+\cos\ x)(1-\cos\ x)}$$

- **Solução 1**: Calculamos $\text{tg}\ x$, $\cos\ x$ e finalmente y:

$$\text{tg}\ x = \frac{1}{\text{cotg}\ x} = \frac{7}{24}$$
$$\cos^2\ x = \frac{1}{1+\text{tg}^2\ x} = \frac{1}{1+\frac{49}{576}} = \frac{576}{625} \implies x = -\frac{24}{25}$$
$$y = \frac{\text{tg}\ x \cdot \cos\ x}{(1+\cos\ x)(1-\cos\ x)} = \frac{\left(\frac{7}{24}\right)\left(-\frac{24}{25}\right)}{\left(1-\frac{24}{25}\right)\left(1+\frac{24}{25}\right)} = \frac{-\frac{7}{25}}{\frac{49}{625}} = -\frac{25}{7}$$

- **Solução 2**: Simplificamos y e depois calculamos o que for necessário:

$$y = \frac{\frac{\text{sen}\ x}{\cos\ x} \cdot \cos\ x}{1-\cos^2\ x} = \frac{\text{sen}\ x}{\text{sen}^2\ x} = \frac{1}{\text{sen}\ x} = \text{cossec}\ x = -\sqrt{1+\text{cotg}^2\ x} = \sqrt{1+\frac{576}{49}} = -\frac{25}{7}$$

23.4 Exercícios Propostos

1. Sabendo que $\text{cossec}\ x = -\frac{25}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular as demais funções circulares de x.

2. Calcular $\cos\ x$ sabendo que $\text{cotg}\ x = \frac{2\sqrt{m}}{m-1}$ com $m > 1$.

3. Calcular $\sec\ x$ sabendo que $\text{sen}\ x = \frac{2ab}{a^b+b^2}$ com $a > b > 0$.

23.4.1 Solução dos Exercícios Propostos

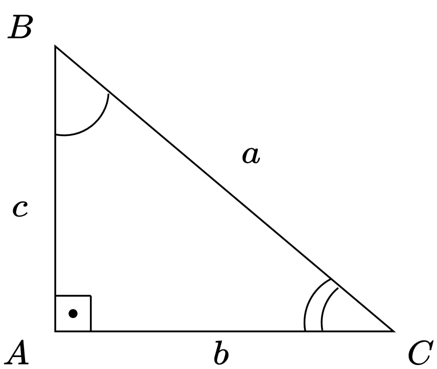
1. sen $x = -\frac{24}{25}$, cos $x = -\frac{7}{25}$, tg $x = \frac{24}{7}$, cotg $x = \frac{7}{24}$, sec $x = -\frac{25}{7}$
2. cos $x = \pm\frac{2\sqrt{m}}{m+1}$
3. sec $x = \pm\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

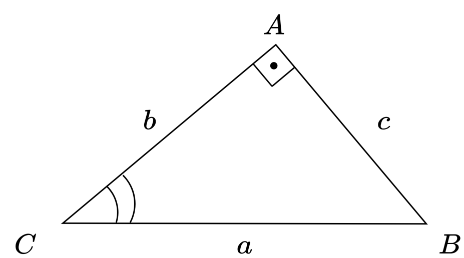
NOTAS DE AULA 24

Triângulos Retângulos

24.1 Elementos Principais

Sabemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto.





Como é habitual, vamos utilizar a notação seguinte para os elementos de um triângulo ABC:

- lados: AB, BC, AC
- medidas dos lados:
  - a = medida de BC
  - b = medida de AC
  - c = medida de AB
- medidas dos ângulos:
  - Â = medida de BÂC
  - B̂ = medida de AB̂C

– $\hat{C}$ = medida de $A\hat{C}B$

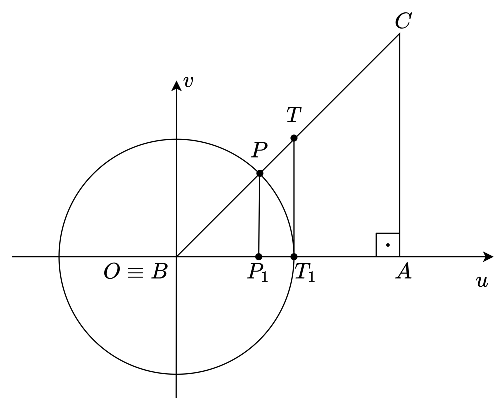
Sempre que tratarmos de um triângulo ABC retângulo, daqui por diante estaremos pensando que o ângulo interno A mede 90^o.

Sabemos que o lado BC, oposto ao ângulo reto, é chamado *hipotenusa* e os lados AB e AC, adjacentes ao ângulo reto, são chamados *catetos* do triângulo ABC.

Para simplificar nossa linguagem, diremos que o triângulo ABC tem hipotenusa a e catetos b e c, isto é, vamos confundir BC, AC, AB com suas respectivas medida a, b, c. Analogamente, diremos que os ângulos internos do triângulo são $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

24.2 Propriedades Trigonométricas

Vamos provar as três propriedades que relacionam as medidas dos lados e as dos ângulo de um triângulo retângulo ABC.
Para isso vamos considerar uma circunferência de raio unitário e centro no vértice B e vamos fixar um sistema uOv de referência como mostra a figura.



1^o) $\Delta BPP_1 \sim \Delta BCA$, então

$$\frac{P_1P}{BD} = \frac{CA}{BC} \Longrightarrow \frac{\text{sen}\,\hat{B}}{1} = \frac{b}{a} \Longrightarrow \boxed{\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a}}$$

Isto é, o seno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto do ângulo pela hipotenusa.

2^o) $\Delta BPP_1 \sim \Delta BCA$, então

$$\frac{BP_1}{BP} = \frac{BA}{BC} \Longrightarrow \frac{\cos\hat{B}}{1} = \frac{c}{a} \Longrightarrow \boxed{\cos\hat{B} = \frac{c}{a}}$$

Isto é, o cosseno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto adjacente do ângulo pela hipotenusa.

3^o) $\Delta BTT_1 \sim \Delta BCA$, então

$$\frac{T_1T}{OT_1} = \frac{\overline{AC}}{OA} \Longrightarrow \frac{\text{tg}\ \hat{B}}{1} = \frac{b}{c} \Longrightarrow \boxed{\text{tg}\ \hat{B} = \frac{b}{c}}$$

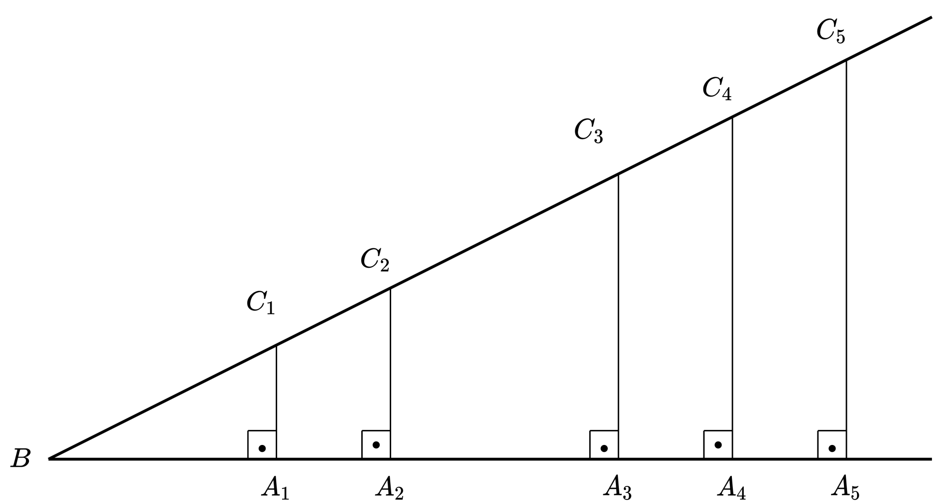
Isto é, a tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente do ângulo.

24.2.1 Observações

1^o) Notando que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$ e $\hat{A} = 90^o$, decorre que $\hat{B} + \hat{C} = 90^o$, isto é, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares, portanto:

- $\text{sen}\ \hat{C} = \cos\ \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}}$
- $\cos\ \hat{C} = \text{sen}\ \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}}$
- $\text{tg}\ \hat{C} = \frac{1}{\text{tg}\ \hat{B}} = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}$

2^o) Decorre das três propriedades vistas que, sendo dado um ângulo agudo $\hat{B}$, se marcarmos sobre um de seus lados os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ e conduzirmos por eles as perpendiculares $A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, \ldots$ (conforme a figura abaixo), temos:



$$\text{sen}\ \hat{B} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \ldots$$

(fixado $\hat{B}$, o cateto oposto a $\hat{B}$ e a *hipotenusa* são diretamente proporcionais)

$$\cos \hat{B} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \ldots$$

(fixado $\hat{B}$, o cateto adjacente a $\hat{B}$ e a *hipotenusa* são diretamente proporcionais)

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \ldots$$

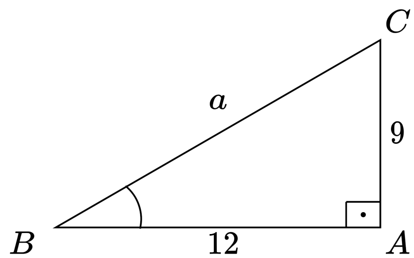
(fixado $\hat{B}$, os catetos oposto e adjacente a $\hat{B}$ são diretamente proporcionais)

24.3 Exercícios Resolvidos

1. Calcular os ângulos internos de um triângulo retângulo cujos catetos são $b = 0$ e $c = 12$.

   - **Solução**:

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$
$$\text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$



Resposta:

$$\hat{B} = \text{arc tg } \frac{3}{4}$$

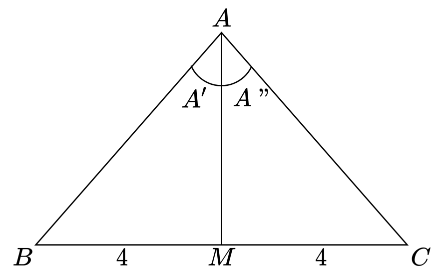
e

$$\hat{C} = \text{arc tg } \frac{4}{3}$$

2. Calcular a área de um triângulo isóceles ABC cuja base é $a = 8$, sabendo que $\hat{A} = 45^o$.

   - **Solução**:

Traçando a altura AM, o triângulo ABC fica dividido em duas partes congruentes onde $\hat{A}' = \hat{A}'' = 22^o30'$, BM = MC = 4.



$$\text{tg } 22^o30' = \frac{\text{MC}}{\text{AM}} \implies$$

$$\text{AM} = \frac{\text{MC}}{\text{tg } 22^o30'} = \frac{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Assim:

$$\text{S} = \frac{\text{BC} \cdot \text{AM}}{2} = \frac{16\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

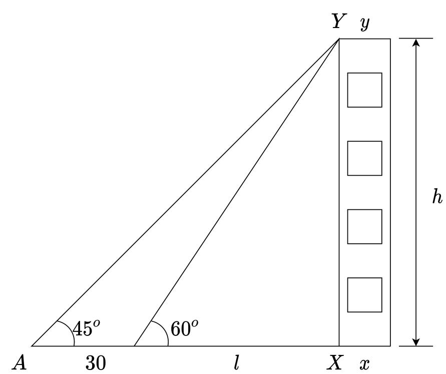
3. Um observador vê um prédio construído em terreno plano sob um ânbgulo de 60^o. afastando-se do edifício mais 30 m, passa a ver o edifício sob ângulo de 45^o. Qual é a altura do prédio?

   • **Solução**:

   No triângulo BXY, temos

$$\text{tg } 60^o = \frac{h}{l} \implies l = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

   No triângulo AXY, temos:



$$\text{tg } 45^o = \frac{h}{l+30} \implies h = l + 30$$

   então:

$$h = \frac{h}{\sqrt{3}} \implies h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

   Resposta: $\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ m

4. Resolver um triângulo retângulo ABC conhecendo a medida da bissetriz interna $\text{S}_b = 5$ e o ângulo $\hat{\text{C}} = 30^o$.

   • **Solução**:

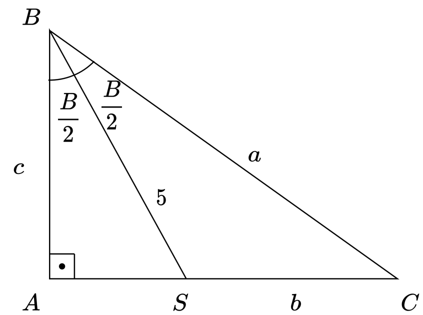
É imediato que $\hat{B} = 60^o$ e $\frac{\hat{B}}{2} = 30^o$.
No triângulo retângulo ABS, temos:

$$c = 5 \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

então

$$a = \frac{c}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{75 - \frac{75}{4}} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$$



24.4 Exercícios Propostos

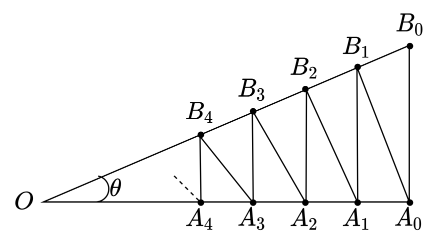
1. Calcular os lados de um triângulo retângulo sabendo que a altura relativa à hipotenusa é $h = 4$ e um ângulo agudo é $\hat{B} = 30^o$.

2. Calcular os lados de um triângulo retângulo sabendo que a altura relativa à hipotenusa mede 4 e forma ângulo de 15^o com o cateto b.

3. Calcular os catetos de um triângulo retângulo ABC sabendo que este está inscrito em uma circunferência de raio 3 e tem ângulos agudos tais que $\hat{B} = 2\hat{C}$.

4. Calcular os ângulos agudos de um triângulo retângulo de hipotenusa 20, sabendo que a medida relativa a um dos catetos mede 15.

5. (FFCLUSP-66) Na figura ao lado, os ângulos $O\hat{A}_iB_i$ e $O\hat{B}_{i+1}A_i$, $i = 0,1,2,3,\ldots$ são retos. Quanto vale a soma dos segmentos $A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ em função de A_0B_0 e de θ?



24.4.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. $a = \frac{16\sqrt{3}}{3}$, $b = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $c = 8$

2. $a = 16$, $b = \frac{16}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, $c = \frac{16}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$
3. $b = 3$, $c = 3\sqrt{3}$,
4. $\text{arc tg}\sqrt{\frac{5}{7}}$ e $\text{arc tg}\sqrt{\frac{7}{5}}$
5. $\mathrm{A}_o\mathrm{B}_o \cdot \text{cossec}^2\,\theta$

NOTAS DE AULA 25

Triângulos Quaisquer

25.1 Lei dos Cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

25.1.1 Demonstração

Seja ABC um triângulo com $\hat{A} < 90^o$.
No ΔBCD, que é retângulo:

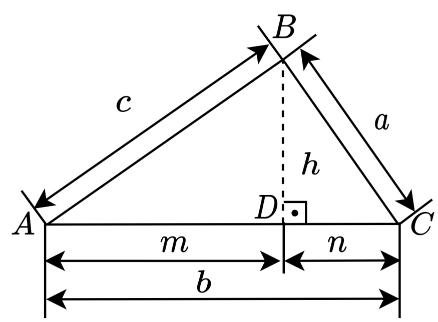
$$a^2 = n^2 + h^2 \qquad (1)$$

No ΔBAD, que é retângulo:

$$h^2 = c^2 - m^2 \qquad (2)$$

Temos também:

$$n = b - m \qquad (3)$$



Levando 3 e 2 em 1:

$$a^2 = (b-m)^2 + c^2 - m^2$$
$$\Longrightarrow$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Mas, no triângulo BAD :

$$m = c \cdot \cos \hat{A}$$

Logo:

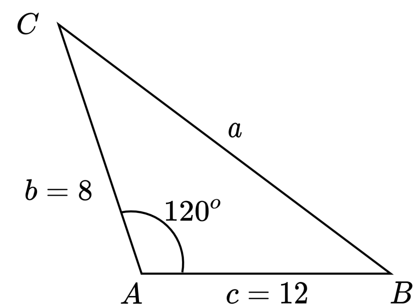
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

25.1.2 Exercícios Resolvidos

1. Dois lados de um triângulo medem 8 m e 12 m, e formam entre si um ângulo de 120^o. Calcule o terceiro lado.

   • **Solução**:

   Adotando a notação da figura ao lado e aplicando a lei dos cossenos, temos:

   $$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \hat{A} \\ &= 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 120^o \\ &= 64 + 144 + 96 = 304 \end{aligned}$$

   Então, $a = \sqrt{304} = 4\sqrt{19}$ m.

2. Um triângulo tem lados $a = 10$ m, $b = 13$ m e $c = 15$ m. Calcular o ângulo $\hat{A}$ do triângulo.

   • **Solução**:

   Da lei dos cossenos, temos:

   $$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \implies \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

   Então:

   $$\begin{aligned} \cos \hat{A} &= \frac{13^2 + 15^2 - 10^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} \\ &= \frac{169 + 225 - 100}{390} \\ &= \frac{294}{390} \\ \cos \hat{A} &= \frac{49}{65} \end{aligned}$$

   Portanto,

   $$\hat{A} = \text{arc cos } \frac{49}{65}$$

25.2 Resolução de Triângulos Quaisquer

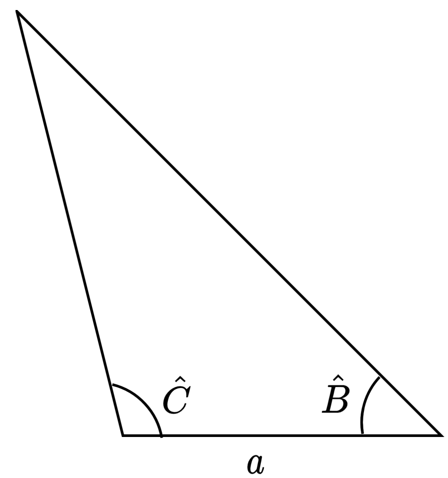
Resolver um triângulo qualquer significa calcular seus elementos principais: $a, b, c, \hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$. Para isso é necessário que sejam dadas três informações sobre o triângulo, sendo uma delas, pelo menos, a medida de um segmento ligado ao triângulo (lado, altura, mediana, etc).

Há quatro problemas clássicos de resolução de triângulos que tratamos como destaque:

1^o Problema: Resolver um triângulo conhecendo um lado (a) e os dois ângulos adjacentes a ele ($\hat{B}$ e $\hat{C}$).

Solução:

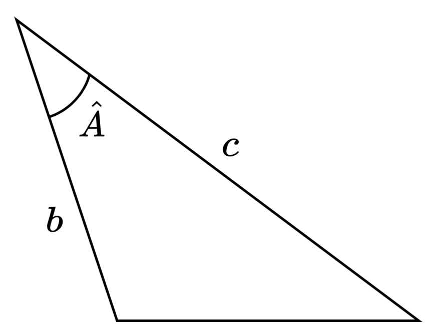
$$\hat{A} = 180^o - (\hat{B} + \hat{C})$$
$$b = \frac{a \cdot \text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{A}}$$
$$c = \frac{a \cdot \text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}}$$



2^o Problema: Resolver um triângulo conhecendo dosi lados (b e c) e o ângulo que eles formam ($\hat{A}$).

Solução:

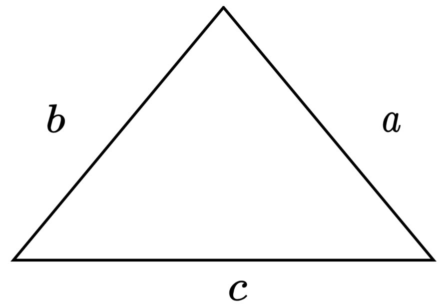
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \implies \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$c^2 = a^2 + c^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \implies \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



3^o Problema: Resolver um triângulo conhecendo os três lados (a, b e c).

Solução: Da lei dos cossenos, vem:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



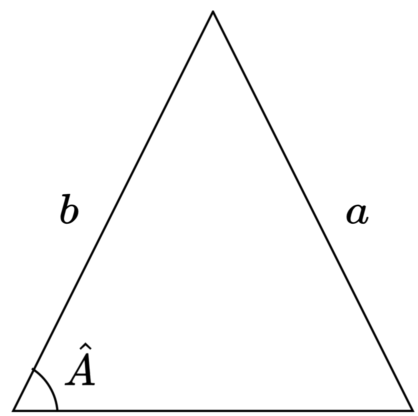
Notemos que o problema só tem solução se estes cossenos ficarem no intervalo $]-1,+1[$, isto é, se:

$$a < b + c, b < a + c \text{ e } c < a + b$$

4^o Problema: Resolver um triângulo conhecendo dois lados (a e b) e o ângulo oposto a um deles ($\hat{A}$).

Solução:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{a}{b} \cdot \text{sen } \hat{A}$$
$$\hat{C} = 180^o - (\hat{A} + \hat{B})$$
$$c = \frac{a \cdot \text{sen C}}{\text{sen } \hat{A}}$$



Discussão:

1^o caso: $b \cdot \text{sen } \hat{A} > a$
Então: $\frac{b \cdot \text{sen } \hat{A}}{a} = \text{sen } \hat{B} > 1 \implies \nexists$ solução

2^o caso: $b \cdot \text{sen } \hat{A} = \text{sen } \hat{B}$
Então: $\frac{b \cdot \text{sen } \hat{A}}{a} = \text{sen } \hat{B} = 1 \implies \hat{B} = 90^o$

3^o caso: $b \cdot \text{sen } \hat{A} = a$
Então: $\frac{b \cdot \text{sen } \hat{A}}{a} = \text{sen } \hat{B} < 1$, e existem dois ângulos $\hat{B}_1$ e $\hat{B}_2$, suplementares, que satisfazem a relação. Admitamos $o^o < \hat{B}_1 \leq 90^o$ e $90^o \leq \hat{B}_2 < 180^o$. Os

ângulos $\hat{B}_1$ ou $\hat{B}_2$ servem como solução dependendo de $\hat{A}$. Há três possibilidades:

i. $\hat{A} = 90^o$
Neste caso só $\hat{B}_1$ é solução pois $\hat{A} + \hat{B}_2 \geq 180^o$

ii. $\hat{A} < 90^o$
Neste caso só $\hat{B}_1$ é uma solução porém $\hat{B}_2$ só é solução se $a < b$, uma vez que:

$$\hat{B}_2 > \hat{A} \implies b > a$$

iii. $\hat{A} > 90^o$
Neste caso $\hat{B}_2$ não é solução pois $\hat{A}+\hat{B}_2 > 180^o$; quanto a $\hat{B}_1$, só é solução se $a > b$, uma vez que:

$$\hat{B}_1 < \hat{A} \implies b < a$$

25.3 Exercícios Propostos

1. Resolver um triângulo ABC sabendo que a, b e c são números inteiros consecutivos e $\hat{C} = 2\hat{A}$.

2. Resolver um triângulo retângulo ABC, sabendo que $a = 5$ e $r = 1$.

3. Resolver o triângulo $A'B'C'$ cujos vértices são os pés das alturas do triângulo ABC dado: $\hat{A}' = 180^o - 2\hat{A}$, $\hat{B}' = 180^o - 2\hat{B}$ e $\hat{C}' = 180^o - 2\hat{C}$.

4. Resolver o triângulo $A'B'C'$ cujos vértices são os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados do triângulo ABC dado.

5. Resolver um triângulo ABC sabendo que $a = 3$, $b = c = 10$ e $\hat{A} = \text{arc sen } \frac{3\sqrt{91}}{50}$.

6. Resolver um triângulo ABC sabendo que $b + c = 11$, $h_a = 4$ e $\hat{A} = \text{arc sen } \frac{6+4\sqrt{5}}{15}$.

7. Resolver um triângulo ABC sabendo que $\hat{A} = 45^o$, $b = 3$ e $a + c = \frac{9\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}$.

8. Resolver um triângulo ABC admitindo conhecidos $\hat{B}$, $\hat{C}$ e S.

9. Resolver um triângulo ABC admitindo conhecidos $\hat{B}$, $\hat{C}$ e h_a.

25.3.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, $\hat{A} = \text{arc cos } \frac{3}{5}$, $\hat{B} = 180^o - 3\hat{A}$, $\hat{C} = 2\hat{A}$
2. $b = 3$, $c = 4$, $\hat{B} = \text{arc sen } \frac{3}{4}$ e $\hat{C} = \text{arc cos } \frac{3}{5}$
3. $a' = R \cdot \text{sen } 2\hat{A}$, $b' = R \cdot \text{sen } 2\hat{B}$, $c' = R \cdot \text{sen } 2\hat{C}$
4. $\hat{A}' = \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$, $\hat{B} = \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}$, $\hat{C}' = \frac{\hat{B}+\hat{A}}{2}$, $a' = 2(p-a) \cdot \text{sen } \frac{\hat{A}}{2}$, $b' = 2(p-b) \cdot \text{sen } \frac{\hat{B}}{2}$, $c' = 2(p-c) \cdot \text{sen } \frac{\hat{C}}{2}$
5. $b = c = 5$, $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \text{arc sen } \frac{3\sqrt{91}}{10}$
6.
7. $a = 3\sqrt{2}$, $c = \frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{2}$, $\hat{B} = 30^o$, $\hat{C} = 115^o$
8. $a = R \cdot \text{sen } \left(\hat{B}+\hat{C}\right)$, $b = R \cdot \text{sen } \hat{B}$, $c = R \cdot \text{sen } \hat{C}$ e $\hat{A} = 180^o - \left(\hat{B}+\hat{C}\right)$ onde $R = \sqrt{\frac{S}{2 \cdot \text{sen } (\hat{B}+\hat{C}) \cdot \text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen } \hat{C}}}$
9. $a = h_a\left(\text{tg } \hat{B} + \text{tg } \hat{C}\right)$, $b = \frac{h_a}{\text{sen } \hat{C}}$, $c = \frac{h_a}{\text{sen } \hat{B}}$ e $\hat{A} = 180^o - \left(\hat{B}+\hat{C}\right)$

Bibliografia

[1] C. Iezzi, G. e Murakami. *Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos e funções.* Atual, 2004.

[2] G. Iezzi. *Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria.* Atual, 2004.